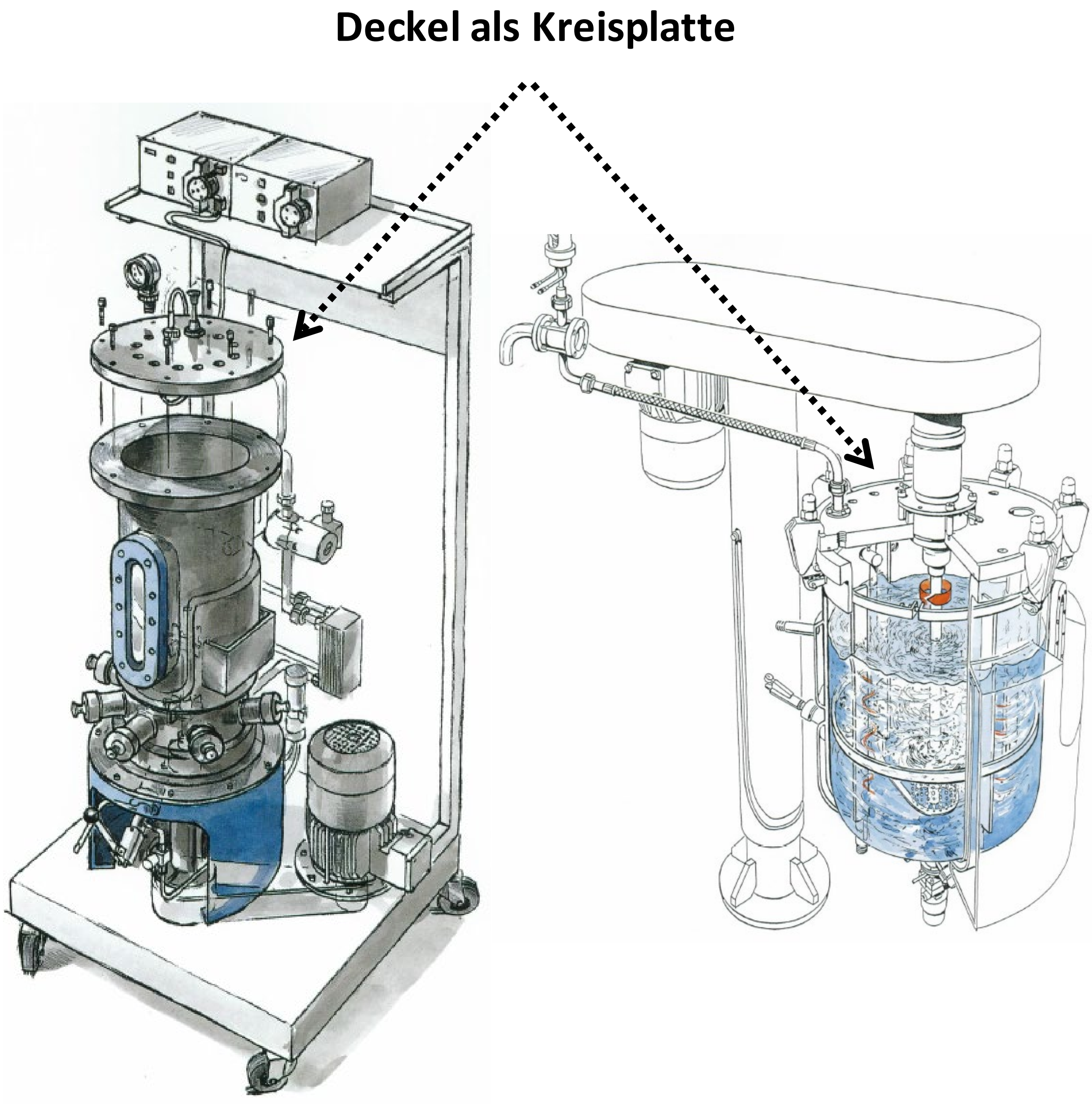
3.2. Übung
Plattentheorie



Aufgabe 3.2 Die Durchbiegung der oben gezeigten Behälterdeckel soll mit Hilfe der Kirchhoff`schen Plattentheorie untersucht werden. In den Behältern herrscht ein Unterdruck, so dass ein von außen wirkender Überdruck p angetragen wird. Dieser soll über der gesamten Plattenbreite konstant wirken.

