Ejercicio: Demostrar $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

. Si $\sim(p \wedge q)$ es Verdadera entonces $(p \wedge q)$ es Falso.

Una conjunción es Falsa cuando por lo menos una de las proposiciones simples lo es.

Si, por ejemplo, p es Falsa $\sim p$ es Verdadera y entonces $\sim p \vee \sim q$ será Verdadera.

Si ambas proposiciones son Falsas, sus negaciones serán Verdaderas y $\sim p \vee \sim q$ también lo será.

Por lo tanto, al ser ambas proposiciones compuestas Verdaderas, el bicondicional también lo es.

. Si $\sim(p \wedge q)$ es Falsa entonces $(p \wedge q)$ es Verdadera.

Una conjunción es Verdadera cuando ambas proposiciones simples lo son.
Por lo tanto, si p y q son verdaderas entonces $\sim p$ y $\sim q$ son falsas y la disyunción también lo es.

Por lo tanto, al ser ambas proposiciones compuestas Falsas, el bicondicional es Verdadero.

También se puede demostrar usando tablas de verdad

Ejercicio: Demostrar usando las equivalencias lógicas que:

$$[(q \Rightarrow p) \wedge (\sim p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow q)] \Leftrightarrow p$$

$$[(q \Rightarrow p) \wedge (\sim p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow q)] \underset{(1)}{\Leftrightarrow} (\sim q \vee p) \wedge (\sim\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee q) \underset{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (\sim q \vee p) \wedge (p \vee q) \wedge \boldsymbol{t} \underset{(3)}{\Leftrightarrow} (\sim q \vee p) \wedge (p \vee q) \underset{(4)}{\Leftrightarrow} (p \vee \sim q) \wedge (p \vee q) \underset{(5)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow p \vee (\sim q \wedge q) \underset{(6)}{\Leftrightarrow} p \vee \boldsymbol{c} \underset{(7)}{\Leftrightarrow} p$$

(1) Definición de Implicación

(2) Doble negación y Tautología

(3) Leyes de Identidad

(4) Conmutativa

(5) Distributiva

(6) Contradicción

(7) Leyes de identidad

FUNCIONES PROPOSICIONALES

Cuando definimos proposiciones vimos que existen expresiones que involucran a una o varias variables, de las que no se pueden decir su valor de verdad pero que si se le asignan "valores" a esas variables se transforman en proposiciones, con su correspondiente valor de verdad.

Ejemplos:

$x + 2 = 1$ $\qquad$ $x > 0 \ y \quad x < 1$ $\qquad$ $x\ es\ un\ número\ primo$

A las proposiciones que dependen de una o más variables se las llama **funciones proposicionales.**

Ejemplos:

$p(x): x + 2 = 1$

$q(x): x\ es\ un\ número\ primo$

Al conjunto sobre el que tomamos los valores posibles para las variables lo denominamos **universo** o **dominio** $\mathcal{U}$.

Veamos que, según el universo $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ que tomemos puede depender el valor de verdad de la función proposicional.

Ejemplo:

$$p(x): x + 2 = 1$$

Si $\boldsymbol{\mathcal{U}} = \mathbb{N}$, para cualquier valor que le demos a x, se va a verificar que $v\big(p(x)\big) = F$

En cambio, si $\boldsymbol{\mathcal{U}} = \mathbb{Z}$, van a existir valores que hagan que $v\big(p(x)\big) = V$

CUANTIFICADORES

Cuantificador Universal

$\forall x \in \mathcal{U}: p(x)$ Lo leemos: “Para todo (o para cada o para cualquier) x perteneciente a $\mathcal{U}$ se verifica la proposición $p(x)$

Cuantificador Existencial

$\exists x \in \mathcal{U} / p(x)$ Lo leemos: “Existe un (o para algún o para al menos un) x perteneciente a $\mathcal{U}$ tal que se verifica la proposición $p(x)$

Ejemplos: Analizar el valor de verdad de las siguientes proposiciones

$\forall x \in \mathbb{N}: x > 0$

El valor de verdad es Verdadero pues el primer elemento del conjunto es el 1 y los siguientes elementos los encontramos sumando 1 al anterior, por lo que siempre serán positivos.

$\forall x \in \mathbb{R}: x \geq 0$

El valor de verdad es Falso pues existe el $\mathrm{x} = -5$ que es un número real y es negativo.

