UNIVERSAL

CONJUNTOS

Elementos de Álgebra

Conceptos

Los conceptos de "conjunto" y "elemento" se utilizan, en matemática, como términos básicos y su significado coincide con los que conocemos en nuestro idioma

Notación:

Conjuntos: letras mayúsculas: $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$

Elementos: letras minúsculas: $a, b, c, \ldots, x, y, z$

Simbolos $\in$ y $\notin$

Dado un conjunto A

$a \in A$: "a" es un objeto de A, es decir, "a" cumple con la condición que define al conjunto A

$a \in A$ se lee: "a" pertenence a A, "a" es un elemento de A, "a" está en A o "a" en A

$a \notin A$: "a" no es un objeto de A, es decir, "a" no cumple con la condición que define al conjunto A

$a \notin A$ se lee: "a" no pertenence a A, "a" no es un elemento de A o "a" no está en A

$a \notin A$ equivale a $\sim (a \in A)$, esto es,

$$a \notin A \iff \sim (a \in A)$$

CONJUNTOS NUMERICOS

Algunos conjuntos numéricos importantes poseen su propio símbolo:

$\mathbb{N}$: es el conjunto de todos los números naturales

$\mathbb{N}_0$: es el conjunto de todos los números naturales más el número cero

$\mathbb{Z}$: es el conjunto de todos los números enteros

$\mathbb{Z}^+$: es el conjunto de todos los números enteros positivos, este conjunto coincide con el conjunto de los números naturales.

$\mathbb{Z}^-$: es el conjunto de todos los números enteros negativos

$\mathbb{Q}$: es el conjunto de todos los números racionales

$\mathbb{I}$: es el conjunto de todos los números irracionales

$\mathbb{R}$: es el conjunto de todos los números reales

$\mathbb{R}^+$: es el conjunto de todos los números reales positivos

$\mathbb{R}^-$: es el conjunto de todos los números reales negativos

$\mathbb{R}^*$: es el conjunto de todos los números reales no nulos

$\mathbb{C}$: es el conjunto de todos los números complejos

Conjuntos por Extensión y Comprensión

Un conjunto está bien definido, o bien determinado, cuando podemos precisar cuáles son sus elementos. Una forma de hacerlo es por *EXTENSIÓN* nombrando uno a uno todos los objetos que lo componen y encerrando esta lista entre llaves. Por ejemplo, si el conjunto A está formado por los elementos 1, 2, 3 y 4 podemos describir este conjunto escribiendo:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Este método de describir un conjunto puede ser poco práctico o imposible en algunos casos, y deberemos usar otras formas de notación. Por ejemplo, $\{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$ describe el conjunto de todos los números enteros positivos menores o iguales que 100.

Otras veces, para definir un conjunto lo hacemos por *COMPRENSIÓN* indicando una *propiedad común* a todos sus elementos y tal que *sólo sus elementos* la tengan. Así por ejemplo, los elementos del conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ pueden ser caracterizados como aquellos elementos x que cumplen la propiedad: $x \in \mathbb{N}$ y $x < 5$. Escribimos entonces:

$$A = \{ x \in \mathbb{N}: \ x < 5 \}$$

Conjuntos Especiales

Conjunto Universal: está formado por todos los elementos que intervienen en la disciplina de estudio

Al conjunto universal lo fijaremos con anterioridad al desarrollo del tema que estemos tratando. Lo denotaremos con $\mathcal{U}$

Conjunto vacío: es el conjunto que carece de elementos

Puede ser definido por cualquier propiedad que sea una contradicción. Lo notaremos por "$\emptyset$" o $\{\ \}$

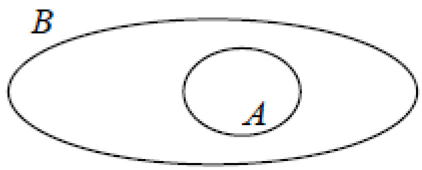
Conjunto Unitario: es el que tiene un único elemento.

Inclusión

Inclusión

Definición: Dados dos conjuntos A y B, se dice que A *está incluido en* B, *o que* A *es un parte de* B, *o que* A *es un subconjunto de* B, *o que* B *contiene a* A, si todo elemento de A pertenece a B. Se escribe $A \subseteq B$ o $B \supseteq A$.

$A \subseteq B \Leftrightarrow$ para todo x: $x \in A \Rightarrow x \in B$.



Nota: los dibujos que hemos utilizado para representar a los conjuntos A y B reciben el nombre de diagramas de Venn.

