

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Definición: Una *ecuación lineal o de primer grado con n incógnitas* x_1, x_2, \dots, x_n es una expresión de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \quad (1)$$

donde a_1, a_2, \dots, a_n son números reales llamados *coeficientes* y b es un número real llamado *término independiente*.

Ejemplos:

- 1) $2x + 5 = 7$ ecuación lineal de una incógnita
- 2) $2x + y = -3$ ecuación lineal de dos incógnitas
- 3) $3x + 2y - z = 1$ ecuación lineal de 3 incógnitas

Definición: Se llama *solución de la ecuación lineal con n incógnitas* a toda n – úpla (k_1, k_2, \dots, k_n) de números reales que reemplazados ordenadamente en lugar de las incógnitas x_1, x_2, \dots, x_n convierten a la expresión (1) en una identidad. Esto es:

$$a_1k_1 + a_2k_2 + \dots + a_nk_n = b$$

Se dice que k_1, k_2, \dots, k_n satisfacen la ecuación y el conjunto solución está dado por

$$S = \{(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^n : a_1k_1 + a_2k_2 + \dots + a_nk_n = b\}$$

Ejemplos:

Consideremos las ecuaciones dadas en los ejemplos anteriores:

- 1) $x = 1$ es solución de la primer ecuación pues $2 \cdot 1 + 5 = 7$
- 2) $(0, -3), (1, -5)$ son soluciones de la segunda ecuación pues

$$2 \cdot 0 + (-3) = -3 \quad \text{y} \quad 2 \cdot 1 + (-5) = -3$$

En cambio el par $(1, 2)$ no es solución pues $2 \cdot 1 + 2 \neq -3$

Sin embargo, estos dos pares no son las únicas soluciones para esta ecuación, serán solución todos los pares de la forma $(x, -3 - 2x)$. Veamos distintas maneras de expresar el mismo conjunto solución:

$$S = \{(x, -3 - 2x), x \in \mathbb{R}\}$$

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -3 - 2x\}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{-3-y}{2}, y \right), y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{-3-y}{2} \right\}$$

3) $(0, 0, -1), (1, 0, 2)$ son soluciones de la tercera ecuación. Pero esta ecuación tiene infinitas ternas que son solución. Veamos cómo hallarlas:

- Si despejamos z , $z = 3x + 2y - 1$ entonces

$$S = \{(x, y, 3x + 2y - 1), x, y \in \mathbb{R}\} \text{ o } S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 3x + 2y - 1\}$$

- Si despejamos y , $y = \frac{1+z-3x}{2}$ entonces

$$S = \left\{ \left(x, \frac{1+z-3x}{2}, z \right), x, z \in \mathbb{R} \right\} \text{ o } S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = \frac{1+z-3x}{2} \right\}$$

- Si despejamos x , $x = \frac{1+z-2y}{3}$ entonces

$$S = \left\{ \left(\frac{1+z-2y}{3}, y, z \right), y, z \in \mathbb{R} \right\} \text{ o } S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \frac{1+z-2y}{3} \right\}$$

Definición: Se llama *sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas x_1, x_2, \dots, x_n* a un conjunto finito de m ecuaciones lineales. Esto es:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (2)$$

donde los a_{ij} son números reales llamados *coeficientes* y los b_i también son números reales llamados *términos independientes*.

- Si $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ entonces el sistema se dice *homogéneo*.

Ejemplos:

$$1) \begin{cases} 2x + z = 1 \\ 2z + y = 3 \\ 2y + z = 7 \\ x + y = 5 \end{cases} \quad \text{sistema de 4 ecuaciones y 3 incógnitas, no homogéneo pues } b_1 \neq 0$$

2) $\begin{cases} 2x+3y+w=0 \\ x+y-z+3w=0 \end{cases}$ sistema de 2 ecuaciones y 4 incógnitas, *homogéneo* pues $b_1 = b_2 = 0$

3) $\begin{cases} x-2+3y=0 \\ z+2x=0 \\ -1+3z=0 \end{cases}$ sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas, no homogéneo pues b_1 y b_3 no son cero ya que $b_1 = 2$ y $b_3 = 1$

Definición: Se llama *solución de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas* a toda n -úpla (k_1, k_2, \dots, k_n) de números reales que satisfacen simultáneamente todas las ecuaciones.