$\exists x \in \mathbb{R} / x - 3 \geq 0$

El valor de verdad es Verdadero pues existe el $x = 4$ tal que $4 - 3 = 1$ y $1 > 0$

$\exists x \in \mathbb{R} / x^2 = -1$

Esta proposición es Falsa pues para todo número real x se verifica que $x^2 \geq 0$

NEGACIÓN DE LOS CUANTIFICADORES

$$\sim(\forall x \in \mathcal{U}: p(x)\ ) \ \Leftrightarrow\ (\exists x \in \mathcal{U}/\sim p(x))$$

$$\sim(\exists x \in \mathcal{U}/p(x)\ ) \ \Leftrightarrow\ (\forall x \in \mathcal{U}: \sim p(x))$$

Ejemplo: Analizar el valor de verdad y negar la función proposicional

$$p(x): \forall x \in \mathbb{R}: x < 0 \Longrightarrow x^2 - 4 < 0$$

La proposición $p(x)$ es falsa porque existe $x = -5, -5 \in \mathbb{R}$, tal que $-5 < 0$ y $21 > 0$

Neguemos $p(x)$: $\sim p(x): \sim\left(\forall x \in \mathbb{R}: x < 0 \Longrightarrow x^2 - 4 < 0\right) \underset{(1)}{\Longleftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}/\sim\left(x < 0 \Longrightarrow x^2 - 4 < 0\right) \underset{(2)}{\Longleftrightarrow} \exists x \in \mathbb{R}/\sim\left(\sim(x < 0) \vee \left(x^2 - 4 < 0\right)\right) \underset{(3)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}/\sim \sim (x < 0) \wedge \sim \left(x^2 - 4 < 0\right) \underset{(4)}{\Longleftrightarrow} \exists x \in \mathbb{R}/(x < 0) \wedge \left(x^2 - 4 \geq 0\right)$$

(1) Negación de un cuantificador universal

(2) Definición de implicación

(3) De Morgan para la disyunción

(4) Doble negación

DEMOSTRACIONES

$$SISTEMA\ MATEMÁTICO \begin{cases} Axiomas \\ Definiciones \\ Términos\ no\ definidos \end{cases}$$

Ejemplo: La geometría euclideana

Los **axiomas** son proposiciones que se suponen verdaderas.

Ejemplo: Dados dos puntos distintos, existe una única recta que los contiene.

El término punto es un **término que no está definido** explícitamente.

Las **definiciones** se usan para crear nuevos conceptos a partir de los existentes.

Ejemplo: Dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas es 180º

Un ejemplo de definición en $\mathbb{R}$ es:

$$Un\ entero\ n\ es\ par\ si\ y\ solo\ si\ existe\ un\ entero\ k\ tal\ que\ n = 2k$$
$$Un\ entero\ n\ es\ impar\ si\ y\ solo\ si\ existe\ un\ entero\ k\ tal\ que\ n = 2k + 1$$

Dentro de un sistema matemático también encontramos teoremas**.**

Un **teorema** es una proposición que se ha demostrado que es verdadera.

En la geometría euclideana un ejemplo de teorema es:

$$Si\ dos\ lados\ de\ un\ triángulo\ son\ iguales\ entonces\ los\ ángulos\ opuestos\ a\ ellos\ son\ iguales$$

En el conjunto de los números reales un teorema es:

$$Para\ todos\ los\ números\ reales\ x, y, z, si\ x \leq y\ e\ y \leq z\ entonces\ x \leq z$$

MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN

Dijimos que un teorema es una proposición que se ha demostrado que es verdadera.

Una **demostración** es un razonamiento que establece la veracidad de un teorema.

Es decir, demostrar un teorema equivale a probar que el condicional $p \Longrightarrow q$ es una tautología.

Un teorema consta de:
Hipótesis: Son proposiciones verdaderas, son los datos

Tesis: Es la conclusión. Es la proposición que hay que demostrar que es verdadera usando un razonamiento lógico.

$$Si\ \underbrace{dos\ lados\ de\ un\ triángulo\ son\ iguales}_{\textbf{HIPÓTESIS}}\ entonces$$
$$\underbrace{los\ ángulos\ opuestos\ a\ ellos\ son\ iguales}_{\textbf{TESIS}}$$

MÉTODO DIRECTO

$\boldsymbol{H \Longrightarrow T}$

Muestra que de la verdad de la hipótesis, se deduce lógicamente la verdad de la conclusión.

La demostración empieza asumiendo que H es Verdadera para luego, utilizando la información disponible, teoremas ya probados y pasos lógicos verdaderos, probar que T es Verdadera.

