Conjuntos

Consideraremos como conceptos primitivos (no definidos) los de conjunto, elemento u objeto y pertenencia.

Generalmente designaremos a los conjuntos con letras mayúsculas, y a los elementos que lo forman, con letras minúsculas.

Para indicar que un elemento a pertenece a un conjunto A escribiremos: $a \in A$. Si a no pertenece a A, escribiremos $a \notin A$.

Ejemplo: En este curso, indicaremos con $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ los conjuntos de números naturales, enteros, racionales, reales y complejos, respectivamente.

Se tiene: $1 \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$, $0 \in \mathbb{Z}$, $-7 \notin \mathbb{N}$, $9 \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$, $1 + i \in \mathbb{C}$.

Un conjunto está bien definido, o bien determinado, cuando podemos precisar cuáles son sus elementos. Una forma de hacerlo es por <u>*EXTENSIÓN*</u> nombrando uno a uno todos los objetos que lo componen y encerrando esta lista entre llaves. Por ejemplo, si el conjunto A está formado por los elementos 1, 2, 3 y 4 podemos describir este conjunto escribiendo:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}.$$

El orden en que escribimos los elementos es irrelevante, ya que un conjunto está completamente determinado por los objetos que lo componen. En consecuencia:

$$\{1, 2, 3, 4\} = \{2, 1, 3, 4\} = \{2, 1, 4, 3\} = ...$$

Este método de describir un conjunto puede ser poco práctico o imposible en algunos casos, y deberemos usar otras formas de notación. Por ejemplo, $\{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$ describe el conjunto de todos los números enteros positivos menores o iguales que 100.

Otras veces, para definir un conjunto lo hacemos por <u>*COMPRENSIÓN*</u> indicando una *propiedad común* a todos sus elementos y tal que *sólo sus elementos* la tengan. Así por ejemplo, los elementos del conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ pueden ser caracterizados como aquellos elementos x que cumplen la propiedad: $x \in \mathbb{N}$ y $x < 5$. Escribimos entonces:

$$A = \{ x \in \mathbb{N}: \ x < 5 \}$$

Ejemplos:

1. $A = \{ x \in \mathbb{R}: \ x > 0 \}$ es el conjunto de los números reales positivos.

2. El conjunto de los números enteros pares puede escribirse $B = \{x \in \mathbb{Z}: x$ es divisible por $2\}$. También podemos escribir $B = \{ x \in \mathbb{Z}: \ x = 2k, k \in \mathbb{Z} \}$.

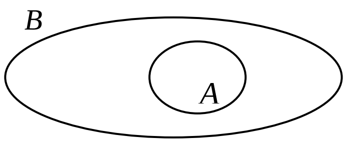
3. $C = \{ x \in \mathbb{Z}: \ x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z} \}$ es el conjunto de los números enteros impares.

4. El conjunto $D = \{ x \in \mathbb{N}: x = 2k$ con $k \in \mathbb{N}, x$ es múltiplo de $7, x \leq 42 \}$ tiene por elementos los números 14, 28 y 42.

Inclusión

<u>Definición</u>: Dados dos conjuntos A y B, se dice que *A está incluido en B, o que A es un parte de B, o que A es un subconjunto de B, o que B contiene a A*, si todo elemento de A pertenece a B. Se escribe $A \subseteq B$ *o* $B \supseteq A$.

$A \subseteq B \Leftrightarrow$ para todo $x: x \in A \Rightarrow x \in B$.



Nota: los dibujos que hemos utilizado para representar a los conjuntos A y B reciben el nombre de diagramas de Venn.

<u>Definición</u>: Se dice que el conjunto *A es igual* al conjunto *B, si* $A \subseteq B$ *y* $B \subseteq A$. Lo indicamos $A = B$.

Luego $A = B$ cuando todo elemento de A es un elemento de B y todo elemento de B es elemento de A, es decir A y B tienen los mismos elementos.

Conjuntos especiales

***Conjunto Universal*:** depende de la disciplina en estudio, se fija de antemano y está formado por todos los elementos que intervienen en el tema de interés. Se lo denota U.

***Conjunto Unitario*:** es el que tiene un único elemento.

***Conjunto vacío*:** es cuando el conjunto carece de elementos. Se lo denota { } o Ø y puede ser definido por cualquier propiedad que no sea verificada por ningún objeto.

Por ejemplo podríamos escribir $\emptyset = \{ x \in U: x \neq x \} = \{ x \in \mathbb{R}: x^2 < 0 \} = \{ x \in \mathbb{R}: 7 < x < 8 \}$

Ejemplos:

1. Veamos que los conjuntos $A = \{ x \in \mathbb{R}: x > 2 \}$ y $B = \{ x \in \mathbb{R}: 3x - 4 > 2 \}$ son iguales. Un procedimiento consiste en tomar un elemento cualquiera $x \in A$ y probar que $x \in B$, y recíprocamente, probar que todo elemento $x \in B$ verifica $x \in A$.

