

Lógica proposicional

La matemática exige, en cualquiera de sus ramas, un lenguaje claro y preciso. La lógica tiene un lenguaje exacto y sin ambigüedades y por eso la matemática hace uso de ella.

En un sentido amplio, el término *lógica* hace referencia al estudio de todos los razonamientos, y en un sentido estricto ha estado circunscripto al estudio del razonamiento deductivo.

Definición: Entenderemos por *proposición* toda expresión lingüística respecto de la cual puede decirse si es verdadera o falsa.

Por ejemplo, las oraciones: *3 es un número primo*, *7 es un número par*, son proposiciones.

Las sentencias exclamativas, las interrogativas y las imperativas no son proposiciones pues no es posible decir de ellas si son verdaderas o falsas.

La verdad y falsedad son los *valores de verdad* de una proposición. Escribiremos (V) para indicar que el valor de verdad de una proposición es Verdadero, y escribiremos (F) para indicar que el valor de verdad de una proposición es Falso.

A una proposición puede asignársele uno y sólo uno de los valores de verdad. Es decir, ninguna proposición puede ser verdadera y falsa simultáneamente.

Una proposición *simple* tiene un sujeto y un predicado, en el sentido gramatical. Por ejemplo:

“El número 14 es divisible por 7”

“Boole fue un gran matemático del siglo pasado”

donde se ha subrayado el sujeto.

Conectivos

A través de expresiones como “o”, “y”, “no”, “si entonces”, “si y sólo si”, llamadas *conectivos*, se generan proposiciones *simples o compuestas*, partiendo de proposiciones simples. Por ejemplo,

“*El número 14 no es divisible por 7*”

“*Si llegamos temprano saldremos a caminar*”

Establecer el sentido y uso de éstos términos es la tarea de una parte elemental de la lógica, llamada *lógica proposicional*.

Los símbolos que usaremos para denotar estos conectivos se dan en la siguiente tabla:

No p	$\sim p$
p y q	$p \wedge q$
p o q	$p \vee q$
Si p entonces q	$p \Rightarrow q$
p si y sólo si q	$p \Leftrightarrow q$

Vamos a estudiar *formas proposicionales*, más que proposiciones particulares. Para ello, usaremos las letras p, q, r, ... como *variables proposicionales* que representan proposiciones arbitrarias no especificadas, es decir las letras p, q, r, ... pueden ser sustituidas por proposiciones simples particulares cualesquiera.

Negación

Anteponiendo la palabra “no” se forma la *negación* de cualquier proposición. Así, por ejemplo, la negación de la proposición:

“2 es un número primo”

es la proposición

“2 no es un número primo” ó “No es cierto que 2 es un número primo”

Si la proposición p es verdadera, su negación $\sim p$, es falsa, y si la proposición p es falsa, su negación es verdadera. Podemos describir ésta situación por medio de una *tabla de verdad*.

p	$\sim p$
V	F
F	V

Se trata de una operación unaria, pues a partir de una proposición se obtiene otra que es su negación.

Ejemplo: p: 8 es múltiplo de 7. (F)

$\sim p$: 8 no es múltiplo de 7. (V)

Conjunción

La unión de dos proposiciones por la palabra “y” se llama *conjunción* de proposiciones. Por ejemplo, la proposición: “3 es un número impar y 4 es un número negativo”

es la conjunción de las proposiciones

“3 es un número impar”

y

“4 es un número negativo”.

Una conjunción de proposiciones es verdadera cuando ambas proposiciones lo son; pero si al menos una de ellas es falsa, entonces toda la conjunción es falsa. Se tiene la siguiente tabla de verdad.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La conjunción es una operación binaria, pues el resultado se obtiene componiendo dos proposiciones iniciales.

Ejemplos:

1) p: 3 es un número impar. (V)

q: 2 es un número primo. (V)

$p \wedge q$: 3 es un número impar y dos es un número primo.

