Polinomios

Definición: Un *polinomio* es una expresión de la forma: $\mathrm{P}(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

• $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ se llaman *coeficientes* de $\mathrm{P}(x)$ y son números reales o complejos,

x es la *variable o indeterminada* y los exponentes de la variable x son todos enteros no negativos,

a_0 es el *término independiente,*

a_n es el *coeficiente principal*, si $a_n \neq 0$

• Si $a_i = 0$ para todo $i = 0, 1, 2, \ldots$, entonces $\mathrm{P}(x)$ se llama *polinomio nulo* y se representa por $\mathrm{P}(x) = 0$

• Si $a_n \neq 0$ entonces n es el grado de $\mathrm{P}(x)$ y escribimos $gr(\mathrm{P}(x)) = n$

• Si $a_n = 1$ entonces el polinomio $\mathrm{P}(x)$ se dice *mónico*

• Si $a_n = \cdots = a_2 = a_1 = 0$ entonces $\mathrm{P}(x) = a_0$ y recibe el nombre de *polinomio constante* y $gr(\mathrm{P}(x)) = 0$

• $\mathrm{P}(x)$ se dice *ordenado en forma decreciente* cuando la variable x figura en cada término elevada a un exponente menor que en el término anterior, es decir, en un orden decreciente de las potencias de x

• $\mathrm{P}(x)$ se dice *completo* cuando en él figuran todos los términos desde n hasta el término independiente

• Se llama *valor numérico* de $\mathrm{P}(x)$ al número real que resulta de reemplazar la variable por un número real cualquiera dado y efectuar las operaciones

Observaciones:

1) El grado del polinomio nulo no está definido

2) Al conjunto de todos los polinomios en la variable x con coeficientes reales o complejos lo simbolizaremos $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$ respectivamente.

Por ejemplo:

$\mathrm{P}(x) = 5x^3 - 2x + 4$, $gr(\mathrm{P}(x)) = 3$, coeficiente principal 5, término independiente 4, no es mónico, está ordenado en forma decreciente, no está completo, el valor numérico en -1 es $\mathrm{P}(-1) = 5(-1)^3 - 2(-1) + 4$ de donde $\mathrm{P}(-1) = 1$

$\mathrm{Q}(x) = 4 + x$ $gr(\mathrm{Q}(x)) = 1$, coeficiente principal 1, término independiente 4, es mónico, está ordenado en un orden creciente de las potencias de x, está completo

$\mathrm{V}(x) = 3x^2 - \sqrt{6}x^7 + 4x$ $gr(\mathrm{V}(x)) = 7$, coeficiente principal $-\sqrt{6}$, término independiente 0, no está ordenado en un orden creciente ni decreciente de las potencias de x, no está completo

Definición: Dados dos polinomios $\mathrm{A}(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ y

$\mathrm{B}(x) = b_n x^n + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$ se verifica que:

$$\mathrm{A}(x) = \mathrm{B}(x) \iff a_i = b_i \quad \forall\, i = n, \dots, 2, 1, 0$$

Operaciones con Polinomios

Dados $\mathrm{A}(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, $\mathrm{B}(x) = b_n x^n + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$ se definen dos operaciones binarias, *suma* y *multiplicación* de la siguiente manera:

Suma

$$\mathrm{A}(x) + B(x) = (a_n + b_n)x^n + \cdots + (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Multiplicación

A(x) B(x) es el polinomio que resulta de aplicar la propiedad distributiva y asociar los términos semejantes

Ejemplos:

1) Si $\mathrm{A}(x) = -\frac{1}{2}\, x^5 + 2\, x^2 - 5\, x + 3$ y $\mathrm{B}(x) = -4\, x^5 - \frac{1}{2}\, x^4 - 4\, x^2 - \, x + 3$