OPERACIONES
ENTRE CONJUNTOS

Complemento de un conjunto

Sea $\mathcal{U}$ un conjunto universal y sea A un subconjunto de $\mathcal{U}$

Definición

El **complemento** *de A consiste de todos los elementos de $\mathcal{U}$ que no pertenecen a A. Notaremos*

$$A' = \{x \in \mathcal{U} : \ x \notin A\}$$

Lógicamente: $x \in A' \iff x \notin A \iff \sim(x \in A)$ y

$$x \notin A' \iff \sim(x \in A') \iff \sim\sim(x \in A) \iff x \in A$$

Notaciones: $A' = A^C = \mathcal{C}A = -A$

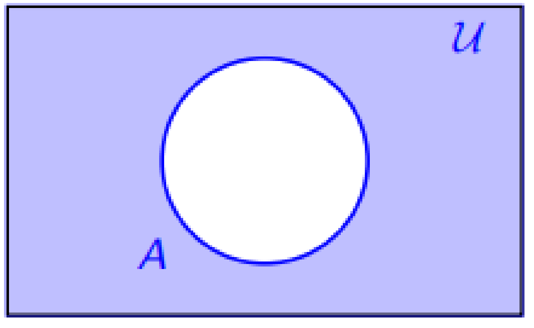


Diagrama de Venn de A'

Ejemplo

a) Dados los conjuntos $U = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ |x| \leq 10\}$, $A = \{x \in \mathbb{N}/x < 11\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z}/-3 \leq x < 2\}$, $C = \{x \in \mathbb{Z}/ \ x = 2k, k \in \mathbb{Z}, -8 \leq x \leq 10\}$ y $D = \{-5, -1, 0, 1, 3\}$, encontrar los siguientes conjuntos:

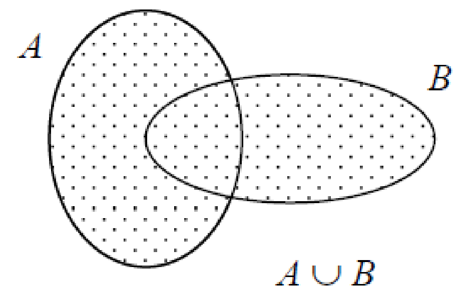
i. $D' - A$, realizar el diagrama de Venn.

ii. $A' - (C \cup B)$, realizar el diagrama de Venn.

Unión de Conjuntos

<u>Definición</u>: Dados dos conjuntos A y B, se llama *unión* de A y B al conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A ó a B. En notación:

$$A \cup B = \{ x \in U : x \in A \quad \text{ó} \quad x \in B \}$$

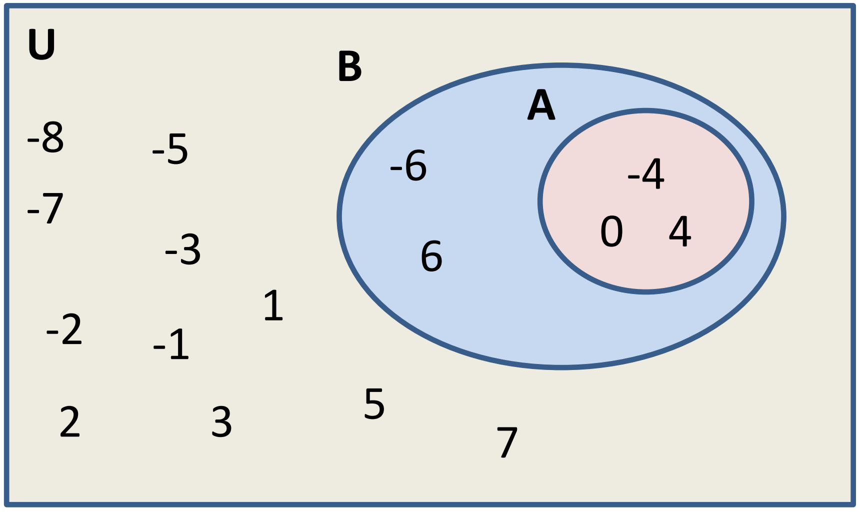


EJEMPLO

$$U = \{x \in Z: -9 < x \leq 7\}$$
$$A = \{x \in Z: x = 4n, n \in Z, -1 \leq n < 2 \}$$
$$B = \{-6, -4, 0, 4, 6\}$$

$$\boldsymbol{A \cup B = \{-6, -4, 0, 4, 6\}}$$

De la definición resulta que $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$.