El conjunto solución está dado por

$$S = \{(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^n : k_1, k_2, \dots, k_n \text{ verifican (2)}\}$$

Ejemplos:

$$1) \begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ y + z = 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} (-4, 3, 0) \text{ es solución del sistema pues verifica las dos ecuaciones,} \\ (0, 0, 1) \text{ verifica sólo la primera ecuación por lo tanto no es solución} \end{array}$$

$$2) \begin{cases} z + 3 + 2x = 0 \\ 1 + x - z = 0 \\ -x + 4z = 0 \end{cases} \quad x = -\frac{4}{3} \quad z = -\frac{1}{3} \text{ es la única solución del sistema}$$

Puede ocurrir que un sistema de ecuaciones lineales no tenga solución, en ese caso se dice que el sistema es **Incompatible**.

Si tiene solución se dice **Compatible**, pudiendo ser **Compatible Determinado** si la solución es única o **Compatible Indeterminado** si tiene más de una solución.

Si el sistema de ecuaciones es *homogéneo*, es decir

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

entonces una solución evidente es $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Esta solución se llama *solución trivial*. Si se conoce otra solución no trivial del sistema, entonces se conocen infinitas soluciones. Por lo tanto, nunca hay sistemas homogéneos incompatibles, o tienen una solución o tienen infinitas soluciones. En consecuencia, un sistema homogéneo siempre es compatible.

Ejemplos:

Veamos los siguientes sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$a) \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Despejamos } y = 3 - 2x \text{ en la primera ecuación y reemplazamos en la} \\ \text{segunda: } x - 2(3 - 2x) = 4 \text{ despejando } x = 2. \text{ Si } x = 2 \text{ entonces } y = -1 \\ \text{Luego el sistema es } \textit{compatible determinado} \text{ y su } \underline{\textit{única}} \text{ solución es } (2, -1) \end{array}$$

$$b) \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

De la primera ecuación $y = 3 - 2x$ y de la segunda $y = -1 - 2x$
Igualando: $3 - 2x = -1 - 2x$ entonces $-2x + 2x = -4$ y no existe x
en estas condiciones

Luego el sistema no tiene solución, es decir, es *incompatible*

$$c) \begin{cases} -x + y - 2 = 0 \\ 2x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

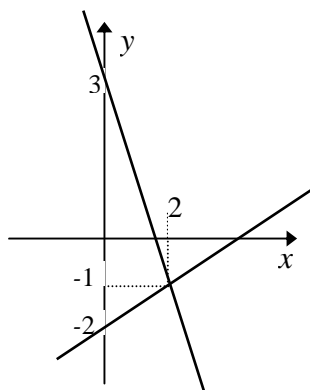
De la primera ecuación $y = x + 2$ y de la segunda $y = \frac{-2x - 4}{-2}$
entonces $x + 2 = x + 2$, es decir $0x = 0$ para todo número real x .
Luego el sistema es *compatible indeterminado* y tiene infinitas
soluciones

$$S = \{(x, x + 2), x \in \mathbb{R}\}$$

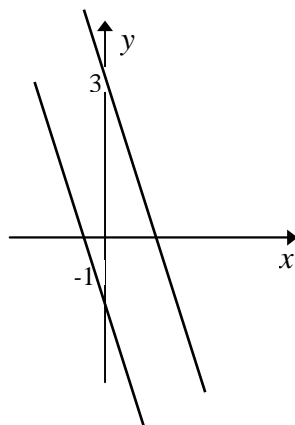
$$d) \begin{cases} x + y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación $y = -x$ y de la segunda $y = -x$ entonces
 $-x = -x$ y esta igualdad vale para cualquier número real x . Luego el
sistema es *compatible indeterminado*, tiene infinitas soluciones dadas
por $S = \{(x, -x), x \in \mathbb{R}\}$

