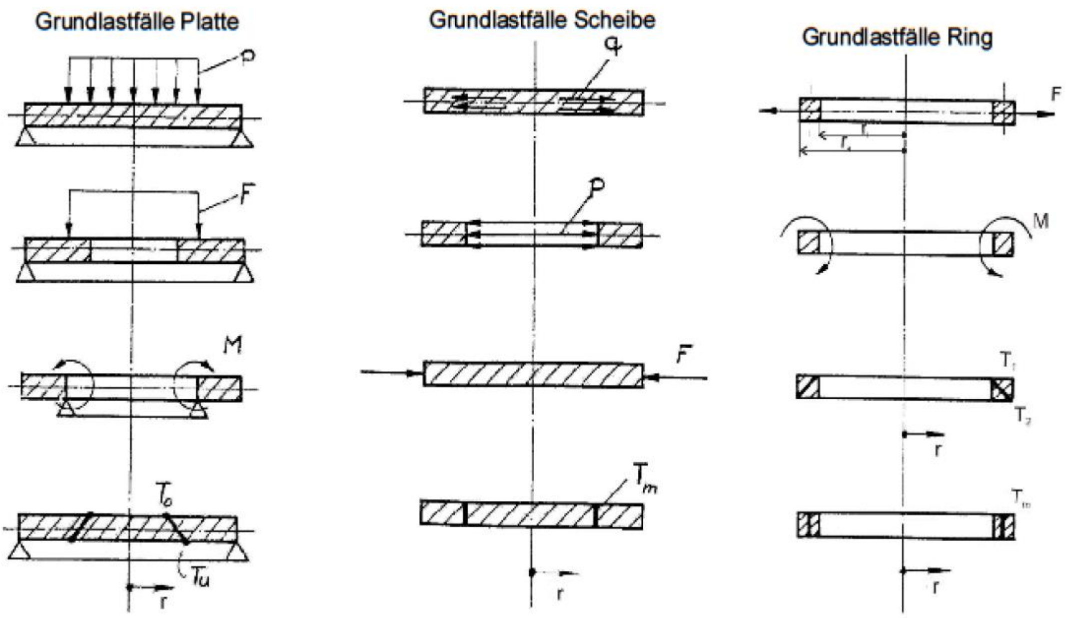
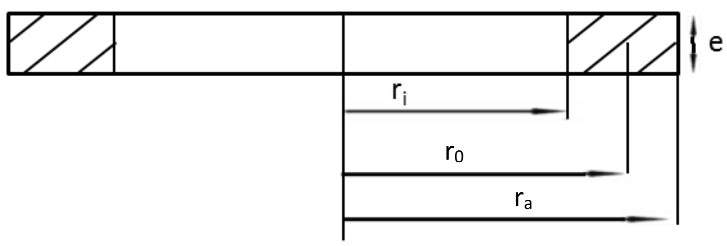
3.1. Übung Kreisscheibe

Einführung:

Kreisscheibe ist ein ebenes Flächentragwerk, das so belastet wird, dass seine Mittelfläche nur gedehnt bzw. verzerrt wird, nicht aber gekrümmt bzw. gebogen wird.

Grundlastfälle





Aufgabe 3.1 Zwischen den Rotationszeiten soll die Zentrifugentrommel mit einem Innendruck belastet werden. Hierfür ist die Zentrifugentrommel selbst festigkeitsmäßig zu überprüfen. Es soll lediglich der Teil des Zylindermantels mit ausreichender Entfernung vom Boden betrachtet werden, so dass der Einfluss von diesem vernachlässigt werden kann. Das Eigengewicht kann gegenüber der Druckbelastung vernachlässigt werden.