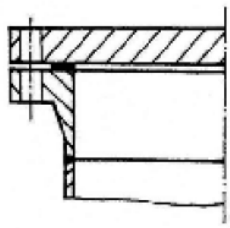
a) Nennen Sie die Annahmen, unter denen man die Kirch'hoffsche Plattentheorie verwenden darf.

b) Zeichnen Sie ein differentielles Element der dünnen Kreisplatte und stellen Sie die differentiellen Bilanzen um die Tangente T und in z-Richtung auf. Vereinfachen Sie diese und leiten Sie mit den angegebenen Ausdrücken für die Momente die DGL der Kreisplatte her.

c) Durch Berücksichtigung der Schraubenkräfte soll sich die Kreisplatte an dieser Stelle nicht bewegen können. Daher wird hier vereinfacht eine feste Randeinspannung angenommen. Bestimmen Sie Durchbiegungsverlauf w(r).

d) Ohne Berücksichtigung der Schraubenkräfte liegt der Deckel lediglich auf dem Zylinder auf. Daher wird hier vereinfacht eine Gleitlagerung am Rand angenommen. Bestimmen Sie Durchbiegungsverlauf w(r).

e) Bestimmen Sie aus dem Durchbiegungsverlauf w(r) aus Aufgabenteil c) die Spannungen σ_Φ und σ_r. Verwenden Sie die Schubspannungshypothese, um zu überprüfen, ob der Deckel ausreichend gegen die Belastung des Innendrucks ausgelegt ist. Nehmen Sie hier σ_ϕ als σ_1 an.



$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right] = -\frac{F_{rz}}{B} \text{ mit Biegesteifigkeit } B = \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$\sigma_\Phi = -\frac{Ee}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \nu\,\frac{d^2w}{dr^2}\right) \qquad \sigma_r = -\frac{Ee}{1-\nu^2}\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\;\frac{dw}{dr}\right)$$

Geg.:

$e = 50\,mm$ $\quad E = 210\,\frac{kN}{mm^2}$ $\quad \nu = 0{,}2$

$r_a = 1\,m$ $\quad p = 2\,bar$ $\quad S = 1{,}5$

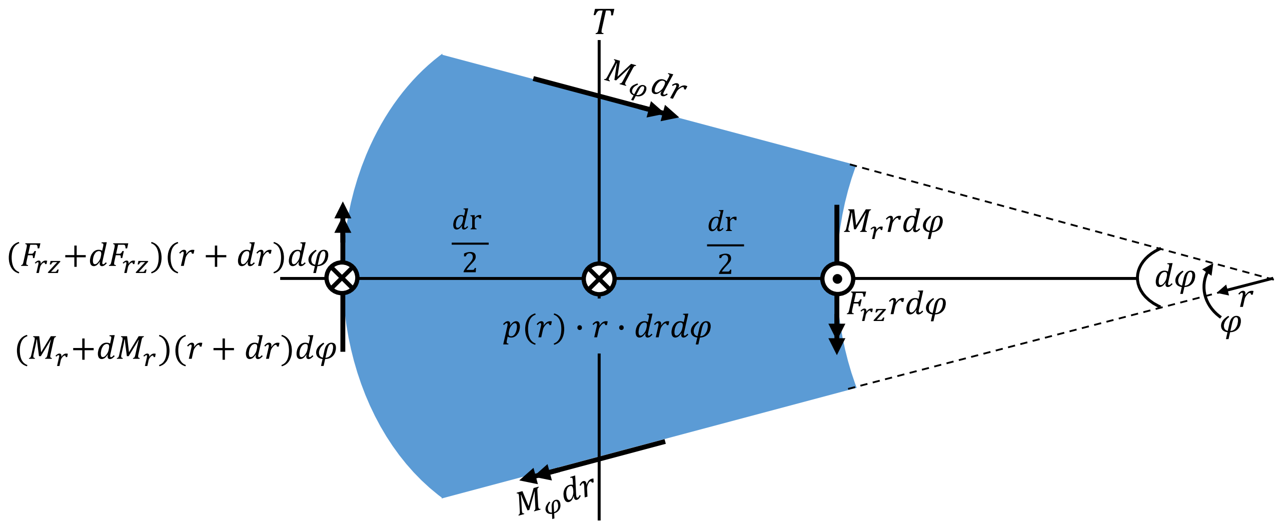
$K = 210\,N/mm^2$

Lösung:

a) Nennen Sie die Annahmen, unter denen man die Kirch'hoffsche Plattentheorie verwenden darf.

