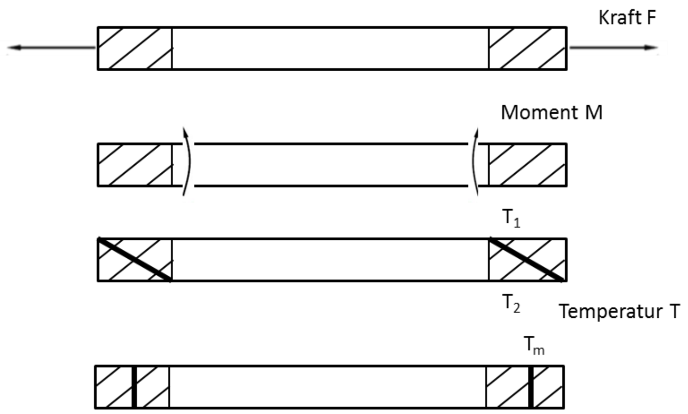
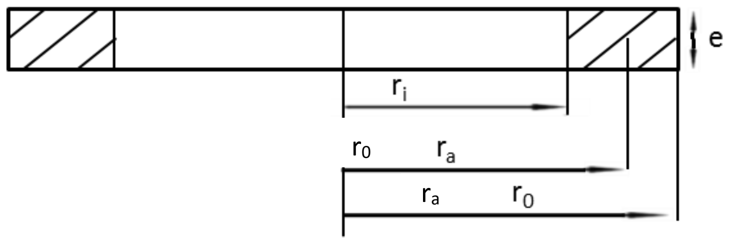
4. Übung
Kreisring

Einführung:

Kreisring stellt eine vereinfachte Form der Kreisringplatte bzw. –scheibe dar. Demnach auch ein rotationssymmetrisches Apparateelement.

Grundlastfälle





Aufgabe 4. Der Anschweißflansch an einen Behälterdeckel soll als Kreisring berechnet werden. Für die Flanschbelastung sind die resultierenden Ringlasten zu ermitteln.

a) Nennen Sie die allgemeinen Annahmen, die gelten müssen, damit ein Problem als Kreisring behandelt werden darf.

b) Leiten Sie die Ausdrücke für die Verschiebung u, den Verdrehwinkel α, und die Spannung σ_Φ unter Verwendung der Annahmen aus a) für eine äußere Kraft F in r-Richtung und ein äußeres Biegemoment M her.

c) Überprüfen Sie, ob auf Basis des Radienverhältnisses die Betrachtung des Anschweißflansches als Kreisring gerechtfertigt ist.

d) Schneiden Sie den unten gezeigten Flansch frei und tragen Sie alle Belastungen an. Gehen Sie hier davon aus, dass sich die Schrauben-, sowie die Dichtungskraft, als Gleitlager ersetzen lassen. Die Schweißnaht soll nur soweit berücksichtigt werden, dass auf den Flansch das Gewicht des Deckels drückt.

Weiterhin soll vereinfacht angenommen werden, dass die Schweißnaht und die Dichtung sich an der Innenkante des Ringes befinden. Die Schraubenkraft wirkt direkt an der Außenkante.

Ermitteln Sie entsprechend den allgemeinen Gleichungen die Verschiebung u und den Verdrehwinkel α durch die geg. Belastungen.

geg.:

