INTRODUCTION

A LA

LOGIQUE DES PREDICATS

REGRAGUI BOUBKER

I- Introduction à la logique

La ***logique mathématique*** est considérée en tant que science. Autrefois, on l'appelait « l'art de penser ».

En logique mathématique, on ne peut exposer la logique sans utiliser au moins 5 primitives :

- La notion de ***proposition***.
- La notion de ***vérité*** d'une proposition.
- La notion ***d'assertion*** ou de ***jugement***.
- La notion ***d'évidence*** ou de ***preuve*** d'un jugement.
- La notion de ***correction*** ou de ***validité*** d'une preuve.

Aristote divise la ***logique*** en 3 parties : l'étude de la *conception*, du *jugement* et du *raisonnement*.

Les **concepts** s'expriment dans le langage par des *termes généraux*.

Les **jugements** s'expriment dans le langages par des *propositions*.

Les **raisonnements** s'expriment par des suites de *propositions*.

I-1 Termes généraux

Terme général ce dont la nature est d'être affirmé de plusieurs sujets, **≠** ***Terme singulier*** ce qui ne le peut pas (homme et Ahmed)

Les termes généraux signifient, entre autres un concept. Seulement, on doit distinguer 2 aspects :

- ***L'intention*** d'un concept consiste dans la qualité ou les propriétés qui constituent le concept.
- ***L'extention*** d'un concept consiste dans les choses qui tombe sous le concept.

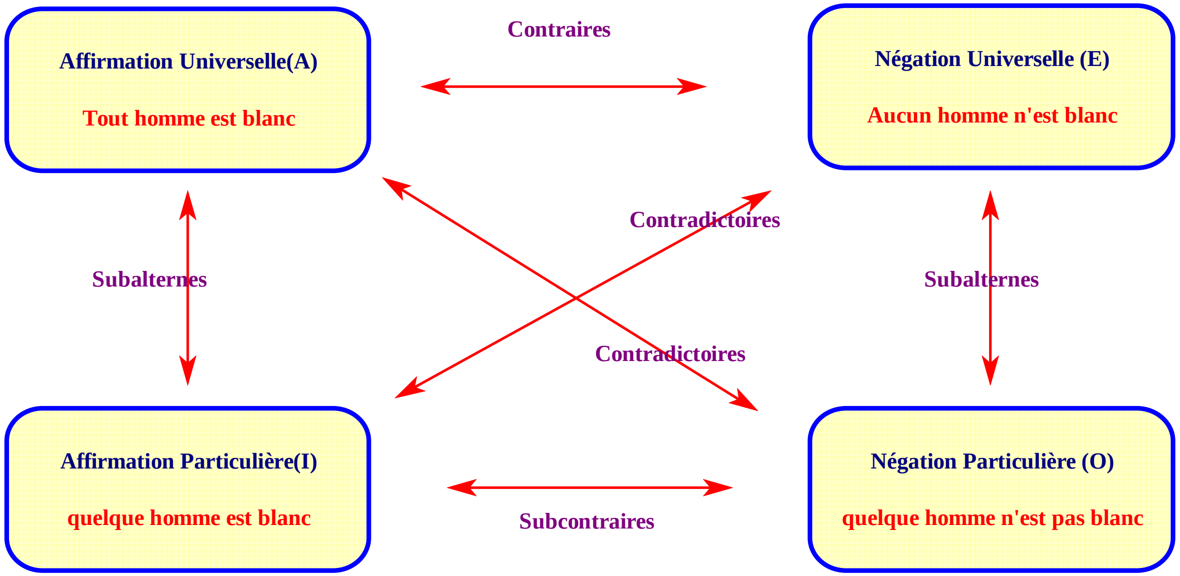
Exemple ;

Définition d'un ensemble en extension lorsqu'on énumère ses membres {0, 3, 6, 9, 12, 15, 18}, ou

en intension s'il est défini à l'aide d'une propriété que possède tous ses membres et eux seuls {x : x $\in$ N multiple de 3 et inférieur 20}.

I-2 Propositions

Les ***propositions*** sont des propositions générales dans lesquelles figurent 2 termes généraux reliés par le verbe est ou n'est pas. D'où le carré logique ;



Les inférences immédiates :

- Entre les propositions A et E, *Contrariété mutuelle.* Ne peuvent être vraies ensemble, mais peuvent être fausses ensemble. Si A vrai Alors E Fausse.
- Les *contradictoires* ne peuvent être ni vraies ni fausses ensemble.
- Les *subcontraires* ne peuvent être fauses ensembles.

I-3 Raisonnement

Inauguration de la science du raisonnement et formulation de la thèorie du syllogisme : « *Le syllogisme est un discours dans lequel, certaines choses étant posées, quelque chose d'autre que ses données en résulte nécessairement par le seul fait de ces données.* »

Le ***syllogisme*** est raisonnement formé de 3 propositions prises de l'ensemble des 4 propositions A, E, I et O.

Exemple :

Tous les mamifères (moyen) sont des vertébré
Tous les hommes sont des mammifères (moye
} Prémisses

Donc tous les hommes (mineur) sont des vértébrés (majeur). Conclusion

Le syllogisme contient 3 termes généraux (mammifères (terme moyen M), vertébrés (terme majeur P) et hommes (terme mineur S)).

Forme du syllogisme :

Tous les M sont P

Pous les S sont des M

Donc tous les S sont des P

Quelques exemples ;

Aucun poisson n’est un mamifère

Tous les brochets sont des poissons.

Donc aucun brochet n’est un mammifère

Aucun M n’est un P

Tous les S sont M

Donc aucun S n’est P

Toutes les bêtes venimeuses sont dangereuses.

Quelques serpents sont des bêtes vénimeuses.
Donc quelques serpents sonts dansgereuses

Tous les M sont des P

Quelques S sont M

Donc quelques S sont P

Dans le cas de syllogismes (ou des inférences immédiates), ce sont les rapports d’inclusion totale ou partielle, d’exclusion totale ou partielle, qui permettent l’aboutissement à la conclusion (raisonnement).

I-4 Forme et Contenu

Pour *obtenir la forme d’un syllogisme*, on remplace par les marque-places les termes occupant la position du sujet et du prédicat dans les prémisses et la conclusion.

La ***logique*** s'attaque à l'étude du raisonnement sous ses différentes formes.

Raisonnement (inférence) est le passage de l’assertion d’une proposition ou d’un groupe de propositions (prémisses) à l’assertion d’une proposition (conclusion).

II- La logique des propositions.

La ***logique des propositions*** est l'étude des raisonnements dont la forme est contituée par des variables propositionnelles (p, q, r…) et des connecteurs interpropositionnels (« et », « ou », « si… alors… » , « non »…)

" Si le prévenu a commis le vol, c'est que ce vol a été minutieusement préparé, ou alors le prévenu avait un complice.

Si le vol a été minutieusement préparé, alors, si le prévenu avait un complice, un butin plus important eut été emporté.