Entonces $\mathrm{A}(x) + \mathrm{B}(x) = -\frac{9}{2} x^5 - \frac{1}{2} x^4 - 2x^2 - 6x + 6$ y

$$\mathrm{A}(x)\ \mathrm{B}(x) = 2\, x^{10} + \frac{1}{4} x^9 + 2\, x^7 + \frac{1}{2} x^6 - \frac{3}{2} x^5 - 8\, x^7 - x^6 - 8\, x^4 - 2x^3 + 6\, x^2 + 20\, x^6 + \frac{5}{2} x^5 + 20\, x^3 + 5\, x^2 - 15x - 12\, x^5 - \frac{3}{2} x^4 - 12\, x^2 - 3\, x + 9$$

esto es $\mathrm{A}(x)\ \mathrm{B}(x) = 2\, x^{10} + \frac{1}{4} x^9 - 6\, x^7 + \frac{39}{2} x^6 - 11\, x^5 - \frac{19}{2}\, x^4 + 18\, x^3 - \, x^2 - 18\, x + 9$

2) Si $\mathrm{D}(x) = 2\, x^3 - \, x + 1$ y $\mathrm{E}(x) = 3\, x^2 - \, x + 4$

Entonces $\mathrm{D}(x) + \mathrm{E}(x) = 2\, x^3 + 3\, x^2 - 2x + 5$ y

$\mathrm{D}(x)\ \mathrm{E}(x) = 6x^5 - 2x^4 + 8x^3 - 3x^2 + x^2 - 4x + 3x^2 - x + 4$ esto es

$$\mathrm{D}(x)\ \mathrm{E}(x) = 6x^5 - 2x^4 + 8x^3 + x^2 - 5x + 4$$

Observaciones:

1. Si A(x) + B(x) $\neq 0$ entonces gr(A+B) $\leq$ máximo (gr(A), gr(B))

2. Si A(x) B(x) $\neq 0$ entonces gr(A B) = gr(A) + gr(B) o el grado del polinomio producto es igual a la suma de los grados de los polinomios factores

3. La suma de polinomios goza de las mismas propiedades que la suma de números: ley de cierre, asociativa, conmutativa, existencia de elemento neutro y existencia de elemento opuesto

4. La multiplicación de polinomios verifica las siguientes propiedades: ley de cierre, asociativa, conmutativa, existencia de elemento neutro

5. Vale la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma de polinomios

<u>Sustracción</u>

Dados los polinomios A(x) y B(x), efectuar la *sustracción* (*resta o diferencia*) entre A(x) y B(x) equivale a sumar a A(x) el opuesto de B(x)

Por ejemplo: Si $\mathrm{P}(x) = x^5 + 2\,x^4 - 3\,x^3 - 2$ y $\mathrm{S}(x) = 3\,x^4 - 5\,x^2 - 3$

Entonces: $-\mathrm{S}(x) = -3\,x^4 + 5\,x^2 + 3$

por lo tanto: $\mathrm{P}(x) - \mathrm{S}(x) = \mathrm{P}(x) + (-\mathrm{S}(x)) = (x^5 + 2\,x^4 - 3\,x^3 - 2) + (-3\,x^4 + 5\,x^2 + 3)$

$$\mathrm{P}(x) - \mathrm{S}(x) = x^5 - x^4 - 3\,x^3 + 5\,x^2 + 1$$

<u>División</u>

Dados dos polinomios A y B, B ≠ 0, existen dos polinomios Q y R, llamados el cociente y el resto respectivamente de dividir A por B, unívocamente determinados y tales que A = Q B + R con R = 0 o gr(R) < gr(B)

En el algoritmo de la división, para determinar los polinomios Q y R:

1º: Se ordenan según las potencias decrecientes de la indeterminada (x), el dividendo y el divisor, completando además el dividendo

2º: Dividimos el primer término del dividendo por el primer término del divisor, obteniéndose así el primer término del cociente

3º: Multiplicamos el primer término del cociente por todo el divisor

4º: Se resta este producto del dividendo, obteniéndose un nuevo dividendo

5º: Reiteramos el procedimiento 2º, 3º y 4º hasta obtener el polinomio resto, de grado menor que el divisor

