Números Reales

El cuerpo ordenado de los números reales

Llamaremos *cuerpo ordenado real* a un sistema $(\mathbb{R}, +, ., <)$ formado por:

(1) Un conjunto $\mathbb{R}$, cuyos elementos llamaremos *números reales*,

(2) Una operación binaria +, llamada *suma*, definida sobre $\mathbb{R}$, $a + b$ se lee "*a* más *b*",

(3) Una operación binaria ., llamada *producto*, definida sobre $\mathbb{R}$, $a \,.\, b$ se lee "*a* por *b*",

(4) Una relación binaria <, definida sobre $\mathbb{R}$, $a < b$ se lee "*a* menor que *b*", de modo tal que, para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$ se verifiquen las siguientes propiedades:

(S_1) $a + (b + c) = (a + b) + c$

(S_2) $a + b = b + a$

(S_3) $\exists\ 0 \in \mathbb{R} / \forall\ a \in \mathbb{R}: 0 + a = a$

(S_4) $\forall\ a \in \mathbb{R}: \exists(-a) \in \mathbb{R}/a + (-a) = 0$

(M_1) $a \,.\, (b \,.\, c) = (a \,.\, b) \,.\, c$

(M_2) $a \,.\, b = b \,.\, a$

(M_3) $\exists\ 1 \in \mathbb{R},\ 1 \neq 0/\forall\ a \in \mathbb{R}: 1. a = a$

(M_4) $\forall\ a \in \mathbb{R}, a \neq 0 :\ \exists\ a^{-1} \in \mathbb{R}/a. a^{-1} = 1$

(D) $a \,.\, (b + c) = a \,.\, b + a \,.\, c$

(E_1) Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ vale una y sólo una de las tres condiciones siguientes:

(*i*) $a = b$ (*ii*) $a < b$ (*iii*) $b < a$

(E_2) $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$

(E_3) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

(E_4) $a < b \wedge 0 < c \Rightarrow a \,.\, c < b \,.\, c$

La relación $\leq$ es muy importante y está caracterizada por las siguientes propiedades:

(O_1) $a \leq a$

(O_2) $a \leq b$ y $b \leq a \Rightarrow a = b$

(O_3) $a \leq b$ y $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

(O_4) Dados $a, b \in \mathbb{R}$ entonces, $a \leq b$ ó $b \leq a$

Sea $a \in \mathbb{R}$, diremos que a es *positivo* si $a > 0$ y que a es *negativo* si $a < 0$ Escribiremos $a < b < c$ para indicar que $a < b$ y $b < c$. Análogamente escribiremos $a \leq b \leq c$ para indicar que $a \leq b$ y $b \leq c$.

Otras propiedades

De las propiedades anteriores se deducen las siguientes:

(P_1) $-(-a) = a$

(P_2) $a + b = a + c \Rightarrow b = c$

(P_3) $a\, b = a\, c$, $a \neq 0 \Rightarrow b = c$

(P_4) $a\, .\, 0 = 0$

$a.0 = a.(0+0) = a.0+a.0$, (1)

$a.0 = a.0+0$, (2)
de (1) y (2), $a.0+a.0 = a.0+0 \Rightarrow a.0 = 0$

(P_5) $a.b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$
Supongamos que $a \neq 0$. Por (M_4), $a^{-1}.(a\, .b) = a^{-1}.0$, esto es, $(a^{-1}.a).b = 0$.

Luego $1\, .\, b = b = 0$.

(P_6) $a\,(-b) = (-a)\, b = -(a\, b)$

Probemos que $a(-b) = -(ab)$, es decir, que el simétrico de ab es $a(-b)$. Para esto basta probar que $ab + a(-b) = 0$. Y en efecto, $ab + a(-b) = a(b + (-b)) = 0$

En forma análoga se prueba que $(-a)b = -(ab)$

(P_7) $(-a)\,(-b) = a\, b$

Aplicar (P_6) dos veces

(P_8) $(a^{-1})^{-1} = a$, $a \neq 0$

(P_9) $(a\, b)^{-1} = a^{-1}\, b^{-1}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$

(P_{10}) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc; b \neq 0, d \neq 0$

$(P_{11})\ \frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}; b\neq 0, c\neq 0$

$(P_{12})\ \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}; b\neq 0, d\neq 0$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=ab^{-1}+cd^{-1}=add^{-1}b^{-1}+cbb^{-1}d^{-1}==ad(db)^{-1}+cb(bd)^{-1}=$$

$$=ad(bd)^{-1}+bc(bd)^{-1}=(ad+bc)(bd)^{-1}=\frac{ad+bc}{bd}$$

$(P_{13})\ \frac{a}{b}\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}; b\neq 0, d\neq 0$

$(P_{14})\ \frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b};\ b\neq 0$

Para probar que $\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$ se debe probar que el simétrico de $\frac{a}{b}$ es $-\frac{a}{b}$

Es similar a (P_6)

$(P_{15})\ \frac{a}{b}\neq 0;\ b\neq 0 \implies \left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a}$