Gegeben:

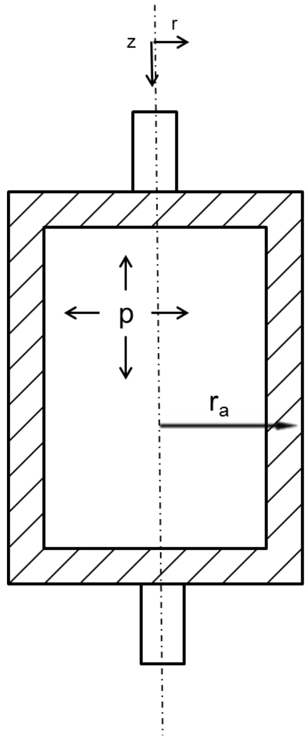
$p = 500$ bar

$K = 230$ N/mm²

$S = 2$

$r_a = 3$ m

$s = 1$ m



Allgemeine Gleichungen:

Zweichachsiger Spannungszustand: $\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{pmatrix}$

Linienkraft in radialer Richtung: $F_r = \int \sigma_r \, dz$

Linienkraft in Umfangsrichtung: $F_\phi = \int \sigma_\phi \, dz$

Schubspannungshypothese: $\sigma_v = \max\{|\sigma_1|, |\sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_3|\}$

a) Nennen Sie die Annahmen unter denen man die Zylinderschale als Kreisscheibe betrachten darf.

b) Skizzieren Sie an einem differentiellen Element die Dehnung einer Kreisscheibe in Umfangsrichtung und in radialer Richtung. Leiten Sie anhand Ihrer Skizze Ausdrücke für die Dehnungen ε_r und ε_ϕ in Abhängikeit von der Verschiebung u und dem Radius r her und stellen Sie den zweichachsigen Spannungszustand in Zylinderkoordinaten auf.

c) Zeichnen Sie ein differentielles Element der Kreisscheibe und zeichnen Sie alle wirkenden Kräfte ein. Leiten Sie die allgemeine DGL der Kreisscheibe her, indem Sie eine Kräftebilanz aufstellen und zunächst Ausdrücke für die Kräfte F_r und F_ϕ und anschließend Ausdrücke für die Spannungen σ_r und σ_ϕ einsetzen.

d) Bestimmen Sie den Verschiebungsverlauf $u(r)$ in dem Sie die in c) hergeleitete DGL und passende Randbedingungen zu Bestimmung der Integrationskonstanten verwenden.

e) Überprüfen Sie nach der Schubspannungshypothese ob die Zylindertrommel der Beanspruchung durch den reinen Innenüberdruck standhält. Nehmen Sie hier σ_ϕ als σ_1 an.

Lösung

a) Nennen Sie die Annahmen die unter denen man die Zylinderschale als Kreisscheibe betrachten darf.

Annahmen

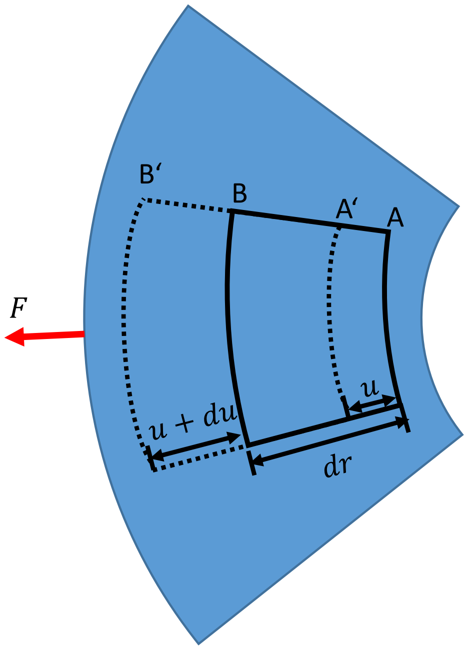
- Radiale Verschiebung $u(r)$ beliebiger Querschnittspunkte ist klein im Vergleich zur Scheibendicke e
- $e = konst.$ über den Radius r
- Ebener Spannungszustand wird angenommen ($\frac{d}{dz} = 0$)

b) Skizzieren Sie an einem differentiellen Element die Dehnung einer Kreisscheibe in Umfangsrichtung und in radialer Richtung. Leiten Sie anhand Ihrer Skizze Ausdrücke für die Dehnungen ε_r und ε_ϕ in Abhängikeit von der Verschiebung u und dem Radius r her und stellen Sie den zweiachsigen Spannungszustand in Zylinderkoordinaten auf.

Skizze zur Bestimmung von ε_r:

unverformt ————

verformt ....



