UNIVERSAL

CONJUNTOS

Elementos de Álgebra

Los conceptos de “conjunto” y “elemento” se utilizan, en matemática, como términos básicos y su significado coincide con los que conocemos en nuestro idioma

Notación:

Conjuntos: letras mayúsculas: $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$

Elementos: letras minúsculas: $a, b, c, \ldots, x, y, z$

Simbolos $\in$ y $\notin$

Dado un conjunto A

$a \in A$: "a" es un objeto de A, es decir, "a" cumple con la condición que define al conjunto A

$a \in A$ se lee: "a" pertenence a A, "a" es un elemento de A, "a" está en A o "a" en A

$a \notin A$: "a" no es un objeto de A, es decir, "a" no cumple con la condición que define al conjunto A

$a \notin A$ se lee: "a" no pertenence a A, "a" no es un elemento de A o "a" no está en A

$a \notin A$ equivale a $\sim (a \in A)$, esto es,

$$a \notin A \iff \sim (a \in A)$$

CONJUNTOS NUMERICOS

Algunos conjuntos numéricos importantes poseen su propio símbolo:

$\mathbb{N}$: es el conjunto de todos los números naturales

$\mathbb{N}_0$: es el conjunto de todos los números naturales más el número cero

$\mathbb{Z}$: es el conjunto de todos los números enteros

$\mathbb{Z}^+$: es el conjunto de todos los números enteros positivos, este conjunto coincide con el conjunto de los números naturales.

$\mathbb{Z}^-$: es el conjunto de todos los números enteros negativos

$\mathbb{Q}$: es el conjunto de todos los números racionales

$\mathbb{I}$: es el conjunto de todos los números irracionales

$\mathbb{R}$: es el conjunto de todos los números reales

$\mathbb{R}^+$: es el conjunto de todos los números reales positivos

$\mathbb{R}^-$: es el conjunto de todos los números reales negativos

$\mathbb{R}^*$: es el conjunto de todos los números reales no nulos

$\mathbb{C}$: es el conjunto de todos los números complejos

Conjuntos por Extensión y Comprensión

Un conjunto está bien definido, o bien determinado, cuando podemos precisar cuáles son sus elementos. Una forma de hacerlo es por *EXTENSIÓN* nombrando uno a uno todos los objetos que lo componen y encerrando esta lista entre llaves. Por ejemplo, si el conjunto A está formado por los elementos 1, 2, 3 y 4 podemos describir este conjunto escribiendo:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Este método de describir un conjunto puede ser poco práctico o imposible en algunos casos, y deberemos usar otras formas de notación. Por ejemplo, $\{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$ describe el conjunto de todos los números enteros positivos menores o iguales que 100.

Otras veces, para definir un conjunto lo hacemos por *COMPRENSIÓN* indicando una *propiedad común* a todos sus elementos y tal que *sólo sus elementos* la tengan. Así por ejemplo, los elementos del conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ pueden ser caracterizados como aquellos elementos x que cumplen la propiedad: $x \in \mathbb{N}$ y $x < 5$. Escribimos entonces:

$$A = \{ x \in \mathbb{N}: \ x < 5 \}$$

Conjuntos Especiales

Conjunto Universal: está formado por todos los elementos que intervienen en la disciplina de estudio

Al conjunto universal lo fijaremos con anterioridad al desarrollo del tema que estemos tratando. Lo denotaremos con $\mathcal{U}$

Conjunto vacío: es el conjunto que carece de elementos

Puede ser definido por cualquier propiedad que sea una contradicción. Lo notaremos por "$\emptyset$" o $\{\ \}$

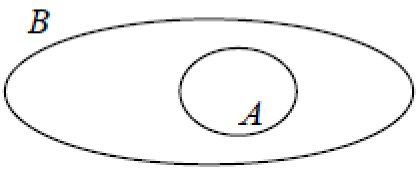
Conjunto Unitario: es el que tiene un único elemento.

Inclusión

Inclusión

Definición: Dados dos conjuntos A y B, se dice que A *está incluido en B, o que A es un parte de B, o que A es un subconjunto de B, o que B contiene a A*, si todo elemento de A pertenece a B. Se escribe $A \subseteq B$ o $B \supseteq A$.

$A \subseteq B \Leftrightarrow$ para todo x: $x \in A \Rightarrow x \in B$.



Nota: los dibujos que hemos utilizado para representar a los conjuntos A y B reciben el nombre de diagramas de Venn.

Negación de la inclusión

Negación de la relación de inclusión $A \not\subseteq B$

$$A \not\subseteq B \overset{(1)}{\iff} \sim A \subseteq B \overset{(2)}{\iff} \sim (\forall\, a \in \mathcal{U} : a \in A \implies a \in B) \iff$$

$$\overset{(3)}{\iff} \exists\, a \in \mathcal{U} / \sim (a \in A \implies a \in B) \overset{(4)}{\iff} \exists\, a \in \mathcal{U} / \, a \in A \wedge a \notin B)$$

$$A \not\subseteq B \iff (\exists a \in \mathcal{U} / \, a \in A \wedge a \notin B)$$

Referencias:

(1) cambio de notacion

(2) definición de inclusión

(3) negación del cuantificador universal

(4) negación de la implicación

Cuando el conjunto universal está sobrentendido no se expresa en la definición de inclusión o en su negación, es decir, escribiremos

$$A \subseteq B \iff (\forall a : a \in A \implies a \in B), \quad A \not\subseteq B \iff (\exists a / \, a \in A \wedge a \notin B)$$

Igualdad de Conjuntos

Definición: Se dice que el conjunto A *es igual* al conjunto B, *si* $A \subseteq B$ *y* $B \subseteq A$. Lo indicamos $A = B$.

