Sumatoria y Productoria.

En muchas situaciones se presenta la conveniencia de abreviar la notación de una suma cuyos términos admiten cierta ley de formación. En este sentido es útil la introducción del símbolo de sumatoria: $\sum$.

Si llamamos a_i a los elementos que verifican una ley de formación determinada, para indicar la suma de n términos de esta forma, es decir $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$, escribimos

$$\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Ejemplos:

1. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \sum_{i=1}^{5} i.$

2. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + 50^2 = \sum_{i=1}^{50} i^2.$

3. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{30} = \sum_{i=1}^{30} \frac{1}{i}.$

Propiedades: Si a_1 y b_i son expresiones reales y sea k una constante real entonces

1. $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$ pues:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) = \\ &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n + b_1 + b_2 + \ldots + b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i. \end{aligned}$$

2. $\sum_{i=1}^{n} ka_i = k \sum_{i=1}^{n} a_i$ pues:

$$\sum_{i=1}^{n} ka_i = ka_1 + ka_2 + \ldots + ka_n = k(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = k \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

3. $\sum_{i=1}^{n} a = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n-veces} = na$

Otras veces también se presenta la conveniencia de abreviar la notación de un producto cuyos factores admiten cierta ley de formación. En este sentido es útil la introducción del símbolo de productoria: $\prod$.

Si denominamos a_i a los elementos que verifican una ley de formación determinada, para indicar el producto de n factores de esta forma, es decir $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$, escribimos

$$\prod_{i=1}^{n} a_i.$$

Ejemplos:

1. $1^3 \cdot 2^3 \cdot 3^3 \cdot 4^3 = \prod_{i=1}^{4} i^3.$

2. $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{30} = \prod_{i=1}^{30} \frac{1}{i}.$

3. $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2n = \prod_{i=1}^{n} 2i.$

Propiedades: Si a_1 y b_i son expresiones reales y sea k una constante real entonces

1. $\prod_{i=1}^{n} (a_i \cdot b_i) = \prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{i=1}^{n} b_i$

2. $\prod_{i=1}^{n} k a_i = k^n \prod_{i=1}^{n} a_i$

3. $\prod_{i=1}^{n} a = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-veces} = a^n$

<u>Método de Inducción Matemática</u>.

Ya vimos que los números reales son un cuerpo ordenado completo y vimos ciertas propiedades de ellos. Llamaremos números naturales al menor subconjunto A de $\mathbb{R}$ que verifica: $1 \in A$ y si $n \in A$ entonces $n + 1 \in A$. Al conjunto de los números naturales lo notaremos por $\mathbb{N}$. En consecuencia

$$\begin{array}{c} 1 \in \mathbb{N} \text{ entonces } 1+1 \in \mathbb{N}, \text{ luego } 2 \in \mathbb{N} \\ 2 \in \mathbb{N} \text{ entonces } 2+1 \in \mathbb{N}, \text{ luego } 3 \in \mathbb{N} \\ 3 \in \mathbb{N} \text{ entonces } 3+1 \in \mathbb{N}, \text{ luego } 4 \in \mathbb{N} \\ \ldots \end{array}$$

De esta manera, tenemos que $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Supongamos que tenemos una función proposicional cuantificada universalmente que depende de un número natural n, si dicha proposición es falsa, podemos justificar este hecho, mostrando que existe un valor $n_0 \in \mathbb{N}$ para el cual **no** se verifica la proposición. Por ejemplo, consideremos el siguiente enunciado:

$$p(n) : n^2 - 3n - 1 < 0$$

Es fácil ver que para $n = 1, 2$ y 3 la proposición es verdadera, en cambio, para $n = 4$ tenemos

$$4^2 - 3.4 - 1 = 3 \;\text{ y }\; 3 \not< 0,$$

lo que implica que la proposición $p(n)$ no es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Supongamos ahora que tenemos una función proposicional cuantificada universalmente que depende de un número natural n y comprobamos que dicha proposición es verdadera para algunos números naturales y sospechamos que también será verdadera para el resto de los números naturales. ¿Cómo podríamos justificar que esa proposción realmente se cumple para todo n natural? Es evidente que es imposible justificar esto probando con TODOS los números naturales ya que éstos son infinitos.

A continuación daremos un método para poder demostrar la veracidad de infinitas proposiciones que dependen de un número natural n. Dicho método es conocido como Principio de Inducción Completa.

Teorema: *Si $p(n)$ es una proposición relativa al número natural n y verifica que*

1. *$p(1)$ es verdadera*
2. *para cada $k \in \mathbb{N}$, si $p(k)$ es verdadera entonces $p(k+1)$ es verdadera.*

Entonces $p(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplos:

1. Probemos que la proposición

$$p(n) : \sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2$$

   es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

   Para esto, utilizaremos el Principio de Inducción Completa. Luego, debemos probar el paso 1 y el paso 2.

<u>*Paso* 1</u> Debemos probar que $p(1) : \sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 1^2$ es verdadera.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 2\cdot 1 - 1 = 1 \\ 1^2 = 1 \end{cases}$$

De esto resulta que $p(1)$ es verdadera.

<u>*Paso* 2</u> Sea $k \in \mathbb{N}$, debemos probar que $p(k) \Rightarrow p(k+1)$ es verdadera.

