

Problemas

Cátedra de Introducción a la Programación
Facultad de Informática
Universidad Nacional del Comahue

1. INTRODUCCIÓN

Aprender a afrontar y resolver problemas es un importante reto en nuestra vida cotidiana. De otra forma los problemas podrían agobiarnos. Enfrentamos problemas simples o complejos, por ejemplo: ¿cómo llegar hasta lo de un amigo que deseamos visitar? ¿cómo ganar una partida de ajedrez? ¿qué hacer para ganar más dinero? ¿cómo ser más feliz?. En todo problema debemos *buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable en forma inmediata* [Polya, 1965]. Un problema puede considerarse una discrepancia entre un estado actual o inicial y un estado deseado o final. Y, para pasar de un estado a otro realizamos determinadas tareas que denominamos **acciones**. Hallar una solución del problema puede pensarse como un proceso de **selección**. Cuando el problema es escribir una carta, la solución consistirá en una combinación de palabras que expresen lo que queremos decir. Si el problema es ejecutar una operación aritmética, el resultado será un número. En cualquier caso, estamos seleccionando una respuesta adecuada.

En nuestra materia de Introducción a la Programación nos dedicaremos a resolver problemas. El desarrollo de la misma se centrará en actividades teórico-prácticas, en las cuales en forma reiterada abordaremos problemas de complejidad incremental. Este documento detalla varios aspectos relacionados con el concepto de problemas.

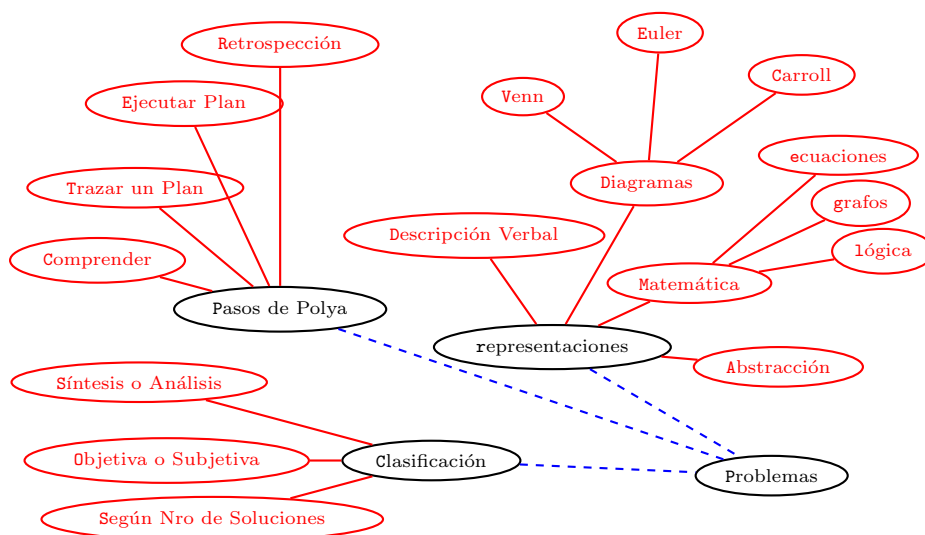


Fig. 1. Mapa Conceptual de los Conceptos del Presente Documento

En la figura 1 podemos observar un mapa conceptual que describe la estructura de este documento. La sección 2 describe tres categorías de problemas que nos permitirán utilizar

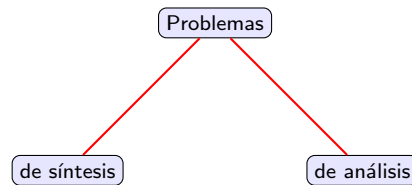


Fig. 2. Tipos de Problemas

términos y vocabulario en el tema. La sección 3 introduce un método muy simple para resolver problemas cuyo autor es George Polya [Polya, 1973]. La sección 4 desarrolla el tema de representaciones utilizadas al resolver problemas. Estas representaciones nos ayudarán a esquematizar los objetos y relaciones del problema.

2. ALGUNAS CATEGORÍAS DE PROBLEMAS

2.1. Según su formulación

Según como haya sido formulado un problema, podemos distinguir dos categorías: En la primera, el planteo del problema viene dado como una descripción de los estados inicial y final. Hallar la solución consiste en **seleccionar** una sucesión de estados intermedios de acuerdo a ciertas reglas. Este tipo de problemas pueden ser considerados **de síntesis** ya que la incógnita son los pasos intermedios entre dos estados dados.

Ejemplo 2.1 *Encontrar una secuencia de palabras del idioma castellano que permitan pasar de LIS a SOL con palabras intermedias. En cada paso sólo es posible cambiar una sola letra de la palabra del paso anterior.*

Para este ejemplo el estado inicial es LIS y el estado final es SOL.