Luego $A = B$ cuando todo elemento de A es un elemento de B y todo elemento de B es elemento de A, es decir A y B tienen los mismos elementos.

Veamos que la igualdad de conjuntos se traduce en una equivalencia lógica

$$A = B \overset{(1)}{\iff} A \subseteq B \wedge B \subseteq A \iff$$

$$\overset{(2)}{\iff} (\forall a \in \mathcal{U} :\ a \in A \implies a \in B) \wedge (\forall a \in \mathcal{U} :\ a \in B \implies a \in A) \iff$$

$$\iff \forall a \in \mathcal{U} :\ (a \in A \implies a \in B) \wedge (a \in B \implies a \in A) \iff$$

$$\overset{(3)}{\iff} \forall a \in \mathcal{U} :\ a \in A \iff a \in B$$

$$A = B \iff (\forall a \in \mathcal{U} :\ a \in A \iff a \in B)$$

Referencias:
(1) definición de igualdad de conjuntos (2) definición de inclusión
(3) definición de equivalencia

Igualdad de Conjuntos- Negación

Cuando el conjunto universal esté sobrentendido no lo escribirimos al usar la definición de igualdad de conjuntos, es decir,

$$A = B \iff (\forall\, a :\ a \in A \iff a \in B)$$

Se deja como ejercicio demostrar que

$$A \neq B \iff \exists\, x \in \mathcal{U} :\ (x \in A \ \wedge\ x \notin B) \ \vee\ (x \in B \ \wedge\ x \notin A)$$

Observaciones:

- Si $A \subseteq B$ pero $A \neq B$ diremos que A está contenido o incluido **estrictamente** en B y notaremos
$$A \subset B \quad o \quad A \subsetneq B$$

- Lógicamente la inclusión estricta se puede expresar
$$A \subset B \iff (\forall x :\ x \in A \implies x \in B) \ \wedge\ (\exists\, x /\ x \in B \ \wedge\ x \notin A)$$

  La demostración de esta equivalencia se deja como ejercicio

Propiedades de la Relación inclusión

La relación de inclusión verifica las siguientes propiedades

- Reflexiva: cualquiera sea el conjunto A se verifica,

$$A \subseteq A$$

- Antisimétrica: cualesquiera sean los conjuntos A y B se tiene,

$$(A \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq A) \implies A = B$$

- Transitiva: cualesquiera sean los conjuntos A, B y C se verifica,

$$(A \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq C) \implies A \subseteq C$$

Propiedades de Igualdad

La relación de igualdad verifica las siguientes propiedades

- Reflexiva: cualquiera sea el conjunto A se verifica,

$$A = A.$$

- Simétrica: cualesquiera sean los conjuntos A y B se tiene,

$$A = B \implies B = A$$

- Transitiva: cualesquiera sean los conjuntos A, B y C se verifica,

$$(A = B \ \wedge \ B = C) \implies A = C$$

Ejemplo

Ejemplo

Sean $A = \{x \in \mathbb{Z} : \ x \text{ es impar}\}$ *y* $B = \{x \in \mathbb{Z} : \ x + 5 \text{ es par }\}$. *Probar que* $A = B$.

Demostremos primero que $A \subseteq B$

$$x \in A \implies x \text{ es impar} \implies \exists t \in \mathbb{Z}/ \ x = 2t+1 \implies \exists t \in \mathbb{Z}/ \ x+5 = 2t+1+5 \implies$$

$$\implies \exists t \in \mathbb{Z}/ \ x+5 = 2t+6 = 2(t+3) \implies \exists l \in \mathbb{Z}, \ l = t+3/ \ x+5 = 2l \implies$$

$$\implies x + 5 \text{ es par}, \implies x \in B$$

Luego $A \subseteq B$

Probemos ahora que $B \subseteq A$

$$x \in B \implies x + 5 \text{ es par} \implies \exists s \in \mathbb{Z} / \; x + 5 = 2s \implies \exists s \in \mathbb{Z} / \; x = 2s - 5 \implies$$
$$\implies \exists s \in \mathbb{Z} / \; x = 2s - 4 - 1 = 2(s - 2) - 1 \implies$$
$$\implies \exists r \in \mathbb{Z}, \; r = s - 2 / \; x = 2r - 1 \implies x \text{ es impar} \implies x \in A$$

Entonces $B \subseteq A$

Como $A \subseteq B \;\wedge\; B \subseteq A$, podemos deducir usando la definición de igualdad de conjuntos que

$$A = B$$

OPERACIONES
ENTRE CONJUNTOS

Complemento de un conjunto

Sea $\mathcal{U}$ un conjunto universal y sea A un subconjunto de $\mathcal{U}$

Definición

El **complemento** *de A consiste de todos los elementos de $\mathcal{U}$ que no pertenecen a A. Notaremos*