Or, le butin n'a pas été important.

Donc, le prévenu n'a pas commis le vol".

Une ***argumentation*** est constituée d'une liste finie **d'hypothèses** et d'une **conclusion**.

Question 1: Cette argumentation est-elle **convaincante**?

Question 2: Cette argumentation est-elle **valide**?

La ***logique des propositions*** s'attaque à la notion de **validité** des argumentations.

Un raisonnement est valide si est seulement si la vérité de la conclusion suit nécessairement de la vérité des prémisses.

Chaque proposition doit être considérée comme un mécanisme susceptible de conduire à une valeur de vérité prise dans l'ensemble { Vrai, Faux.}

Et pour établir la validité ou la non validité d'une argumentation, il faut décomposer chaque proposition en une proposition élémentaire.

Conséquences

1/ Les raisonnements valides transmettent la vérité des prémisses aux conclusions.

Cette définition exclut qu'un syllogisme valide puisse avoir ses 2 prémisses vrais et sa conclusion fausse. En revanche, elle n'exclut pas qu'un raisonnement valide ait un conclusion fausses.

Exemple :

Tous les animaux marins sont des poissons

Toutes les baleines sont des animaux marins.

Donc toutes les baleines sont des poissons.

Syllogisme valide avec conclusion fausse

2/ Le raisonnement doit prouver une proposition qui n’est pas évidente à partir de propositions qui sont évidentes. Donc, il doit faire plus que transmettre la vérité des prémisses aux conclusions, il doit transmettre l’évidence. (Un raisonnement qui n’est pas probant, ses prémisses n’étant pas plus évidentes que sa conclusion, peut néanmoins être valide).

Exemples :

Tous les arbres sont des plantes

Donc tous les arbres sont des plantes.

Tous les A sont B

Donc tous les A sont

Raisonnement transmet la vérité de la prémisse à la conclusion, mais aucun d’eux ne peut servir de preuve. C’est un raisonnement valide sans être probant.

Tous les hommes sont mortels

Socrate est un homme

Donc socrate est mortel.

La conclusion est présupposée dans la première assertion, et que nous ne pouvons pas être assurés de la mortalité de tous mes hommes à moins …

***Remarque*:** **(Principe de l'abstraction)**

La validité de l'argumentation doit être indépendante des propositions élémentaires mises en évidence.

II-1 Le langage des propositions et les connecteurs usuels.

Une proposition est un mécanisme qui peut s'évaluer dans {0, 1} et qui provient du langage usuel (phrases affirmatives ou énonciatives).

Une *proposition simple* est toute proposition qui n’est pas composée.

La physique est vraie

Une *proposition composée* est toute proposition construite d’une ou de deux proposition plus élémentaires à l’aide de connecteurs logique.

" Si le prévenu a commis le vol, c'est que ce vol a été minutieusement préparé, ou alors le prévenu avait un complice.

Si le vol a été minutieusement préparé, alors, si le prévenu avait un complice, un butin plus important eut été emporté.

Or, le butin n'a pas été important.

Donc, le prévenu n'a pas commis le vol".

Une ***proposition*** peut être batie à partir d'un certain nombre de propositions élémentaires (propositions atomiques) et au moyen de connecteurs logiques.

II-1-1 Les connecteurs logiques:

La négation	: $\neg$
La conjonction (et)	: $\wedge$
La disjonction (ou)	:
Inclusif	: $\vee$
Exclusif	: $\oplus$
L'implication	: $\Rightarrow$
L'équivalence	: $\Leftrightarrow$

II-1-2 Définition d'un langage de proposition:

P définit sur l'alphabet $\{p, i, \neg, \wedge, \vee, \oplus, \Rightarrow, \Leftrightarrow, (,)\}$ par les règles suivantes:

```
<prop>       ::=  <atome> | <prop. comp>.
<atome>      ::=  p | <atome> i
<prop.comp> ::= ¬<atome> |
                ¬<prop.comp> |
                <atome> <opb> <atome> |
                (<prop.comp>) <opb> <atome> |
                <atome> <opb> (<prop.comp>) |
                (<prop. comp>) <opb> (<prop. comp>)
opb          ::= ∧ | ∨ | ⊕ | ⇒ | ⇔
```

II-2 Le calcul des propositions.

Question: Comment calculer la valeur d'une proposition composée 'A' en fonction des différentes possibilités des valeurs des atomes intervenants dans 'A'?

Une **valuation** est une application;

val : A -----------> {0, 1}

val(A)	¬val(A)
0	1
1	0

val(A)	val(B)	val(A∧B)	val(A∨B)	val(A⊕B)	val(A⇒B)	val(A⇔B)
0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1

Exemple:

$$\mathbf{A = \neg\, a \vee (b \Rightarrow ((a \wedge b) \Rightarrow \neg\, b))}$$

Réponse :

On installe les 4 (2^2) lignes, On évalue sous le $\wedge$, sous les $\neg$, puis sous l'$\Rightarrow$ de droite, puis celle de gaucge et enfin le $\vee$ où l'on trouve la table de A

A = ¬ a ∨	**(b ⇒**	**((a ∧**		**b) ⇒ ¬**	**b))**
0	0	0		0	0
0	1	0		1	1
1	0	1		0	0
1	1	1		1	1
1			0		1
1			0		0
0			0		1
0			1		0
				1	
				1	
				1	
				0	

1

1

1

0

1

1

1

0

II-2-1 Quelques Définitions:

Les propositions A et B sont ***équivalentes*** sémantiquement,
lorsque pour toute valuation 'v'; v(A) = v(B). [notation A ≈ B]

La proposition A est ***satisfaisable*** (resp. ***refutable***),
lorsqu'il existe une valuation (appelée réalisation (resp. ***refutation***))'v' tq v(A) = 1
(resp. **v(A) = 0**).

La proposition A est ***insatisfaisable*** (resp. ***tautologie***),
lorsque pour toute valuation 'v', $v(A) = 0$ (resp. $\mathbf{v(A) = 1}$).

L'ensemble S (de propositions) est ***satisfaisable***,
lorsqu'il existe une valuation 'v' tq $\forall A \in S \,/\, v(A) = 1$.

L'ensemble S (de propositions) est ***contradictoire***,
lorsqu'il est non satisfaisable, c.à.d. que toute valuation 'v' est tq $\exists\, A \in S \,/\, v(A) = 0$.

Les deux ensembles S et C sont ***équivalents*** (sémantiquement),
lorsqu'ils admettent les mêmes réalisations.

II-2-2 Quelques propriétés.