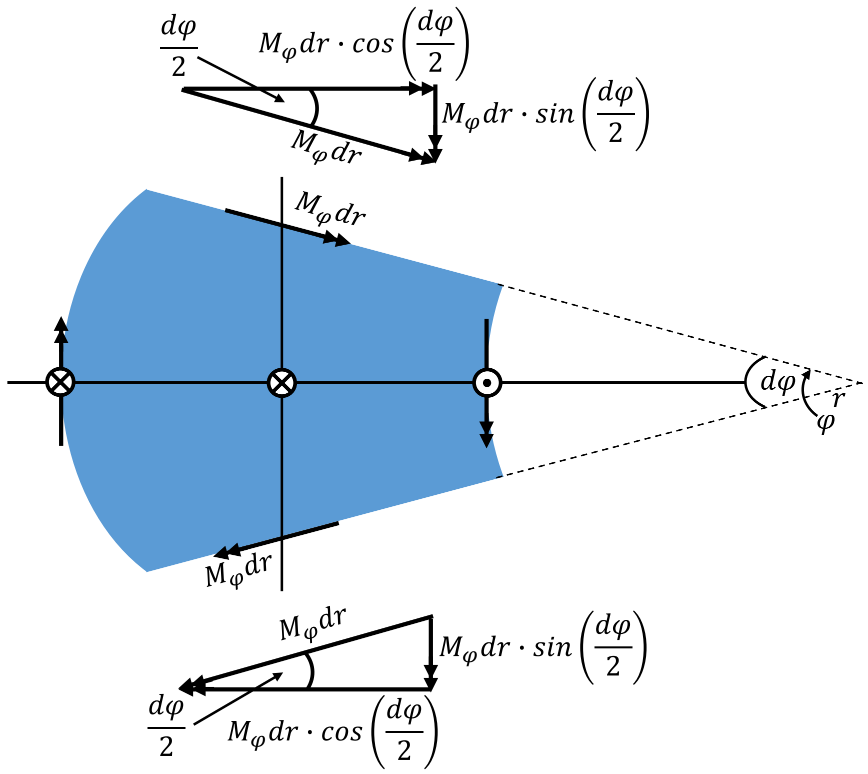
1. Plattendicke $e \ll r_a$ Außenradius
2. $e = konst.$ über den Radius
3. Normalspannung σ_z, senkrecht zur Plattenoberfläche ist vernachlässigbar
4. Durchbiegung w ist klein im Vergleich zu e
5. Elastische Verformung

b) Zeichnen Sie ein differentielles Element der dünnen Kreisplatte und stellen Sie die differentiellen Bilanzen um die Tangente T und in z-Richtung auf. Vereinfachen Sie diese und leiten Sie mit den angegebenen Ausdrücken für die Momente die DGL der Kreisplatte her.



Gleichgewichtsbetrachtung um die Tangente T → $\sum M_T = 0$

$M_\varphi dr$ hat auch einen Anteil in T-Richtung. Deshalb muss $M_\varphi dr$ auf beiden Seiten des differentiellen Elementes zerlegt werden, um eine Bilanz in T-Richtung aufstellen zu können.



Momentenbilanz um Tangente T:

$$-M_r r d\varphi + (M_r + dM_r)(r + dr)d\varphi - F_{rz} r d\varphi \frac{dr}{2} - (F_{rz} + dF_{rz})(r + dr)d\varphi \frac{dr}{2} - 2\, M_\varphi dr \cdot sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) = 0$$

Ausmultiplizieren:

$$-M_r r d\varphi + (M_r r + M_r dr + dM_r r + dM_r dr)d\varphi - F_{rz} r d\varphi \frac{dr}{2} - (F_{rz} r + F_{rz} dr + dF_{rz} r + dF_{rz} dr)d\varphi \frac{dr}{2} - 2\, M_\varphi dr \cdot sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) = 0$$

mit Voraussetzungen $\sin(\alpha) \approx \alpha$ und Anwendung der Produktregel $M_r dr + dM_r r = d(M_r r)$ und $F_{rz} dr + dF_{rz} r = d(F_{rz} r)$ folgt:

$$-M_r r d\varphi + M_r r d\varphi + d(M_r r)d\varphi + dM_r dr d\varphi - F_{rz} r \frac{dr}{2} d\varphi - F_{rz} r \frac{dr}{2} d\varphi - d(F_{rz} r)\frac{dr}{2} d\varphi - M_\varphi dr d\varphi = 0$$

Multiplikation von drei differentiellen Größen sei vernachlässigbar klein $d(F_{rz} r)\frac{dr}{2} d\varphi \approx 0$ und $dM_r dr d\varphi \approx 0$ und kürzen von $d\varphi$:

$$d(M_r r) - F_{rz} r dr - M_\varphi dr = 0$$

$$\frac{d}{dr}(M_r r) - F_{rz} r - M_\varphi = 0$$

<u>Gleichung 1</u>

Gleichgewichtsbetrachtung in z-Richtung $\sum F_z = 0$

$$p(r) r d\varphi dr + (F_{rz} + dF_{rz})(r + dr) d\varphi - F_{rz} r d\varphi = 0$$

Multiplikation von drei differentiellen Größen sei vernachlässigbar klein $dF_{rz} dr d\varphi \approx 0$ und kürzen von $d\varphi$.