$$A' = \{x \in \mathcal{U} : \; x \notin A\}$$

Lógicamente: $x \in A' \iff x \notin A \iff \sim (x \in A)$ y

$$x \notin A' \iff \sim (x \in A') \iff \sim\sim (x \in A) \iff x \in A$$

Notaciones: $A' = A^C = \mathcal{C}A = -A$

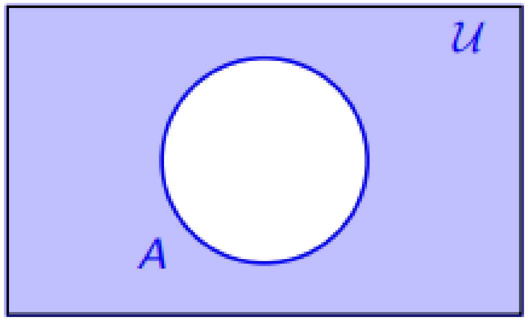


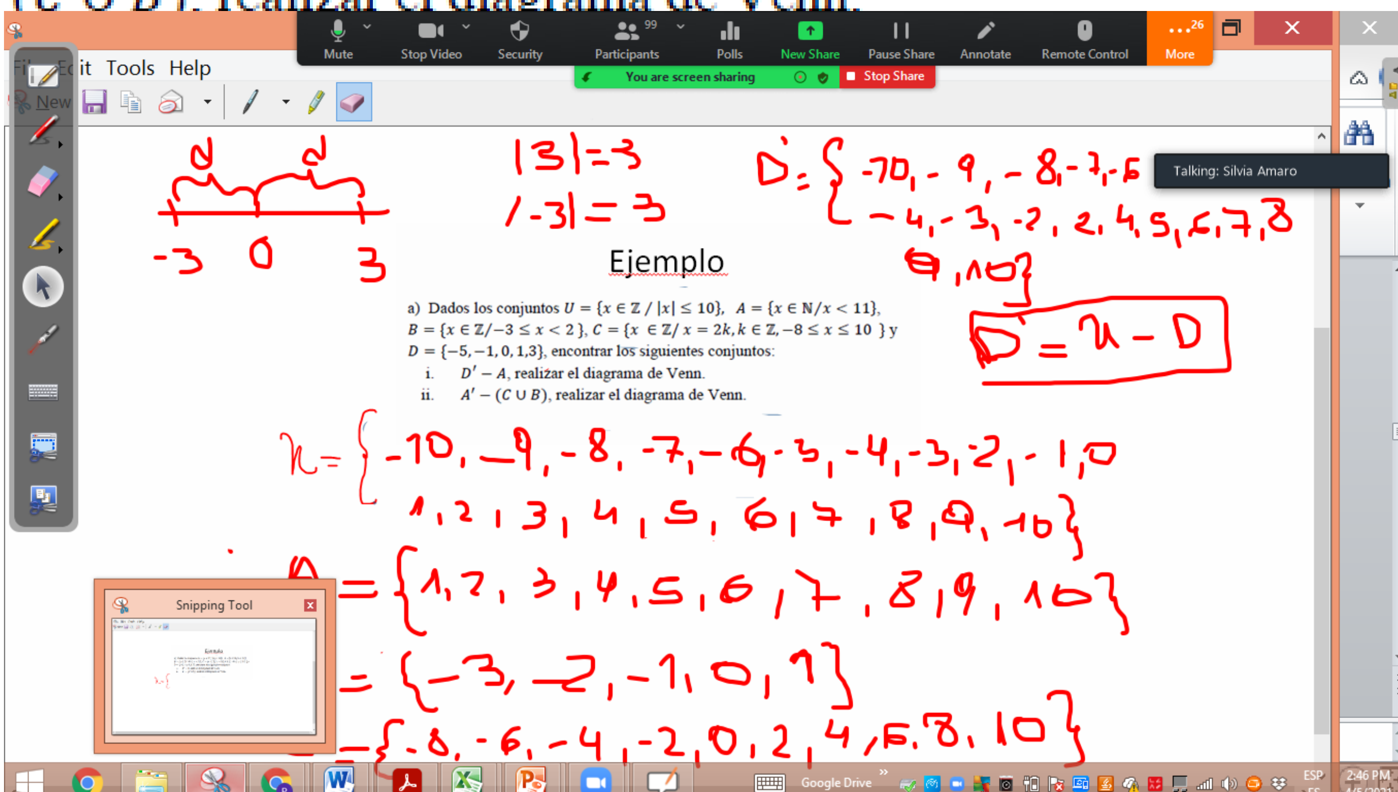
Diagrama de Venn de A'

Ejemplo

a) Dados los conjuntos $U = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, |x| \leq 10\}$, $A = \{x \in \mathbb{N}/x < 11\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z}/-3 \leq x < 2\}$, $C = \{x \in \mathbb{Z}/\, x = 2k, k \in \mathbb{Z}, -8 \leq x \leq 10\}$ y $D = \{-5, -1, 0, 1{,}3\}$, encontrar los siguientes conjuntos:

i. $D' - A$, realizar el diagrama de Venn.

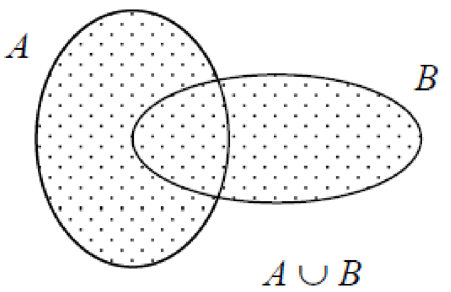
ii. $A' - (C \cup B)$, realizar el diagrama de Venn.