1/ Deux négations valent une affirmation.	:	$\neg(\neg A) \approx A$.
2/ Associativité	:	$A \vee (B \vee C) \approx (A \vee B) \vee C$
		$A \wedge (B \wedge C) \approx (A \wedge B) \wedge C$
3/ Commutativité	:	$A \vee B \approx B \vee A$
		$A \wedge B \approx B \wedge A$
4/ Idempotence	:	$A \vee A \approx A$ $A \vee (\neg A) \approx$ True (tautologie)
		$A \wedge A \approx A$ $A \wedge (\neg A) \approx$ False (contradiction)
5/ Distributivité	:	$A \wedge (B \vee C) \approx (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
		$A \vee (B \wedge C) \approx (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
6/ Absorbtion	:	$A \wedge (A \vee B) \approx A$

		$A \vee (A \wedge B) \approx A$
7/ Morgan	:	$\neg (A \wedge B) \approx \neg(A) \vee \neg(B)$
		$\neg (A \vee B) \approx \neg(A) \wedge \neg(B)$
8/		$(A \Rightarrow B) \approx \neg(A) \vee B$
9/		$(A \Leftrightarrow B) \approx (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
10/		$(A \oplus B) \approx \neg (A \Leftrightarrow B)$

Inconvénients de la méthode des tables de vérité

Avec les tables de vérité, il faut examier toutes les évaluations booléelles possibles.

En logique des propositions, pour une formule comprenant **n** propositions distincts, il ya 2^n évaluations possibles.

II-2-3 Méthode de Quin.

Objectif est de rendre l'utilisation de la méthode des tables plus maniable.

Algorithme :

Construire un arbre binaire de formules, orienté vers le bas, en

- Prenant comme Racine la formule à examiner,
- Substituant, à chaque niveau, V ou F aux variables propositionnelles
- Réalisant les simplifications suivantes ;

✓ $\neg \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{V}$

✓ $\neg \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{F}$

✓ $\mathbf{X} \supset \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$

✓ $\mathbf{X} \supset \mathbf{F} \rightarrow \neg \mathbf{X}$

✓ $\mathbf{F} \vee \mathbf{X}$ **ou** $\mathbf{X} \vee \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{X}$

✓ $\mathbf{F} \wedge \mathbf{X}$ **ou** $\mathbf{X} \wedge \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$

- ✓ **V $\supset$ X $\rightarrow$ X**
- ✓ **F $\supset$ X $\rightarrow$ V**
- ✓ **V $\vee$ X ou X $\vee$ V $\rightarrow$ V**
- ✓ **V $\wedge$ X ou X $\wedge$ V $\rightarrow$ X**
- ✓ **V $\equiv$ X ou X $\equiv$ V $\rightarrow$ X**

- Une formule est terminale quand elle contient uniquement des V ou des F

Une forme propositionnelle ***valide*** aura toutes les feuilles de son arbre étiquetées **V**.

Une forme propositionnelle ***inconsistante*** aura toutes les feuilles de son arbre étiquetées **F**.

Exemple :

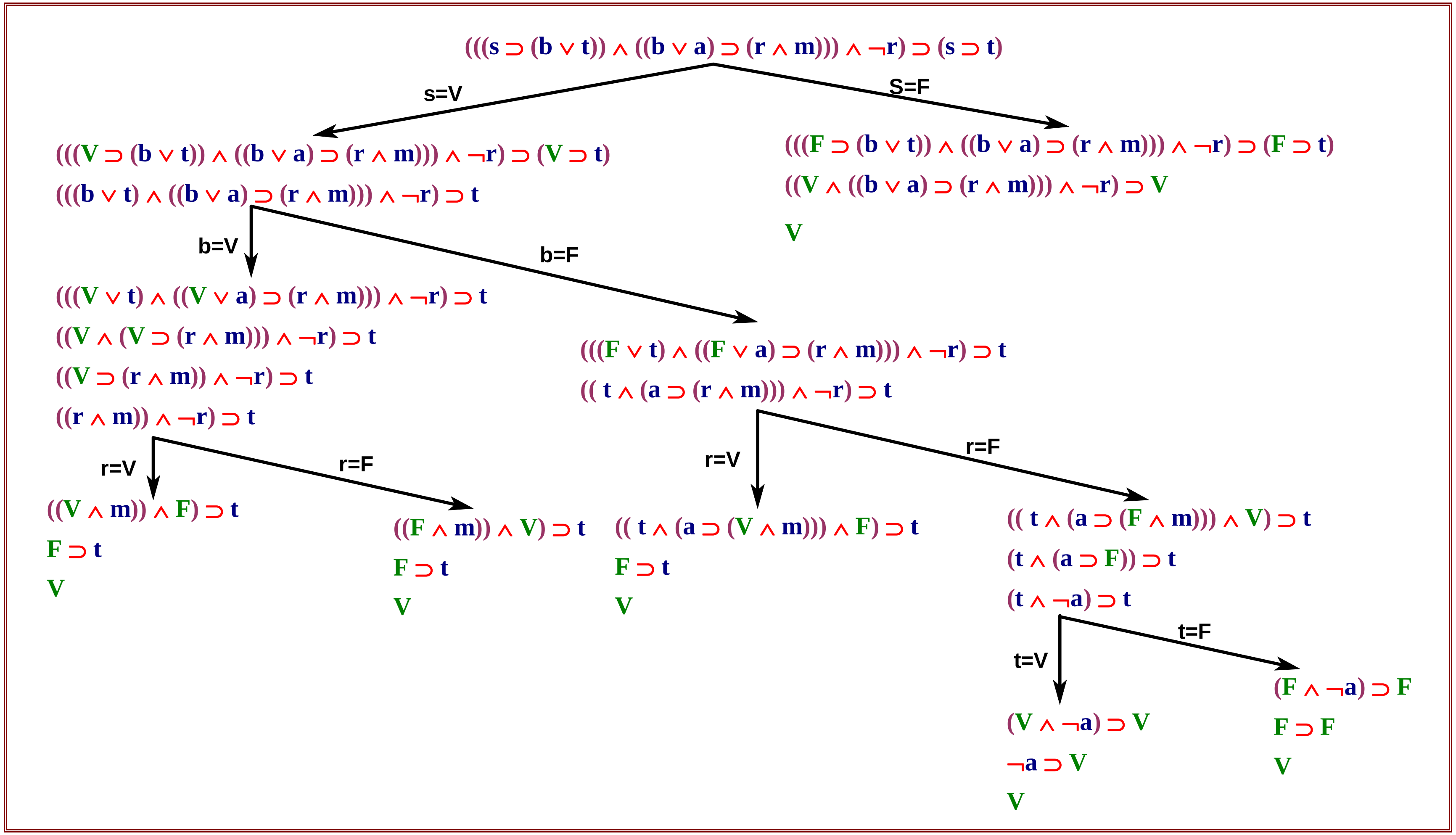
Soit le raisonnement suivant :

« S'il est venu seul, il a pris le bus ou le train. S'il a pris le bus ou son automobile, il est arrivé en retard et a manqué la réunion. Il n'est pas arrivé en retard. Donc, s'il est venu seul, il a pris le train. »

Réponse :