Ejemplificamos haciendo la división de $\left(3x^4 + 2x^3 - 4x - 4\right)$ por $(x^3 - 2x^2)$

1º: Ambos polinomios están ordenados pero hay que completar el dividendo: $3\,x^4 + 2\,x^3 + 0\,x^2 - 4x - 4$

2º:
$$\begin{array}{l|l} 3x^4 + 2x^3 + 0x^2 - 4x - 4 & x^3 - 2x^2 \\ \cline{2-2} & 3x \end{array}$$

3º

$$\begin{array}{ll|l} & 3x^4+2x^3+0x^2-4x-4 & x^3-2x^2 \\ \cline{3-3} - & \underline{3x^4-6x^3} & 3x \end{array}$$

4º

$$\begin{array}{ll|l} & 3x^4+2x^3+0x^2-4x-4 & x^3-2x^2 \\ \cline{3-3} - & \underline{3x^4-6x^3} & 3x \\ & \quad 8x^3+0x^2 & \end{array}$$

5º

$$\begin{array}{ll|l} & 3x^4+2x^3+0x^2-4x-4 & x^3-2x^2 \\ \cline{3-3} - & \underline{3x^4-6x^3} & 3x+8 \\ & \quad 8x^3+0x^2 & \end{array}$$

6º

$$\begin{array}{ll|l} & 3x^4+2x^3+0x^2-4x-4 & x^3-2x^2 \\ \cline{3-3} - & \underline{3x^4-6x^3} & 3x+8 \\ & \quad 8x^3+0x^2 & \\ & - \quad \underline{8x^3-16x^2} & \\ & \qquad\quad 16x^2-4x-4 & \end{array}$$

Y como el grado de ($16x^2 - 4x - 4$) es 2 y el grado del divisor es 3, entonces quedan determinados el polinomio cociente $Q(x) = 3x + 8$ y el polinomio resto $R(x) = 16x^2 - 4x - 4$ que verifican:

$$3x^4+2x^3-4x-4=\left(x^3-2x^2\right)\left(3x+8\right)+\left(16x^2-4x-4\right)$$

Planteamos otro ejemplo. Realicemos la división de A por B siendo $A(x)=2x^3-x+1$ y $B(x)=x^2-x+1$

$$\begin{array}{ll|l} & 2x^3+0x^2-x+1 & x^2-x+1 \\ \cline{3-3} - & \underline{2x^3-2x^2+2x} & 2x+2 \\ & \quad 2x^2-3x+1 & \\ & - \quad \underline{2x^2-2x+2} & \\ & \qquad\quad -x-1 & \end{array}$$

Luego: $$2x^3-x+1=\left(x^2-x+1\right)\left(2x+2\right)+\left(-x-1\right)$$

Cuando tenemos que dividir un polinomio $P(x)$ por un polinomio mónico (coeficiente principal igual a 1) de grado uno, conviene utilizar un algoritmo llamado ***Regla de Ruffini***. Este es un procedimiento que permite hallar el cociente y el resto sin efectuar la secuencia que describimos anteriormente.

Recordemos que **únicamente** puede usarse la regla de Ruffini si el divisor es un polinomio de la forma $(x \pm a)$

Ejemplificaremos dicho procedimiento efectuando la división entre $\mathrm{A}(x) = 3x^3 + 7x^2 + 6x - 1$ y $\mathrm{B}(x) = x + 2$

La disposición práctica requiere que en el primer renglón se escriban los coeficientes del dividendo ordenado y completo hasta el término independiente inclusive. En el ángulo se escribe el opuesto de a, que figura en el divisor (su raíz).

	3	7	6	-1
-2		-6		
	3	1		

El coeficiente principal del dividendo (3) se copia abajo. Se lo multiplica por –2 y el resultado (–6) se escribe debajo del siguiente coeficiente del dividendo (7). Se suma 7 y –6 y el resultado (1) se escribe abajo.