$(P_{16})\ a < b \wedge c < d \Rightarrow a + c < b + d$

$a < b \wedge c < d \Rightarrow a + c < b + c \wedge c + b < d + b \Rightarrow a + c < b + d$ por $E2$

$(P_{17})\ a + c < b + c \Rightarrow a < b$

Sumar $-c$ a ambos miembros

$(P_{18})\ 0 < a < b \wedge 0 < c < d \Rightarrow a\,c < b\,d$

Aplicar (E_4)

$(P_{19})\ a < b \Rightarrow -b < -a$

Sumar $-b$ a ambos miembros, y luego $-a$

$(P_{20})\ 0 < a \Rightarrow -a < 0$

Es un caso particular de (P_{19})

$(P_{21})\ a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$ (El cuadrado de cualquier número no nulo es positivo)

$a > 0 \Rightarrow a\,.a > a.0 \Rightarrow a^2 > 0$

$a < 0 \Rightarrow -a > 0 \Rightarrow (-a)(-a) > 0 \Rightarrow a^2 > 0$

$(P_{22})\ 0 < 1$

Se tiene que $1 = 1^2$, luego $1 > 0$

(P_{23}) $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow a\,c > b\,c$

$c < 0 \Rightarrow -c > 0$

$a < b \Rightarrow a(-c) < b(-c) \Rightarrow -ac < -bc \Rightarrow ac > bc$

(P_{24}) $a < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} > 0$

$a^{-1} > 0 \Rightarrow aa^{-1} < 0$, de donde $1 < 0$, absurdo.

(P_{25}) $a > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} > 0$

(P_{26}) (1) $ab > 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$

(2) $ab < 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)$

(3) $\frac{a}{b} > 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$

(4) $\frac{a}{b} < 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)$

(P_{27}) $0 < a < b \Longrightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

Multiplicar por $a^{-1}b^{-1}$

(P_{28}) $a < b < 0 \Longrightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$

(P_{29}) $0 < a < b \Longrightarrow a^2 < b^2$

(P_{30}) $a < b < 0 \Longrightarrow b^2 < a^2$

Intervalos de números reales

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Llamaremos, respectivamente, intervalo abierto, abierto-cerrado, cerrado-abierto y cerrado a los conjuntos siguientes:

$(a\,,b) = \{\, x \in \mathbb{R} : a < x < b \,\}$,

$(a\,,b] = \{\, x \in \mathbb{R} : a < x \leq b \,\}$,

$[a\,,b) = \{\, x \in \mathbb{R} : a \leq x < b \,\}$,

$[a\,,b] = \{\, x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b \,\}$

En todos los casos los números a y b se llaman los extremos del intervalo.

Es cómodo, además, utilizar notaciones como

$(-\infty , b] = \{ x \in \mathbb{R} : x \leq b \}$,

$[a , +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} : x \geq a \}$,

y sus correspondientes $(-\infty , b)$ y $(a , +\infty)$.

Valor Absoluto

Sea $x \in \mathbb{R}$. El valor absoluto de x (lo notamos $|x|$) se define como sigue:

$$|x| = \begin{cases} x \ si \ x \geq 0 \\ -x \ si \ x < 0 \end{cases}$$

Usando la representación de $\mathbb{R}$ en una recta, el valor absoluto de x tiene una sencilla interpretación geométrica: mide la distancia que hay entre x y 0.

Proposición. El valor absoluto verifica las siguientes *propiedades:*

(1) $|x| \geq 0$. Además, $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(2) $|-x| = |x|$

(3) $-|x| \leq x \leq |x|$

(4) *Si* $d \in \mathbb{R}$, $d > 0$, *entonces* $|x| \leq d \Leftrightarrow -d \leq x \leq d$

Esto es, $|x| \leq d \Leftrightarrow x \in [-d, d]$

(5) *Si* $d \in \mathbb{R}$, $d > 0$, *entonces* $|x| \geq d \Leftrightarrow x \leq -d \ \vee x \geq d$

Esto es $|x| \geq d \Leftrightarrow x \in (-\infty,-d] \cup [d,+\infty)$

(6) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (*Desigualdad triangular*).

(7) $|x - y| \geq | \, |x| - |y| \, |$

(8) $|x \,.\, y| = |x| \,.\, |y|$

(9) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$; $y \neq 0$

(10) $|x| = d \Leftrightarrow x = d \ \vee \ x = -d$

(11) $|x - y| = |y - x|$

(12) $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \ \vee \ x = -y$

(13) $|x|^2 = x^2 = |x^2|$

(14) $\sqrt{x^2} = |x|$

Observación: Si x e y son dos números reales, la distancia entre x e y es $x - y$ si $x > y$, y es $y - x$ si $x < y$. Ahora bien

$$|x - y| = \begin{cases} x - y \ si \ x - y \geq 0 \\ -(x - y) \ si \ x - y < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - y \ si \ x \geq y \\ y - x \ si \ x < y \end{cases}$$

Entonces la distancia entre x e y es igual a $|x - y|$.