Dichtungskraft $F_{Di} = 2{,}5 \cdot 10^5 \,\frac{N}{m}$

Schraubenkraft $F_S = 3 \cdot 10^4 \,\frac{N}{m}$

Deckelgewicht $m = 500\ kg$

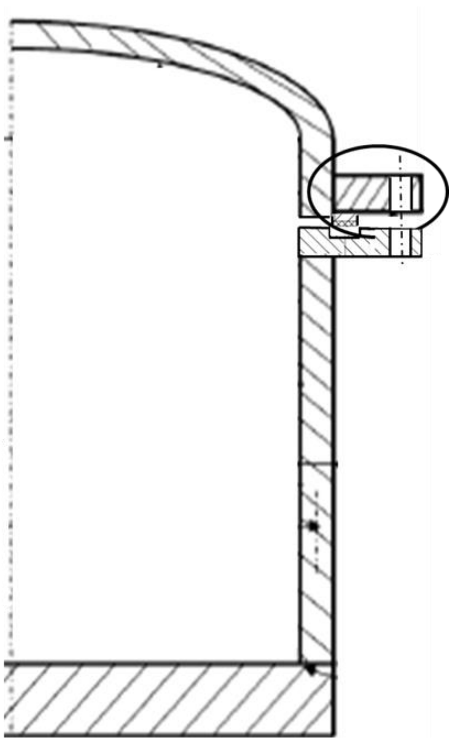
$E = 210\ kN/mm^2$

$p = 50\ bar$

$r_i = 1000\ mm$

$r_a = 1100\ mm$

$e = 30\ mm$



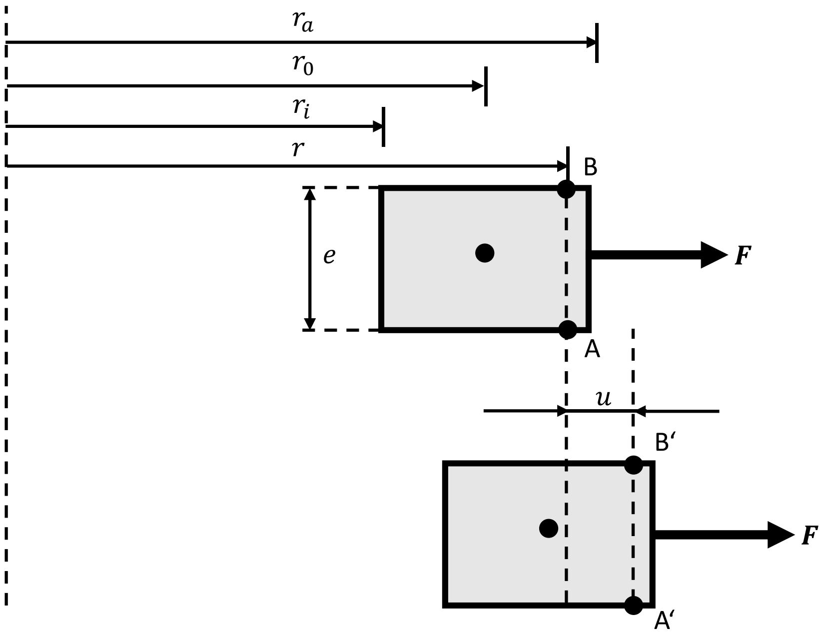
Literatur: Erwin Hake, Statik der Flächentragwerke, Springer-Verlag, 2007
Kapitel 4: Der Kreisring unter rotationssymmetrischer Belastung

a) Nennen Sie die allgemeinen Annahmen, die gelten müssen, damit ein Problem als Kreisring behandelt werden darf

- Radienverhältnis $1 < \frac{r_a}{r_i} \leq 1{,}25$
- annähernd quadratischer Querschnitt
- alle Spannungen gegen über σ_Φ vernachlässigbar
- Verformungen: radiale Verschiebung u und Verdrehung um Winkel α
- Belastungen und Verformungen über den Querschnitt konstant
- Größen auf Flächenschwerpunkt bezogen ($r_0 = (r_i + r_a)/2$)

b) Leiten Sie die Ausdrücke für die Verschiebung u, den Verdrehwinkel α, und die Spannung σ_Φ unter Verwendung der Annahmen aus a) für eine äußere Kraft F in r-Richtung und ein äußeres Biegemoment M her