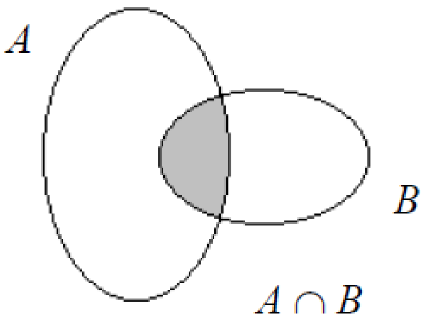
Propiedades de Unión

- Idempotencia: $A \cup A = A$
- Conmutativa: $A \cup B = B \cup A$
- Asociativa: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Intersección de Conjuntos

<u>Definición</u>: Dados dos conjuntos A y B, se llama *intersección de A y B*, y se indica $A \cap B$, al conjunto cuyos elementos son los elementos comunes a A y a B, es decir los elementos que pertenecen simultáneamente a los dos conjuntos.

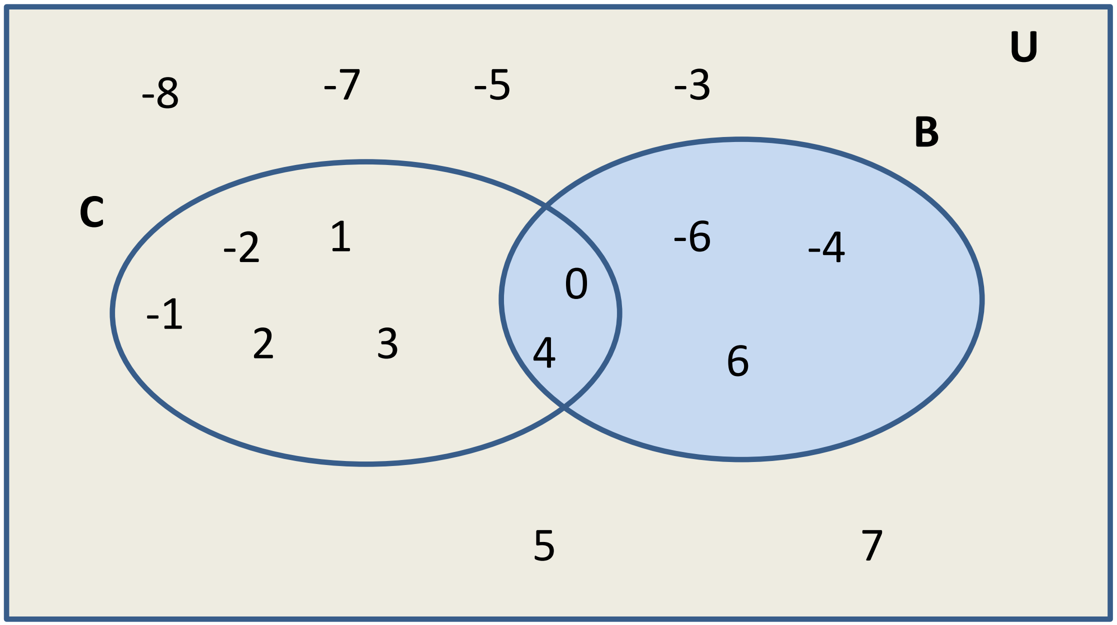
$$A \cap B = \{ x \in U : x \in A \text{ y } x \in B \}$$



De la definición se desprende inmediatamente que $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$.

Ejemplo

$$U = \{x \in Z\!: -9 < x \leq 7\}$$
$$B = \{-6, -4, 0, 4, 6\}$$
$$C = \{x \in Z\!: x \geq -2 \ \wedge x < 5\}$$



$$B \cap C = \{0, 4\}$$

Propiedades de Intersección

- Idempotencia: $A \cap A = A$
- Conmutativa: $A \cap B = B \cap A$
- Asociativa: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Teorema 1: $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

Teorema 2: $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

Leyes de Absorción

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

Leyes Distributivas

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Sea $\mathcal{U}$ un conjunto universal y A, B y C subconjuntos de $\mathcal{U}$

1. $\emptyset \subseteq A, \quad A \subseteq \mathcal{U}$
2. $A \subseteq A \cup B, \quad B \subseteq A \cup B, \quad A \cap B \subseteq A, \quad A \cap B \subseteq B$
3. Idempotencia: $A \cup A = A, \quad A \cap A = A$
4. Asociativa: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
5. Conmutativa: $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$
6. $A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}, \quad A \cap \mathcal{U} = A$
7. Distributivas:
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
8. Leyes de absorción: $A \cup (A \cap B) = A, \quad A \cap (A \cup B) = A$
9. $A \subseteq B \iff A \cup B = B, \quad A \subseteq B \iff A \cap B = A$
10. $\emptyset' = \mathcal{U}, \quad \mathcal{U}' = \emptyset, \quad (A')' = A$
11. $A \subseteq B \iff B' \subseteq A', \quad A \cup A' = \mathcal{U}, \quad A \cap A' = \emptyset$
12. De Morgan: $(A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$