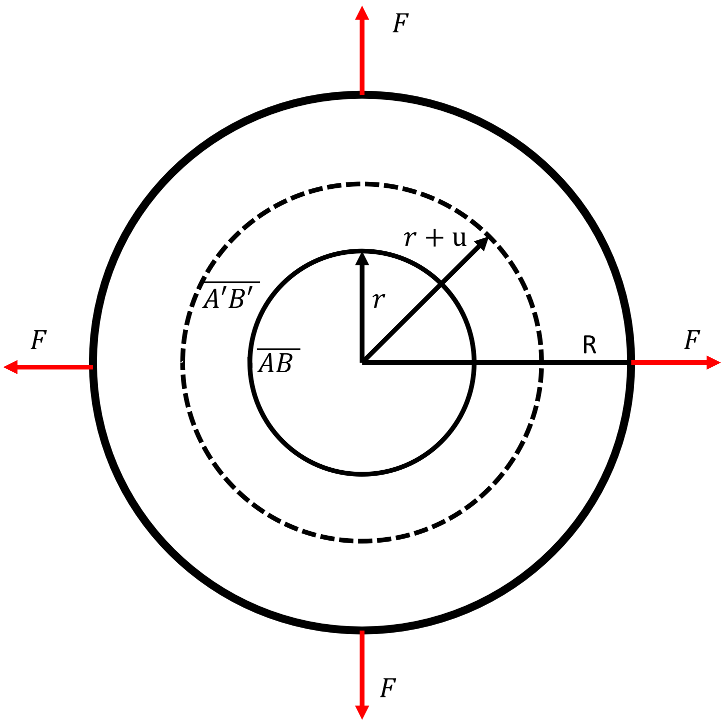
Durch die Kraft F wird das unverformte Element (AB) zum verformten Element (A'B') gedehnt. Der Punkt A wird dabei um u zum Punkt A' in radiale Richtung verschoben. Der Punkt B erfährt die gleiche Verschiebung u und außerdem noch die Ausdehnung du des Materials auf der Strecke AB.

$$\varepsilon_r = \frac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{(u + du + dr - u) - dr}{dr} = \frac{du}{dr}$$

Skizze zur Bestimmung von ε_ϕ:

unverformt ————

verformt ....



Durch die Kraft F wird der die Strecke AB in Umfangsrichtung gedehnt. Daher erhöht sich der Radius r um die Verschiebung u zu $r + u$.

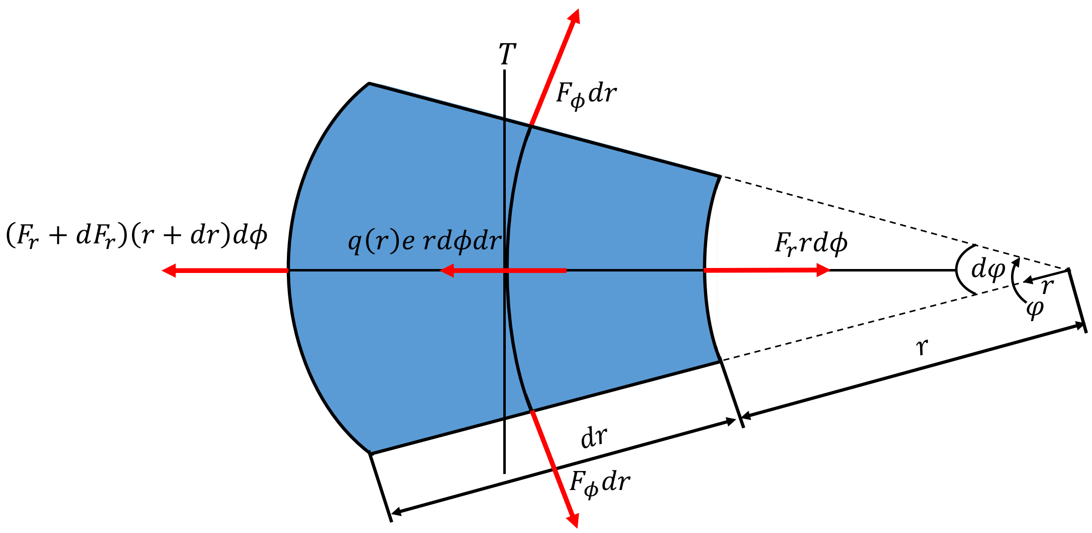
$$\varepsilon_\phi = \frac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{2\pi(r + u) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r}$$

