Lógica Proposicional

Lógica Proposicional

- La lógica proposicional, también conocida como lógica de enunciados, es un sistema formal cuyos elementos representan proposiciones o enunciados.
- Nos interesa examinar los mecanismos de razonamiento con precisión matemática
- Esta precisión requiere que el lenguaje que usemos no dé lugar a confusiones, lo cual conseguimos mediante un lenguaje simbólico donde cada símbolo tenga un significado bien definido.

Dada una frase en lenguaje natural, en primer lugar, podemos observar si se trata de una frase simple o de una frase compuesta. Una frase simple consta de un **sujeto** y un **predicado**. Por ejemplo:

- Java es un lenguaje de programación.
- Android es un sistema operativo moderno

Una frase compuesta se forma a partir de frases simples por medio de algún término de enlace (o conectiva). Por ejemplo:

- Java es un lenguaje de programación y Java es compatible con Android.
- Si Android es un sistema operativo moderno entonces Android soporta Java.

- En segundo lugar, vamos a suponer que todas las frases simples pueden ser **verdaderas o falsas**. Ahora bien, en castellano hay frases que no son ni verdaderas ni falsas (exclamaciones, órdenes, preguntas), por tanto tenemos que usar un término diferente.

- Hablaremos de **enunciados (o proposiciones)** para referirnos a frases que son **verdaderas o falsas**. Y distinguiremos entre enunciados simples o enunciados compuestos.

Según Manuel Abad, Elementos de Álgebra…..

Entenderemos por *proposición* toda expresión lingüística respecto de la cual puede decirse si es verdadera o falsa.

Por ejemplo, las oraciones:

3 es un número primo
7 es un número par

son proposiciones.

La verdad y la falsedad son los *valores de verdad* de una proposición. Si una proposición es verdadera, decimos que su valor de verdad es *verdad* (V), y si es falsa, decimos que su valor de verdad es *falsedad* (F).

Una proposición *simple* tiene un sujeto y un predicado, en el sentido gramatical. Por ejemplo,

<u>El número 14</u> es divisible por 7
<u>Boole</u> fue un gran matemático del siglo pasado
<u>El arroyo que cruza la ciudad</u> desemboca en la ría

donde se ha subrayado el sujeto.

Vamos a representar a las proposiciones simples por letras mayúsculas A, B, C, $\ldots$

Para construir enunciados compuestos introducimos símbolos para las conectivas. Las conectivas más comunes y los símbolos que emplearemos para denotarlas son los siguientes:

$\sim A$	Negación de A
$A \wedge B$	Conjunción de A y B
$A \vee B$	Disyunción de A o B
$A \longrightarrow B$	Si A entonces B
$A \leftrightarrow B$	A si y solo si B

Así, los enunciados compuestos vistos antes pueden escribirse simbólicamente de la siguiente forma:

$A \wedge B$

$C \longrightarrow D$

A simboliza “Java es un lenguaje de programación”, B simboliza “Java es compatible con Android”, C simboliza “Android es un sistema operativo moderno” y D simboliza “Android soporta Java”.

Cuando un enunciado se traduce al lenguaje simbólico, lo que queda es su **“estructura lógica”,** que puede ser común a varios enunciados diferentes.

Esto nos permite analizar las formas de razonamiento, ya que un razonamiento tiene que ver con la estructura lógica de los enunciados de la argumentación y no con su significado.

Lógica Simbólica: Conectivos

A través de expresiones como "o", "y", "no", "si …, entonces", "si, y sólo si", llamadas *conectivos*, se generan proposiciones *compuestas* partiendo de proposiciones simples. Por ejemplo,

El número 14 *no es divisible por* 7.
Si llegamos temprano, saldremos a caminar.

Establecer el sentido y uso de estos términos es la tarea de una parte elemental de la lógica, llamada *lógica proposicional*.

Los símbolos que usaremos para denotar estos conectivos se dan en la siguiente tabla:

no A	$\sim A$
A y B	$A \wedge B$
A o B	$A \vee B$
si A entonces B	$A \Rightarrow B$
A si, y sólo si B	$A \Leftrightarrow B$

Vamos a estudiar *formas proposicionales*, más que proposiciones particulares. Para ello, usaremos las letras p, q, r, … como *variables proposicionales* que representan proposiciones arbitrarias no especificadas, es decir las letras p, q, r, … pueden ser sustituidas por proposiciones simples particulares cualesquiera. (Es importante tener en claro los diferentes usos de las letras p, q, r, … y las letras A, B, C, …. Estas últimas son sólo nombres para proposiciones simples particulares).

Negación

Anteponiendo la palabra “no” se forma la negación de cualquier proposición.
Ejemplo:

Proposición: 2 es un número primo.

Negación de la proposición: 2 NO es un número primo.

Si la proposición A es verdadera su negación $\sim A$ es falsa y si la proposición A es falsa, su negación $\sim A$ es verdadera. Podemos describir esta situación por medio de una *tabla de verdad*.

p	$\sim p$
V	F
F	V

Conjunción

La unión de dos proposiciones por la palabra "y" se llama *conjunción* de proposiciones. Por ejemplo, la proposición

"3 *es un número impar y* 4 *es un número negativo*"

es la conjunción de las proposiciones

"3 *es un número impar*"

y

"4 *es un número negativo*".