	3	7	6	-1
-2		-6	-2	
	3	1	4	

El 1 obtenido en el paso anterior reinicia el ciclo: se lo multiplica por −2 y el resultado (−2) se escribe debajo del siguiente coeficiente del dividendo (6). Se suman −2 y 6 y el resultado (4) se escribe abajo.

	3	7	6	-1
-2		-6	-2	-8
	3	1	4	-9

El 4 obtenido en el paso anterior reinicia el ciclo: se lo multiplica por −2 y el resultado (−8) se escribe debajo del último coeficiente del dividendo (−1). Se suman −1 y –8, y el resultado (–9) es el resto. Se escribe abajo.

El resto es −9, siempre es una constante. Los valores 3, 1 y 4 son los coeficientes del polinomio cociente ordenado y completo, cuyo grado es una unidad menor que el grado del dividendo. Entonces Q(x) = $\mathbf{3}x^2 + \mathbf{1}x + \mathbf{4}$.

Según el algoritmo de la división podemos escribir:

$$3x^3 + 7x^2 + 6x - 1 = (x + 2)\ (3x^2 + 1x + 4) - 9$$

Divisibilidad de Polinomios

Si al realizar la división entre A(x) y B(x) el resto es **nulo**, decimos que A(x) es divisible por B(x), o que B(x) divide a A(x).

B(x) divide a A(x) si y sólo si existe un polinomio K(x) tal que K(x) B(x) = A(x).

Para averiguar si A(x) es divisible por B(x), efectuamos la división entre A y B y comprobamos si el resto es o no es 0 (polinomio nulo).

Por ejemplo, si queremos ver si A(x) = $x^2 - 5x + 6$ es divisible por B(x) = $x - 2$, podemos dividir aplicando la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -5 & 6 \\ 2 & & 2 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

Como R(x) = 0, entonces A(x) es divisible por B(x).

Para analizar si A(x) = $x^5 - x^3 + x^2 - 2x + 1$ es divisible por B(x) = $x^2 + 1$, usamos el algoritmo conocido ya que no puede aplicarse la regla de Ruffini.

$$\begin{array}{rl} x^5 + 0x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 1 & \left| \underline{\; x^2 + 1 \;} \right. \\ + \quad \underline{-x^5 \qquad -x^3} \qquad\qquad\qquad & \; x^3 - 2x + 1 \\ -2x^3 + x^2 - 2x \qquad & \\ + \quad \underline{2x^3 \qquad\quad 2x} \qquad & \\ x^2 \qquad +1 & \\ + \quad \underline{-x^2 \qquad -1} & \\ 0 & \end{array}$$

Entonces, A(x) es divisible por B(x).

Observemos que en el algoritmo, en lugar de restar el polinomio obtenido en cada paso, se sumó su opuesto.

También podemos averiguar la divisibilidad de un polinomio por otro de la forma $x - a$ (siendo a un número cualquiera) calculando el valor numérico del polinomio en $x = a$.

P(x) = $x^4 - 8$, P(–2) = $(-2)^4 - 8 = 8$

P(0) = $0^2 - 8 = -8$

<u>Definición</u>: Decimos que $x = a$ es raíz de un polinomio P(x) si y sólo si P(a) = 0

Por ejemplo, $x = 1$ es raíz de P(x) = $x^5 - x^3$ porque P(1) = $1^5 - 1^3 = 0$. También $x = -1$ es raíz porque P(–1) = $(-1)^5 - (-1)^3 = -1 + 1 = 0$.

<u>Teorema del Resto</u>: El resto de la división de un polinomio P(x) por otro de la forma (x – a) es igual a P(a)

Cuando queremos investigar si un polinomio P(x) es divisible por otro de la forma (x – a), bastará hallar P(a). Si P(a) = 0, entonces P(x) es divisible por (x – a).

Averigüemos si A(x) = x^2 – 5x + 6 es divisible por B(x) = x – 2, utilizando el teorema del resto:

A(2) = 2^2 – 5 . 2 + 6 = 0 entonces A es divisible por B.