Zweiachsiger Spannungszustand in Zylinderkoordinaten in Vektorschreibweise:

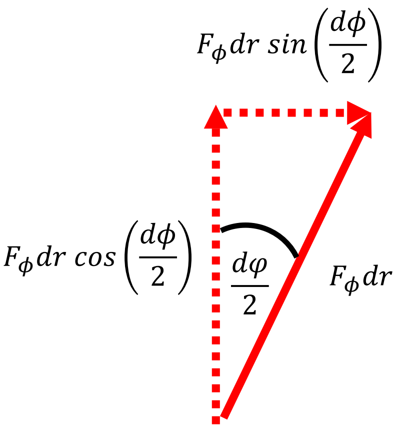
$$\begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\phi \end{pmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\phi \end{pmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du}{dr} \\ \frac{u}{r} \end{pmatrix}$$

c) Zeichnen ein differentielles Element der Kreisscheibe und zeichnen sie alle wirkenenden Kräfte ein. Leiten Sie die allgemeine DGL der Kreisscheibe her, indem Sie eine Kräftebilanz aufstellen und zunächst Ausdrücke für die Kräfte F_r und F_ϕ und anschließend Ausdrücke für die Spannungen σ_r und σ_ϕ einsetzen.

Differentielles Element der Kreisscheibe mit allen wirkenden Kräften:



Aufteilung von $F_\phi dr$:



Kräftebilanz in radialier Richtung:

$$\sum F_r = 0 = (F_r + dF_r)(r + dr)d\phi - F_r r d\phi - 2F_\phi dr sin\left(\frac{d\phi}{2}\right) + q(r)\ e\ r\ d\phi dr$$

Weil $\phi < 1$ gilt: $\sin\left(\frac{d\phi}{2}\right) \approx \frac{d\phi}{2}$

$$0 = (F_r + dF_r)(r + dr)d\phi - F_r r d\phi - 2F_\phi dr\frac{d\phi}{2} + q(r)\ e\ r\ d\phi dr$$

Ausmultiplizieren der Klammern

$$0 = (F_r r + F_r dr + dF_r r + dF_r dr)d\phi - F_r r d\phi - F_\phi dr d\phi + q(r)\ e\ r\ d\phi dr$$

$$0 = F_r r d\phi + F_r dr d\phi + dF_r r d\phi + dF_r dr d\phi - F_r r d\phi - F_\phi dr d\phi + q(r)\ e\ r\ d\phi dr$$

$$0 = F_r dr d\phi + dF_r r d\phi + dF_r dr d\phi - F_\phi dr d\phi + q(r)\ e\ r\ d\phi dr$$

Da Multiplikation von drei differentiellen Größen ≈ 0 gilt: $dF_r dr d\phi \approx 0$

$$0 = F_r dr d\phi + dF_r r d\phi - F_\phi dr d\phi + q(r)\ e\ r\ d\phi dr$$

Anwendung der Produktregel

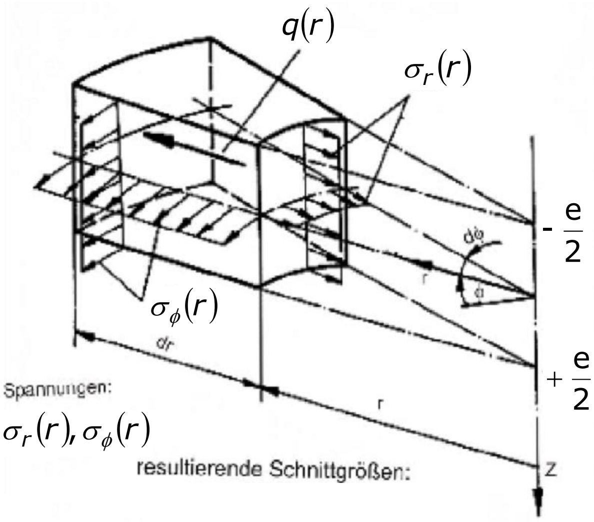
$$0 = d(F_r r) d\phi - F_\phi dr d\phi + q(r)\ e\ r\ d\phi dr$$