Como p y q son verdaderas entonces $p \wedge q$ (V)

2) p: $3 + 2 = 5$ (V)

q: $2 + 1 = 6$ (F)

$p \wedge q$: $3 + 2 = 5$ y $2 + 1 = 6$ (F)

Disyunción

Con la unión de proposiciones por la palabra “o” se obtiene la *disyunción* de proposiciones. En el lenguaje corriente, la palabra “o” tiene, al menos, dos significados distintos. En el sentido **no excluyente** se expresa que al menos una de las dos proposiciones debe ser verdadera, aunque sin excluir la posibilidad de que ambas sean verdaderas. En el sentido **excluyente**, una disyunción afirma que una de las proposiciones es verdadera y la otra debe ser falsa. Por ejemplo, en el anuncio: “*Podrán ingresar al club los jóvenes que estudien en la UNC o que cursen el último año de la escuela secundaria*” la palabra “o” se usa en sentido no excluyente. En cambio, en la proposición: “*Hoy es*

lunes o martes”, la palabra “o” está usada en sentido excluyente. Utilizaremos la palabra “o” en sentido no excluyente.

La disyunción de dos proposiciones será verdadera cuando al menos una de ellas sea verdadera. Caso contrario, esto es, si ambas son falsas, la disyunción es falsa. La tabla de la disyunción es la siguiente:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplos:

- 1) p: 3 es un número par. (F)
q: 4 es un número primo. (F)
 $p \vee q$: 3 es un número par o 4 es un número primo. (F)

- 2) p: $3 + 2 = 5$ (V)
q: $2 + 1 = 6$ (F)
 $p \vee q$: $3 + 2 = 5$ o $2 + 1 = 6$ (V)

Implicación

Si se combinan dos proposiciones por medio de las palabras “*si ... entonces*” se obtiene una proposición compuesta llamada *implicación*. La proposición que sigue a la palabra “si” se llama *antecedente* y la que sigue a la palabra “entonces” se llama *consecuente*.

Por ejemplo, en

“Si 3 es un número divisible por 9 entonces 3 es un número divisible por 3”

El antecedente es

“3 es un número divisible por 9”,

y el consecuente es

“3 es un número divisible por 3”.

Una implicación es verdadera en los siguientes casos:

1. El antecedente y el consecuente son ambos verdaderos.
2. El antecedente es falso y el consecuente es verdadero.

3. El antecedente y el consecuente son ambos falsos.

Solamente si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, la implicación es falsa.

La implicación tiene la siguiente tabla de verdad:

P	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ejemplos:

1) Si hoy es lunes entonces mañana es martes.

Como no puede darse antecedente verdadero y consecuente falso, la implicación es verdadera.

2) Si $1 = -1$ entonces $1^2 = (-1)^2$.

p: $1 = -1$ (F)

q: $1^2 = (-1)^2$ (V)

$p \Rightarrow q$ es (V) pues el antecedente es Falso.

Observación La proposición “*si p entonces q*” se puede leer de varias maneras:

“*p implica q*”, “*p solo si q*”, “*q si p*”, “*si p, q*”

Ejemplo: Dada la implicación: “*Si llueve entonces hay nubes*”, se puede expresar de la siguiente manera:

“Que llueva *implica* que hay nubes” ó

“Llueve *solo si* hay nubes” ó

“Hay nubes *si* llueve”

“*Si* llueve, hay nubes”

Lo importante es reconocer en cualquiera de las formas en que esté dada la implicación, el antecedente y el consecuente.

Equivalencia

Otra expresión que aparece frecuentemente en Matemática es la frase “*si y sólo si*”. Al unir dos proposiciones cualesquiera por medio de esta frase se obtiene una proposición compuesta que se llama *equivalencia*.

Por ejemplo,

“2 es un número par si y sólo si 2^2 es un número par”

Una equivalencia es verdadera si sus miembros, izquierdo y derecho son o bien ambos verdaderos o bien ambos falsos. En caso contrario la equivalencia es falsa. Se tiene entonces:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

La equivalencia $p \Leftrightarrow q$, es por definición la conjunción $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. De éste modo la tabla de valores de verdad de $p \Leftrightarrow q$, puede obtenerse mediante la tabla de $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Se pueden construir proposiciones compuestas de cualquier longitud a partir de proposiciones simples usando estos conectivos.

Leves lógicas o tautologías

Consideremos la proposición: $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ cuya tabla de valores es:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Se observa que ésta proposición es verdadera, independientemente de los valores de verdad de las proposiciones que la componen.

En circunstancias como ésta, se dice que tal proposición es una *tautología*.