« S'il est venu seul, il a pris le bus ou le train. S'il a pris le bus ou son automobile, il est arrivé en retard et a manqué la réunion. Il n'est pas arrivé en retard. Donc, s'il est venu seul, il a pris le train. »

$$(((\mathbf{s} \supset (\mathbf{b} \vee \mathbf{t})) \wedge ((\mathbf{b} \vee \mathbf{a}) \supset (\mathbf{r} \wedge \mathbf{m}))) \wedge \neg \mathbf{r}) \supset (\mathbf{s} \supset \mathbf{t})$$


(((s ⊃ (b ∨ t)) ∧ ((b ∨ a) ⊃ (r ∧ m))) ∧ ¬r) ⊃ (s ⊃ t)
s=V
S=F
(((V ⊃ (b ∨ t)) ∧ ((b ∨ a) ⊃ (r ∧ m))) ∧ ¬r) ⊃ (V ⊃ t)
(((b ∨ t) ∧ ((b ∨ a) ⊃ (r ∧ m))) ∧ ¬r) ⊃ t
(((F ⊃ (b ∨ t)) ∧ ((b ∨ a) ⊃ (r ∧ m))) ∧ ¬r) ⊃ (F ⊃ t)
((V ∧ ((b ∨ a) ⊃ (r ∧ m))) ∧ ¬r) ⊃ V
V
b=V
b=F
(((V ∨ t) ∧ ((V ∨ a) ⊃ (r ∧ m))) ∧ ¬r) ⊃ t
((V ∧ (V ⊃ (r ∧ m))) ∧ ¬r) ⊃ t
((V ⊃ (r ∧ m)) ∧ ¬r) ⊃ t
((r ∧ m)) ∧ ¬r) ⊃ t
(((F ∨ t) ∧ ((F ∨ a) ⊃ (r ∧ m))) ∧ ¬r) ⊃ t
((t ∧ (a ⊃ (r ∧ m))) ∧ ¬r) ⊃ t
r=V
r=F
r=V
r=F
((V ∧ m)) ∧ F) ⊃ t
F ⊃ t
V
((F ∧ m)) ∧ V) ⊃ t
F ⊃ t
V
((t ∧ (a ⊃ (V ∧ m))) ∧ F) ⊃ t
F ⊃ t
V
((t ∧ (a ⊃ (F ∧ m))) ∧ V) ⊃ t
(t ∧ (a ⊃ F)) ⊃ t
(t ∧ ¬a) ⊃ t
t=V
t=F
(V ∧ ¬a) ⊃ V
¬a ⊃ V
V
(F ∧ ¬a) ⊃ F
F ⊃ F
V

III- Sémantique de la déduction.

Schéma générale d'une déduction: **B1,B2,.....,Bn |= A**

Bi sont les *Hypothèses* et A la *Conclusion*.

Définition: Soit ***B*** un ensemble de propositions et A une proposition. A est une ***conséquence valide*** de *B* (*B* |= A), lorsque toute réalisation de *B* est réalisation de A

Exemple :

" Si le prévenu a commis le vol, c'est que ce vol a été minutieusement préparé, ou alors le prévenu avait un complice.

Si le vol a été minutieusement préparé, alors, si le prévenu avait un complice, un butin plus important eut été emporté.

Or, le butin n'a pas été important.

Donc, le prévenu n'a pas commis le vol".

Réponse :

$$\mathbf{a \Rightarrow (b \vee c),\ \ b \Rightarrow (c \Rightarrow d\ ),\ \neg\ d \models \neg\ a}$$

$$\mathbf{a \supset (b \vee c),\ \ b \supset (c \supset d\ ),\ \neg\ d \models \neg\ a}$$

Cette argumentation n'est pas valide, car la valuation V vérifiant

V(a) = V(b) =1 et V(c) = V(d) = 0

Est une réalisation des hypothèses sans être une réalisation de la conséquence.

Théorème 1:

Soit *B* un ensemble non vide de propositions et B ∈ *B*.

Soit A une proposition.

$$\boldsymbol{B \models A \Leftrightarrow B / \{B\} \models B \Rightarrow A.}$$

Démonstration

Condition Nécessaire,

soit *B* |= A, soit V une réalisation de *B* / {B}
Si V(B) = 0 alors v(B ⇒ A) =1.

Si V(B) =1, donc V est une réalisation de *B* donc de A et alors V(B ⇒ A) = 1.

Dans tous les cas V est une réalisation de

B ⇒ A.

Condition Suffisante,

Soit *B* / {B} |= B ⇒ A.

Soit V une réalisation de *B* c'est une réalisation de *B* / {B} , donc de B ⇒ A, or B ∈ *B* donc V(B) = 1 et comme V(B ⇒ A) = 1 , c'est que V(A) = 1 donc V réalise A. Donc *B* |= A

Théorème 2:

Si l'on suppose que *B* est un ensemble infini de propositions,

alors **$B \models A \Leftrightarrow \exists F$ une partie finie de B telle que $F \models A$**.

IV- Systèmes formèls de la logique des propositions.

Prouver une déduction par des méthodes inférentielles (c.à d. au moyen de systèmes formels), et non plus par observation des tables de vérité des différentes propositions ;

Un ***système formel*** est composé de 3 parties:

- Un ensemble **d'*énoncés bien formés***.
- Une base de connaissances (***axiomes***).
- Les ***règles d'inférence***.

Un énoncé bien formé (wff: well formed formula)

c'est un mot écrit dans le vocabulaire en utilisant un nombre fini de fois les règles suivantes:

- **Si A est une wff, alors $\neg$ A est une wff**.
- **Si A et B sont des wff, A $\Rightarrow$ B est une wff**.

Les axiomes.

Les axiomes sont les éléments de base du système qui sont évidemment **VRAIS**.

Les règles d'inférences:

Les 2 plus importantes règles sont:

- **Le modus ponens (mp)**

  Soient A une proposition et

  C une proposition de la forme $A \Rightarrow B$

  Alors on peut déduire B.

Notation: $A, A \Rightarrow B \quad \rightarrow (mp) \quad B$.

- **Le modus tonens (mt)**

  Soient C une proposition de la forme $A \Rightarrow B$ et

  $\neg B$ une proposition

  Alors on peut déduire A.

Notation: $A \Rightarrow B, \neg B \quad \rightarrow (mt) \quad \neg A$

VI-1 Système formel complet du calcul des propositions:

Soit S le système formel définit par:

- L'ensemble des wff correspond au langage restreint

  $P(\neg, \Rightarrow)$

- L'ensemble infini d'axiomes B se réparti en 3 groupes:

  B1: $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

  B2: $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

  B3: $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

- Les règles d'inférences se réduisent à la seule règle du modus ponens.

<u>*Exemple:*</u>

Montrons que $\models A \Rightarrow A$, c'est-à-dire que c'est une tautologie.