$$p(r) r dr + F_{rz} dr + dF_{rz} r = 0$$

Produktregel $F_{rz} dr + dF_{rz} r = d(F_{rz} r)$

$$p(r) r dr + d(F_{rz} r) = 0$$

$$\frac{d}{dr}(F_{rz} r) + p(r) = 0$$ Gleichung 2

Aus dem Hooke'schen Gesetz: $\sigma_r = -\frac{E \cdot z}{1-\nu^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + \frac{\nu}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)$ und $\sigma_\Phi = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} + \nu \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2}\right)$

$$M_r = \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_r \cdot z \, \mathrm{d}z = -\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + \frac{\nu}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)\int_{-e/2}^{e/2} z^2 \mathrm{d}z$$

$$M_r = -\left(\frac{E}{1-\nu^2}\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + \frac{\nu}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)\left[\frac{z^3}{3}\right]_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} = \cdots \left[\frac{e^3}{12}\right]$$

$M_r = -B\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + \frac{\nu}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)$ mit Biegesteifigkeit $B = \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)}$ Gleichung 3

Analog:

$$M_\Phi = \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_\Phi \cdot z \, \mathrm{d}z = -\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} + \nu\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2}\right)\int_{-e/2}^{e/2} z^2 \mathrm{d}z$$

$M_\Phi = -B\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} + \nu\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2}\right)$ mit Biegesteifigkeit $B = \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)}$ Gleichung 4

Gleichung 3 und 4 einsetzen in Gleichung 1:

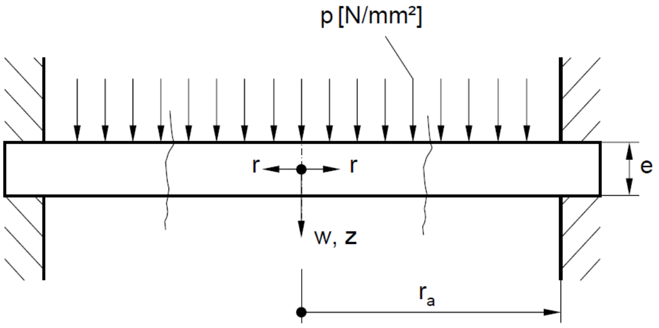
$$\frac{d}{dr}\left(-B\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + \frac{\nu}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right) \cdot r\right) - F_{rz} r - \left(-B\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} + \nu\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2}\right)\right) = 0$$

$$-B\left[\frac{d^3 w}{dr^3} \cdot r + \frac{d^2 w}{dr^2} + \cancel{\nu \cdot \frac{d^2 w}{dr^2}} - \frac{1}{r}\frac{dw}{dr} \cancel{- \nu \frac{d^2 w}{dr^2}}\right] - F_{rz} \cdot r = 0$$

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right] = -\frac{F_{rz}}{B}$$

DGL der Kreisplatte

c) Durch Berücksichtigung der Schraubenkräfte soll sich die Kreisplatte an dieser Stelle nicht bewegen können. Daher wird hier vereinfacht eine feste Randeinspannung angenommen. Bestimmen Sie Durchbiegungsverlauf w(r).



Ermittlung der homogenen Lösung:

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw_h}{dr}\right)\right] = 0$$

$$\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw_h}{dr}\right)\right] = a_1$$

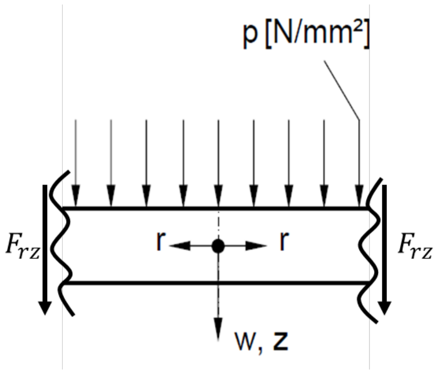
$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw_h}{dr}\right) = a_1 \cdot r$$

$$r\frac{dw_h}{dr} = \frac{a_1}{2} \cdot r^2 + a_2$$

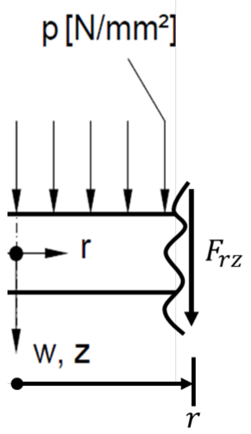
$$\frac{dw_h}{dr} = \frac{a_1}{2} \cdot r + \frac{a_2}{r}$$

$$w_h(r) = \frac{a_1}{4} \cdot r^2 + a_2 \ln(r) + a_3$$

Für die partikuläre Lösung ist es notwendig F_{rz} zu bestimmen. Dafür wird über die Schnittbetrachtung an der Stelle r der Querkrafterlauf $F_{rz}(r)$ bestimmt.