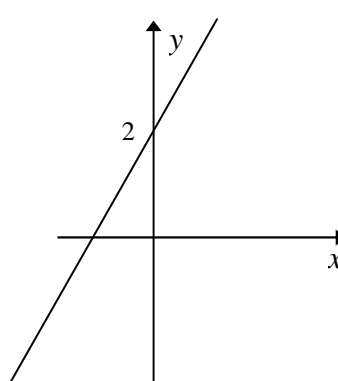
En el caso de los ejemplos anteriores (dos ecuaciones con dos incógnitas) podemos interpretarlos geométricamente de la siguiente manera:



Compatible determinado (CD)



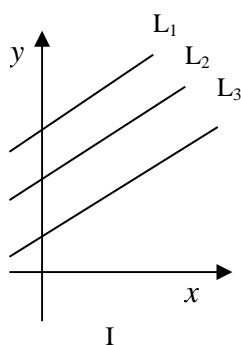
Incompatible (I)



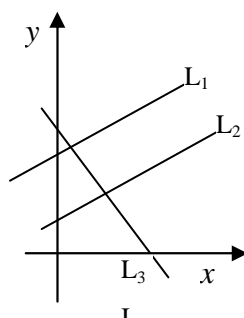
Compatible indeterminado (CI)

En el ejemplo d) el sistema es homogéneo y gráficamente es una recta de ecuación $y = -x$

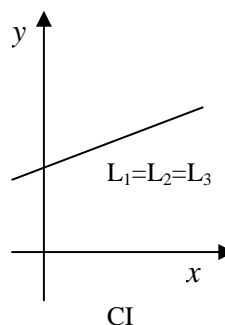
¿Qué puede suceder con un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas gráficamente?



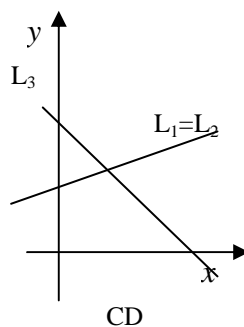
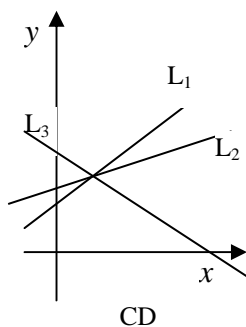
I



I



CI



En estos gráficos, ¿están considerados todos los casos posibles?

Resolución de sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas

Dado un sistema de ecuaciones lineales se plantean dos problemas:

- 1) Analizar su compatibilidad: determinar si tiene solución y el número de soluciones
- 2) Hallar la solución: encontrar las n -uplas, si las tiene, que satisfagan todas las ecuaciones del sistema

Definición: dos sistemas S_1 y S_2 de ecuaciones lineales se dicen *equivalentes* si tienen el mismo conjunto solución.

Dado un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, el objetivo es determinar un *sistema equivalente* al dado que nos permita hallar la solución completa del sistema y sea más fácil de resolver.

Una manera de obtener sistemas equivalentes al dado es aplicando *operaciones elementales* a las ecuaciones del sistema. Estas operaciones son:

- 1) Intercambiar dos ecuaciones entre sí del sistema
- 2) Reemplazar una ecuación del sistema por la multiplicación de ella por un escalar k distinto de cero
- 3) Reemplazar una ecuación del sistema por la suma de ella más otra cualquiera multiplicada por un escalar

Es decir, si a un sistema le aplicamos una cantidad finita de estas operaciones, obtenemos un nuevo sistema con las mismas soluciones que el anterior.

Observemos que al aplicar cualquiera de estas tres operaciones elementales lo único que modificamos son los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes del sistema. Por este motivo, y para simplificar la notación veremos cómo un sistema se puede representar mediante el uso de matrices.

Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales puede representarse en forma matricial de dos maneras:

1) Con una *ecuación matricial*: $AX = B$ donde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ es la matriz de los coeficientes}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ es la matriz de las incógnitas}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ es la matriz de los términos independientes}$$

pues $AX = B$ se escribe

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

2) Con la *matriz ampliada*: es la matriz de los coeficientes ampliada con los términos independientes

$$A' = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

Ejemplo:

Si el sistema es $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 6 \end{cases}$ entonces la ecuación matricial es

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}}_B$$

y la matriz ampliada es $A' = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \end{array} \right]$

Teniendo en cuenta esta notación, aplicar al sistema cualquiera de las operaciones elementales (del tipo 1, 2 ó 3) que permiten obtener sistemas equivalentes se corresponde con aplicar las operaciones elementales de fila vistas en matrices (del tipo E_1 , E_2 y E_3 según corresponda) a la matriz ampliada asociada al sistema.

El siguiente método nos da una técnica para poder resolver cualquier sistema de ecuaciones lineales.

Método de eliminación de Gauss o Gauss-Jordan

El *método de Gauss* consiste en aplicar *operaciones elementales* de filas a la matriz ampliada correspondiente al sistema de ecuaciones que queremos resolver, hasta llevarla a la forma escalonada. De esta manera, se obtiene un sistema equivalente al original, pero más sencillo de resolver que el primero.

Y en el *método de Gauss-Jordan* debemos lograr la matriz escalonada reducida.

Ejemplo 1

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ x + z = 0 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A' = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right] & \xleftarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right] & \xleftarrow{f_2 \leftrightarrow f_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right] & \xleftarrow{f_3 \leftrightarrow f_3 + (-3)f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array} \right] \\ & \xleftarrow{f_3 \leftrightarrow f_3 + (-3)f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array} \right] & \xleftarrow{f_3 \leftrightarrow f_3 + (-2)f_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \end{array} \right] & \xleftarrow{f_3 \leftrightarrow (-\frac{1}{6})f_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Observemos que en la matriz escalonada tenemos igual cantidad de incógnitas que de ecuaciones, entonces el sistema es CD. El sistema equivalente al original es

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + 2z = 1 \\ z = \frac{1}{6} \end{cases} \quad \text{de donde resulta que}$$

$$y = 1 - 2z = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$$

$$x + z = 0 \Rightarrow x = -z = -\frac{1}{6}$$

$$\text{Por lo tanto, } S = \left\{ \left(-\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6} \right) \right\}$$

Aplicando el método de eliminación de Gauss-Jordan, resulta

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} \end{array} \right] \xleftrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_1 + (-1)f_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} \end{array} \right] \xleftrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_2 + (-2)f_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} \end{array} \right]$$

Luego el sistema equivalente es

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{6} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = \frac{1}{6} \end{cases} \quad \text{de donde el conjunto solución es } S = \left\{ \left(-\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6} \right) \right\}$$

Ejemplo 2

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ 3x + 2y = 3 \\ x - 2z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A' = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{array} \right] & \xleftrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] & \xleftrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_2 + (-1)f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] & \xleftrightarrow{f_3 \leftrightarrow f_3 + (-3)f_1} \\ & \xleftrightarrow{f_3 \leftrightarrow f_3 + (-3)f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] & \xleftrightarrow{f_4 \leftrightarrow f_4 + (-2)f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{array} \right] & \xleftrightarrow{f_3 \leftrightarrow f_3 + (-2)f_2} \\ & \xleftrightarrow{f_3 \leftrightarrow f_3 + (-2)f_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{array} \right] & \xleftrightarrow{f_4 \leftrightarrow f_4 + (-1)f_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

El sistema equivalente al original es

$$\begin{cases} x - 2z = -1 \\ y + 3z = 3 \end{cases}$$

de donde $y + 3z = 3 \Rightarrow y = 3 - 3z$ y $x - 2z = -1 \Rightarrow x = -1 + 2z$

Por lo tanto $S = \{(-1 + 2z, 3 - 3z, z), z \in \mathbb{R}\}$ es la solución general pues el sistema es CI.