Ejemplo: Demostrar que

$Para\ cualquier\ par\ de\ n\acute{u}meros\ enteros\ m\ y\ n, si\ m\ es\ impar\ y\ n\ es\ par\ entonces\ m+n\ es\ impar.$

$H1: m, n \in \mathbb{Z}$

$H2: m\ es\ impar$

$H3: n\ es\ par$

$T: m+n\ es\ impar$

Demostración: $\boldsymbol{H \Longrightarrow T}$

$$m\ es\ impar\ \text{y}\ n\ es\ par \underset{(1)}{\Longrightarrow} \exists k_1 \in \mathbb{Z}, \exists k_2 \in \mathbb{Z} / m = 2k_1 + 1 \wedge n = 2k_2 \underset{(2)}{\Longrightarrow}$$

$$\Longrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{Z}, \exists k_2 \in \mathbb{Z} / m + n = (2k_1 + 1) + (2k_2) = 2k_1 + 1 + 2k_2 = 2k_1 + 2k_2 + 1 =$$

$$= 2(k_1 + k_2) + 1 \Longrightarrow \exists t = k_1 + k_2, t \in \mathbb{Z} / m + n = 2t + 1 \underset{(3)}{\Longrightarrow} m + n\ es\ impar$$

Luego, quedó demostrado que para cualquier par de números enteros m y n, si m es impar y n es par entonces m+n es impar.

(1) Def. de nro. par y nro. impar

(2) Sumamos $m + n$ miembro a miembro y aplicamos prop. de los nros. reales.

(3) Definición de nro. impar

MÉTODOS INDIRECTOS –
MÉTODO DEL CONTRARRECÍPROCO

Se basa en la equivalencia lógica entre un condicional y su contrarrecíproca:

$$H \Longrightarrow T \Leftrightarrow \sim T \Longrightarrow \sim H$$

Se parte de la negación de la Tesis y mediante pasos lógicos correctos se llega a la negación de las Hipótesis.

Ejemplo: Demostrar que:

$$Para\ todo\ número\ entero\ m, si\ m^2\ es\ impar\ entonces\ m\ es\ impar.$$

Para poder demostrar la verdad de esta proposición vamos a utilizar el método del contrarrecíproco.

$Para\ todo\ número\ entero\ m\ se\ verifica\ que\ si\ \underbrace{m^2\ es\ impar}_{Hipótesis}\ entonces\ \underbrace{m\ es\ impar}_{Tesis}.$

$H\colon\ m^2\ es\ impar$

$\sim H\colon\ m^2\ es\ un\ número\ par$

$T\colon\ m\ es\ impar$

$\sim T\colon m\ es\ un\ número\ par$

Demostración: $\sim T \Longrightarrow \sim H$

$$m\ es\ un\ número\ par \underset{(1)}{\Longrightarrow} \exists k \in \mathbb{Z}/m = 2k \underset{(2)}{\Longrightarrow} \exists k \in \mathbb{Z}/m^2 = (2k)^2 = 2^2k^2 = 2\cdot\left(2k^2\right)$$

$$\Longrightarrow \exists t = 2k^2 \in \mathbb{Z}/m^2 = 2\cdot t \underset{(1)}{\Longrightarrow} m^2\ es\ par.$$

Por lo tanto, quedó demostrado que
$para\ todo\ número\ entero\ m, si\ m^2\ es\ impar\ entonces\ m\ es\ impar.$

(1) Definición de número par

(2) Elevo ambos miembros al cuadrado y aplico prop. de los nros. reales.

MÉTODOS INDIRECTOS –
MÉTODO DE REDUCCIÓN AL ABSURDO
o POR CONTRADICCIÓN

Este método parte de suponer que la Tesis es Falsa y utilizando las Hipótesis, teoremas y pasos lógicos correctos se llega a un absurdo.

Ejemplo: Demostremos el teorema anterior por reducción al absurdo.

$Para\ todo\ número\ entero\ m, si\ m^2\ es\ impar\ entonces\ m\ es\ impar$

$H: m^2\ es\ impar$

$T: m\ es\ impar$ $\qquad\qquad\qquad\qquad \sim T:\ m\ es\ par$

Demostración: $\boldsymbol{H}\ \wedge \sim \boldsymbol{T} \Longrightarrow Absurdo$

$\forall m \in \mathbb{Z}:\ m^2\ es\ un\ número\ impar\ y\ m\ es\ par \Longrightarrow\ \exists\ k, t \in \mathbb{Z}/m^2 = 2k + 1\ \wedge\ m = 2t \Longrightarrow$

$\exists\ k, t \in \mathbb{Z}/m^2 = 2k + 1\ \wedge\ m^2 = (2t)^2\ \Longrightarrow\ \ \exists\ k, t \in \mathbb{Z}/m^2 = 2k + 1\ \wedge\ m^2 = 4t^2 \Longrightarrow$

$\exists\ k, t \in \mathbb{Z}/2k + 1 = 4t^2\ \Longrightarrow\ \ \exists\ k, t \in \mathbb{Z}/1 = 4t^2 - 2k\ = 2\left(2t^2 - k\right) \Longrightarrow$

$\exists n = 2t^2 - k\ , n, k, t \in \mathbb{Z}/1 = 2n$

Luego, 1 es un número par, lo que es un absurdo.

Por lo tanto, la proposición:

$Para\ todo\ número\ entero\ m, si\ m^2\ es\ impar\ entonces\ m\ es\ impar$

es Verdadera.