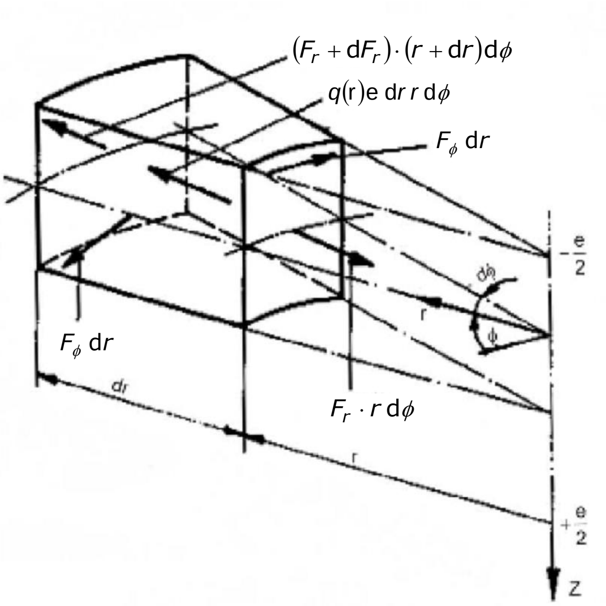
Kürzen der gesamten Gleichung durch $d\phi dr$

$$0 = \frac{d(F_r r)}{dr} - F_\phi + q(r)\ e\ r$$

Aufstellen der Kräfte F_r und F_ϕ:

Wir betrachten nur den ebenen Spannungszustand $\sigma_r, \sigma_\phi \neq f(z)$





$$F_r = \int \sigma_r\ dz = \sigma_r \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} dz = \sigma_r e$$

$$F_\phi = \int \sigma_\phi\ dz = \sigma_\phi \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} dz = \sigma_\phi e$$

Einsetzen der Kräfte in die DGL

$$0 = \frac{d(\sigma_r\, e\, r)}{dr} - \sigma_\phi\, e + q(r)\, e\, r$$

Einsetzen der Spannungen in die DGL

$$0 = \frac{d\left(\left(\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r}\right)\right) e\, r\right)}{dr} - \left(\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{u}{r} + \nu\frac{du}{dr}\right)\right) e + q(r)\, e\, r$$

Gesamte Gleichung durch $\frac{Ee}{1-\nu^2}$ teilen

$$0 = \frac{d\left(\frac{du}{dr}r + \nu\frac{u}{r}\, r\right)}{dr} - \frac{u}{r} - \nu\frac{du}{dr} + q(r)r\frac{1-\nu^2}{E}$$

Ableiten des ersten Summanden

$$0 = \frac{d^2u}{dr^2}r + \frac{du}{dr} + \nu\frac{du}{dr} - \frac{u}{r} - \nu\frac{du}{dr} + q(r)r\frac{1-\nu^2}{E}$$

$$0 = \frac{d^2u}{dr^2}r + \frac{du}{dr} - \frac{u}{r} + q(r)r\frac{1-\nu^2}{E}$$

Gesamte Gleichung durch r teilen

$$0 = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} + q(r)\frac{1-\nu^2}{E}$$

$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(u\, r)\right] =- q(r)\frac{1-\nu^2}{E}$ → linear, 2. Ordnung, inhomogen

d) Bestimmen Sie den Verschiebungsverlauf $u(r)$ in dem Sie die in c) hergeleitete DGL und passende Ranbedingungen zu Bestimmung der Integrationskonstanten verwenden.