Soluciones particulares son $(-1, 3, 0)$, $(1, 0, 1)$,

Ejemplo 3

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$A' = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_2 + (-2)f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{f_3 \leftrightarrow f_3 + (-3)f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \end{array} \right] \xrightarrow{f_3 \leftrightarrow f_3 + (-3)f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right]$$

es decir $0z = -2$. Por lo tanto no existen valores de z que satisfagan esta ecuación. Luego, el sistema es *Incompatible*.

Ejemplo 4

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_2 + (-2)f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{f_2 \leftrightarrow \frac{1}{3}f_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

El sistema equivalente es

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

de donde $x_1 = -x_3$ y $x_2 = x_3$

Luego el sistema es CI y el conjunto solución es $S = \{(-x_3, x_3, x_3), x_3 \in \mathbb{R}\}$

Conclusión: después de aplicar Gauss, si la matriz escalonada

- tiene una fila del tipo $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b \end{array} \right] b \neq 0$, el sistema es *Incompatible*

- Si no tiene una fila de la forma especificada en el inciso anterior el sistema es **Compatible** y además
 - Si representa un sistema con igual cantidad de ecuaciones que de incógnitas, el sistema es **Compatible Determinado**
 - Si representa un sistema con menos cantidad de ecuaciones que de incógnitas, el sistema es **Compatible Indeterminado**

Para poder determinar la compatibilidad de un sistema de ecuaciones podemos utilizar el siguiente:

Teorema de Roché-Frobenius: Un sistema de ecuaciones lineales es compatible si, y sólo si, el rango de la matriz de coeficientes coincide con el rango de la matriz ampliada

Consecuencias del Teorema de Roché-Frobenius:

Sean A la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas, A' la matriz ampliada del sistema, r el rango de A y r' el rango de A' . Entonces:

- (1) Si $r \neq r'$ entonces el sistema es Incompatible
- (2) Si $r = r'$ entonces el sistema es Compatible pudiendo ser:
 - Compatible Determinado si $r = n$
 - Compatible Indeterminado si $r < n$

Ejemplos:

1) Sea $A' = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & (k-1)^2 & k-1 \end{array} \right]$ la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales.

Analizar los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que el sistema sea:

- (a) CD (b) CI (c) I

- (a) Aplicando el teorema de Roché Frobenius para que el sistema sea CD necesitamos que

$$\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A') = 4$$

lo cual es imposible ya que A tiene 3 ecuaciones por lo que nunca su rango va a poder ser 4. Por lo tanto $\nexists k \in \mathbb{R}$ para que el sistema sea CD

- (b) Para que sea CI debe verificarse que $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A') = 3 < 4$. Como esta relación siempre vale, independientemente de los valores de k , resulta que el sistema es CI $\forall k \in \mathbb{R}$

(c) Para que sea I debe verificarse que $\text{Rg}(A) \neq \text{Rg}(A')$, pero $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A') = 3$ por lo que el sistema nunca es I

2) Sea $A' = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & (k-1)^2 & k-1 \end{array} \right]$ la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales.

Analizar los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que el sistema sea:

(a) CD (b) CI (c) I

(a) Aplicando el teorema de Roché Frobenius para que el sistema sea CD necesitamos que

$\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A') = 4$ lo cual es imposible ya que A tiene 3 ecuaciones por lo que nunca su rango va a poder ser 4. Por lo tanto $\nexists k \in \mathbb{R}$ para que el sistema sea CD.

(b) Para que el sistema sea CI debe verificarse que $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A') < 4$ para lo cual puede verificarse que

$$(i) (k-1)^2 \neq 0 \quad \vee \quad (ii) [(k-1)^2 = 0 \quad \wedge \quad k-1 = 0]$$

$$(i) (k-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 1$$

En este caso vale que $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A') = 3 < 4$ por lo que el sistema es CI

$$(ii) [(k-1)^2 = 0 \quad \wedge \quad k-1 = 0] \Leftrightarrow k = 1 \quad \vee \quad k = 1 \Leftrightarrow k = 1$$

En este caso vale que $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A') = 2 < 4$ por lo que el sistema es CI

