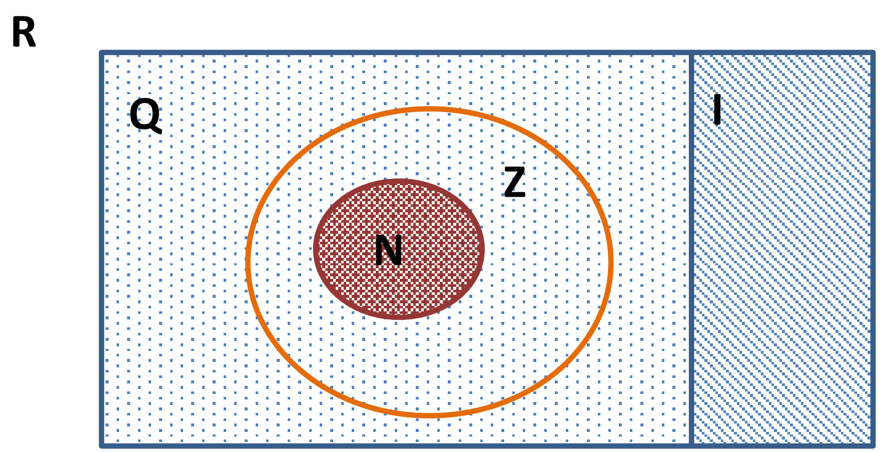
Números Reales

Elementos de Álgebra

Números Reales

- Es el conjunto que esta formado por los conjuntos números



- $R = Q \cup I$ (unión de los Números Racionales con los Irracionales)

Propiedades de un cuerpo ordenado

En R (Números Reales) estan definidas dos operaciones: ***Suma*** y ***Producto*** y una relación de ***orden*** .

Que nos interesa estudiar de R? La interación de los números reales con la suma, producto y relación de orden para poder resolver operaciones algebraicas, ecuaciones e inecuaciones…

Que necesitamos Saber? Para ello necesitamos conocer <u>**PROPIEDADES**</u> de esta estructura algebraica (R)

Ley Asociativa de la <u>*SUMA*</u>

Cualesquiera sean lo números reales a, b, c vale la igualdad:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

(y escribimos simplemente $a + b + c$)

Ley comnutativa de la <u>*SUMA*</u>

Cualesquiera sean lo números reales a, b vale la igualdad:

$$a + b = b + a$$

Existencia de ***Cero*** o elemento ***Neutro*** de la *SUMA*

Existe un número real 0 tal que cualquiera sea el número real a, es válida la igualdad:

$$a + 0 = a$$

Inverso ***Aditivo*** u ***Opuesto*** de la *SUMA*

Cualquiera sea el número real a , existe un número $a´$, tal que es válidad la igualdad

$$a + a´ = 0$$

Ley Asociativa del Producto

Cualesquiera sean lo números reales a, b, c vale la igualdad:

$$a.(b.c) = (a.b).c$$

(y escribimos simplemente $a.b.c$)

Ley comnutativa del *Producto*

Cualesquiera sean lo números reales a, b vale la igualdad:

$$a.b = b.a$$

Existencia de ***Identidad*** o elemento ***Neutro*** del *PRODUCTO*

Existe un número real 1, $1 \neq 0$ tal que, cualquiera, sea el número real a, es válida la igualdad:

$$a.1 = a$$

Inverso ***Multiplicativo***

Cualquiera sea el número real a distindo de cero ($a \neq 0$), existe un número $a´´$, tal que es válidad la igualdad

$$a.a´´ = 1$$

Ley distributiva del producto respecto a la suma

Cualesquiera sean lo números reales a, b, c vale la igualdad:

$$a.(b + c) = a.b + a.c$$

(y escribimos simplemente $a.b.c$)

Propiedades de la Igualdad

Cualquiera sean los números reales a, b, c:

Si $a = a$ (reflexiva)
Si $a = b$ entonces $b = a$ (Simétrica)
Si $a = b$ y $b = c$ entonces $a = c$ (transitiva)
Si $a = b$ entonces $a + c = b + c$ (Uniformidad de la suma)
Si $a = b$ entonces $a. c = b. c$ (Uniformidad del producto)

Ecuaciones

$$5x(x-1) = 5x^2\text{-}5$$

$$\frac{x+2}{7} = \frac{3x+6}{5}$$

Otras propiedades

$(P_1)\ -(-a) = a$

$(P_2)\ a + b = a + c \Rightarrow b = c$

$(P_3)\ a\, b = a\, c\,,\ a \neq 0 \Rightarrow b = c$

$(P_4)\ a\,.\,0 = 0$

Resolver:

$$\mathbf{4x + 6 = 2(2x + 3)}$$

$$\mathbf{2x + 3 = 2x - 5}$$

Otras propiedades

(P_5) $a.b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$

Supongamos que $a \neq 0$. Por (M_4), $a^{-1}.(a\,.b) = a^{-1}.0$, esto es, $(a^{-1}.a).b = 0$.

Luego $1\,.\,b = b = 0$.

(P_6) $a\,(-b) = (-a)\,b = -(a\,b)$

Probemos que $a(-b) = -(ab)$, es decir, que el simétrico de ab es $a(-b)$. Para esto basta probar que $ab + a(-b) = 0$. Y en efecto, $ab + a(-b) = a(b + (-b)) = 0$

En forma análoga se prueba que $(-a)b = -(ab)$

(P_7) $(-a)\,(-b) = a\,b$

Aplicar (P_6) dos veces

Resolver:

$$(2x-4).(-5x) = 0$$
$$(x-3)^2.(-3x+2) = 0$$

Otras propiedades

$(P_8)\ (a^{-1})^{-1} = a\ ,\ a \neq 0$

$(P_9)\ (a\,b)^{-1} = a^{-1}\,b^{-1}\ ,\ a \neq 0,\ b \neq 0$

$(P_{10})\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc;\ b \neq 0, d \neq 0$

Resolver:

$$\frac{4}{1-x} = \frac{3}{1+x}$$

$$\frac{x+4}{x-7} = 0$$

Otras propiedades

$$(P_{11})\,\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc};\,b\neq 0, c\neq 0$$

$$(P_{12})\,\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd};\,b\neq 0, d\neq 0$$

$$(P_{13})\,\frac{a}{b}\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd};\,b\neq 0, d\neq 0$$

$$(P_{14})\;\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b};\;b\neq 0$$

Para probar que $\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$ se debe probar que el simétrico de $\frac{a}{b}$ es $-\frac{a}{b}$

Es similar a (P_6)

$$(P_{15})\,\frac{a}{b}\neq 0;\;b\neq 0\;\;\Longrightarrow\;\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a}$$

Resolver:

$$\frac{2}{x}+\frac{2}{x-1}=3$$

$$\frac{5x+2}{x-1}-\frac{4x-1}{x-1}=0$$

$$\frac{2}{x-2}+\frac{4}{x+1}=3$$