Allgemeiner Lösungsansatz:

$$u = u_h + u_p$$

Herleitung homogene Lösung:

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(u_h\, r)\right] = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(u_h\, r) = c_1$$

$$\frac{d}{dr}(u_h\, r) = c_1\, r$$

$$u_h\, r = \frac{c_1}{2}r^2 + c_2$$

$$u_h = \frac{c_1}{2}r + \frac{c_2}{r}$$

$$\frac{du_h}{dr} = \frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{r^2}$$

Partikuläre Lösung:

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(u_p\, r)\right] = -\,q(r)\,\frac{1-\nu^2}{E}$$

Da keine Volumenkraft im Material wirkt gilt: $q(r) = 0$

Da nur der Innen- und Außendruck als Belastungen vorliegen, entspricht die Spannung an den Stellen r_i und r_a genau diesen beiden Drücken. Damit ergeben sich zwei Randbedinungen, die genutzt werden können, um die beiden Integrationskonstanten c_1 und c_2 lösen zu können. Druckspannungen werden in der Tech. Mechanik negativ eingetragen.

Ranbedingungen:

RB1: $r = r_i : \sigma_r = -p_i$

RB2: $r = r_a : \sigma_r = -p_a$

Aus RB1 folgt:

$$\sigma_r(r = r_i) = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\left.\frac{du}{dr}\right|_{r=r_i} + \nu\frac{u}{r_i}\right) = -p_i$$

Einsetzen von $u(r)$

$$\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{r_i^2} + \nu\,\frac{\frac{c_1}{2}r_i + \frac{c_2}{r_i}}{r_i}\right) = -p_i$$

$$\frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{r_i^2} + \nu\left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{r_i^2}\right) = -p_i\,\frac{1-\nu^2}{E}$$

Auflösen nach c_1

$$(1+\nu)\frac{c_1}{2} - (1-\nu)\frac{c_2}{r_i^2} = -p_i\,\frac{1-\nu^2}{E}$$

$$(1+\nu)\frac{c_1}{2} = -p_i\,\frac{1-\nu^2}{E} + (1-\nu)\frac{c_2}{r_i^2}$$

$$c_1 = \frac{-2\,p_i\,\frac{1-\nu^2}{E} + 2\,(1-\nu)\frac{c_2}{r_i^2}}{1+\nu}$$

Aus RB2 folgt analog:

$$\sigma_r(r = r_a) = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\left.\frac{du}{dr}\right|_{r=r_a} + \nu\frac{u}{r_a}\right) = -p_a$$

Einsetzen von $u(r)$

$$\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{c_1}{2}-\frac{c_2}{r_a^2}+\nu\frac{\frac{c_1}{2}r_a+\frac{c_2}{r_a}}{r_a}\right)=-p_a$$

$$\frac{c_1}{2}-\frac{c_2}{r_a^2}+\nu\left(\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{r_a^2}\right)=-p_a\ \frac{1-\nu^2}{E}$$

Auflösen nach c_2

$$(1+\nu)\frac{c_1}{2}-(1-\nu)\frac{c_2}{r_a^2}=-p_a\ \frac{1-\nu^2}{E}$$

$$c_2=r_a^2\frac{(1+\nu)\frac{c_1}{2}+p_a\ \frac{1-\nu^2}{E}}{1-\nu}$$

Einsetzen von c_2 in c_1 und auflösen nach c_1

$$c_1=\frac{-2\ p_i\ \frac{1-\nu^2}{E}+2\ (1-\nu)\frac{1}{r_i^2}r_a^2\frac{(1+\nu)\frac{c_1}{2}+p_a\ \frac{1-\nu^2}{E}}{1-\nu}}{1+\nu}$$

$$(1+\nu)\ c_1{=}{-2}\ p_i\ \frac{1-\nu^2}{E}+\frac{r_a^2}{r_i^2}\left((1+\nu)c_1+2\ p_a\ \frac{1-\nu^2}{E}\right)$$

$$c_1{=}{-2}\ p_i\ \frac{1-\nu^2}{E(1+\nu)}+\frac{r_a^2}{r_i^2}c_1+\frac{r_a^2}{r_i^2}2\ p_a\ \frac{1-\nu^2}{E(1+\nu)}$$

$$c_1{=}\frac{-2\ p_i\ \frac{1-\nu^2}{E(1+\nu)}+\frac{r_a^2}{r_i^2}2\ p_a\ \frac{1-\nu^2}{E(1+\nu)}}{1-\frac{r_a^2}{r_i^2}}=\frac{1-\nu^2}{E(1+\nu)}\frac{2p_a\frac{r_a^2}{r_i^2}-2p_i}{1-\frac{r_a^2}{r_i^2}}$$