Luego el sistema es CI $\forall k \in \mathbb{R}$

(c) Para que sea I debe verificarse que $\text{Rg}(A) \neq \text{Rg}(A')$, para lo cual debe verificarse que

$$(k-1)^2 = 0 \quad \wedge \quad k-1 \neq 0 \Leftrightarrow k = 1 \quad \wedge \quad k \neq 1$$

Luego $\nexists k \in \mathbb{R}$ para que el sistema sea I

3) (a) Hallar los valores reales de a para que el sistema $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ y - z = 2 \\ 3x - 3y + (a^2 + 2)z = a + 1 \end{cases}$ sea:

(i) CD (ii) CI (iii) I

Para responder cualquiera de los tres incisos necesitamos llevar la matriz ampliada a la forma escalonada (sin necesidad de exigir que los primeros elementos no nulos de la fila sean 1). Para esto, aplicamos operaciones elementales

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & a^2 + 2 & a + 1 \end{array} \right] \xrightarrow{f_3 \leftrightarrow f_3 + (-3)f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a^2 - 4 & a - 2 \end{array} \right]$$

Teniendo en cuenta el teorema de Roché-Frobenius y sus consecuencias podemos analizar su compatibilidad

- (i) Para que el sistema sea Compatible Determinado, necesitamos que $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A') = 3$ y para lograr esto debe verificarse que

$$a^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow a^2 \neq 4 \Leftrightarrow a \neq \pm 2$$

Luego el sistema es compatible determinado para todo número real $a \neq \pm 2$

- (ii) Para que el sistema sea Incompatible, necesitamos que $\text{Rg}(A) \neq \text{Rg}(A')$ por lo que debe verificarse que

$$a^2 - 4 = 0 \wedge a - 2 \neq 0 \Leftrightarrow a = \pm 2 \wedge a \neq 2$$

En consecuencia, el sistema es Incompatible para $a = -2$

- (iii) Para que el sistema sea Compatible Indeterminado, necesitamos que $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A') < 3$ por lo que

$$a^2 - 4 = 0 \wedge a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 2 \wedge a = 2$$

Por lo tanto, el sistema es compatible Indeterminado para $a = 2$

Observación: Si unimos las soluciones de los tres casos, obtenemos todos los números reales.

- (b) Resolver el sistema anterior para $a = -1$

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ y - z = 2 \\ 3x - 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{f_3 \leftrightarrow f_3 + (-3)f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{f_1 \leftrightarrow f_1 + f_2 \\ f_3 \leftrightarrow (-\frac{1}{3})f_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{f_1 \leftrightarrow f_1 + (-1)f_3 \\ f_2 \leftrightarrow f_2 + f_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Luego el sistema es CD y el conjunto solución es $S = \{(2, 3, 1)\}$

Resolución de sistemas por inversibilidad de matrices

En la representación matricial de un sistema $AX = B$.

Si $|A| \neq 0$ multiplicamos por A^{-1} a izquierda

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

de donde $IX = A^{-1}B$

luego $X = A^{-1}B$

La matriz columna solución se obtiene multiplicando la inversa de la matriz de los coeficientes A por la matriz columna B de los términos independientes.

Es decir, si $|A| \neq 0$ entonces el sistema $AX = B$ es C.D. y la solución es $X = A^{-1}B$

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ x + z = 0 \\ y + 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad |A| = -6, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{entonces } X = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $S = \left\{ \left(-\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6} \right) \right\}$, es decir, el sistema es CD

Observación:

- Si el sistema es homogéneo y $|A| \neq 0$, entonces el sistema es CD donde $S = \{(0, 0, \dots, 0)\}$
- Si el sistema es homogéneo y $|A| = 0$, entonces el sistema es CI
- Si el sistema no es homogéneo y $|A| \neq 0$ entonces el sistema es CD y la solución es $X = A^{-1}B$
- Si el sistema no es homogéneo y $|A| = 0$, entonces el sistema puede ser CI o I y para resolverlo debemos recurrir al método de Gauss o Gauss-Jordan