Por ejemplo:

$p \Rightarrow p$ es verdadera cualquiera sea el valor de verdad de p .

Consideremos ahora la proposición $p \wedge \sim p$. Si hacemos la tabla de verdad, vemos que cualquiera sea el valor de verdad de p , el resultado es siempre falso. Se trata de una *contradicción* o *antitautología*.

Aquellas proposiciones compuestas cuya tabla de valores de verdad dan verdaderos y falsos se llaman *contingencias*.

Por ejemplo: $p \vee \sim p$

Las siguientes expresiones son Leyes Lógicas:

1.- Doble negación:

$$\sim \sim p \Leftrightarrow p$$

2.- Leyes conmutativas:

$$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$$

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$$

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$$

3.- Leyes asociativas:

$$[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$$

$$[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$$

4.- Leyes distributivas:

$$[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$$

$$[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$$

5.- Leyes de idempotencia:

$$(p \vee p) \Leftrightarrow p$$

$$(p \wedge p) \Leftrightarrow p$$

6.- Leyes de De Morgan:

$$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$$

$$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$$

7.- Implicación:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$$

8.- Contrarrecíproca:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

Implicaciones asociadas

Sea la implicación $p \Rightarrow q$, que llamaremos *directa*. En conexión con ella, se presentan otras tres, obtenidas por permutaciones o negaciones del antecedente y consecuente:

$q \Rightarrow p$ llamada *recíproca*

$\sim p \Rightarrow \sim q$ llamada *contraria*

$\sim q \Rightarrow \sim p$ llamada *contrarrecíproca*

De las cuatro implicaciones propuestas cualquiera puede elegirse como directa.

Es fácil verificar que las implicaciones contrarrecíprocas son equivalentes, es decir que las siguientes equivalencias son tautologías (queda como ejercicio para el estudiante):

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

$$(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$$

Negación de la implicación

La proposición $p \Rightarrow q$ y $\sim p \vee q$ son equivalentes, como lo muestra la siguiente tabla:

$p \Rightarrow q$			\Leftrightarrow	$\sim p \vee q$		
V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	F

En consecuencia, la negación de la primera equivale a la negación de la segunda, es decir:

$$\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim (\sim p \vee q) \Leftrightarrow \sim (\sim p) \wedge \sim q \Leftrightarrow p \wedge \sim q$$

Es decir que la negación de una implicación no es una implicación, sino la conjunción del antecedente con la negación del consecuente.

Ejemplo: Dada la proposición: “Si $1 = -1$ entonces $1^2 = (-1)^2$ ”, su negación es:

$$“1 = -1 \wedge 1^2 \neq (-1)^2”$$

Cuantificadores

Consideremos ahora la siguiente proposición:

“Todos los números naturales son positivos”

Más formalmente, podríamos escribir:

“Para todo x natural, se verifica que x es positivo”

Ahora bien, si $p(x)$ indica “ x es positivo”, podríamos escribir:

Para todo x natural: $p(x)$.

La expresión “para todo” se llama un *cuantificador universal*, y se nota $\forall x$. Entonces tendríamos: $\forall x \in \mathbb{N}: p(x)$

En forma análoga, la expresión “*existe al menos un x tal que*” se llama un *cuantificador existencial* y se nota $\exists x$. Por ejemplo, la proposición

“Existe un número primo x entero tal que x es impar”

se traduce en: $\exists x \in \mathbb{N} / p(x) \wedge q(x)$, donde $p(x)$ es “ x es primo” y $q(x)$ es “ x es impar”.

Las expresiones de la forma de $p(x)$ o de $q(x)$ reciben el nombre de *funciones proposicionales* y la variable x toma valores en un conjunto llamado *dominio de interpretación*. En los ejemplos anteriores el dominio de interpretación es el conjunto de los números naturales.

Si particularizamos o generalizamos, mediante el uso de cuantificadores, una función proposicional, construimos una proposición.

A la proposición $\forall x \in D: p(x)$ se le asignan valores de verdad de la siguiente manera:

$\forall x \in D: p(x)$ es verdadera si y sólo si $p(x)$ es verdadera para todo x en el dominio de interpretación D , en cualquier otro caso es Falsa.