B 2	Q1	$(A \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \Rightarrow A)) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A))$
B1	Q2	$A \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \Rightarrow A)$
mp(Q1,Q2)	Q3	$(A \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$
B1	Q4	$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
mp(Q4,Q3)	Q5	$A \Rightarrow A$

Montrons que $\neg\neg A \Rightarrow A$ est un théorème

B 1	Q1	$(\neg\neg A \Rightarrow (\neg\neg\neg\neg A \Rightarrow \neg\neg A)$
Hypothèse	Q2	$\neg\neg A$
B3	Q3	$(\neg\neg\neg\neg A \Rightarrow \neg\neg A) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg\neg\neg A)$

mp(Q2,Q1)	Q4	$(\neg\neg\neg\neg A \Rightarrow \neg\neg A)$
mp(Q4,Q3)	Q5	$(\neg A \Rightarrow \neg\neg\neg A)$
B3	Q6	$(\neg A \Rightarrow \neg\neg\neg A) \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow A)$
mp(Q5,Q6)	Q7	$\neg\neg A \Rightarrow A$
mp(Q2,Q7)	Q8	A

Conséquences:

1/ Tout théorème (énoncé prouvable) du système *S* est une tautologie.

2/ Il n'est pas possible que A et $\neg$ A soient des théorèmes de *S*.

Définition:

Nous appellerons ***preuve*** de A, toute suite finie A1,A2.....An tq:

1/ An = A.

2/ Pour tout i $\in$ {1, 2, ...,n}

Ai est soit un axiome, soit provient de l'application de la règle de mp

Ak, Am $\rightarrow$ Ai avec k et < i.

Notation: $\vdash$ **A** pour dire que A est un théorème de *S*.

Théorème.

Pour toute proposition A, $\vdash A \Rightarrow A$ (Qui se lit: $A \Rightarrow A$ est un théorème).

VI-2 Quelques propositions:

1/ Dans le calcul des propositions, il existe toujours une procédure effective pour décider si une wff est un axiome ou non.

2/ Soit Q une wff contenant les propositions A.

Si Q est un théorème, la wff obtenu en remplaçant dans Q chaque occurence de A par une wff B donne un théorème.

3/ Soit *S* un ensemble non vide de proposition et B une proposition appartenant à *S*.

Soit A une proposition

$$S \vdash A \quad \Leftrightarrow S / \{B\} . \vdash B \Rightarrow A$$

Exemple:

Prouvons que $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow C$

Il suffirait de prouver

$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C , A \vdash C$

Hypothèse	Q1	$A \Rightarrow B$
Hypothèse	Q2	A
mp(Q2,Q1)	Q3	B
Hypothèse	Q4	$B \Rightarrow C$
mp(Q3,Q4)	Q5	C

4/ A et B étant 2 propositions qlcq, les propositions suivantes sont des théorèmes de *S*:

- $\mathbf{A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)}$
- $\mathbf{\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)}$
- $\mathbf{\neg\neg A \Rightarrow A}$
- $\mathbf{A \Rightarrow \neg\neg A}$
- $\mathbf{(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)}$
- $\mathbf{A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg (A \Rightarrow B))}$
- $\mathbf{(B \Rightarrow A) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow A)}$

Corollaire:

Pour toute proposition A et tout ensemble de propositions *H*:

$$H \vdash A \quad \Leftrightarrow \quad H \models A$$

VI-3 Autres systèmes formels:

Système de Hilbert Ackermann.

- L'ensemble des énoncés bien formés est $P(\vee, \neg)$
- Règle d'inférence est le modus ponens (adapté):

  $A, \neg A \vee B \rightarrow B$
- Base est formée des 4 groupes d'axiomes:

  1/ $\neg (A \vee A) \vee A$

  2/ $\neg A \vee (A \vee B)$

  3/ $\neg (A \vee B) \vee (B \vee A)$

  4/ $\neg (\neg B \vee C) \vee (\neg (A \vee B) \vee (A \vee C))$

Système de Kleene:

- L'ensemble des énoncés bien formés est $P(\vee, \wedge, \neg, \Rightarrow)$.
- Règle d'inférence est le modus ponens.
- La base est formée des 10 schémas d'axiomes:

  1/ $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

  2/ $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

  3/ $(A \wedge B) \Rightarrow A$

4/ $(A \wedge B) \Rightarrow B$

5/ $A \Rightarrow (B \Rightarrow (A \wedge B))$

6/ $A \Rightarrow (A \vee B)$

7/ $B \Rightarrow (A \vee B)$

8/ $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C)$

9/ $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A)$

10/ $(\neg\neg A \Rightarrow A)$

VII- La résolution sans variable.

On s'interresse à la validation d'une déduction de la forme "S $\models$ B".

Avec S ensemble de propositions et B une proposition.

VII- 1 Syntaxe et sémantique des clauses.

Définition:

Une **clause** est définit comme une proposition de la forme (forme normale conjonctive):

$$a_1 \vee a_2 \vee ... \vee a_k \vee \neg b_1 \vee \neg b_2 \vee ... \vee \neg b_m$$

avec $k >= 0$, $m >= 0$,

a_i et $b_j \in \mathcal{A}$ (ensemble des atomes)

Le langage des clauses est définit sur l'alphabet V = {p, i, ∨, ¬}, par:

<clause>	**::= ε ∣ <el.nonvide>**	
<el.nonvide>	**::= <littéral> ∣ <littéral> ∨ <el.nonvide>**	
<littéral>	**::= <atome> ∣ ¬<atome>**	

Définition 1:

Un **litteral** est une proposition qui se présente sous la forme p_i ou $\neg p_i$ avec $p_i \in \in A$.

Définition 2:

On appelle **littéral opposé** du littéral 'h', le littéral noté 'h^-'et valant:

a (si h = ¬a) et ¬a (si h = a) $a \in A$.

Définition 3:

Une **paire opposée de littéraux** est une paire {h1, h2} tq $h1 = h2^-$

Définition 4:

Une **clause C est une tautologie** ssi lit(C) contient une paire opposée.

Algorithme (*résolution par refutation*):

> **Soit *F* un ensemble fini de clauses non-tautologiques et C une clause qlcq.**
>
> **Pour valider *F* $\models$ C.**
>
> **Prendre successivement chaque clause D de *F*, supprimer de D tous les littéraux qui sont dans C.**
>
> **Soit *G'* l'ensemble résultant des clauses modifiées.**
>
> **Valider *G'* $\models$ ε.**

Définition 5:

Si lit(C1) $\subseteq$ lit(C2) **Alors** C1 $\models$ C2.

Définition 6:

Soit *F* un ensemble fini de clauses.

- ✓ Une clause première pour *F* est toute clause C tq:

F |= C est valide et $\forall$C'/ C' $\subseteq$ C, F |= C' n'est pas valide.

- ✓ La déduction F |= C est dite minimale lorsque:

  1/ $\forall F'/ F' \subseteq F$ F' |= C n'est pas valide.

  2/ $\forall$C'/ C' $\subseteq$ C F |= C' n'est pas valide.