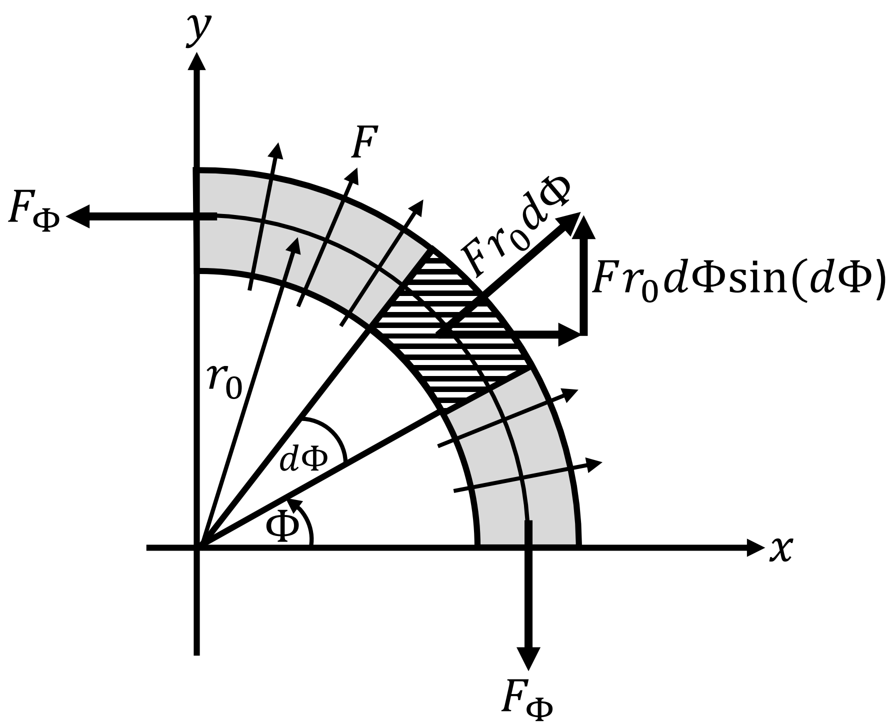
Kreisringgleichungen für äußere Kraft F in r-Richtung



$$\varepsilon_\Phi = \frac{2\pi(r+u) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r} \approx \frac{u}{r_0}$$ Gleichung 1

$$F_\Phi = \int_A \sigma_\Phi \, dA = \sigma_\Phi \cdot A$$

Von außen eingebrachte Kraft F auf ein differentielles Element bezogen → für absoluten Wert Integration um den Viertelring und gleichsetzen mit innerer (Linien-)Kraft



$$F_\Phi = \int_0^{\pi/2} F\, r_0 \sin(\Phi)\ \mathrm{d}\Phi = F \cdot r_0 [-\cos\Phi]_0^{\frac{\pi}{2}} = Fr_0\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos(0)\right)$$

$$F_\Phi = F \cdot r_0$$ <u>Gleichung 2</u>

Gleichung 1 und 2 gleichsetzen:

$$\sigma_\Phi = \frac{F \cdot r_0}{A}$$

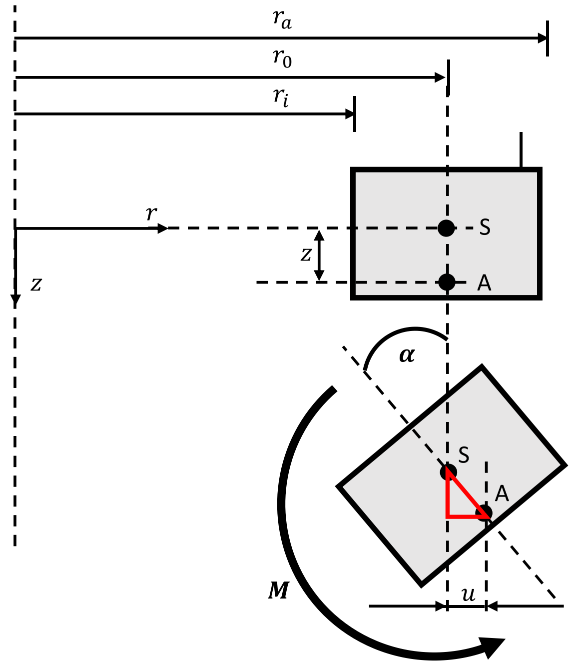
Hooke’sches Gesetz für dreiachsigen Spannungszustand:

$\varepsilon_\Phi = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_\Phi - \cancel{\nu\sigma_r} - \cancel{\nu\sigma_z})$ Annahme Kreisring: alle Spannungen gegen über σ_ϕ vernachlässigbar

$$\varepsilon_\Phi = \frac{1}{E} \cdot \sigma_\Phi \rightarrow \frac{u}{r_0} = \frac{1}{E} \cdot \frac{F \cdot r_0}{A}$$

$$u = \frac{F \cdot r_0^2}{E \cdot A}$$

Kreisringgleichungen für äußeres Moment



$\varepsilon_\Phi = \frac{u}{r_0}$ und aus Zeichung oben links $\frac{u}{z} = \sin(\alpha) \approx \alpha$ gilt für kleine α

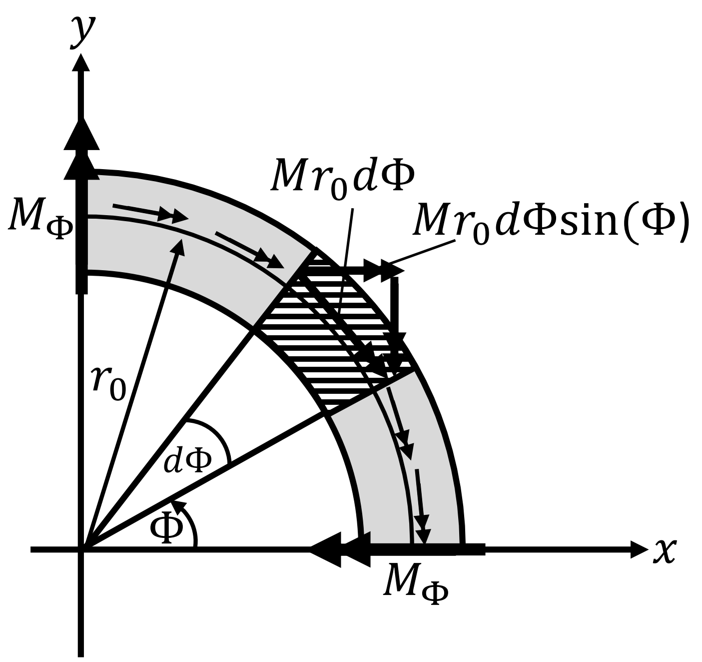
$\varepsilon_\Phi = \frac{z \cdot \alpha}{r_0}$ <u>Gleichung 1</u>

$$M_\Phi = \int_A \sigma_\Phi(z) \cdot z\, dA = \iint_{r\,z} \sigma_\Phi(z) \cdot z\, dzdr = \int_{r_i}^{r_a} \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_\Phi \cdot \frac{z}{e/2} \cdot z\, drdz = (r_a - r_i) \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_\Phi \cdot \frac{z}{e/2} \cdot z\, dz$$

$M_\Phi = (r_a - r_i) \cdot \frac{\sigma_\Phi}{e/2} \int_{-e/2}^{e/2} z^2\, dz = (r_a - r_i) \cdot \frac{\sigma_\Phi}{e/2} \cdot \frac{e^3}{12} = I \cdot \frac{\sigma_\Phi}{e/2}$ <u>Gleichung 2</u>

mit Flächenträgheitsmoment $I = (r_a - r_i) \cdot \frac{e^3}{12}$

Von außen eingebrachtes Moment M auf ein differentielles Element bezogen → für absoluten Wert Integration um Viertelring und gleichsetzen mit innerem Moment