Da es sich hier um ein rotationssymmetrisches Problem handelt, reicht eine Betrachtung zwischen 0 und r aus.



$$\sum F_z = 0$$

$$p \cdot \frac{\pi}{2} r^2 + F_{rz} \cdot \pi r = 0$$

$$F_{rz} = -\frac{p \cdot r}{2}$$

Bei F_{rz} handelt es sich um eine Linienkraft mit der Einheit N/m, die auf den Umfang wirkt!

Der Druck p hingegen wirkt auf die Oberfläche der Platte.

Bestimmung der partikulären Lösung mit dem bestimmten Querkraftverlauf:

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw_p}{dr}\right)\right] = +\frac{p \cdot r}{2B}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw_p}{dr}\right) = \frac{p \cdot r^2}{4B}$$

$$r\frac{dw_p}{dr} = \frac{p \cdot r^4}{16B}$$

$$w_p = \frac{p \cdot r^4}{64B}$$

Die Gesamtlösung lautet damit:

$$w(r) = w_h + w_p = \frac{p \cdot r^4}{64B} + \frac{a_1}{4} r^2 + a_2 \ln(r) + a_3$$

$$\frac{dw}{dr} = \frac{p \cdot r^3}{16B} + \frac{a_1}{2} r + \frac{a_2}{r}$$

Bestimmung der Parameter a_1, a_2 und a_3 durch Randbedingungen

Für feste Randeinspannungen gilt:

RB 1: $w(r = r_a) = 0$

RB 2: $\left.\frac{dw}{dr}\right|_{r=r_a} = 0$

RB 3: $\left.\frac{dw}{dr}\right|_{r=0} = 0$

$\frac{dw}{dr} = \frac{p \cdot r^3}{16B} + 2a_1 r + \frac{a_2}{r}$ kann bei $r = 0$ nur gleich Null werden, wenn $a_2 = 0$ ist, da ansonsten durch Null geteilt werden würde.

RB 1: $w(r = r_a) = 0$

$0 = \frac{p \cdot r_a{}^4}{64B} + \frac{a_1}{4} r_a{}^2 + a_3$

$$a_3 = -\frac{p \cdot r_a{}^4}{64B} - \frac{a_1}{4} r_a{}^2$$

RB 2: $\left.\frac{dw}{dr}\right|_{r=r_a} = 0$

$$0 = \frac{p \cdot r_a{}^3}{16B} + \frac{a_1 r_a}{2}$$

$$a_1 = -\frac{p \cdot r_a{}^2}{8B}$$

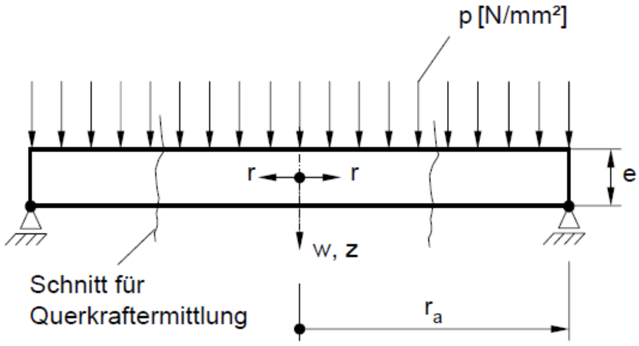
Einsetzen von a_1 in a_3:

$$a_3 = -\frac{p \cdot r_a{}^4}{64B} - \frac{a_1}{4} r_a{}^2 = -\frac{p \cdot r_a{}^4}{64B} - \frac{r_a{}^2}{4}\left(-\frac{p \cdot r_a{}^2}{8B}\right) = -\frac{p \cdot r_a{}^4}{64B} + \frac{2 \cdot p \cdot r_a{}^4}{64B} = \frac{p \cdot r_a{}^4}{64B}$$

Insgesamt ergibt sich dann:

$$w(r) = \frac{p \cdot r^4}{64B} + \frac{1}{4}\left(-\frac{p \cdot r_a{}^2}{8B}\right) r^2 + \frac{p \cdot r_a{}^4}{64B} = \frac{p}{64B}(r^4 - 2r_a{}^2 r^2 + r_a{}^4) = \frac{p}{64B}(r^2 - r_a{}^2)^2 = \frac{p r_a{}^4}{64B}\left(\left(\frac{r}{r_a}\right)^2 - 1\right)^2$$

d) Ohne Berücksichtigung der Schraubenkräfte liegt der Deckel lediglich auf dem Zylinder auf. Daher wird hier vereinfacht eine Gleitlagerung am Rand angenommen. Bestimmen Sie Durchbiegungsverlauf w(r).