Una solución válida consistirá en 2 palabras castellanas que permitan pasar de una a otra de acuerdo a las restricciones dadas¹. LIS LOS SOS SOL

La segunda categoría de problemas incluye a todos aquellos planteos en los que se presenta un estado inicial y un conjunto de restricciones que debería satisfacer el estado final. Estos problemas pueden ser considerados como **de análisis** ya que la incógnita es ahora el estado final.

Ejemplo 2.2 *¿Qué porcentaje de 120 representa 30?*

En este último ejercicio el estado inicial está representado por el hecho de conocer que 120 representa el 100 % de dicha cantidad. Deseamos conocer qué porcentaje representa una parte de esta cantidad (30 de 120). El estado final consiste en hallar el porcentaje que representa 30 de 120.

2.2. Según su tipo de solución

Según otro punto de vista, podemos distinguir aquellos problemas cuya solución es subjetiva de aquellos que tienen una solución objetiva.

Si nuestro problema es comprar un auto o decorar una casa, la solución puede ser muy subjetiva. El mismo problema, según diferentes *sistemas de valores y criterios*, puede dar lugar a soluciones muy dispares y probablemente contrapuestas. Normalmente el planteo de estos problemas viene dado en forma más o menos vaga y es muy difícil describir todos los factores que intervienen en la selección de la solución.

¹Un gran aficionado a las escaleras de palabras Charles Lutwidge Dodgson (Lewis Carroll)

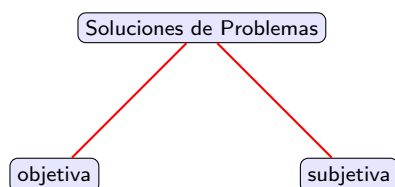


Fig. 3. Clasificación de acuerdo al tipo de solución

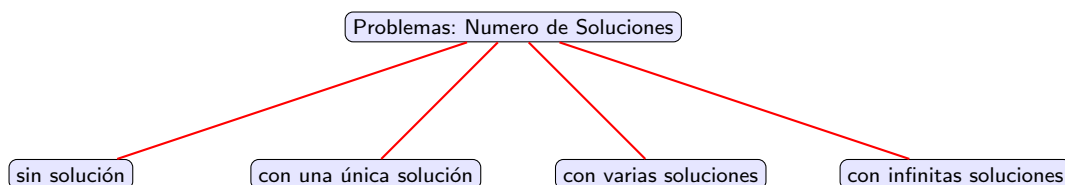


Fig. 4. Clasificación de acuerdo al número de soluciones

Ejemplo 2.3 *Un árabe, junto a su mujer, su hija y su madre navegan en una barca que atraviesa el Mediterráneo, cuando de pronto se desata una terrible tormenta. A causa de esto, el bote sufre una avería que obliga al árabe a deshacerse de dos de las mujeres. ¿A quién salva? Según nuestro planteo occidental, casi unánimemente elegiremos a nuestra hija o esposa. Sin embargo, ese árabe, con su lógica aplastante, dice: 'Esposa podré conseguir otra, hijos podré tener otros. Sin embargo, tengo solo una madre, a quien hay que salvar'.*

Existen problemas para los cuales es posible hallar una solución que no dependa de elementos subjetivos. El planteo contiene entonces un conjunto de condiciones o restricciones que permiten decidir si una respuesta constituye una solución o no para el problema.

Para los problemas de los ejemplos 2.1 y 2.2 es posible hallar soluciones objetivas, que no dependen de ninguna escala de valoración. Nos ocuparemos únicamente de este último tipo de problemas.

2.3. Según la cantidad de soluciones

Desde el punto de vista del número de soluciones, los problemas se pueden clasificar en:

Ejemplo 2.4 *En el campo de la Matemática, por ejemplo:*

- . $x^2 + 1 = 0$, no tiene solución en el campo de los números reales.
- . $x + 4 = 7$ tiene una única solución.
- . $x + y = 5$ tiene varias soluciones en el campo de los números naturales (\mathbb{N}).
- . $x + y = 5$ tiene infinitas soluciones en el campo de los números reales (\mathbb{R}).

Recordemos que:

$$\text{Complejos } \mathbb{C} \left\{ \begin{array}{l} \text{Reales } \mathbb{R} \\ \text{Imaginarios} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{Racionales } \mathbb{Q} \\ \text{Irracionales} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{Enteros } \mathbb{Z} \\ \text{Fraccionarios} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{Naturales } \mathbb{N} \\ 0(\text{cero}) \\ \text{Negativos} \end{array} \right.$$

3. UN MÉTODO DE LOS AÑOS 40

Polya [Polya, 1973] proporcionó heurísticas generales para resolver problemas de todo tipo, no sólo matemáticos. El libro *How to solve it*, cuya primera versión fue en 1945, incluye consejos para enseñar Matemática a los estudiantes y una mini-enciclopedia de términos heurísticos. Ha sido traducido a muchos idiomas y vendido más de un millón de copias. Según Wikipedia, el físico ruso Zhores I. Alfyorov (Premio Nobel de Física de 2000) lo alabó, diciendo que estaba encantado con el famoso libro de Polya.