Définition 7:

Pour toute déduction valide F |= C, $\exists F1 \subseteq F$ et C1 $\subseteq$ C tq

$F1$ |= C1 soit valide et minimale.

IV-2 Opération de résolution.

Définition 1:

Soit C et D, 2 clauses non tautologiques. On dit qu'elles forment une ***paire résoluble*** **lorsque**

L = lit{C, D} contient exactement une paire opposée {h, h⁻}

Dans ce cas, on appelle ***résolvante*** de C et D, la clause notée res(C, D) dont

l'ensemble des littéraux est L / {h, h⁻}

En utilisant les propriétés du $\vee$,

$$C = h \vee B \quad \text{et} \quad D = h^{-} \vee E \quad \text{--------->} \quad res(C, D) = B \vee E$$

<u>Définition 2:</u>

On appelle ***résolution*** d'un ensemble *F* de clauses, l'ensemble noté <*F*> défini par le schéma d'induction:

- ✓ **<u>Base</u>**: elle est constituée de *F*.
- ✓ **<u>Règle</u>**: une règle d'arité 2: C,D ---------> res(C, D) pour toute paire résoluble C, D.

<u>Théorème1:</u>

Soit *F* un ensemble de clauses et C une clause dans <*F*> Alors *F* $\models$ C.

<u>Théorème2:</u>

L'ensemble de clauses *F* ***est contradictoire*** ssi $\varepsilon \in F$.

Algorithme de résolution:

Soit H un ensemble fini de clauses non tautologiques et 'a' un atome.

res(H) = {C / C est résolvant de 2 clauses de H}

res$_a$(H) = {C / C est résolvant sur la paire (a, ¬a) de 2 clauses de H}

Pour valider $F \models \varepsilon$, on peut utiliser l'agorithme suivant:

```
G := F;
G' := G ∪ res(G);
TANTQUE (ε ∉ G'   et   G' ≠ G) FAIRE
        G := G';
        G' := G ∪ res(G);
SI ε ∈ G' ALORS retourner(OUI)
           SINON retourner(NON)
```

V- La logique des predicats de 1^{ier} ordre.

Pierre aime Anne.

Quelqu'un aime Anne.

Pierre aime tout le monde.

X aime Y *un prédicat avec* X *et* Y *des indéterminés.*

Définition

Un ***prédicat*** est un schéma de propositions dépendant d'un nombre fixé d'indéterminés (son arité).

- ✓ Pierre aime Anne ➔ est une ***spécialisation du prédicat***.
- ✓ Quelqu'un aime Anne ➔ **∃X / X aime Anne**.
- ✓ Pierre aime tout le monde ➔ ∀Y / Pierre aime Y.

Pierre aime Anne s'écrit **a(pierre, anne)**

Conséquences :

Notions de *spécialisation* et de *généralisation.*

V-1 Syntaxe de langage du 1^{ier} ordre.

Le langage du 1^{ier} ordre est bati à partir de :

- ✓ Symboles de ponctuation : ,, (,).
- ✓ Connecteurs logiques : ¬, ∧, ∨, ⇒, ⇔.
- ✓ Quantificateurs : ∀, ∃.

- ✓ Ensemble dénombrable de variables X = {X_0, X_1, X_2, …X_n}.
- ✓ Ensemble dénombrable d'opérations {f_i^k / i,k ∈ $\mathbb{N}$}.
- ✓ Ensemble dénombrable de prédicats {p_i^k / i,k ∈ $\mathbb{N}$}.

Remarque :

- ✓ Variables ➔ X, Y, Z…
- ✓ Opérations ➔ f, g, h…
- ✓ Prédicats ➔ p, q, r…
- ✓ Les constantes sont les opérations d'arité 0.

Définition

Un langage du 1ier ordre issue d'une base *B*, noté [L(*B*)] est le langage où *B*=(*F*, *R*) avec *F* ensemble d'opérations et *R* ensemble de prédicats.

⌧ *F* ∪ *R* constitue l'ensemble des symboles non permanents de *L*(*B*).

Définition

T ensemble de ***termes*** est défini par :

⌧ Toute **variable** est un terme

⌧ **Si** t1,t2, …tk sont des termes **Alors** f(t1, t2, …,tk) est un terme.

<u>Définition</u>

L ensemble de *formules* est défini par :

- **Si** t1, t2 …tk sont des termes **Alors** p(t1, t2, …tn) est une formule.
- **Soit** p,q des formules et X une variable $\neg$(p), (p) $\vee$ (q), (p) $\wedge$ (q), (p) $\Rightarrow$ (q), (p) $\Leftrightarrow$ (q), $\forall$X (p), $\exists$X (p) sont des variables.

Définition

Une ***formule libre*** (expression booléenne) est une formule qui n'utilise aucun symbole de quantification.

Définition

Un ***terme clos*** est un terme qui ne contient pas de variable.

V-2 Une syntaxe riguoureuse préfixé de L.

```
<variable>    ::= X | <variable>i.
<tête-opér>   ::= f | <tête-opér>i.
<tête-form>   ::= p | <tête-form>i.
<suite-term>  ::= a<terme> |
                  a<suite-term><terme>.
<terme>       ::= <variable> |
                  <tête-opér> |
                  <tête-opér><suite-term>.
<form-atom>   ::= <tête-form> |
                  <tête-form><suite-term>.
<formule>     ::= <form-atom> |
                  ¬<formule>|
                  <opb><formule><formule>|
                  <quant><variable><formule>.
<opb>         ::= ∧ | ∨ | ⇒ | ⇔.
<quant>       ::= ∀ | ∃.
```

V-3 Variables Libres, Variables liées.

Définition1

A une formule.

Var(A) = ensemble des variables intervenant dans A.

Définition2

L'ensemble des variables libres (resp. liées) de A, **varlibre(A)** (resp. **varliée(A)**) est défini par :

- **Si** A est atomique **Alors** *varlibre(A)* = var(A)

  (resp. *varliée(A)* = ϕ).

- **Si** A a la forme $\neg$B ou <opb>BC **Alors**

  varlibre(A) = varlibre(B) $\cup$ varlibre(C)

  de même *varliée(A)* = varliée(B) $\cup$ varliée(C)

- **Si** A a la forme QX B où Q = quantificateur **Alors**

  varlibre(A) = varlibre(B) \ {X}

  varliée(A) = varliée(B) $\cup$ {X}

Exemple :

$$A = \forall \mathbf{x}\ ((\mathbf{p(x, y, z)} \Rightarrow \mathbf{r(y, z)}) \vee \exists \mathbf{z}\ (\mathbf{q(z)} \Rightarrow \mathbf{r(z, z)}))$$

var(A) = {x, y, z}

varlibre(A) = {y, z}

varliée(A) = {x, z}

Définition3

La formule A est dite **close** lorsque varlibre(A) = ϕ, sinon elle est dite ouverte.