Unión de Conjuntos

<u>Definición</u>: Dados dos conjuntos A y B, se llama *unión* de A y B al conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A ó a B. En notación:

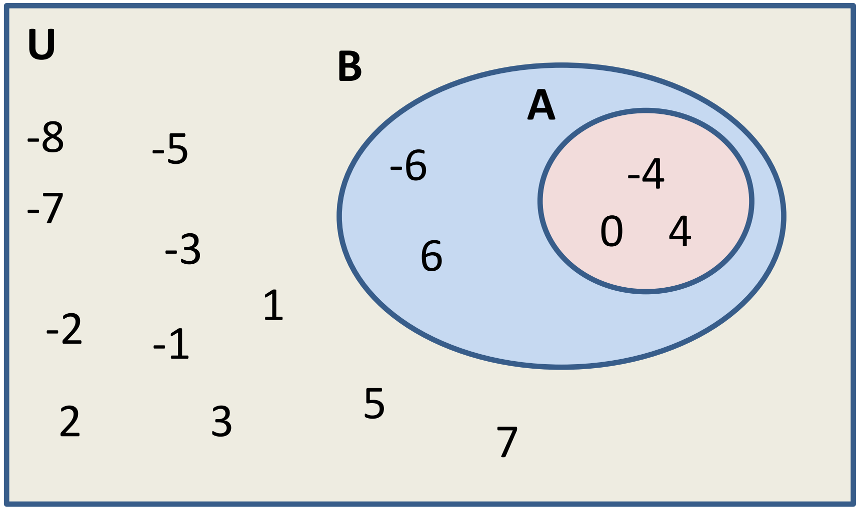
$$A \cup B = \{ x \in U : x \in A \quad \text{ó} \quad x \in B \}$$



EJEMPLO

$$U = \{x \in Z: -9 < x \leq 7\}$$
$$A = \{x \in Z: x = 4n, n \in Z, -1 \leq n < 2\}$$
$$B = \{-6, -4, 0, 4, 6\}$$

$$\boldsymbol{A \cup B = \{-6, -4, 0, 4, 6\}}$$



De la definición resulta que $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$.

Propiedades de Unión

- Idempotencia: $A \cup A = A$

Para demostrar una igualdad hay que probar 2 inclusiones:

i) $A \subseteq A \cup A$
ii) $A \cup A \subseteq A$

Probar i): Queda Probada por consecuencia de la definición, que todo conjunto esta incluido en la unión de el mismo con otro conjunto

Probar ii) Dpq $(x\epsilon\ A \cup A \ \Longrightarrow x\epsilon A)$

$\boldsymbol{x\epsilon A \cup A} \Longrightarrow$**(1)** $\boldsymbol{x \in A \vee x \in A} \Longrightarrow$**(2)** $\boldsymbol{x \in A}$

Por lo tanto: $A \cup A \subseteq A$
(1): Definición de Unión
(2): Idempotencia de la ***DISYUNCIÓN***

Propiedades de Unión

- Conmutativa: $A \cup B = B \cup A$

Para demostrar una igualdad hay que probar 2 inclusiones:

i) $A \cup B \subseteq B \cup A$
ii) $B \cup A \subseteq A \cup B$

Probar i) ($x \in A \cup B \Longrightarrow x \in B \cup \mathrm{A}$) Definición de la inclusión

$x \in A \cup B \Longrightarrow (1) \quad x \in A \vee x \in B \Longrightarrow (2) \; x \in B \vee x \in A \Longrightarrow (3) \; x \in B \cup A$
Por lo tanto $A \cup B \subseteq B \cup A$

(1) Definición de Unión
(2) Comnutativa de la Disyunción
(3) Definición de Unión

Probar ii) ($x \in \mathrm{B} \cup A \Longrightarrow x \in A \cup \mathrm{B}$) Definición de la inclusión

QUE COMO EJERCICIO

Por i) y ii) queda demostrada la propiedad!!!

Propiedades de Unión

- Asociativa: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Para demostrar una igualdad hay que probar 2 inclusiones:

i) $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$
ii) $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$ **(Queda como ejercicio para el lector)**

Probar i) $(x \in (A \cup B) \cup C \Longrightarrow x \in A \cup (B \cup C)$ Definición de la inclusión

i) $x \in (A \cup B) \cup C \Longrightarrow (1) \quad (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \Longrightarrow (2) \; x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \Longrightarrow (3) \; x \in A \cup (B \cup C)$

Por lo tanto$(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$

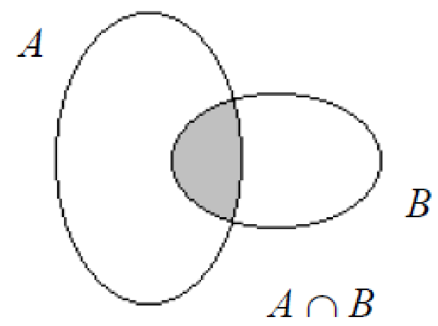
(1) Definición de Unión
(2) Asociativa de la Disyunción
(3) Definición de Unión

Por i) y ii) queda demostrada la propiedad!!!

Intersección de Conjuntos

<u>Definición</u>: Dados dos conjuntos A y B, se llama *intersección de A y B*, y se indica $A \cap B$, al conjunto cuyos elementos son los elementos comunes a A y a B, es decir los elementos que pertenecen simultáneamente a los dos conjuntos.