El método de 4 pasos que propone Polya se resume en la Figura 5. De acuerdo a Polya [Polya, 1973] 'primero, tenemos que *comprender* el problema, es decir, ver claramente lo que se pide. Segundo, tenemos que captar las relaciones que existen entre los diversos elementos, ver lo que liga a la incógnita con lo datos a fin de encontrar una idea de la solución y poder trazar un *plan*. Tercero, poner en *ejecución* el plan. Cuarto, *volver atrás* una vez encontrada la solución, revisarla y discutirla'.

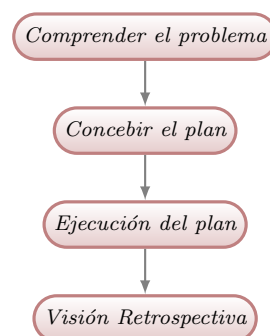


Fig. 5. Etapas para la Resolución de Problemas (Polya)

El método de Polya incluye una lista de preguntas para cada paso, relacionadas con la operaciones intelectuales particularmente útiles para la solución de problemas. Ellas tienen un sentido y ayudan a esclarecer el problema. Sugieren un camino a seguir que llevará al alumno con frecuencia al éxito. Ayudan a hacer explícito un comportamiento, un razonamiento, etc. Si una persona 'emplea la misma pregunta varias veces con buen resultado, sin duda se fijará en ella y a ella recurrirá cuando se encuentre en un caso similar' [Polya, 1973]. Es importante realizarse las preguntas indicadas en el momento adecuado y efectuar con toda naturalidad la operación intelectual correspondiente. El resolver problemas es una **habilidad práctica** y es imprescindible desarrollar **una aptitud para resolver problemas**. Es importante a la hora de resolver problemas interesarnos en ellos y **prestar mucha atención de posibles ocasiones en las cuales veamos como otros resuelven problemas para poder imitarlos y poner en práctica una solución similar**.

El paso de **Comprender el problema** incluye entender claramente cuál es la incógnita, cuáles son los datos y cuál es la condición. Se recomienda formularse preguntas tales como:

- ¿Entiendo todo lo que dice?
- ¿Puedo replantearme el problema con mis propias palabras?
- ¿Distingo cuáles son los datos?
- ¿Me doy una idea a qué quiero llegar?
- ¿Hay suficiente información?
- ¿Hay información extraña?
- ¿Este problema es similar a algún otro que he resuelto antes?

El paso de **trazar un plan** propone utilizar alguna/s estrategia/s². Tenemos un plan cuando sabemos a 'grosso modo' qué cálculos, qué razonamientos o construcciones habremos de efectuar para determinar la incógnita [Polya, 1973].

Las estrategias pueden ser:

1. Ensayo y error (conjeturar y probar la conjetura³).
2. Usar una variable.
3. Buscar un patrón
4. Hacer una lista.
5. Resolver un problema similar más simple.
6. Hacer una figura.
7. Hacer un diagrama.
8. Usar las propiedades de los números.
9. Resolver un problema equivalente.
10. Trabajar hacia atrás.
11. Usar casos.
12. Resolver una ecuación.
13. Buscar una fórmula.
14. Usar un modelo.
15. Identificar submetas, etc.

El paso de **Ejecutar el plan** consiste en implementar la o las estrategias seleccionadas en el punto anterior hasta solucionar completamente el problema o hasta que la misma acción sugiera tomar un nuevo curso.

El paso de **Visión retrospectiva** involucra plantearse las siguientes preguntas:

- ¿La solución es correcta?
- ¿La respuesta satisface lo establecido en el problema?
- ¿Hay alguna otra solución más sencilla al problema?
- ¿Puedo probar el resultado obtenido?

Comúnmente, los problemas se enuncian en palabras, ya sea oralmente o en forma escrita. Así, para resolver un problema, uno traslada las palabras a una forma equivalente del problema en la que usa símbolos (por ej. matemáticos), resuelve esta forma equivalente y luego interpreta la respuesta. A continuación, veremos distintas construcciones o representaciones que nos permitirán modelar el problema.

4. PLANTILLA PARA RESOLVER PROBLEMAS

Utilizaremos la siguiente plantilla al resolver cada enunciado del práctico. Esta plantilla tiene un objetivo: y es, ir internalizando algunos pasos que nos permitirán arribar a una solución. Estos pasos se pueden subsumir en el método de resolución de problemas de Polya, sin embargo nos permiten estructurar y clarificar nuestra solución.

La plantilla tiene este formato:

²Una estrategia se define como un artificio ingenioso que conduce a un final.

³-'Yo nunca hago conjeturas' Sherlock Holmes. -'Debemos conquistar la verdad mediante conjeturas, o no lo conquistaremos de ningún modo' Charles S. Peirce.