<u>Factorización de Polinomios</u>

Recordemos que un valor x = a es raíz del polinomio P(x), si el polinomio se anula para ese valor, o sea si P(a) = 0. Además, si P(x) está expresado como producto de otros polinomios, las raíces de éstos son las raíces de P(x).

Por ejemplo, $\mathrm{P}(x)=(x-1)(x-2)(x+4)$ tiene como raíces a x = 1, x = 2 y x = –4.

Si al escribir un polinomio como producto hay más de un factor que tiene la misma raíz, a ésta se la llama *raíz múltiple*. En Q(x) = (x – 2) (x – 2) (x + 5), x = 2 es una raíz doble de Q(x). Si M(x) = (x + 3) (x + 3) (x + 3), x = –3 es raíz triple de M(x).

Un polinomio puede tener raíces reales y raíces no reales. El polinomio S(x) = (x + 6) (x^2 + 4), tiene sólo una raíz real, x = –6.

Según el Teorema Fundamental del Álgebra, ***un polinomio de grado n tiene exactamente n raíces,*** considerando las reales, las complejas no reales y su orden de multiplicidad.

Como consecuencia de este teorema, ***un polinomio de grado n tiene como máximo n raíces reales.*** Además, por otro teorema sabemos que si un número complejo z es raíz de un polinomio con **coeficientes reales** entonces el conjugado de z también es raíz de dicho polinomio, es decir, las raíces no reales de un polinomio con coeficientes reales vienen siempre de a pares. Luego, un polinomio de grado impar tiene como mínimo una raíz real. Esto no se verifica si el polinomio tiene coeficientes complejos. Por ejemplo las raíces de $\mathrm{P}(x) = x^2 + 2i\,x + (-1-2i)$ son $x_1 = 1$ y $x_2 = -1-2i$

<u>Cálculo de las raíces de un polinomio</u>

Para calcular las raíces de un polinomio $\mathrm{P}(x) = a_n x^n + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ de grado n > 0, se plantea la ecuación algebraica

$$a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

y se hallan los valores de x que satisfacen dicha ecuación

Si $\mathrm{P}(x) = a_1 x + a_0$ entonces $a_1 x + a_0 = 0$ de donde $x = -\frac{a_0}{a_1}$, $a_1 \neq 0$

Si $\mathrm{P}(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ entonces $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ de donde

$$x_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{(a_1)^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}\ ,\ a_2 \neq 0$$

Un caso particular de ecuaciones de grado 4 son las de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$ llamadas ecuaciones bicuadráticas, cuya resolución se reduce a una de segundo grado por medio de la sustitución $y = x^2$. Las cuatro raíces están dadas por la fórmula

$$x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}\ , \qquad a \neq 0$$

Existen varios métodos que permiten calcular, con un grado de aproximación tan grande como se desee, las raíces de un polinomio con coeficientes reales de grado mayor que 2. Nosotros sólo veremos el cálculo de las raíces racionales de un polinomio con coeficientes enteros.

Teorema de Gauss: Si un número racional $\frac{p}{q}$ con p y q relativamente primos, es raíz de un polinomio $\mathrm{P}(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ con coeficientes enteros, entonces p es divisor del término independiente y q es divisor del coeficiente principal

Si queremos encontrar las ***raíces racionales*** de un polinomio con ***coeficientes enteros***, debemos seguir estos pasos:

I. Verificar que el polinomio tiene coeficientes enteros

II. Consideramos $p \in d(a_0)$ y $q \in d(a_n)$

III. Formar con ellos todas las fracciones irreducibles $\frac{p}{q}$, que son las posibles raíces

IV. Determinar si $\frac{p}{q}$ es o no raíz del polinomio

Ejemplifiquemos, factorizando al polinomio: $\mathrm{P}(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 8x - 6$

I. Verificamos que el polinomio tiene coeficientes enteros

II. Como $a_0 = -6$ y $a_n = 1$, consideramos $p \in d(-6)$ y $q \in d(1)$ sabiendo que

$d(-6) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$ y $d(1) = \{\pm 1\}$

III. Para hallar todas las fracciones irreducibles $\frac{p}{q}$, notamos que los posibles valores de q son 1 y –1, por lo tanto $\frac{p}{q}$ será igual a *p*, para cada caso. Es decir que las posibles raíces racionales de P son los valores de *p*, o sea, los divisores del término independiente.