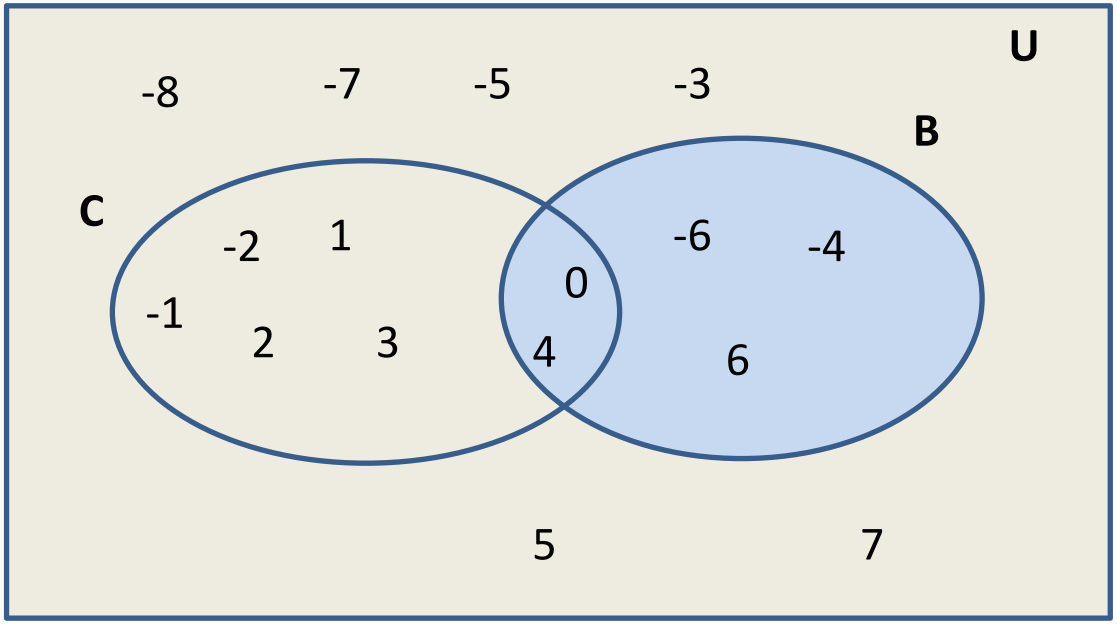
$$A \cap B = \{\, x \in U : x \in A \ \text{ y } \ x \in B\}$$



De la definición se desprende inmediatamente que $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$.

Ejemplo

$$U = \{x \in Z\!: -9 < x \leq 7\}$$
$$B = \{-6, -4, 0, 4, 6\}$$
C= $\{x \in Z\!: x \geq -2 \ \wedge x < 5\}$



$$B \cap C = \{0, 4\}$$

Propiedades de Intersección

- Idempotencia: $A \cap A = A$

Para demostrar una igualdad hay que probar 2 inclusiones:

i) $A \subseteq A \cap A$
ii) $A \cap A \subseteq A$

Probar ii) Dpq ($x\epsilon\ A \Longrightarrow x\epsilon\ A \cap A$)

$\boldsymbol{x\epsilon A} \Longrightarrow$**(1)** $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \Longrightarrow$**(2)** $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{A}$

Por lo tanto: $A \subseteq A \cap A$ (por definición de inclusión)

(1): Idempotencia de la ***Conjunción***
(2): Definición de Intersección

Probar ii) Queda Probada por consecuencia de la definición

Propiedades de Intersección

- Conmutativa: $A \cap B = B \cap A$

Para demostrar una igualdad hay que probar 2 inclusiones:

i) $A \cap B \subseteq B \cap A$
ii) $B \cap A \subseteq A \cap B$

Probar i) ($x \in A \cap B \Longrightarrow x \in B \cap \mathrm{A}$) Definición de la inclusión

$x \in A \cap B \Longrightarrow (1) \quad x \in A \wedge x \in B \Longrightarrow (2) \; x \in B \wedge x \in A \Longrightarrow (3) \; x \in B \cap A$
Por lo tanto $A \cap B \subseteq B \cap A$

(1) Definición de Intersección
(2) Comnutativa de la conjunción
(3) Definición de Intersección

Probar ii) ($x \in \mathrm{B} \cap A \Longrightarrow x \in A \cap \mathrm{B}$) Definición de la inclusión

QUE COMO EJERCICIO

Por i) y ii) queda demostrada la propiedad!!!

Propiedades de Intersección

- Asociativa: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Para demostrar una igualdad hay que probar 2 inclusiones:

i) $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$
ii) $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$ **(Queda como ejercicio para el lector)**

Probar i) $(x \in (A \cap B) \cap C \Longrightarrow x \in A \cap (B \cap C)$ Definición de la inclusión

i) $x \in (A \cap B) \cap C \Longrightarrow (1) \quad (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C \Longrightarrow (2) \; x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \Longrightarrow (3) \; x \in A \cap (B \cap C)$

Por lo tanto $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$

(1) Definición de Intersección
(2) Asociativa de la Conjunción
(3) Definición de Intersección

Por i) y ii) queda demostrada la propiedad!!!