Momentenbilanz um den Ring in x Richtung (siehe Bild)

$$M_\Phi = \int_0^{\pi/2} M\, r_0 \sin(\Phi)\ \mathrm{d}\Phi = M\, r_0[-\cos\Phi]_0^{\frac{\pi}{2}} = M\, r_0\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos(0)\right))$$

$$M_\Phi = M \cdot r_0$$

Gleichsetzen mit Gleichung 2:

$$\sigma_\Phi = \frac{M \cdot r_0}{I} \cdot \frac{e}{2}$$ <u>Gleichung 3</u>

Hooke'sches Gesetz für dreiachsigen Spannungszustand:

$\varepsilon_\Phi = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_\Phi - \cancel{\nu\sigma_r} - \cancel{\nu\sigma_z})$ Annahme Kreisring: alle Spannungen gegen über σ_ϕ vernachlässigbar

$\varepsilon_\Phi = \frac{1}{E} \cdot \sigma_\Phi$ einsetzen Gleichung 1 mit $z = {}^{e}/_{2}$ (Größen auf Flächenschwerpunkt bezogen) und 3:

$$\frac{\cancel{{}^{e}/_{2}} \cdot \alpha}{r_0} = \frac{M \cdot r_0}{I} \cdot \frac{\cancel{e}}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{E}$$

$$\alpha = \frac{M\, r_0^2}{E \cdot I}$$

c) Überprüfen Sie, ob auf Basis des Radienverhältnisses die Betrachtung des Anschweißflansches als Kreisring gerechtfertigt ist.

$1 < \frac{r_a}{r_i} \leq 1{,}25 \Rightarrow \frac{r_a}{r_i} = \frac{1100}{1000} = 1{,}1$ Bedingung erfüllt!

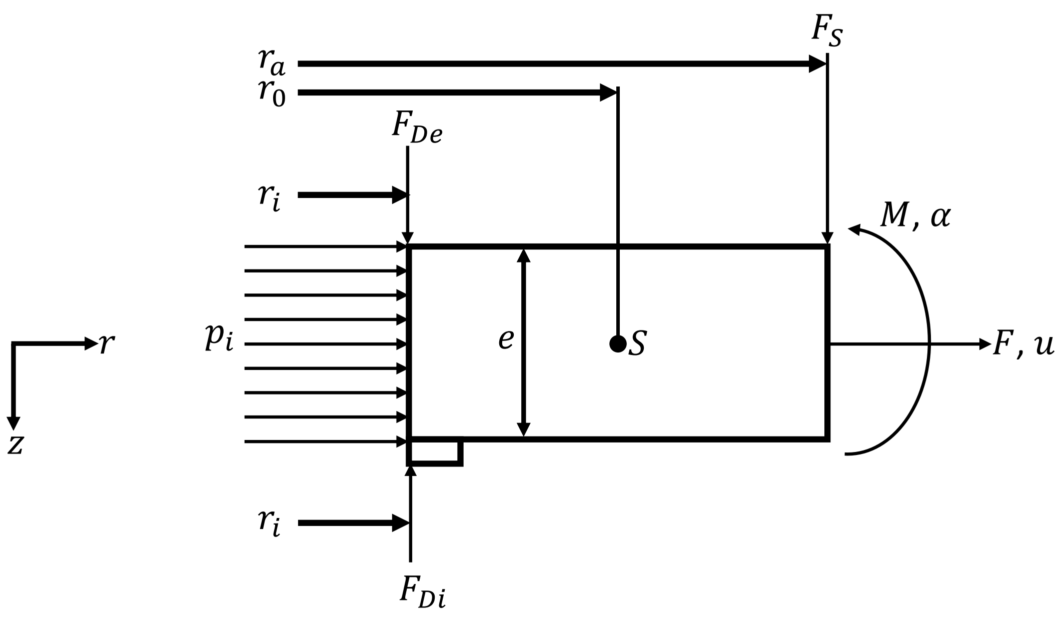
$$r_0 = \frac{r_a + r_i}{2} = \frac{(1100 + 1000)mm}{2} = 1050mm$$