Verwenden der dritten Biomischen Formel $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$$c_1=\frac{1-\nu}{E}\frac{2p_ar_a^2-2p_ir_i^2}{r_i^2-r_a^2}$$

Einsetzen von c_1 in c_2 und umformen

$$c_2=r_a^2\frac{(1+\nu)\frac{1}{2}\left(\frac{1-\nu}{E}\frac{2p_ar_a^2-2p_ir_i^2}{r_i^2-r_a^2}\right)+p_a\ \frac{1-\nu^2}{E}}{1-\nu}$$

$$c_2=\frac{r_a^2}{1-\nu}\left[\left(\frac{1-\nu^2}{E}\frac{p_ar_a^2-p_ir_i^2}{r_i^2-r_a^2}\right)+p_a\ \frac{1-\nu^2}{E}\right]$$

$$c_2 = \frac{1+\nu}{E} r_a^2 \left[\left(\frac{p_a r_a^2 - p_i r_i^2}{r_i^2 - r_a^2}\right) + p_a\right]$$

$$c_2 = \frac{1+\nu}{E} r_a^2 \left[\frac{p_a r_a^2 - p_i r_i^2}{r_i^2 - r_a^2} + \frac{p_a\, r_i^2 - p_a\, r_a^2}{r_i^2 - r_a^2}\right]$$

$$c_2 = \frac{1+\nu}{E} r_a^2 \left[\frac{-p_i r_i^2 + p_a\, r_i^2}{r_i^2 - r_a^2}\right]$$

$$c_2 = \frac{1+\nu}{E} r_a^2\, r_i^2 \left[\frac{p_a - p_i}{r_i^2 - r_a^2}\right]$$

$$u = \frac{r}{2}\left(\frac{1-\nu}{E}\frac{2p_a r_a^2 - 2p_i r_i^2}{r_i^2 - r_a^2}\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{1+\nu}{E} r_a^2\, r_i^2 \left[\frac{p_a - p_i}{r_i^2 - r_a^2}\right]\right)$$

e) Überprüfen Sie nach der Schubspannungshypothese ob die Zylindertrommel der reinen Innenüberdruckbeanspruchung standhält. Nehmen Sie hier σ_ϕ als σ_1 an.

Bei reiner Innenüberdruckbeanspruchung gilt $p_a = 0$ und damit vereinfacht sich

$$c_1 = \frac{1-\nu}{E}\frac{-2p_i r_i^2}{r_i^2 - r_a^2}$$

$$c_2 = \frac{1+\nu}{E} r_a^2\, r_i^2 \frac{-p_i}{r_i^2 - r_a^2}$$

Umformen von $\sigma_r(r)$ und $\sigma_\phi(r)$

$$\sigma_r(r) = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r}\right) = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{r^2} + \nu\frac{c_1}{2} + \nu\frac{c_2}{r^2}\right) = \frac{E}{1-\nu^2}\left((1+\nu)\frac{c_1}{2} - (1-\nu)\frac{c_2}{r^2}\right)$$

$$\sigma_\phi(r) = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{u}{r} + \nu\frac{du}{dr}\right) = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{r^2} + \nu\frac{c_1}{2} - \nu\frac{c_2}{r^2}\right) = \frac{E}{1-\nu^2}\left((1+\nu)\frac{c_1}{2} + (1-\nu)\frac{c_2}{r^2}\right)$$

Einsetzen von c_1 und c_2 in $\sigma_r(r)$

$$\sigma_r(r) = \frac{E}{1-\nu^2}\left((1+\nu)\frac{1}{2}\left(\frac{1-\nu}{E}\frac{-2p_i r_i^2}{r_i^2 - r_a^2}\right) - (1-\nu)\frac{1}{r^2}\left(\frac{1+\nu}{E} r_a^2\, r_i^2 \frac{-p_i}{r_i^2 - r_a^2}\right)\right)$$