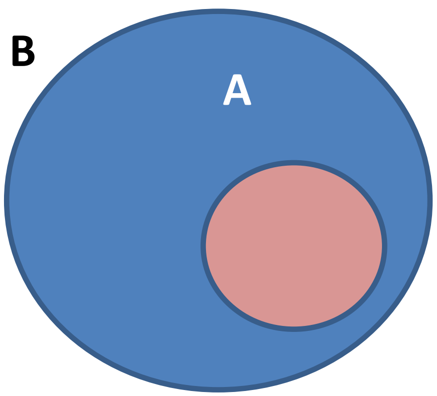
Teorema 1: $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

- Debemos probar dos inclusiones:

$i)\quad A \subseteq B \Longrightarrow A \cup B = B$

$a)\, A \cup B \subseteq B$
$b)\, B \subseteq A \cup B$

$i)\quad A \subseteq B \Longleftarrow A \cup B = B$



Teorema 1: $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

$$i)\ \ A \subseteq B \Longrightarrow A \cup B = B \left\{ \begin{array}{l} a)\, A \cup B \subseteq B \\ b)\, B \subseteq A \cup B \end{array} \right.$$

i) a) $x \in A \cup B \Longrightarrow (1)\ x \in A \ \vee x \in B \Longrightarrow (2)\ x \in B \ \vee x \in B \Longrightarrow (3)\ x \in B$

Por lo tanto $A \cup B \subseteq B$

(1) Definición de Unión

(2) Por hipótesis

(3) Idempotencia de la Disyunción

i) b) $x \in B \Longrightarrow x \in A \cup B$ Queda demostrada por definición de Unión

Por a) y b) queda demostrada la propiedad (Parte (i))!!!

Teorema 1: $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

ii) $A \subseteq B \Leftarrow A \cup B = B$

$$x \in A \Longrightarrow (1)\ x \in A\ \vee\ x \in B \Longrightarrow (2)\ x \in A \cup B \Longrightarrow (3)\ x \in B$$

Por lo tanto $\boldsymbol{A \cup B \subseteq B}$

(1) Adición
(2) Definición de unión
(3) Por hipótesis ($A \cup B = B$)

Queda demostrada la propiedad (Parte (ii))!!!

Por i) y ii) Se demuestra el TEOREMA

Teorema 2: $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

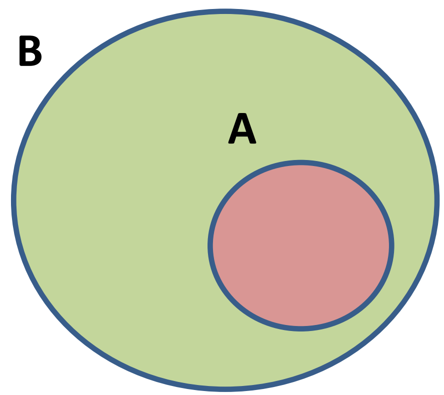
- Debemos probar dos inclusiones:

$i) \quad A \subseteq B \Longrightarrow A \cap B = A$

$a) \; A \cap B \subseteq A$

b) $A \subseteq A \cap B$

$i) \quad A \subseteq B \Longleftarrow A \cap B = A$



Teorema 2: $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

$i) \quad A \subseteq B \Longrightarrow A \cap B = A$ $\left\{ \begin{array}{l} a)\, A \cap B \subseteq A \\ \text{b) } \mathrm{A} \subseteq A \cap B \end{array} \right.$

a) $x \in A \cap B \Longrightarrow x \in A$ Queda demostrada por definición de intersección

b) $x \in A \Longrightarrow x \in A \cap B$

$x \in A \Longrightarrow$(1) $x \in A \wedge x \in A \Longrightarrow$(2) $x \in A \wedge x \in B \Longrightarrow$(3) $x \in A \cap B$

Por lo tanto A$\subseteq A \cap B$

(1) Idempotencia de la conjunción
(2) Hipótesis $A \subseteq B$
(3) Definición de intersección

Por a) y b) queda demostrada la propiedad (Parte (i))!!!

Teorema 2: $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

ii) $A \subseteq B \Leftarrow A \cap B = A$

$$x \in A \Longrightarrow (1)\; x \in A \;\wedge\; x \in B \Longrightarrow (2)\; x \in A \cap B \Longrightarrow (3)\; x \in B$$

Por lo tanto $\boldsymbol{A \cap B \subseteq A}$

(1) Por hipótesis ($A \cap B = A$)
(2) Definición de Intersección
(3) Por consecuencia de la Intersección $A \cap B \subseteq B$

Queda demostrada la propiedad (Parte (ii))!!!

Por i) y ii) Se demuestra el TEOREMA

Leyes de Absorción

$$\mathrm{A} \cup (A \cap B) = A$$

Justificación: Como $(A \cap B) \subseteq A$, por el Teorema 1, $A \cup (A \cap B) = A$

$$\mathrm{A} \cap (A \cup B) = A$$

Justificación: Como $\mathrm{A} \subseteq A \cup B$, por el Teorema 2, $\mathrm{A} \cap (A \cup B) = A$

Leyes Distributivas

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Se pueden ver la demostracciones en el Apunte de Cátedra

Sea $\mathcal{U}$ un conjunto universal y A, B y C subconjuntos de $\mathcal{U}$

1. $\emptyset \subseteq A, \quad A \subseteq \mathcal{U}$
2. $A \subseteq A \cup B, \quad B \subseteq A \cup B, \quad A \cap B \subseteq A, \quad A \cap B \subseteq B$
3. Idempotencia: $A \cup A = A, \quad A \cap A = A$
4. Asociativa: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
5. Conmutativa: $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$
6. $A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}, \quad A \cap \mathcal{U} = A$
7. Distributivas:
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
8. Leyes de absorción: $A \cup (A \cap B) = A, \quad A \cap (A \cup B) = A$
9. $A \subseteq B \iff A \cup B = B, \quad A \subseteq B \iff A \cap B = A$
10. $\emptyset' = \mathcal{U}, \quad \mathcal{U}' = \emptyset, \quad (A')' = A$
11. $A \subseteq B \iff B' \subseteq A', \quad A \cup A' = \mathcal{U}, \quad A \cap A' = \emptyset$
12. De Morgan: $(A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$