Identificador/Ejercicio:	<Número de ejercicio>
Objetivo del Problema	<Indicamos el objetivo que el enunciado del problema pide que obtengamos>
Datos Relevantes	< Incluimos la información conocida y que detectamos que sirve para resolver el problema>
Representación.	<Detallamos la representación: fórmulas, gráficos, relaciones existentes entre los datos relevantes>
Secuencia de Pasos	<Mostramos paso a paso el desarrollo necesario para obtener el resultado>
Resultado	<Expresamos claramente el resultado obtenido, el cual se corresponde con el objetivo>
Verificación	<Verificamos que el resultado hallado se corresponde con los datos originales>

Describimos un poco más cada uno de sus componentes y los ponemos en relación con Polya:

- Identificador: En el indicamos el número del ejercicio y el práctico al cual corresponde.
- Objetivo: Indicamos cual es el objetivo del problema, al cual deseamos llegar. El objetivo debe estar claro y está relacionado con la comprensión del problema.
- Datos Relevantes: En este ítem incluimos todos aquellos datos relevantes del enunciado que están en relación con el objetivo perseguido. No incluimos los datos irrelevantes o superfluos.
- Representación: Incluimos en este ítem la relaciones entre los objetos del problema. Los datos relevantes estarán seguramente relacionados entre sí. Podemos enunciar alguna forma de representación como un diagrama, fórmula, etc. Este ítem está en relación con el paso de Trazar un plan de Polya.
- Pasos: Incluimos en este ítem el desarrollo de pasos, que permiten mostrar cómo a partir de los datos principales del enunciado es posible arribar a un resultado. Por ejemplo, al mostrar el desarrollo de una ecuación. En cada paso del desarrollo debemos poder justificar las razones del paso. No debemos omitir ningún paso intermedio.
- Resultado: Expresamos el resultado, o los resultados. El resultado está en relación con el objetivo perseguido. Debemos expresarlo claramente, y expresar la unidad de medida del mismo.
- Verificación: Expresamos una verificación del resultado. Realizamos una prueba de que el resultado es correcto de acuerdo a los datos proporcionados en el enunciado. Este paso está en relación con el paso de revisión retrospectiva del método de Polya.

5. REPRESENTACIONES

Para hallar soluciones a problemas se requiere habilidad, conocimiento y experiencia. Un problema puede ser simple o complejo según quien tenga que hallar su solución. Tal vez lo que es un problema para una persona no lo sea para otra, ya que las personas tenemos distintas capacidades para hallar soluciones a diferentes clases de problemas.

Aunque a veces es posible hallar la solución de un problema aparentemente difícil de una forma puramente intuitiva ya que podemos tener raptos de inspiración, en general, resulta conveniente tener presente que **estrategias** y **tácticas** nos pueden orientar en la búsqueda de soluciones de problemas. Estas tácticas y estrategias no necesariamente nos conducirán a la solución, pero es probable que nos ayuden en menor o mayor medida.

La búsqueda de la solución de un problema es una tarea difícil de sistematizar. Cada problema puede presentarse en forma aparentemente aislada y frecuentemente no sabemos cómo encararlo.

Sin embargo, existen algunas pautas útiles que, de ser seguidas, pueden ayudarnos para enfrentar el problema:

- Establecer el problema en forma clara y entenderlo completamente.
- Clarificar cualquier ambigüedad que presente el problema.
- Definir exactamente qué se quiere hacer.
- Especificar con precisión todas las restricciones o condiciones que debe satisfacer la solución.
- Identificar claramente la información disponible.

-
- Explicitar toda información implícita en el planteo que pueda resultar útil.
 - Encontrar una representación adecuada para esta información.
 - Retomar el enunciado original ante un callejón sin salida.
 - Verificar la solución encontrada.

Estas pautas, que no son más que la síntesis de los cuatro pasos indicados por Polya no deben seguirse necesariamente en el orden antes expuesto; muchas tareas se repiten y a menudo se relea el enunciado con mayor detenimiento, focalizando la atención en algún aspecto que tal vez resultó inadvertido en un primer momento.

Estas pautas van a ser imprescindibles cuando intentemos construir un programa (o software) a partir de un planteo o a partir de las necesidades expresadas por un usuario.

Es frecuente que cuando deseamos hallar la solución del problema impongamos más restricciones a la incógnita que las implicadas en el enunciado. Por eso, en esto debemos ser cuidadosos, no hacer más complejo el problema de lo que es, y limitarnos a resolver el problema esencial.

Ejemplo 5.1 Lápices: *Supongamos que tenemos seis lápices de igual longitud y deseamos formar cuatro triángulos equiláteros de igual tamaño, sin que se crucen los lápices. Intente hallar la solución... (y luego siga leyendo).*

La mayor parte de quienes se enfrentan a este problema han intentado formar figuras sobre una mesa o en el suelo, restringiendo el problema al plano. Probablemente esta restricción se deba a la asociación natural entre un triángulo y el plano. Intente ahora una solución en el espacio.

