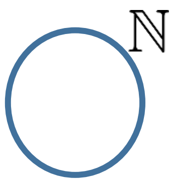
Números naturales



$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

¿Cómo escribir la suma $1 + 2 + 3 + \cdots + 100$ sin tener que escribir los 100 términos ni puntos suspensivos?

Sumatoria y productoria:

- **Sumatoria:** Una forma abreviada de escribir una suma de la forma $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ es utilizando el símbolo Σ. Así,

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

(se lee *sumatoria o suma de los términos a_i, cuando i varía de 1 a n*)

El símbolo $\sum$ se puede definir recursivamente de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}, \qquad \text{para } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Algunas propiedades de sumatoria:

$$(1)\ \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

$$(2)\ \sum_{i=1}^{n} c.a_i = c.\sum_{i=1}^{n} a_i, \qquad \text{donde } c \text{ es una constante.}$$

$$(3)\ \sum_{i=1}^{n} k = n.k, \qquad \text{donde } k \text{ es una constante.}$$

• **Productoria:** Una forma abreviada de escribir un producto de la forma $a_1.a_2.\cdots a_n$ es utilizando el símbolo $\prod$. Así,

$$\boxed{\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1.a_2.\cdots .a_n}$$

(se lee *productoria o producto de los factores* a_i, *cuando* i *varía de 1 a* n)

Algunas propiedades de productoria:

(1) $$\prod_{i=1}^{n}(a_i.b_i) = \prod_{i=1}^{n} a_i . \prod_{i=1}^{n} b_i.$$

(2) $$\prod_{i=1}^{n} c.a_i = c^n . \prod_{i=1}^{n} a_i,$$ donde c es una constante.

(3) $$\prod_{i=1}^{n} k = \ k^n,$$ donde k es una constante.

Método de inducción matemática:

El siguiente método es útil para demostrar que ciertas propiedades que depeden de un número n son válidas para todo n natural.

Principio de inducción completa:

Sea $p(n)$ una función proposicional relativa al número natural n y supongamos que:

(1) $p(1)$ es verdadera,

(2) para cada $k \in \mathbb{N}$, si $p(k)$ es verdadera etonces $p(k+1)$ es verdadera,

entonces $p(n)$ es verdadera, para **todo** $n \in \mathbb{N}$.

<u>Obs</u>: Dada una proposción $p(n)$:

$$p(n) \text{ es verdadera } \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (1)\ p(1) \text{ es verdadera,} \\ (2)\ \text{Dado } k \in \mathbb{N}\text{: } p(k) \Rightarrow p(k+1) \text{ es verdadera.} \end{cases}$$

hipótesis inductiva *tesis inductiva*