Diferencia

Definición

Sean A y B subconjuntos de un conjunto universal, se llama **diferencia** *entre A y B, al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B. Notaremos $A–B$.*

$$A–B = \{x \in \mathcal{U} : \; x \in A \; \wedge \; x \notin B\}$$

Lógicamente

$$x \in A - B \iff x \in A \wedge x \notin B$$

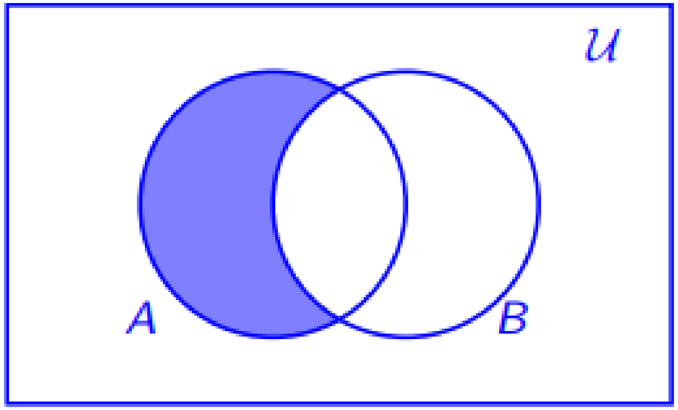


Diagrama de Venn de $A \cap B$

Observemos que:

$$x \notin A - B \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \sim (x \in A - B) \overset{(2)}{\Longleftrightarrow} \sim (x \in A \wedge x \notin B) \overset{(1)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow \sim (x \in A \wedge \sim (x \in B)) \overset{(3)}{\Longleftrightarrow} \sim (x \in A) \vee \sim (\sim (x \in B)) \overset{(4)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow \sim (x \in A) \vee x \in B \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} x \notin A \vee x \in B$$

Luego

$$x \notin A - B \Longleftrightarrow x \notin A \vee x \in B$$

Referencias:

(1) Cambio de notación

(2) Definición de diferencia

(3) De Morgan (negación de la conjunción)

(4) Doble negación

Propiedades

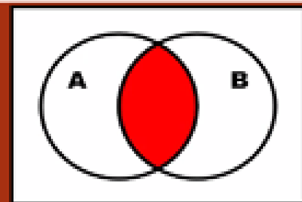
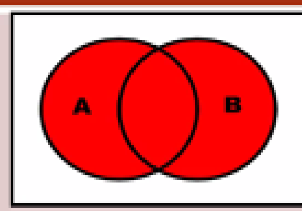
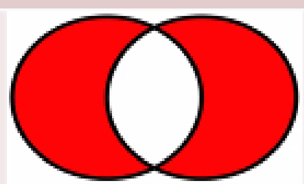
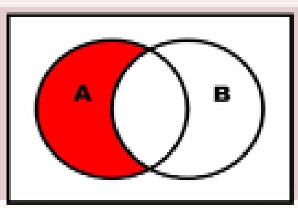
Proposición

Sea $\mathcal{U}$ un conjunto universal y A y B sunconjuntos de $\mathcal{U}$. Entonces

1. $A - B = A \cap B'$
2. $A - B \subseteq A, \quad B - A \subseteq B$
3. $A \subseteq B \implies A\text{–}B = \emptyset$
4. $A = B \implies A\text{–}B = \emptyset \ \wedge \ B\text{–}A = \emptyset$
5. $A \cap B = \emptyset \implies A\text{–}B = A \ \wedge \ B\text{–}A = B$

Búsqueda bibliográfica en internet

- ¿Cómo buscar?
  - Identificar palabras clave de la pregunta de investigación
  - Utilizar operadores (términos booleanos) y filtros

AND (+)		**Artículos que incluyen los términos Pobreza y Desigualdad**
OR		Artículos que incluyen pobreza y/o desigualdad
XOR		Artículos que incluyen pobreza o desigualdad (pero no ambos términos)
NOT (-)		Artículos que incluyen pobreza y no incluyen el término desigualdad

Ejemplo

a) Dados los conjuntos $U = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ |x| \leq 10\}$, $A = \{x \in \mathbb{N}/x < 11\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z}/-3 \leq x < 2\}$, $C = \{x \in \mathbb{Z}/ \ x = 2k, k \in \mathbb{Z}, -8 \leq x \leq 10\}$ y $D = \{-5, -1, 0, 1,3\}$, encontrar los siguientes conjuntos:

i. $D' - A$, realizar el diagrama de Venn.

ii. $A' - (C \cup B)$, realizar el diagrama de Venn.