Kürzen von $\frac{E}{1-\nu^2}$ und umformen

$$\sigma_r(r) = \frac{-p_i r_i^2}{r_i^2 - r_a^2} - \frac{r_a^2}{r^2}\frac{-p_i r_i^2}{r_i^2 - r_a^2} = \left(-1 + \frac{r_a^2}{r^2}\right)\frac{p_i r_i^2}{r_i^2 - r_a^2}$$

Einsetzen von c_1 und c_2 in $\sigma_\phi(r)$

$$\sigma_\phi(r) = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{(1+\nu)}{2}\left(\frac{1-\nu}{E}\frac{-2p_i r_i^2}{r_i^2-r_a^2}\right)+\frac{(1-\nu)}{r^2}\left(\frac{1+\nu}{E}r_a^2\, r_i^2\frac{-p_i}{r_i^2-r_a^2}\right)\right)$$

Kürzen von $\frac{E}{1-\nu^2}$ und umformen

$$\sigma_\phi(r) = -\frac{p_i r_i^2}{r_i^2-r_a^2}-\frac{r_a^2}{r^2}\frac{p_i r_i^2}{r_i^2-r_a^2} = \left(-1-\frac{r_a^2}{r^2}\right)\frac{p_i r_i^2}{r_i^2-r_a^2}$$

Schubspannungshypothese: $\sigma_v = \max\{|\sigma_1|, |\sigma_3|, |\sigma_1-\sigma_3|\}$

Es gilt bei der Schubspannungshypothese zu überprufen welche der drei Spannungsbeträge den größten Wert annimmt. Dieser Betrag wird dann als Vergleichsspannung angenommen.

Im Dreiachsigen Spannungszustand gilt per Definition:

$\sigma_{H1} \perp \sigma_{H2} \perp \sigma_{H3}$

$\sigma_1 := max\{\sigma_{H1}, \sigma_{H2}, \sigma_{H3}\}$

$\sigma_3 := min\{\sigma_{H1}, \sigma_{H2}, \sigma_{H3}\}$

$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

Im vorliegenden Zweiachsigen Spannungszustand gilt:

$\sigma_{H1} \perp \sigma_{H3}$

$\sigma_1 := max\{\sigma_{H1}, \sigma_{H3}\}$

$\sigma_3 := min\{\sigma_{H1}, \sigma_{H3}\}$

$\sigma_1 > \sigma_3$

Da Laut Aufgabenstellung $\sigma_1 = \sigma_\phi$ und per Definition $\sigma_1 \perp \sigma_3$, folgt $\sigma_3 = \sigma_r$.

Betrachtung der Spannungsbeträge:

Betrag	Monotonie	Ort des Max.	Maximum
$\lvert\sigma_\phi\rvert$	Streng monoton fallend für $[r_i, r_a]$	r_i	$\left\lvert\left(-1-\frac{r_a^2}{r_i^2}\right)K\right\rvert$
$\lvert\sigma_r\rvert$	Streng monoton fallend für $[r_i, r_a]$	r_i	$\left\lvert\left(-1+\frac{r_a^2}{r_i^2}\right)K\right\rvert$
$\lvert\sigma_\phi-\sigma_r\rvert$	Streng monoton fallend für $[r_i, r_a]$	r_i	$\left\lvert-\frac{2r_a^2}{r_i^2}K\right\rvert$

Mit $K = \frac{p_i r_i^2}{r_i^2 - r_a^2}$

Weil $\left|-1 - \frac{r_a^2}{r_i^2}\right| < \left|-\frac{2r_a^2}{r_i^2}\right|$ folgt daraus $\sigma_v = max|\sigma_\phi - \sigma_r|$

Es gilt: Die Zylinderwand ist ausrreichend ausgelegt wenn $\sigma_v \leq \frac{K}{S}$

$$\sigma_v = max|\sigma_\phi - \sigma_r| = \left|-2r_a^2 \frac{p_i}{r_i^2 - r_a^2}\right| = \left|-2(9\,m^2)\frac{50\,\frac{N}{mm^2}}{4\,m^2 - 9\,m^2}\right| = 180\,\frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_v = 180\,\frac{N}{mm^2} > \frac{K}{S} = 115\,N/mm^2$$

Behälter ist nicht ausreichend gegen die reine Innenüberdruckbeanspruchung ausgelegt.