$Hi)$ $p(k) : \sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2$

$T)$ $p(k+1) : \sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = (k+1)^2$

Demostremos esta implicación:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) &= (2\cdot 1-1)+(2\cdot 2-1)+\cdots+(2\cdot k-1)+(2\cdot(k+1)-1) = \\ &= \sum_{i=1}^{k}(2i-1) + (2.(k+1)-1) = \\ &\overset{(Hi)}{=} k^2 + 2.(k+1) - 1 = k^2 + 2k + 2 - 1 = \\ &= k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2 \end{aligned}$$

De los pasos 1 y 2 queda demostrado que $p(n)$ es verdadera, para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Probar que $\prod_{i=1}^{n} \frac{i+1}{i} = n+1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Demostraremos los pasos 1 y 2 del Principio de Inducción Completa.

<u>*Paso* 1</u> Probemos que $p(1) : \prod_{i=1}^{1} \frac{i+1}{i} = 1+1$ es verdadera.

$\prod_{i=1}^{1} \frac{i+1}{i} = \frac{1+1}{1} = \frac{2}{1} = 2 = 1+1$. Luego $p(1)$ es verdadera.

<u>*Paso 2*</u> Sea $k \in \mathbb{N}$, supongamos que $p(k)$ es verdadera y probemos que $p(k+1)$ lo es, es decir:

$Hi)\ p(k): \prod_{i=1}^{k} \frac{i+1}{i} = k+1.$

$T)\ p(k+1): \prod_{i=1}^{k+1} \frac{i+1}{i} = (k+1)+1.$

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{k+1} \frac{i+1}{i} &= \frac{1+1}{1} \cdot \frac{2+1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{k+1}{k} \cdot \frac{(k+1)+1}{k+1} = \\
&= \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{i+1}{i} \right) \cdot \frac{(k+1)+1}{k+1} = \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{i+1}{i} \right) \cdot \frac{k+2}{k+1} = \\
&\underset{=}{(Hi)} (k+1) \cdot \frac{k+2}{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{k+1} = k+2 = (k+1)+1
\end{aligned}$$

De los pasos 1 y 2 queda demostrado que $\prod_{i=1}^{n} \frac{i+1}{i} = n+1$ es verdadero para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. Demostremos que la proposicón $p(n): n^2+n$ es par es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

   Como lo demostraremos utilizando el Principio de Inducción Completa debemos demostrar el paso 1 y el paso 2.

<u>*Paso 1*</u> Como $1^2+1=2$ y 2 es un número par resulta que $p(1)$ es verdadera.

<u>*Paso 2*</u> Sea $k \in \mathbb{N}$, debemos probar que $p(k) \Rightarrow p(k+1)$ es verdadera.
$Hi)\ p(k): k^2+k = 2t$ para algún $t \in \mathbb{Z}$.
$T)\ p(k+1): (k+1)^2+(k+1) = 2s$ para algún $s \in \mathbb{Z}$.

Demostremos esta implicación

$$\begin{aligned}
(k+1)^2+(k+1) &= (k^2+2k+1)+(k+1) = k^2+k+2k+2 \\
&\underset{=}{(Hi)} 2t+2k+2 = 2(t+k+1) = 2s,
\end{aligned}$$

con $s = t+k+1, s \in \mathbb{Z}$

De los pasos 1 y 2 queda demostrado que $p(n)$ es verdadera, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Importancia de Paso 1 y Paso 2 en el criterio de inducción:

- Supongamos que queremos probar la siguiente proposición:

  $$p(n): \text{ el número } n \text{ es igual a su siguiente.}$$

  Para esto, supongamos que $p(k)$ es verdadera para k natural y probemos que $p(k+1)$ es verdadera.

  Como $p(k)$ es verdadera, tenemos que $k = k + 1$, sumando uno a ambos miembros resulta $k+1 = k+2$. Luego, $p(k+1)$ es verdadera y en consecuencia la proposición es verdadera.

  Pero entonces todos los números naturales son iguales, lo que no es cierto!!!!!! ¿Dónde está el error en la demostración? El error está en que NO probamos el paso 1, es decir, la proposición es falsa para $k = 1$, ya que $1 \neq 1 + 1$.

- Consideremos la proposición

  $$p(n): \text{ todas las mujeres tiene el mismo color de pelo.}$$

  Para intentar demostrarla, haremos inducción sobre el número de mujeres. Obviamente si $n = 1$, $p(1)$ es verdadera. Supongamos ahora que para un cierto $k \in \mathbb{N}$, $p(k)$ es cierta, es decir, para cualquier grupo de k mujeres, todas tienen el mismo color de pelo. Consideremos un conjunto de $k + 1$ mujeres distintas denotadas por $m_1, m_2, \ldots, m_{k+1}$. Por la hipótesis de inducción el grupo de mujeres $m_1, m_2, \ldots, m_k$ tiene el mismo color de pelo, y de la misma forma el grupo $m_2, m_3, \ldots, m_{k+1}$ también. Por lo tanto $m_1, m_2, \ldots, m_k, m_{k+1}$ tienen todas el mismo color de pelo. Hemos demostrado por inducción que para cualquier grupo de n mujeres, todas tienen el mismo color de pelo!!!!! Lo cual sabemos que no es cierto. ¿Dónde está el error?

  El error está en el segundo paso de inducción, nuestra demostración vale para $k \geq 2$, pero si $k = 1$, no podemos probar que $p(2)$ es cierta, ya que los grupos en los que dividimos a los mujeres $m_1, m_2, \ldots, m_k$ y $m_2, m_3, \ldots, m_{k+1}$ en este caso, no tendrían elementos en común por lo que no podríamos transmitir la propiedad de tener el mismo color de pelo.

Estos casos muestran la necesidad de probar los dos pasos del criterio de inducción para demostrar que una propiedad es cierta para todo número natural.