Demostraciones

10. Demostrar las siguientes propiedades de conjuntos
    a) Si $A \subseteq (B \cup C')$ entonces $A \cap C \subseteq B$.
    H) $A \subseteq (B \cup C')$
    T) $A \cap C \subseteq B$

(Aclaración: debemos demostrar que $A \cap C \subseteq B$, es decir, debemos probar que $\forall x \in A \cap C \Rightarrow x \in B$)
<u>Demostración</u>:

$x \in A \cap C \Rightarrow_{1)} x \in A \wedge x \in C \Rightarrow_{2)} x \in (B \cup C') \wedge x \in C \Rightarrow_{3)} (x \in B \vee x \in C') \wedge x \in C \Rightarrow_{4)}$
$(x \in B \wedge x \in C) \vee (x \in C' \wedge x \in C) \Rightarrow_{5)} (x \in B \wedge x \in C) \vee c \Rightarrow_{6)} (x \in B \wedge x \in C) \Rightarrow_{7)} x \in B.$

Por lo tanto, $A \cap C \subseteq B$
Justificación de cada implicación:

1) Definición de intersección de conjuntos
2) Hipótesis $A \subseteq (B \cup C')$
3) Definición de unión de conjuntos
4) Distributiva
5) $(x \in C' \wedge x \in C) \Rightarrow c\ (contradicción)$
6) $p \vee c \Rightarrow c$
7) Simplificación

Producto Cartesiano

Definición

Sean A y B dos conjuntos no vacíos, el **producto cartesiano** *entre los conjuntos A y B es el conjunto de pares ordenados donde la primera componente del par es un elemento de A y la segunda componente del par es un elementos de B. Notaremos $A \times B$*

$$A \times B = \{(a, b) : \ a \in A \ \wedge \ b \in B\}$$

Lógicamente:

$$(a, b) \in A \times B \iff a \in A \ \wedge b \in B$$

Observaciones:

- Si A es el conjunto vacío o B es el conjunto vacío entonces el producto cartesiano no está definido
- Es importante el orden en que se efectúa el producto cartesiano de los conjuntos porque en algunos casos $A \times B \neq B \times A$
- Si $A = B$ notaremos A^2 para indicar $A \times A$.

Observemos que

$$(a, b) \notin A \times B \iff a \notin A \vee b \notin B,$$

en efecto

$$(a, b) \notin A \times B \overset{(1)}{\iff} \sim ((a, b) \in A \times B) \overset{(2)}{\iff} \sim (a \in A \wedge b \in B) \overset{(3)}{\iff}$$

$$\iff \sim (a \in A) \vee \ \sim (b \in B) \overset{(1)}{\iff} a \notin A \ \vee \ b \notin B$$

Referencias:

(1) Cambio de notación (2) Definición de producto cartesiano

(3) De Morgan (negación de la conjunción)

Conjuntos de Partes

Definición

Dado un conjunto A, el conjunto formado por los subconjuntos de A, es el **conjunto de las partes de A**. *Notaremos* $\mathcal{P}(A)$

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$$

Lógicamente

$$X \in \mathcal{P}(A) \iff X \subseteq A$$

Observaciones:

- $\mathcal{P}(A)$ nunca es vacío, pues como $\emptyset \subseteq A$ y $A \subseteq A$ cualquiera sea A, entonces

$$\emptyset \in \mathcal{P}(A) \quad \text{y} \quad A \in \mathcal{P}(A)$$

- Sea A es un conjunto finito. La cantidad de elementos del conjunto A lo notaremos con $\#A$ o $|A|$, es decir, si A es un conjunto con "n" elementos entonces $\#A = n$ o $|A| = n$.

  Si $\#A = n$ entonces el conjunto $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^n elementos, es decir, $\#\mathcal{P}(A) = 2^n$

Ejemplo

Sea $A = \{a,\ b,\ c,\ d\}$.

1. *Hallar* $\mathcal{P}(A)$
2. *Indicar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas y justificar la respuesta*

   i) $a \in \mathcal{P}(A)$

   ii) $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$

   iii) $\{a, b\} \subseteq \mathcal{P}(A)$

   iv) $\{\,\{b\}, \{a, b\}\,\} \subseteq \mathcal{P}(A)$

1. $\emptyset \subseteq A,\quad \{a\} \subseteq A,\quad \{b\} \subseteq A,\quad \{c\} \subseteq A,\quad \{d\} \subseteq A,$

   $\{a,b\} \subseteq A,\quad \{a,c\} \subseteq A,\quad \{a,d\} \subseteq A,\quad \{b,c\} \subseteq A,\quad \{b,d\} \subseteq A,\quad \{c,d\} \subseteq A,$

   $\{a,b,c\} \subseteq A,\quad \{a,b,d\} \subseteq A,\quad \{a,c,d\} \subseteq A,\quad \{b,c,d\} \subseteq A$ y $A \subseteq A$

   Entonces

   $$\begin{aligned}\mathcal{P}(A) = \{\ &\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{d\},\ \{a,b\},\ \{a,c\},\ \{a,d\},\ \{b,c\},\\ &\{b,d\},\ \{c,d\},\ \{a,b,c\},\ \{a,b,d\},\ \{a,c,d\},\ \{b,c,d\},\ A\}\end{aligned}$$

2. i) $a \in \mathcal{P}(A)$ es falso ya que

$$a \not\subseteq A \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} a \notin \mathcal{P}(A)$$

ii) $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$ es verdadera pues $\{a\} \subseteq A$

iii) $\{a, b\} \subseteq \mathcal{P}(A)$ esta proposición es falsa, ya que

$\{a, b\} \subseteq \mathcal{P}(A) \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} a, b \in \mathcal{P}(A)$ y esta última proposición es falsa

iv) $\{\{b\}, \{a, b\}\} \subseteq \mathcal{P}(A)$ es verdadera

$\{\{b\}, \{a, b\}\} \subseteq \mathcal{P}(A) \overset{(2)}{\Longleftrightarrow} \{b\}, \{a, b\} \in \mathcal{P}(A)$ y esta última proposición es verdadera

Referencias:

(1) Definición de conjuntos de parte (2) definición de inclusión