Querkraftverlauf, homogene und partikuläre Lösung wie in Aufgabenteil c)

Allgemeine Lösung: $w = \frac{p \cdot r^4}{64B} + a_1 r^2 + a_2 \ln(r) + a_3$

Bestimmung der Parameter a_1, a_2 und a_3 durch Randbedingungen

Für Gleitlager gilt:

RB 1: $M_r(r = r_a) = 0$

RB 2: $w(r = r_a) = 0$

RB 3: $\left.\frac{dw}{dr}\right|_{r=0} = 0$

$\frac{dw}{dr} = \frac{p \cdot r^3}{16B} + 2a_1 r + \frac{a_2}{r}$ kann bei $r = 0$ nur gleich Null werden, wenn $a_2 = 0$ ist, da ansonsten durch Null geteilt werden würde.

RB 1:

$$M_r = -B\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}\right)$$

$$\frac{dw}{dr} = \frac{pr^3}{16B} + 2a_1 r$$

$$\frac{d^2w}{dr^2} = \frac{3pr^2}{16B} + 2a_1$$

$$0 = -B\left(\frac{3pr^2}{16B} + 2a_1 + \frac{\nu}{r}\left(\frac{pr^3}{16B} + 2a_1 r\right)\right) = \frac{pr^2}{32B}(3 + \nu) + a_1(1 + \nu)$$

$$a_1 = -\frac{pr_a^2(3 + \nu)}{32B(1 + \nu)}$$

RB 2:

$0 = \frac{p \cdot r_a^4}{64B} + a_1 r_a^2 + a_3$

Einsetzen von a_1:

$$0 = \frac{p \cdot r_a^4}{64B} + \left(-\frac{pr_a^2(3+v)}{32B(1+v)}\right) r_a^2 + a_3 = \frac{p \cdot r_a^4}{64B} - \frac{2 \cdot pr_a^4(3+v)}{2 \cdot 32B(1+v)} + a_3$$

$$0 = \frac{p \cdot r_a^4}{64B}\left(1 - 2 \cdot \frac{(3+v)}{(1+v)}\right) + a_3 = \frac{p \cdot r_a^4}{64B}\frac{(-5-v)}{(1+v)} + a_3$$

$$a_3 = \frac{pr_a^4}{64B}\frac{5+v}{1+v}$$

$$w(r) = \frac{p \cdot r^4}{64B} + \left(-\frac{pr_a^2(3+v)}{32B(1+v)}\right) r^2 + \frac{pr_a^4}{64B}\frac{5+v}{1+v}$$

$$w(r) = \frac{pr_a^4}{64B}\left[\left(\frac{r}{r_a}\right)^4 - 2\frac{3+v}{1+v}\left(\frac{r}{r_a}\right)^2 + \frac{5+v}{1+v}\right]$$

e) Bestimmen Sie aus dem Durchbiegungsverlauf w(r) aus Aufgabenteil c) die Spannungen σ_Φ und σ_r. Verwenden Sie die Schubspannungshypothese, um zu überprüfen, ob der Deckel ausreichend gegen die Belastung des Innendrucks ausgelegt ist.

Aus c) $w(r) = \frac{p}{64B}(r^4 - 2{r_a}^2 r^2 + {r_a}^4)$

Aus der Aufgabenstellung: $\sigma_\Phi = -\frac{Ee}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \nu\,\frac{d^2w}{dr^2}\right)$ $\qquad \sigma_r = -\frac{Ee}{1-\nu^2}\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\,\frac{dw}{dr}\right)$

$$\frac{dw}{dr} = \frac{p}{64B}(4r^3 - 4{r_a}^2 r) = \frac{p}{16B}(r^3 - {r_a}^2 r)$$

$$\frac{d^2w}{dr^2} = \frac{p}{16B}(3r^2 - {r_a}^2)$$

Einsetzen in Spannungen:

$$\sigma_r = -\frac{Ee}{1-\nu^2}\left(\frac{p}{16B}(3r^2 - {r_a}^2) + \frac{\nu}{r}\left(\frac{p}{16B}(r^3 - {r_a}^2 r)\right)\right)$$

$$\sigma_r = -\frac{Eep}{16B(1-\nu^2)}\left((3r^2 - {r_a}^2) + \frac{\nu}{r}\,(r^3 - {r_a}^2 r)\right)$$

$$\sigma_r = -\frac{Eep}{16B(1-\nu^2)}\left((3r^2 - r_a{}^2) + \nu\,(r^2 - r_a{}^2)\right) = -\frac{Eep}{16B(1-\nu^2)}\left(r^2(3+\nu) - r_a{}^2(1+\nu)\right)$$

$$\sigma_r = -\frac{(1+\nu)\cdot Eep\cdot r_a{}^2}{16B(1-\nu^2)}\left(\frac{r^2}{r_a{}^2}\frac{3+\nu}{1+\nu} - 1\right) = -\frac{(1+\nu)\cdot \cancel{E}ep\cdot r_a{}^2}{16\frac{\cancel{E}e^3}{12\cancel{(1-\nu^2)}}\cancel{(1-\nu^2)}}\left(\frac{r^2}{r_a{}^2}\frac{3+\nu}{1+\nu} - 1\right)$$