El enunciado anterior no establece ningún tipo de pauta para encontrar la solución; es más, se aprovecha de la idea preestablecida de que la mesa es un plano, en el que se acomodaran los lápices para formar los triángulos, pero el espacio es un conjunto infinito de planos.

En otras ocasiones, el enunciado impone, en forma más o menos explícita y precisa, pautas para hallar la solución. En este caso, por ejemplo, podría haber dicho: no se restrinja al plano.

Ejemplo 5.2 *Cuentan que un cazador empedernido vio 16 palomas cómodamente apoyadas en un balcón, lanzó una perdigonada y mató a 4. ¿Cuántas quedaron?*

Evidentemente la respuesta inmediata es ¡12! Sin embargo, a poco que lo pensemos, vemos que en realidad quedaron las 4 muertas, pues las otras volaron. En fin... la pregunta ¿cuántas quedaron? es interpretada casi unánimemente como ¿cuántas quedaron vivas?, cuya respuesta es obvia. También podría interpretarse como ¿cuántas quedaron en el balcón?, en cuyo caso, la segunda respuesta es la apropiada. En este caso, el problema no se especificó correctamente y éste no debe confundirse con un problema con varias soluciones ya que es un enunciado que presenta ambigüedad.

Existen algunos otros pasos que siempre que sea posible es importante aplicar. Por ejemplo, **eliminar toda aquella información redundante o irrelevante**. Sin embargo, es muy difícil decidir desde el principio qué datos podemos descartar pues no van a ayudarnos a hallar una solución.

Si bien la búsqueda de soluciones para problemas es una tarea creativa, en donde la imaginación y la intuición juegan roles importantes (también la experiencia), no debemos perder de vista que la aplicación de técnicas de resolución de problemas es central en este tipo de tareas. Gracias a las técnicas no es necesario pensar individualmente cada instancia de solución desde cero. En cambio, podemos aplicar métodos ya desarrollados o exitosos a nuevas instancias de problemas.

Un problema se presenta, en general, bajo la forma de un enunciado. No consideraremos el caso de enunciados incompletos, ambiguos o contradictorios porque en estos casos, el problema no está bien especificado y deberíamos comenzar por encontrar un planteo adecuado.

La principal dificultad para hallar la solución de un problema no es la falta de información, sino la incapacidad para utilizar convenientemente la información provista.

Aún cuando un enunciado contenga información suficiente para hallar la solución del problema, es probable que haya información irrelevante, redundante o implícita.

La capacidad de la mente para manipular información es muy limitada. La capacidad de la memoria de corto plazo fue estudiada por Miller [Miller, 1956] y Broadbent [Broadbent, 1975]. Miller encontró que el número máximo de conceptos que es posible retener en la memoria de corto plazo es 7 ± 2 . Por otro lado una persona retiene menos conceptos a la vez si no hay relación entre ellos, esto fue estudiado por Gopal [Gopal, 1991]. **De aquí la importancia de establecer relaciones entre los datos del problema**, realizar un tratamiento con ellos de tal manera de conceptualizarlos de una forma más adecuada y resumida.

Ejemplo 5.3 *Observe la siguiente secuencia de dígitos durante 10 segundos:*

3 0 7 1 5 9 4 6 2 8 4 5

Al dejar de mirar la secuencia, ¿cuántos dígitos puede recordar? En promedio, las personas pueden retener y repetir unos 7 dígitos.

La mayoría de los problemas abarcan muchos más ítems de información.

Otro punto fundamental para hallar la solución de un problema es seleccionar los elementos de información que resulten relevantes.

La información puede ir organizándose en bloques, de manera tal de ir creando una clasificación. Por ejemplo, ítems tales como manzanas, naranjas e higos pueden agruparse en frutas. Frutas, verduras y carnes pueden conformar la clase comidas frescas. Las comidas frescas junto con los embutidos y conservas pueden agruparse en comidas, y así siguiendo.

El agrupar ítems ayuda a retener y manipular más información. Para comprobarlo, agrupe de a tres dígitos la secuencia anterior e intente nuevamente retener los números formados.

En el estudio de la lengua, se recurre frecuentemente a la frase 'El mi tu-te mas si se-de' para agrupar a todos los monosílabos que pueden acentuarse o no ⁴. Evidentemente, es muy fácil recordar esta oración, aún cuando no tiene sentido, en lugar de memorizar las 8 palabras aisladamente.

Frecuentemente resulta útil desarrollar patrones que incluyan ítems aparentemente sin relación. Los **diagramas**, los **gráficos** y las **ecuaciones** son ejemplos de **herramientas** que permiten condensar información.

5.1. Abstracción

El primer paso en la búsqueda de la solución es encontrar una representación adecuada para el problema, que descarte la información superflua y rescate aquella que resulte relevante.