Por ejemplo: $\forall x \in \mathbb{N}: x > 0$ (V)

$\forall x \in \mathbb{Z}: x > 0$ (F)

A la proposición $\exists x \in D / p(x)$ se le asignan valores de verdad de la siguiente manera:

$\exists x \in D / p(x)$ es verdadera si y sólo si $p(x)$ es verdadera para al menos un valor de x en el dominio de interpretación D , y es Falsa si $p(x)$ es falsa para todo x en el dominio de interpretación D .

Por ejemplo: $\exists x \in \mathbb{Z} / x > 0$ (V)

$\exists x \in \mathbb{R}^+ / x < 0$ (F)

Existe una importante conexión entre los dos cuantificadores ($\forall x$) y ($\exists x$). Se puede ver intuitivamente que:

$$\sim(\forall x \in D: p(x)) \Leftrightarrow \exists x \in D / \sim p(x)$$

$$\sim(\exists x \in D / p(x)) \Leftrightarrow \forall x \in D: \sim p(x)$$

Métodos de demostración

Recordemos que: Teorema es un enunciado verdadero, que es necesario demostrar. Consta de:

- Hipótesis: formada por proposiciones verdaderas, son los datos del teorema.
- Tesis: Proposición que hay que demostrar mediante un razonamiento lógico.

Veamos los métodos para demostrar un teorema:

1) Método Directo.

Es el que relaciona la hipótesis con la tesis mediante una implicación directa verdadera. Partimos de la verdad de la hipótesis y a través de pasos lógicos correctos llegamos a la tesis. Esto es si la hipótesis es verdadera, y la implicación $H \Rightarrow T$ es verdadera resulta, de la tabla de valores de verdad, que debe ser la tesis verdadera. Es decir: $H \Rightarrow T$

Ejemplo:

Si x es impar entonces x^2 es impar.

H: x es impar

T: x^2 es impar

Demostración: Por Hipótesis x es impar, esto es: $x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$.

$$x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 = (2k + 1)^2, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 = 4k^2 + 4k + 1, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 = 2k' + 1, k' \in \mathbb{Z}, k' = 2k^2 + 2k.$$

Luego x^2 es impar.

2) Métodos Indirectos.

A veces resulta más fácil vincular la hipótesis con la tesis indirectamente.

a) Método del Contrarrecíproco:

Si $x + y$ es impar entonces x o y es impar.

T: x o y es impar \sim T: x e y son pares

$$\begin{aligned} x=2k, \quad y=2n, k, n \in \mathbb{Z} &\Rightarrow x+y=2k+2n, k, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x+y=2(k+n), k, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x+y=2k', k' \in \mathbb{Z}, k'=k+n. \end{aligned}$$

Luego $x + y$ es par.

b) Método por Reducción al Absurdo:

Partimos de la negación de la tesis y usando la hipótesis llegamos a un absurdo.

Esto es: $\sim T \wedge H \Rightarrow \text{Absurdo}$.

Ejemplo:

Si a^2 es múltiplo de 2 entonces a es múltiplo de 2.

$$\text{H: } a^2 = 2k, k \in \mathbb{Z}$$
$$\text{T: } a = 2t, t \in \mathbb{Z} \qquad \sim \text{T: } a \neq 2t, t \in \mathbb{Z}$$

Demostración: $\sim T \wedge H: a \neq 2t$ y $a^2 = 2k, t, k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} a \neq 2t \wedge a^2 = 2k &\Rightarrow a = 2t + 1 \wedge a^2 = 2k \Rightarrow a^2 = (2h + 1)^2, h \in \mathbb{Z} \wedge a^2 = 2k \Rightarrow \\ &\Rightarrow a^2 = 4h^2 + 4h + 1, h \in \mathbb{Z} \wedge a^2 = 2k \Rightarrow a^2 = 2(2h^2 + 2h) + 1, h \in \mathbb{Z} \wedge a^2 = 2k \Rightarrow \\ &\Rightarrow a^2 = 2m + 1, m \in \mathbb{Z} \wedge a^2 = 2k. \end{aligned}$$

Es decir a^2 no es múltiplo de 2 y a^2 es múltiplo de 2. **Absurdo.**

Luego, si a^2 es múltiplo de 2 entonces a es múltiplo de 2.