$$\sigma_r = -\frac{(1+\nu)\cdot p\cdot r_a{}^2}{\frac{4}{3}e^2}\left(\frac{r^2}{r_a{}^2}\frac{3+\nu}{1+\nu} - 1\right) = -\frac{3(1+\nu)\cdot p\cdot r_a{}^2}{4e^2}\left(\frac{r^2}{r_a{}^2}\frac{3+\nu}{1+\nu} - 1\right)$$

$$\sigma_\Phi = -\frac{Ee}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{r}\left(\frac{p}{16B}(r^3 - r_a{}^2 r)\right) + \nu\left(\frac{p}{16B}(3r^2 - r_a{}^2)\right)\right)$$

$$\sigma_\Phi = -\frac{Ee}{1-\nu^2}\left(\left(\frac{p}{16B}(r^2 - r_a{}^2)\right) + \nu\left(\frac{p}{16B}(3r^2 - r_a{}^2)\right)\right)$$

$$\sigma_\Phi = -\frac{Eep}{16B(1-\nu^2)}\left((r^2 - r_a{}^2) + \nu\,(3r^2 - r_a{}^2)\right) = -\frac{Eep}{16B(1-\nu^2)}\left(r^2(1+3\nu) - r_a{}^2(1+\nu)\right)$$

$$\sigma_\Phi = -\frac{Eep\cdot r_a{}^2}{16B(1-\nu^2)}\left(\frac{r^2}{r_a{}^2}\frac{1+3\nu}{1+\nu} - 1\right) = -\frac{(1+\nu)\cdot \cancel{E}ep\cdot r_a{}^2}{16\frac{\cancel{E}e^3}{12\cancel{(1-\nu^2)}}\cancel{(1-\nu^2)}}\left(\frac{r^2}{r_a{}^2}\frac{1+3\nu}{1+\nu} - 1\right)$$

$$\sigma_\Phi = -\frac{3(1+\nu)\cdot p\cdot r_a{}^2}{4e^2}\left(\frac{r^2}{r_a{}^2}\frac{1+3\nu}{1+\nu} - 1\right)$$

Die Vergleichsspannung nach der Schubspannungshypothese ist definiert als

$\sigma_v = \max\{|\sigma_1|, |\sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_3|\}$

Im vorliegenden Zweiachsigen Spannungszustand gilt:

$\sigma_{H1} \perp \sigma_{H3}$

$\sigma_1 := max\{\sigma_{H1}, \sigma_{H3}\}$

$\sigma_3 := min\{\sigma_{H1}, \sigma_{H3}\}$

$\sigma_1 > \sigma_3$

Da Laut Aufgabenstellung $\sigma_1 = \sigma_\phi$ und per Definition $\sigma_1 \perp \sigma_3$, folgt $\sigma_3 = \sigma_r$.

Es gilt $\sigma_v \leq \frac{K}{S}$ wenn die Platte ausreichend dimensioniert ist.

$\sigma_r = -\frac{3(1+\nu)\cdot p\cdot r_a{}^2}{4e^2}\left(\frac{r^2}{r_a{}^2}\frac{3+\nu}{1+\nu} - 1\right)$ fällt streng monoton zwischen 0 und r_a mit Vorzeichenwechsel

$$\sigma_r(r=0) = -\frac{3(1+\nu)\cdot p\cdot r_a{}^2}{4e^2}\left(\frac{0}{r_a{}^2}\frac{3+\nu}{1+\nu} - 1\right) = \frac{3(1+\nu)\cdot p\cdot r_a{}^2}{4e^2} = \frac{3(1+0{,}2)\cdot 2*10^5\frac{N}{m}\cdot(1m)^2}{4(0{,}05m)^2} = 72*10^6\frac{N}{m^2} = 72\frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_r(r=r_a) = -\frac{3(1+\nu)\cdot p\cdot {r_a}^2}{4e^2}\left(\frac{{r_a}^2}{{r_a}^2}\frac{3+\nu}{1+\nu}-1\right) = -\frac{3(1+\nu)\cdot p\cdot {r_a}^2}{4e^2}\left(\frac{3+\nu}{1+\nu}-1\right) = -72\frac{N}{mm^2}\left(\frac{3+0{,}2}{1+0{,}2}-1\right) = -120\frac{N}{mm^2}$$

Daraus folgt für den Betrag

$|\sigma_r| = \left|-\frac{3(1+\nu)\cdot p\cdot {r_a}^2}{4e^2}\left(\frac{r^2}{{r_a}^2}\frac{3+\nu}{1+\nu}-1\right)\right|$ ist maximal bei $r = r_a$ mit $|\sigma_r| = 120\frac{N}{mm^2}$