La técnica para encontrar un planteo más conciso del problema se conoce como **abstracción**. Una abstracción de esta clase se realiza en varias etapas:

- Transformar el enunciado original en uno tan simple como sea posible. La nueva versión no necesariamente será más corta que la original.
- Identificar los objetos relevantes y las relaciones entre estos objetos.
- Agrupar los objetos en clases.
- Nombrar los objetos o las clases según alguna notación adecuada.

⁴deberíamos incluir el monosílabo aún que no está en la lista

- Definir las operaciones que pueden aplicarse sobre los objetos.
- Utilizar, siempre que sea posible, una notación más abstracta que una descripción verbal.

El objetivo de la abstracción es construir una simplificación de la realidad que rescate únicamente la información relevante para hallar la solución del problema.

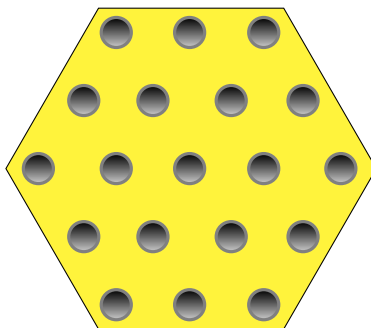
Intentamos construir un modelo de la realidad. Un **modelo** es, precisamente, una representación simplificada de la realidad. La construcción de un modelo es útil porque sólo son considerados los elementos relevantes y así la búsqueda de la solución no se ve entorpecida por el exceso de detalles.

Algunos tipos de notaciones que pueden ser utilizadas para representar problemas:

5.2. Descripción Verbal

Los problemas normalmente se plantean en forma verbal. Antes de encontrar otra forma de representación, es conveniente probar con una nueva versión más sucinta del problema original. Por ejemplo: **eliminar redundancias, datos irrelevantes y puntualizar el resto en frases cortas y claras.**

Ejemplo 5.4 *El conde Mirk, amo del Castillo Terminal, había capturado a diecinueve marquesas para transformarlas en su rico y exclusivo harén. Las había encerrado en un recinto hexagonal, lugar que tenía reservado para una ocasión así. A nadie le quedarán dudas de que Mirk pasó con ellas las mejores noches de su vida. Jugaban torneos de tute, de ajedrez y de muchísimos otros juegos más. Sucedió que poco a poco el parloteo de estas damiselas comenzó a agobiarlo hasta que quedó al borde de un ataque de nervios. El conde, sabiamente, las transformó en estatuas, disponiéndolas en la habitación del siguiente modo:*



Pero para su desgracia, había actuado demasiado tarde. Comenzaban a manifestársele los primeros signos de locura y por las noches, cuando se acostaban a dormir, creía escuchar los ecos y murmullos de aquellos diálogos interminables. En el límite de la desesperación, el conde consultó a un brujo. Este le dijo:

- Su problema es sumamente sencillo. Usted ha logrado encerrar los cuerpos de las marquesas, pero no sus espíritus. Debe construir celdas mágicas trazando seis rectas sobre el piso de la habitación de modo que luego, cuando construya las paredes sobre ellas, quede una y sólo una estatua en cada celda. Las celdas, naturalmente, pueden tener distinta forma y/o tamaño.

El conde demoró 7 días y 7 noches en descubrir cómo debería trazar esas seis rectas. ¿Cómo debe trazarlas?

Es claro que la mayoría de este relato es irrelevante y el problema podría haberse planteado como: "Dado un hexágono y 19 puntos ubicados dentro del mismo de acuerdo a la figura, se desea trazar seis rectas que dividan al mismo en 19 celdas. Dentro de cada una de éstas deberá haber un punto. Las celdas pueden tener distinta forma y/o tamaño. ¿Cómo deberá trazar dichas rectas?"

5.3. Diagrama

Existen muchos problemas en los que resulta adecuado encontrar una representación gráfica de los mismos.

Ejemplo 5.5 *Un hombre y una mujer caminan juntos. En el momento inicial sus pies derechos están apoyados en el suelo. El hombre da 2 pasos por cada 3 de la mujer. ¿Cuántos pasos deben dar cada uno antes de que sus pies izquierdos pisen el suelo simultáneamente?*

Ejemplo 5.6 *Blanca, Rosa y Violeta son tres amigas que se encuentran para estudiar y descubren que, casualmente, están vestidas con los colores de sus nombres, aunque ninguna lleva el color que corresponde al su nombre. Si el vestido de Violeta no es blanco, ¿cuál es el color de los vestidos de cada amiga?*

Intentemos ahora aclararlo en un cuadro de doble entrada. En el mismo ya está indicado, con una letra mayúscula la inicial del nombre de cada amiga y con una letra minúscula el color de cada vestido. Coloque una cruz en aquella intersección que resulte falsa a los datos que se le dieron y un círculo cuando resulte verdadera.