Una conjunción de proposiciones es verdadera cuando ambas proposiciones lo son; pero si al menos una de las componentes es falsa, entonces toda la conjunción es falsa. Se tiene la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disyunción

Con la unión de proposiciones por la palabra "o" se obtiene la disyunción de proposiciones.
En el lenguaje corriente, la palabra "o" tiene, al menos, dos significados distintos. En el sentido **no excluyente** se expresa que al menos una de las dos proposiciones debe ser verdadera, aunque sin excluir la posibilidad de que ambas sean verdaderas. En el **sentido excluyente**, una disyunción afirma que una de las proposiciones es verdadera y la otra debe ser falsa.

En cuanto a la disyunción "$\vee$" cabe aclarar que en este caso se está trabajando con la disyunción inclusiva para afirmar que se puede dar el caso de que p ó q o ambos son posibles de concluirse a diferencia de la disyunción exclusiva donde se afirma que p ó q se pueden concluir pero no ambos a la vez. Por ejemplo:

- Carolina es ingeniera o licenciada, o ambas cosas (Disyunción inclusiva).
- Vamos a votar por el candidato del Polo o por el candidato del Centro democrático a la presidencia; pero no por ambos a la vez. (Disyunción exclusiva)

<u>En Matemática</u>, la palabra "o" se usa siempre en el sentido no excluyente. La disyunción de dos proposiciones será verdadera cuando al menos una de ellas sea verdadera. Caso contrario, esto es, si ambas son falsas, la disyunción es falsa. La tabla de verdad de la disyunción es la siguiente:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Implicación o Condicional

Si se combinan dos proposiciones por medio de las palabras "*si* . . ., *entonces*" se obtiene una proposición compuesta llamada *implicación* o *condicional*. La proposición que sigue a la palabra "si" se llama *antecedente* y la introducida por la palabra "entonces" se llama *consecuente*.

Por ejemplo, en

$$\textit{Si } x \textit{ es un número divisible por } 9\textit{, entonces } x \textit{ es un número divisible por } 3,$$

el antecedente es

$$x \textit{ es un número divisible por } 9,$$

y el consecuente es

$$x \textit{ es un número divisible por } 3.$$

Una implicación es verdadera en los siguientes casos:

1. El antecedente y el consecuente son ambos verdaderos.
2. El antecedente es falso y el consecuente es verdadero.
3. El antecedente y el consecuente son ambos falsos.

Sólamente si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, la implicación es falsa.

La implicación tiene la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Conviene aclarar que no es requisito que el antecedente y el consecuente estén relacionados entre sí en cuanto al contenido. Cualquier par de proposiciones pueden constituir una implicación. Así por ejemplo, la proposición "Si 5 es un número primo, entonces París es la capital de Francia", es una implicación lícita. Puede parecer raro, pero debe tenerse en cuenta que el principal interés es la deducción de métodos de demostración en Matemática, y es teóricamente útil que sea posible construir estas implicaciones.

Equivalencia o Bicondicionalidad

Otra expresión que aparece frecuentemente en Matemática es la frase **"si, y sólo si ".** Al unir dos proposiciones cualesquiera por medio de esta frase se obtiene una proposición compuesta que se llama equivalencia o bicondicional.
Por ejemplo,

x es un número par si y sólo si x^2 es un número par.

Una equivalencia es verdadera si sus miembros izquierdo y derecho son o bien ambos verdaderos o bien ambos falsos. En caso contrario la equivalencia es falsa. Se tiene entonces:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Se conoce que **la implicación y la equivalencia** se pueden construir mediante los conectores lógicos de la negación, la disyunción o la conjunción, así

$p \Rightarrow q$ que es lo mismo que $\neg p \vee q$ (Ley del condicional)

y

$p \Leftrightarrow q$ que es lo mismo que $[(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)]$ (Ley del bicondicional)

Además que

$\neg(p \wedge q)$ que es lo mismo que $(\neg p \vee \neg q)$ (Ley de dualidad o De Morgan)

y

$\neg(p \vee q)$ que es lo mismo que $(\neg p \wedge \neg q)$ (Ley de dualidad o De Morgan)

Una forma proposicional es una **tautología** si toma el valor de verdad V para cualquier posible asignación de valor de verdad a las variables proposicionales que intervienen en ella. Una forma proposicional es una **contradicción** si toma el valor de verdad F para cualquier posible asignación de valor de verdad a las variables proposicionales que intervienen en ella.

Ejemplos.

1. $(p \wedge q) \Rightarrow p$ es una tautología.
2. $p \wedge \sim p$ es una contradicción.
3. $p \vee \sim p$ es una tautología.

En efecto:

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
V	F	V
F	V	V

Algunas tautologías reciben nombres especiales, por ser de uso muy frecuente

1.- Doble negación:

$$\sim \sim p \Leftrightarrow p$$

2.- Leyes conmutativas:

$$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$$

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$$

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$$

3.- Leyes asociativas:

$$[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$$

$$[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$$

4.- Leyes distributivas:

$$[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$$

$$[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$$

5.- Leyes de idempotencia:

$$(p \vee p) \Leftrightarrow p$$

$$(p \wedge p) \Leftrightarrow p$$

6.- Leyes de De Morgan:

$$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$$

$$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$$

7.- Implicación:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$$

8.- Contrarrecíproca:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$