

سوالات و بخش‌های ستاره‌دار (*) امتیازی هستند.

۱- سیگنال پیوسته $x(t) = \cos(2\pi f(t)t)$ را در نظر بگیرید که در آن فرکانس لحظه‌ای تابعی از زمان بوده و مقدار آن به صورت $f(t) = f_0 + \beta t^2 = 100 + 100t^2$ است (یعنی در لحظه $t=0$ فرکانس سیگنال $f = 100\text{Hz}$ بوده و با افزایش زمان به صورت مرتبه ۲ افزایش می‌یابد). با توجه به تعریف سیگنال بدیهی است در حالت ایده‌آل بایستی در طیف فرکانسی این سیگنال، در هر لحظه زمانی فقط یک فرکانس وجود داشته باشد.

الف) یک قطعه از این سیگنال به طول 2sec و با فرکانس نمونه‌برداری $f_s = 1000\text{Hz}$ تولید کنید (می‌توانید از دستور chirp استفاده کنید).

ب) چهار پنجره زمانی مستطیلی (rectwin)، مثلثی (triang)، گوسی (gausswin) و همینگ (hamming) به طول $L = 128$ تولید کنید و شکل زمانی و تبدیل فرکانسی هر یک را رسم کرده و مقایسه کنید (می‌توانید از دستور wvtool استفاده کنید).

پ) می‌خواهیم با محاسبه Short Time Fourier Transform (STFT) سیگنال، طیف فرکانسی سیگنال را رسم کنیم. با استفاده از دستور spectrogram و با در نظر گرفتن طول پنجره $L = 128$ ، تعداد نقاط در پنجره همپوشان $N_{\text{overlap}} = 0$ ، تعداد نقاط DFT (یا FFT) $nfft = L = 128$ و $f_s = 1000\text{Hz}$ ، طیف زمان-فرکانس سیگنال را با استفاده از هر یک از پنجره‌های قسمت (ب)، به دست آورده و رسم کنید (محور زمان و فرکانس به ترتیب بر حسب ثانیه و هرتز نمایش داده شوند). نتایج به دست آمده از چهار پنجره را با هم مقایسه کنید.

ت) با در نظر گرفتن یکی از چهار پنجره قسمت (ب) و $L = 128$ ، $nfft = L = 128$ ، تعداد نقاط همپوشان را تغییر داده و اثر این تغییر را بررسی کنید ($N_{\text{overlap}} = 0, 64, 127$).

ث) برای یکی از چهار پنجره قسمت (ب)، اثر تغییر طول پنجره $L = 32, 128, 512$ را با در نظر گرفتن $nfft = L$ و $N_{\text{overlap}} = L - 1$ بررسی کنید.

ج) برای یکی از چهار پنجره قسمت (ب)، اثر تغییر تعداد نقاط DFT را به ازای $nfft = L, 2L, 4L$ با در نظر گرفتن $L = 128$ و $N_{\text{overlap}} = \frac{L}{2}$ بررسی کنید.

* د) با استفاده از تابع fft، تابعی برای محاسبه spectrogram سیگنال با در نظر گرفتن پنجره مستطیلی به طول L بنویسید. تابع را برای محاسبه طیف زمان-فرکانس سیگنال در چند مورد از موارد بالا امتحان کرده و با نتیجه به دست آمده از تابع spectrogram متلب مقایسه کنید.

ه) یک جمع‌بندی از نتایج به دست آمده از بخش‌های بالا ارائه دهید.

۲- یک سیگنال EEG فیلترشده به شما داده شده است (فایل NewEEGSignal.mat). طول این سیگنال ۵۱۲ نقطه بوده و فرکانس نمونه‌برداری آن $F_s=256$ Hz است.

با در نظر گرفتن این سیگنال و با استفاده از دستورهای MATLAB مانند fft و spectrogram به موارد زیر پاسخ دهید. در هر بخش باید مقیاس‌ها را به گونه‌ای تنظیم کنید که محور زمان و فرکانس به ترتیب بر حسب ثانیه (یا میلی‌ثانیه) و هرتز نمایش داده شوند.

الف) سیگنال زمانی، طیف فرکانسی (DFT) و STFT سیگنال را رسم کنید. محورهای فرکانسی را به گونه‌ای تنظیم کنید که محتوای فرکانسی به خوبی نمایش داده شود (یعنی فرکانس‌های بالا را که اطلاعات فرکانسی ندارند، حذف کنید). آیا روشی برای نمایش بهتر طیف فرکانسی می‌شناسید؟ آن را اعمال کرده و نتایج را نشان دهید.

ب) با توجه به اینکه فرکانس نمونه‌برداری نسبتاً زیاد است، فرض می‌کنیم که طیف فرکانسی به دست آمده با طیف فرکانسی سیگنال پیوسته مشابه باشد. با این فرض و با استفاده از اطلاعات به دست آمده از بخش الف)، فرکانس نمونه‌برداری را به گونه‌ای کاهش دهید (down sampling) که محتوای فرکانسی حفظ شود (نام سیگنال جدید را EEG_ds می‌گذاریم). قبل از کاهش نرخ نمونه‌برداری، از فیلتر پایین‌گذر مناسب استفاده کنید. سیگنال زمانی، طیف فرکانسی (DFT) و STFT سیگنال EEG_ds را رسم کنید و با نتایج قسمت الف) مقایسه کنید.

پ) اگر تعداد نمونه‌های سیگنال EEG_ds، N باشد، DFT‌های $\frac{N}{2}$ ، $\frac{N}{4}$ و $\frac{N}{8}$ نقطه‌ای را با در نظر گرفتن پنجره‌هایی به همان طول از ابتدای سیگنال EEG_ds به دست آورده و رسم کنید و با طیف سیگنال EEG و EEG_ds مقایسه کنید.

ت) برای هر یک از سیگنال‌های پنجره‌گذاری شده بخش (ت)، به اندازه‌ای صفر در انتهای هر یک قرار دهید که طول سیگنال برابر با N شود. برای سیگنال‌های جدید، DFT N -نقطه‌ای را محاسبه کرده و رسم کنید و با نتایج بخش‌های قبل مقایسه کنید.

ث) در مورد قدرت تفکیک فرکانسی در هر یک از بخش‌های بالا بحث کنید و اثر پنجره‌گذاری و zero-padding را بررسی کنید.

* ۳- در این سوال می‌خواهیم چگالی طیف توان مربوط به یک سیگنال را از چند طریق محاسبه کرده و با یکدیگر مقایسه کنیم. فایل NewEEGSignal.mat را خوانده و موارد زیر را انجام دهید (دقت کنید که در رسم نمودارها از لگاریتم استفاده نکنید تا بتوان آنها را با یکدیگر مقایسه کرد).

الف) خودهمبستگی سیگنال را محاسبه کرده، سپس چگالی طیف توان را به کمک آن محاسبه و رسم کنید.

ب) چگالی طیف توان را به کمک دستورات periodogram و pwelch محاسبه و رسم کنید.

ب) چگالی طیف توان بدست آمده به کمک روش‌های بالا را با یکدیگر مقایسه کنید. کدام روش‌ها جواب یکسانی دارند؟ کدام روش جواب متفاوتی دارد؟ چرا؟