	Blanca	Rosa	Violeta
blanco			
rosa			
violeta			

5.4. Matemática

Una de las características más interesantes de usar herramientas matemáticas como forma de representación es su **rigidez y formalidad**. Esto asegura que si se obtiene una expresión adecuada y se obedecen bien las reglas, es posible llegar a una solución acertada, independizándose rápidamente del enunciado original.

La Matemática nos ofrece técnicas muy variadas para modelar problemas, tales como ecuaciones, grafos, lógica, geometría y otras. La **máxima ventaja** de utilizar una herramienta matemática es **la sólida teoría sobre la que se apoya y la independencia que se logra del enunciado original**, una vez que el problema ha sido modelado.

5.4.1. Ecuaciones

Las ecuaciones parten de una serie de incógnitas que representan valores -desconocidos a priori- y una serie de símbolos u operadores que establecen relaciones entre las incógnitas. La solución consiste en ir estableciendo nuevas relaciones entre las incógnitas -usando las reglas del álgebra-, que permiten llegar a una expresión simple donde se haga conocido el valor para una de las incógnitas. Se puede continuar con este proceso hasta encontrar la solución del problema global.

En este caso, el enunciado se transforma en ecuaciones en las que los objetos del problema son operandos y las relaciones entre los mismos son los operadores.

Ejemplo 5.7 *Clariobaldo es ahora tres veces más viejo de lo que lo era su sobrina Anabela hace 10 años y Anabela tiene ahora la mitad de la edad que tendrá su tío dentro de 5 años. ¿Cuánto más viejo es Clariobaldo que Anabela?*

Los objetos relevantes son las edades de Clariobaldo y Anabela y la relación entre estas edades.

Una primera simplificación hubiera sido asignar **nombres** a las edades. En segundo término, la relación entre las edades puede expresarse fácilmente a través de ecuaciones algebraicas.

Siendo:

C = edad de Claribaldo

$A = \text{edad de Anabela}$

$$C = 3(A - 10)$$

$$A = \frac{(C+5)}{2}$$

Hemos encontrado una representación equivalente, mucho más expresiva. Para hallar la solución, a su vez podemos limitarnos a las ecuaciones planteadas, descartando el enunciado original.

En cualquiera de los casos anteriores, la idea fue pasar de un enunciado planteado verbalmente a una expresión más sucinta, consistente de operadores y operandos. A partir de dichas expresiones, llegamos a la solución, usando las reglas del álgebra.

En el ejercicio anterior podemos establecer que el paso más abstracto y representativo fue saltar del enunciado a la ecuación. Allí hemos puesto toda nuestra creatividad. A partir de este planteo, nos hemos independizado casi del problema y hemos operado en forma genérica.

5.4.2. Lógica

La **lógica** define muy precisamente el significado de ciertas expresiones y de algunos conectivos como **y**, **o**, **si-entonces**. La lógica maneja valores de verdad. Si una afirmación simple es conocida como verdadera o falsa, entonces la lógica puede determinar si una afirmación compuesta, que involucra afirmaciones simples, es verdadera o falsa. Por ejemplo, suponiendo que disponemos de dos afirmaciones simples:

'Yo soy un hombre'

'Yo tengo 30 años'

que se saben verdaderas, la afirmación 'Yo soy un hombre y yo tengo 30 años' es también verdadera. Está claro que si alguna de las afirmaciones fuera falsa, entonces la afirmación compuesta sería también falsa.

El problema de la lógica consiste en establecer la verdad de ciertas afirmaciones iniciales o de partida. Estas asignaciones caen bajo la órbita humana y, por tanto, el sistema muchas veces es peligroso.

Por ejemplo, si partimos de la verdad de las siguientes afirmaciones:

'Todos los venenos son ácidos'.

El arsénico no es ácido'.

Entonces podemos deducir que el arsénico no es un veneno. Claramente, esto es falso. El problema ha sido la asignación inicial de verdadera para la primera afirmación. Esto no implica que la lógica no sirva, sino que es necesario tener mucho cuidado al establecer los valores de verdad para ciertas afirmaciones.

5.4.3. Grafos

Un **grafo** es una representación pictórica que consiste en una serie de círculos o nodos y una serie de líneas aristas que vinculan los nodos.

Los aristas pueden estar nombradas o etiquetadas de modo de indicar su propósito ó cómo pasar de un nodo a otro.

Un grafo puede usarse para representar gran variedad de problemas, siempre y cuando el número de situaciones a considerar sea finito. Si las aristas estan orientadas estas pasan a denominarse arcos, y el grafo se transforma en un digrafo.