d) Schneiden Sie den unten gezeigten Flansch frei und tragen Sie alle Belastungen an. Gehen Sie hier davon aus, dass sich die Schrauben-, sowie die Dichtungskraft, als Gleitlager ersetzen lassen. Die Schweißnaht soll nur soweit berücksichtigt werden, dass auf den Flansch das Gewicht des Deckels drückt.

Weiterhin soll vereinfacht angenommen werden, dass die Schweißnaht und die Dichtung sich an der Innenkante des Ringes befinden. Die Schraubenkraft wirkt direkt an der Außenkante.

Ermitteln Sie entsprechend den allgemeinen Gleichungen die Verschiebung u und den Verdrehwinkel α durch die geg. Belastungen.

Freischneiden und Antragen aller Kräfte



Kräftegleichgewicht in radialer Richtung:

$$F \cdot 2\pi r_0 = p_i \cdot 2\pi r_i e$$

$$F = p \cdot e \frac{r_i}{r_0}$$

$$F = 5 \frac{N}{mm^2} \cdot 30\ mm \frac{1000\ mm}{1050\ mm} = 142{,}9\ \frac{N}{mm} = 1{,}43 \cdot 10^5 \frac{N}{m}$$

Berechnung der Verschiebung u:

$$u = \frac{F \cdot r_o^2}{E \cdot A} = \frac{142{,}9 \frac{N}{mm} \cdot 1050^2\ mm^2}{210000 \frac{N}{mm^2} \cdot (1100\ mm - 1000\ mm) \cdot 30\ mm} = 0{,}25\ mm$$

Resultierendes Ringmoment aus einer Momentenbilanz um den mittleren Umfang bei r_0

$$0 = M \cdot 2\pi r_0 - F_{Di} \cdot 2\pi r_i (r_0 - r_i) + F_{De} \cdot 2\pi r_i (r_0 - r_i) - F_S \cdot 2\pi r_a (r_a - r_0)$$

$$M = F_{Di} \cdot \frac{r_i (r_0 - r_i)}{r_0} - F_{De} \cdot \frac{r_i (r_0 - r_i)}{r_0} + F_S \cdot \frac{r_a (r_a - r_0)}{r_0}$$

Bestimmung der Gewichts-/Deckelkraft

$$F_{De} = \frac{mg}{2\pi r_i} = \frac{500\ kg \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2}}{2\pi \cdot 1\ m} = 780{,}7 \frac{N}{m}$$

Einsetzen der Kräfte:

$$M = 2{,}5 \cdot 10^5 \frac{N}{m} \cdot \frac{1\ m \cdot (1{,}05\ m - 1\ m)}{1{,}05\ m} - 780{,}7 \frac{N}{m} \cdot \frac{1\ m \cdot (1{,}05\ m - 1\ m)}{1{,}05\ m} + 3 \cdot 10^4 \frac{N}{m} \cdot \frac{1{,}1\ m \cdot (1{,}1\ m - 1{,}05\ m)}{1{,}05\ m}$$

$$M = 13439\ N$$

Flächenträgheitsmoment

$$I = (r_a - r_i) \frac{e^3}{12} = (1{,}1\ m - 1{,}0\ m) \frac{0{,}03^3 m^3}{12} = 2{,}25 \cdot 10^{-7}\ m^4$$

Berechnung des Verdrehunsgwinkels:

$$\alpha = \frac{M r_0^2}{EI} = \frac{13439\ N \cdot 1{,}05^2 m^2}{210 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2} \cdot 2{,}25 \cdot 10^{-7}\ m^4} = 0{,}314$$