IV. Y ahora, con un poco de suerte e intuición para que la tarea sea más breve, hallamos el valor numérico de P para distintos valores de *p*, hasta encontrar alguna raíz:

$P(1) = 1^4 - 4 \,.\, 1^3 + 1^2 + 8 \,.\, 1 - 6 = 0 \;\Rightarrow\;$ 1 es raíz de P

Entonces, P(*x*) es divisible por *x* – 1

	1	–4	1	8	–6
1		1	–3	–2	6
	1	–3	–2	6	$\boxed{0}$
1		1	–2	–4	2
	1	–2	–4	2	2

El polinomio P queda, en principio, factorizado como: $P(x) = (x^3 - 3x^2 - 2x + 6)\,(x - 1)$

Busquemos ahora las raíces de $Q(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6$

Observamos que las posibles raíces racionales de Q son las mismas que las de P

Evaluamos $Q(1) = 1^3 - 3 \,.\, 1^2 - 2 \,.\, 1 + 6 = 2 \neq 0$ por lo que 1 no es raíz de Q

Calculamos $Q(-1) = (-1)^3 - 3 \,.\, (-1)^2 - 2 \,.\, (-1) + 6 = 4 \neq 0$

Ahora $Q(2) = 2^3 - 3 \,.\, 2^2 - 2 \,.\, 2 + 6 = -2 \neq 0$

Puede ser $Q(-2) = (-2)^3 - 3 \,.\, (-2)^2 - 2 \,.\, (-2) + 6 = -10 \neq 0$. ¿Vieron qué queríamos decir con esto de tener “suerte”?

Seguimos: $Q(3) = 3^3 - 3 \,.\, 3^2 - 2 \,.\, 3 + 6 = 0$. ¡Al fin! Entonces Q es divisible por *x* – 3. También P es divisible por *x* – 3 porque si 3 es raíz de Q también es raíz de P.

	1	–3	–2	6

3		3	0	−6
	1	0	−2	$\boxed{0}$

El polinomio P queda expresado así: P(x) = (x^2 – 2) (x – 3) (x – 1)

Nos queda hallar las raíces de $\mathrm{H}(x) = x^2 - 2$. Son $x_1 = -\sqrt{2}$ y $x_2 = \sqrt{2}$, que no pertenecen al conjunto de los racionales, pero pueden encontrarse aplicando la técnica de la diferencia de cuadrados o resolviendo la ecuación cuadrática.

Entonces P queda completamente factorizado: $\mathrm{P}(x) = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x - 3)(x - 1)$, donde las raíces reales de P resultan ser $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = 3$ y $x_4 = 1$

A veces tenemos polinomios cuyos coeficientes son racionales y, sin embargo, también podemos buscar las raíces de un polinomio con coeficientes racionales. Debemos aplicar el Teorema de Gauss a un polinomio que es de la forma k P(x) ya que este nuevo polinomio y el original tienen las mismas raíces.

Por ejemplo $\mathrm{P}(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x + 4$. Si al polinomio P lo multiplicamos por 2 obtenemos el polinomio $\mathrm{F}(x) = x^3 - 5x^2 + 2\,x + 8$ cuyas raíces son –1, 2 y 4 que se obtienen aplicando a F(x) el teorema de Gauss. Entonces $\mathrm{F}(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 4)$

Luego $\mathrm{P}(x) = \frac{1}{2}\,(x + 1)(x - 2)(x - 4)$

Verificar que las raíces racionales de F(x) son las mismas que las de P(x), a pesar de que los polinomios son diferentes.