Ejemplo 5.8 *Supongamos que un viajante debe organizar su próxima gira a distintas ciudades de la provincia de Neuquén, partiendo del kilómetro 0 en la Ciudad Autónoma de Buenos*

Aires. Cuenta con una tabla que establece la distancia entre las ciudades:

Ciudades	Copahue	Junín de los Andes	Neuquén	San Martín de los Andes	Villa La Angostura	Zapala
Copahue	al Km 0: 1545	373	375	414	522	202
Junín de los Andes	373	al Km 0: 1561	347	41	149	208
Neuquén	375	347	al Km 0: 1166	423	477	182
San Martín de los Andes	414	41	423	al Km 0: 1602	110	241
Villa La Angostura	522	149	477	110	al Km 0: 1770	351
Zapala	202	208	182	241	351	al Km 0: 1355

Construir un grafo donde los nodos son ciudades y los arcos son las distancias entre las mismas. Determinar el circuito, el camino más óptimo para el viajante.

Encontraremos una representación abstracta para un problema concreto. Esta representación se apoya en la teoría de grafos, **que será vista en materias posteriores**. Mediante el uso de esta técnica, será posible encontrar el camino mínimo uniendo todas las ciudades. Si hemos obedecido bien las reglas de grafos, sabremos que el camino obtenido es el mínimo y no habrá dudas al respecto.

5.4.4. Geometría

La **geometría** brinda una herramienta visual a la cual se le pueden aplicar ciertas leyes, conocidas, en la búsqueda de la solución. El apunte titulado 'Ayuda para Resolver Problemas'[UNComahue, 2011] contiene la fórmulas más comúnmente utilizadas en distintas figuras geométricas.

La ventaja de llevar un problema a una **representación que se apoye fuertemente en una teoría**, permite abstraerse rápidamente del problema y hallar la solución usando un método genérico.

Con cualquiera de los conceptos matemáticos que hemos presentado, encontrar un modelo matemático adecuado nos permite utilizar toda la teoría desarrollada y probada para el modelo.

De todos estos conceptos el único que resulta conocido hasta el momento es probablemente el de ecuaciones algebraicas. Notemos que una vez hallado un conjunto de ecuaciones para representar el planteo de un problema, hallamos la solución siguiendo las reglas y propiedades del álgebra. Como lo correcto de estas reglas y propiedades está asegurado por una teoría, no necesitamos comprobar la validez de los resultados.

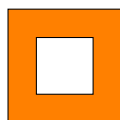
Por el momento, no podemos mostrar que lo mismo ocurre cuando utilizamos grafos o lógica, precisamente porque desconocemos la teoría que soporta a estos conceptos y serán vistos en otras materias.

Podemos encontrar distintas representaciones, algunas de ellas son mejores que otras, según el tipo de problema.

En cualquier caso, el punto notorio e importante es la identificación de los objetos relevantes del problema, las relaciones entre ellos, sus propiedades y otras características que constituirán los datos del problema.

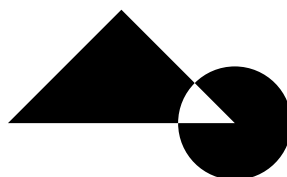
Ejercicios para pensar que plan utilizaría al resolverlos

- Se desea obtener la superficie naranja para un cantero. ¿Cómo la podemos calcular si sabemos que esta figura está compuesta por cuadrados donde el lado del cuadrado exterior es 8 y el lado del cuadrado interior es 6?

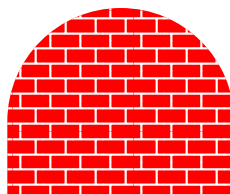


- ¿Cómo podemos calcular la superficie de la intersección de las figuras si conocemos que uno

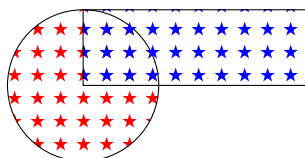
de los vértices del triángulo equilátero coincide con el centro del círculo y el radio de la circunferencia es 3m?



- Necesitamos tapar con ladrillos una puerta compuesta por un arco de medio punto⁵ ¿Como podemos calcular la superficie de la puerta si conocemos su ancho (3 metros), su altura total (6 metros) y el radio del semicírculo es de 3m?



- Necesitamos conocer la superficie pintada de las figuras (sin su intersección). El radio de la circunferencia es 1cm; el lado mayor del rectángulo es 7 cm.



REFERENCIAS

- Broadbent, D. E. (1975). The magical number seven after fifteen years. In A. Kennedy and A. Wilkes (eds.), *Studies in Long-Term Memory*, New York: Wiley, 318.
- Gopal, R. (1991). Dynamic program slicing based on dependence relations. *Proceedings of the Conference on Software Maintenance*, 191200.
- Miller, G. A. (1956). The magical number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information. *Psychological Review* 63, 8197.
- Polya, G. (1965). Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving. John Wiley and Sons.
- Polya, G. (1973). How to solve it, a new aspect of mathematical method. Princeton university press. Princeton, New Jersey.
- UNComahue (2011). Ayuda para resolver problemas. *Apuntes de la Cátedra de Resolución de Problemas y Algoritmos. Facultad de Informática*.

⁵En Arquitectura un arco de medio punto es el elemento principal de la arquitectura abovedada, el arco tiene la forma de un semicírculo exacto en su extremo superior.