Diferencia

Definición

Sean A y B subconjuntos de un conjunto universal, se llama **diferencia** *entre A y B, al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B. Notaremos $A–B$.*

$$A–B = \{x \in \mathcal{U} : \; x \in A \; \wedge \; x \notin B\}$$

Lógicamente

$$x \in A - B \iff x \in A \wedge x \notin B$$

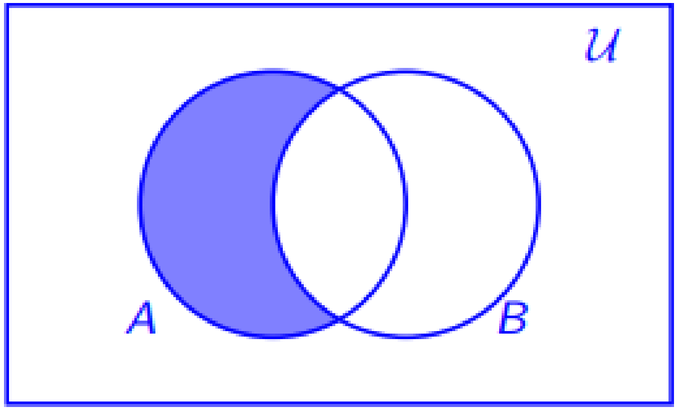


Diagrama de Venn de $A \cap B$

Propiedades

Proposición

Sea $\mathcal{U}$ un conjunto universal y A y B sunconjuntos de $\mathcal{U}$. Entonces

1. $A - B = A \cap B'$
2. $A - B \subseteq A, \quad B - A \subseteq B$
3. $A \subseteq B \implies A–B = \emptyset$
4. $A = B \implies A–B = \emptyset \wedge B–A = \emptyset$
5. $A \cap B = \emptyset \implies A–B = A \wedge B–A = B$

Ejemplo

a) Dados los conjuntos $U = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ |x| \leq 10\}$, $A = \{x \in \mathbb{N}/x < 11\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z}/-3 \leq x < 2\}$, $C = \{x \in \mathbb{Z}/ \ x = 2k, k \in \mathbb{Z}, -8 \leq x \leq 10 \}$ y $D = \{-5, -1, 0, 1{,}3\}$, encontrar los siguientes conjuntos:

i. $D' - A$, realizar el diagrama de Venn.

ii. $A' - (C \cup B)$, realizar el diagrama de Venn.

Producto Cartesiano

Definición

Sean A y B dos conjuntos no vacíos, el **producto cartesiano** *entre los conjuntos A y B es el conjunto de pares ordenados donde la primera componente del par es un elemento de A y la segunda componente del par es un elementos de B. Notaremos $A \times B$*

$$A \times B = \{(a, b) : \; a \in A \; \wedge \; b \in B\}$$

Lógicamente:

$$(a, b) \in A \times B \iff a \in A \; \wedge b \in B$$

Observaciones:

- Si A es el conjunto vacío o B es el conjunto vacío entonces el producto cartesiano no está definido
- Es importante el orden en que se efectúa el producto cartesiano de los conjuntos porque en algunos casos $A \times B \neq B \times A$
- Si $A = B$ notaremos A^2 para indicar $A \times A$.

Conjuntos de Partes

Definición

Dado un conjunto A, el conjunto formado por los subconjuntos de A, es el **conjunto de las partes de** A. *Notaremos* $\mathcal{P}(A)$

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$$

Lógicamente

$$X \in \mathcal{P}(A) \iff X \subseteq A$$

Observaciones:

- $\mathcal{P}(A)$ nunca es vacío, pues como $\emptyset \subseteq A$ y $A \subseteq A$ cualquiera sea A, entonces

$$\emptyset \in \mathcal{P}(A) \quad \text{y} \quad A \in \mathcal{P}(A)$$

- Sea A es un conjunto finito. La cantidad de elementos del conjunto A lo notaremos con $\#A$ o $|A|$, es decir, si A es un conjunto con "n" elementos entonces $\#A = n$ o $|A| = n$.

  Si $\#A = n$ entonces el conjunto $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^n elementos, es decir, $\#\mathcal{P}(A) = 2^n$