Définition4

Une formule A est dite **propre** lorsque

1. Varlibre(A) $\cap$ varliée(A) = ϕ.
2. Deux occurrences liées d'une même variable X dans A à la même sous formule de liaison.

Exemple :

Vérifions si les formules suivantes sont propres ou non ?

A = $\forall$**x (** $\exists$**y p(x, y)** $\vee$ $\exists$**z r(y, z))**

B = $\forall$**x p(x, y)** $\vee$ $\exists$**x (r(y, x)** $\Rightarrow$ **p(y, x))**

Aucune n'est propre (la condition 1 n'est pas vérifiée pour A et la condition 2 ne l'est pas pour B)

V-4 Renommage

Procédé pour transformer toute formule impropre en une formule propre.

- *Pour 1* ➔ **Changer les occurrences liées d'une variable libre par d'autres noms de variables.**
- *Pour 2* ➔ **On procède de manière analogue que dans 1.**

Définition

Soit **A** une formule propre, **X** une variable et **t** un terme.

Une ***substitution*** dans A de X par t est la formule A[X ⌫t] et :

- Qui vaut A si X $\notin$ vatlibre(A)
- Qui est obtenu sinon :

  « renommer les variables liées de A, de manière à ce que les variables de t ne soient pas des variables liées de A. Substituer dans toutes les occurrences de X dans A les facteurs X par t. »

Exemple :

$$\mathbf{A} = \mathbf{p(x, y) \vee \forall z\, (p(x, z) \Rightarrow r(z))} \qquad \mathbf{t = f(y, z)}$$

$$\mathbf{A[x\ \ t]} = \mathbf{p(f(y, z), y) \vee \forall u\, (p(f(y, z), u) \Rightarrow r(u)))}$$

A[z t] = A

V-5 Sémantique d’un langage de 1 [ier] ***ordre***

Définition1

D est un **domaine d’interprétation**, si toutes les variables y font référence.

Une fois *D* fixé, il reste à interpréter les éléments de *B* = (*F*, *R*).

🖂 f ∈ *F* ⌦ une application : D^q ⌫ *D*, q = arité de f.

🖂 p ∈ *R* ⌦ une application : D^q ⌫ {0, 1}, q = arité de p.

Définition2

On appelle **interprétation** du langage de 1[ier] ordre *L*(*F*, *R*), la donnée du triplet τ =< *D*, τ*F*, τ*R*>, dans lequel *D* est un ensemble non vide et où :

🖂 τ*F* est constitué ➔ τf(f ∈ *F*) : D^q ⌫ *D*, q = arité de f

🖂 τ*R* est constitué ➔ τp(p ∈ *R*) : D^q ⌫ {0, 1}, q = arité de f

Définition3

Pour une interprétation donnée τ de *L*(*F*, *R*), on appelle **assignation** relative à τ, toute application **s** : X ⌫ *D*.

Définition4

Soit **s** une assignation relative à *D*. Pour chaque terme t $\in$ *L*(*F*, *R*), on défini sa valeur **s(t)** dans *D* en suivant l'induction suivante :

- ⌧ **Lorsque** t = X **alors** s(t) = s(X)
- ⌧ **Lorsque** t = f(t1, t2, …,tk) **alors** s(t) = τf(s(t1), s(t2),…, s(tk))

De même pour chaque formule

- ⌧ **Si** A = p(t1, t2, …,tk) **Alors** s(A) = τp(s(t1), s(t2),…, s(tk))
- ⌧ **Si** A se présente comme la négation d'une formule préalable ou la connexion de deux formules préalables, **Alors** s(A) s'obtient en utilisant la table de vérité du connecteur correspondant.
- ⌧ **Si** A = $\exists$X (B) **Alors** s(A) = 1 si $\exists$d $\in$ *D* avec s[X $\rightarrow$ d](B) = 1,

  s(A) = 0 sinon
- ⌧ Si A = $\forall$X (B) Alors s(A) = 1 si $\forall$d $\in$ *D* avec s[X $\rightarrow$ d](B) = 1,

  s(A) = 0 sinon

V-6 Tautologie, Déduction, Modèle

Définition1

Une formule A est appelée *tautologie*, lorsque pour toute interprétation **τ**, $\forall$s (assignation), on a s(A) = 1.

Définition2

Deuxformules A et B sont *logiquement équivalentes*, lorsque pour toute interprétation **τ**,∀s (assignation), on a s(A) = s(B) (A ⇔ B est une tautomogie) notation A ≈ B.

Dédinition3

Une ensemble *H* de formunes est *satisfaisable*, lorsqu'il existe interprétation **τ** et une assignation **s**, tq pour toute formule A ∈ *H*, s(A) = 1.

Définition4

Une ensemble *H* de formunes est *valide* (admet un modèle), lorsqu'il existe interprétation **τ**, tq ∀**s** (assignation) s(A) = 1et ce pour toute formule A ∈ *H*.

Définition5

Un ensemble non satisfaisable est dit *contradictoire*.

Définition6

Une formule est *conséquence logique* de *H* (*H* |— A) lorsque tout couple (τ, s) satisfaisant *H*, satisfait aussi A.

Quelques équivalences

1. $\exists X\ A \approx \neg\forall X\ \neg A$
2. $\vee AB \approx \Rightarrow\neg AB$
3. $\wedge AB \approx \neg\Rightarrow A\neg B$
4. Tout renommage de A en A' est tq A ≈ A'

V-7 Les principaux résultats

V-7-1 Théorème de la compacité

Si toute partie finie d'un ensemble *H* de formules admet un modèle, alors A admet un modèle.

V-7-2 Théorème de la réduction par l'absurde

H $\models$ A si et seulement si H $\cup$ { $\neg$A} est contradictoire.

V-7-3 Théorème de finitude

H $\models$ A si et seulement si une partie finie $B \subset$ H est tq $B \models$ A.

V-7-4 Théorème de la déduction

Soit *H* un ensemble de fotrmules, A et B 2 formules avec A $\not\in$ Alors H $\models$ A $\Rightarrow$ B si et seulement si H $\cup$ { A} $\models$ B.

V-8 Système formel de la logique de 1ier ordre

Un des systèmes formels, celui pour lequel :

- L'ensemble des connecteurs et des quantificateurs est

  $\{\neg, \Rightarrow, \forall\}$

- Les axiomes sont répartis en 5 groupes:
  - ✓ $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
  - ✓ $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
  - ✓ $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
  - ✓ $\forall X\ (A) \Rightarrow A[X \rightarrow t]$ (particularisation)
  - ✓ $\forall X\ (D \Rightarrow B) \Rightarrow (D \Rightarrow \forall X\ B)$

- Les règles d'inférences
  - ✓ Modus Ponens

    A, $A \Rightarrow B \quad \rightarrow$ (mp) B.
  - ✓ Règle de Généralisation

    (A partir de A , on peut produire $\forall X$ A)

V-9 Base Théorique de la démonstration automatique.