$\sigma_\Phi = -\frac{3(1+\nu)\cdot p\cdot {r_a}^2}{4e^2}\left(\frac{r^2}{{r_a}^2}\frac{1+3\nu}{1+\nu}-1\right)$ fällt streng monoton zwischen 0 und r_a mit Vorzeichenwechsel

$$\sigma_\Phi(r=0) = -\frac{3(1+\nu)\cdot p\cdot {r_a}^2}{4e^2}\left(\frac{0}{{r_a}^2}\frac{1+3\nu}{1+\nu}-1\right) = \frac{3(1+\nu)\cdot p\cdot {r_a}^2}{4e^2} = \frac{3(1+0{,}2)\cdot 2*10^5\frac{N}{m}\cdot(1m)^2}{4(0{,}05m)^2} = 72*10^6\frac{N}{m^2} = 72\frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_\Phi(r=r_a) = -\frac{3(1+\nu)\cdot p\cdot {r_a}^2}{4e^2}\left(\frac{{r_a}^2}{{r_a}^2}\frac{1+3\nu}{1+\nu}-1\right)$$

$$\sigma_\Phi(r=r_a) = -\frac{3(1+\nu)\cdot p\cdot {r_a}^2}{4e^2}\left(\frac{1+3\nu}{1+\nu}-1\right) = -72\frac{N}{mm^2}\left(\frac{1+3\cdot 0{,}2}{1+0{,}2}-1\right) = -24\frac{N}{mm^2}$$

Daraus folgt für den Betrag:

$|\sigma_\Phi| = \left|-\frac{3(1+\nu)\cdot p\cdot {r_a}^2}{4e^2}\left(\frac{r^2}{{r_a}^2}\frac{1+3\nu}{1+\nu}-1\right)\right|$ ist maximal bei $r = 0$ mit $|\sigma_\Phi| = 72\frac{N}{mm^2}$

$$\sigma_\Phi - \sigma_r = -\frac{3(1+\nu)\cdot p\cdot {r_a}^2}{4e^2}\left(\frac{r^2}{{r_a}^2}\frac{1+3\nu}{1+\nu}-1\right) - \left(-\frac{3(1+\nu)\cdot p\cdot {r_a}^2}{4e^2}\left(\frac{r^2}{{r_a}^2}\frac{3+\nu}{1+\nu}-1\right)\right)$$

$$\sigma_\Phi - \sigma_r = -\frac{3(1+\nu)\cdot p\cdot {r_a}^2}{4e^2}\left(\frac{r^2}{{r_a}^2}\frac{1+3\nu}{1+\nu}-1-\left(\frac{r^2}{{r_a}^2}\frac{3+\nu}{1+\nu}-1\right)\right)$$

$$\sigma_\Phi - \sigma_r = -\frac{3(1+\nu)\cdot p\cdot {r_a}^2}{4e^2}\left(\frac{r^2}{{r_a}^2}\left(\frac{1+3\nu}{1+\nu}-\left(\frac{3+\nu}{1+\nu}\right)\right)\right) = -\frac{3(1+\nu)\cdot p\cdot {r_a}^2}{4e^2}\left(\frac{r^2}{{r_a}^2}\left(\frac{1+3\nu-3-\nu}{1+\nu}\right)\right)$$

$\sigma_\Phi - \sigma_r = -\frac{3(1+\nu)\cdot p\cdot {r_a}^2}{4e^2}\left(\frac{r^2}{{r_a}^2}\left(\frac{2\nu-2}{1+\nu}\right)\right)$ steigt streng monoton zwischen 0 und r_a

$$\sigma_\Phi - \sigma_r(r=0) = -\frac{3(1+\nu)\cdot p\cdot {r_a}^2}{4e^2}\left(\frac{0}{{r_a}^2}\left(\frac{2\nu-2}{1+\nu}\right)\right) = 0\frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_\Phi - \sigma_r(r=r_a) = -\frac{3(1+\nu)\cdot p\cdot {r_a}^2}{4e^2}\left(\frac{{r_a}^2}{{r_a}^2}\left(\frac{2\nu-2}{1+\nu}\right)\right) = -72\frac{N}{mm^2}\left(\frac{2\cdot 0{,}2-2}{1+0{,}2}\right) = 96\frac{N}{mm^2}$$

Daraus folgt, dass $\sigma_v = \max\{|\sigma_1|,|\sigma_3|,|\sigma_1-\sigma_3|\} = |\sigma_r|_{r_a} = 120\frac{N}{mm^2}$

$$\sigma_v = 120\frac{N}{mm^2} \leq \frac{K}{S} = \frac{210\frac{N}{mm^2}}{1{,}5} = 140\frac{N}{mm^2}$$

Die Platte ist ausreichend dimensioniert!