V-9-1 Forme Prénexe et Skolémisation, Forme Clausales

Définition

Une formule A de *L* est sous forme prénexe, lorsqu'elle est de la forme : $q_1X_1q_2X_2\ldots q_nX_n$ B avec q_i des quantificateurs et B une formule libre.

Théorème

Toute formule A est équivalente à une formule prénexe.

V-9-2 Théorème1 de skolem

Soit A = $q_1X_1q_2X_2\ldots q_nX_n$ B une formule propre sous forme prénexe de *L*(*F*, *R*). On appelle *forme de skolem* de A , la formule A^s obtenue en éliminant de A, tous les quantificateurs existanciels $\exists X_i$ et en substituant dans B à la variable correspondante X_i un terme $f_i(X_{k1}, X_{k2}, \ldots, X_{kv})$ où les X_{ki} sont des variables quantifiées universellement avant X_i et f_i une opération nouvellement introduite (F = F $\cup \{f_i\}$).

V-9-3 Théorème2 de skolem

Soit A une formule propre sous forme prénexe et A^s la formule de skolem associée. La formule A est satisfaisable dans une interprétation τ si et seulement si A^s est satisfaisable dans une interprétation étendue τ'.

V-9-4 Théorème de Herbrand

Il permet de raùener le problème de l'existance d'un modèle pour la formule close, à celui de la satisfaisabilité d'un ensemble de proposition.

Définition1

On appelle *domaine de Herbrand* de A, l'ensemble *U* des termes clos de *L*(*F'*,*R*) où *F'* = *F* auquel on a ajouté une constante (si *F* n'en a pas).

Une interprétation *M* est dite une interprétation de Herbrand pour A lorsque son domaine est *U* et lorsque $\mu(f) = f \quad \forall f \in F'$.

Lemme

La formule close de skolem $A = \forall Y\ B$ est valide si et seulement si elle admet un modèle de Herbrand.

Définition2

Les atomes de Herbrand de $A = \forall Y\ B$ (formule close de skolem) sont exactement toutes les formules atomiques closes de *L*(*F'*,*R*) ; on note H(A) l'ensemble de ces atomes.

V-9-5 Théorème de Herbrand

La formule close de skolem A = ∀Y B admet un modèle si et seulement si l'ensemble des propositions S(A) est satisfaisable.

Exemple

Soit **A = ∀X ∀Y [p(X, f(Y)) ∨ p(X, X)]**

Avec *L* = (*F*, *R*) / *F* = {f} et *R* = {p}

Au lieu de rechercher toutes les interprétations τ = < D, τ*F*, τ*R*> qui soient des modèles de A, On essaie de prouver la satisfaisabilité de S(A).

Comment définir S(A) ?

1/ Définir *U* le domaine de Herbrand.

U est l'ensemble des termes clos de *L(F', R)* où *F'* n'est rien d'autre que *F* auquel on ajoute une constante éventuelle si *F* n'en a pas.

Une interprétation *M* est dite de herbrand pour A lorsque son domaine est *U* et lorsque : μ(f) = f pour tout f ∈ *F'* avec *F* ={f}

$\Rightarrow U = \{a, f(a), f(f(a)), \ldots\}$

2/ Définir les atomes de Herbrand.

Les atomes de herbrand sont exactement toutes les formules atomiques closes de *L(F', R)*.

H(A) = {p(a, a), p(a, f(a)), p(f(a), a), p(f(a), f(a)), p(a, f(f(a))), …}

2/ Définir le déploiement de Herbrand S(A).

C’est à dire l’ensemble de toutes les formules closes obtenues à partir de B en substituant toutes les variables Y par des éléments arbitraires de *U*.

S(A) = {p(a, f(a)) $\vee$ p(a, a), p(f(a), f(f(a))) $\vee$ p(f(a), f(a)), p(a, f(f(a))) $\vee$ p(a, a), …}

Remarque

S(A) est l’ensemble de déploiement **de He** c’est à dire ensemble de toutes les formules closes obtenues à partir de B tq A = $\forall$Y B, en substituant toutes les variables de Y par des éléments de ***U***.

Corollaire

A est contradictoire si et seulement si une partie finie de S(A) est contradictoire.

V-9-6 La résolution spécialisée

Soit la formule A de la forme $\forall$Y C1 $\wedge$ C2 $\wedge$ … $\wedge$ Cm sous forme skolémisée et clausale. Nous appellerons spécialisation de C, toute clause (close) issue de C en substituant à ses variables libres des éléments arbitraires de *U*.

Théorème

La formule clausale $\forall$Y C1 $\wedge$ C2 $\wedge$ … $\wedge$ Cm est contradictoire si et seulement si il existe une suite finie de clauses K1, K2,…, Kn avec Km = ε et tq $\forall$i Ki est une spécialisation d’une clause Ck ou la résolvante de 2 clauses Ks et Kt avec s<t<i.

V-9-7 La méthode de résolution par unification.

Le principe est de considérer chaque clause de A comme potentiellement productrice d’une multitude de clauses spécialisées et d’adapter sur des clauses ayant des variables libres la méthode utilisée dans le cas du calcul des propositions.

Exemple

Soient $C1 = p(t1, t2, t3, \ldots, tk) \vee D1$

$C2 = \neg p(s1, s2, s3, \ldots,sk) \vee D2$

Si une substitution des variables libres permet d'accorder t1 et s1 à c1, t2 et s2 à c2, … tk et sk à ck, alors cette substitution transformera C1 et C2 de sorte qu'un résolvant se dégagera en C3.

Définition1

C1 et C2 sont dit résolubles.

Définition2

Une clause C est dite réductible si et seulement si elle est de la forme $C = p(t1, t2, \ldots tk) \vee p(s1, s2, \ldots sk) \vee D$ et

Qu'il existe une substitution $N = \{(t1, s1), (t2, s2), \ldots, (tk, sk)\}$ ensemble de substitutions de ti et si.

Dans ce cas C peut s'ecrire sous la forme $C = p(t1, t2, \ldots, tk) \vee D$.

Théorème de résolution par unification.

Soit C un ensemble fini de clauses. On désigne pa $< C >$, l'ensemble construit par le schéma d'induction dont la base est C est dont les règles sont :

✓ *La règle de résolution :*

Si C1 et C2 sont résoluble, on produit toute résolvante de C1 et C2.

✓ *La règle de réduction*

Si C est réductible, alors produit toute réduite de C.

Et le théorème dit ; L'ensemble fini de clauses *C* est contradictoire si et seulement si (le mot vide) $\varepsilon \in \langle C \rangle$.

Annexe.

Loi d'équivalence $p \equiv q$

Loi de Morgan $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$

$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$

Commutativité $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$

$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$

Associativité $(p \wedge (q \wedge r)) \equiv ((p \wedge q) \wedge r)$

$(p \vee (q \vee r)) \equiv ((p \vee q) \vee r)$

Distributivité $(p \wedge (q \vee r)) \equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$

$(p \vee (q \wedge r)) \equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$