En este caso, sea $x \in A$. Entonces $x \in \mathbb{R}$ y $x > 2$, lo que implica $3x > 6$, y de aquí se deduce $3x - 4 > 2$. Por lo tanto $x \in B$.

Recíprocamente, sea $x \in B$. Entonces $x \in \mathbb{R}$ y $3x - 4 > 2$, de donde resulta $3x > 6$, o sea, $x > 2$. Luego $x \in A$.

Se ha probado entonces que $A = B$.

2. Sea A el conjunto de los números naturales pares y sea B el conjunto de los números naturales cuyo cuadrado es par. Veamos que $A = B$.

En efecto, probemos en primer lugar que $A \subseteq B$. Sea $x \in A$; entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x = 2k$. Luego $x^2 = (2k)^2 = 2(2k^2)$; entonces x^2 es par y por lo tanto $x \in B$. Hemos probado así que $A \subseteq B$.

Probemos que $B \subseteq A$. Sea $y \in B$. Entonces y^2 es par. Queremos probar que $y \in A$, esto es, que y es par. Observemos en primer lugar que de la hipótesis resulta que $y \neq 1$. Si suponemos *por el absurdo* que y no es par, entonces y es de la forma $y = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Pero en ese caso $y^2 = (2k + 1)^2$ de donde $y^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$, que es impar, lo que contradice la hipótesis. Luego y es par y por lo tanto $y \in A$.

Luego $A = B$.

La relación de inclusión no excluye la igualdad de los conjuntos. Si $A \subseteq B$ y además $A \neq B$, se dice que A es un subconjunto *propio* o una parte *propia* de B, o que A está contenido estrictamente en B. Lo notaremos $A \subset B$.

Cuando existe al menos un elemento que pertenece a A y no pertenece a B, la inclusión no se verifica, y escribiremos $A \not\subseteq B$.

Observación: El conjunto vacío está contenido en cualquier conjunto, es decir $\emptyset \subseteq A$, para todo conjunto A. En efecto, la implicación "$x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$" es verdadera, pues su antecedente es falso.

Ejemplos:

1. Si $A = \{2, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C = \{4, 6, 8\}$ y $D = \{ 3, 5, 7\}$, entonces $A \subseteq B$, $C \nsubseteq D$, $A \nsubseteq C$, $C \nsubseteq A$, $B \nsubseteq D$, $D \nsubseteq B$.

2. Si A es el conjunto de todos los divisores positivos de 12,

B es el conjunto de todos los divisores positivos de 6,

$\boldsymbol{C}$ es el conjunto todos los divisores positivos de 4,
entonces $C \subseteq A$, $B \subseteq A$, $C \nsubseteq B$, $B \nsubseteq C$.

Propiedades de la inclusión:

1. *Reflexiva:* $A \subseteq A$, *para todo conjunto* A.

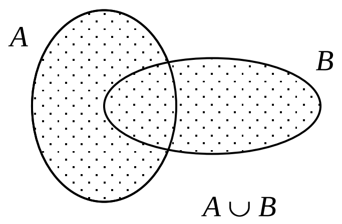
2. *Antisimétrica: Si* $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ *entonces* $A = B$.

3. *Transitiva: Si* $A \subseteq B$ *y* $B \subseteq C$, *entonces* $A \subseteq C$.

Unión de conjuntos

<u>Definición</u>: Dados dos conjuntos A y B, se llama *unión* de A y B al conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A ó a B. En notación:

$A \cup B = \{ x \in U : x \in A \text{ ó } x \in B\}$



Recordemos que en Matemática, el conectivo "o" se usa en sentido no excluyente. En consecuencia, cuando decimos que un elemento está en A o en B no excluimos la posibilidad que esté en ambos conjuntos.

Ejemplo: Consideremos los conjuntos $A = \{ x \in \mathbb{N}: x \leq 4 \} = \{1, 2, 3, 4 \}$, y $B = \{ x \in \mathbb{N}: x \text{ es divisor de } 10 \} = \{ 1, 2, 5, 10 \}$. Entonces $A \cup B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 10 \}$.

De la definición resulta que $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$.

Propiedades de la unión:

1. *Idempotencia:* $A \cup A = A$.

Para demostrar la igualdad de los conjuntos $A \cup A$ y A hay que probar las dos inclusiones:

(i) $A \cup A \subseteq A$ y (ii) $A \subseteq A \cup A$.

Ya vimos que (ii) es consecuencia inmediata de la definición.

Probemos (i), esto es que todo elemento de $A \cup A$ es un elemento de A. Sea $x \in A \cup A$. Entonces $x \in A$ o $x \in A$, luego $x \in A$ por la idempotencia de la disyunción. Se tiene entonces $A \cup A \subseteq A$.

De (i) y (ii) se cumple la igualdad.

2. *Conmutativa:* $A \cup B = B \cup A$.

Se demuestra de la misma manera que la propiedad anterior.

3. *Asociativa:* $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Debemos probar que:

(a) $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$ y que

(b) $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$.

(a) Si $x \in (A \cup B) \cup C$ entonces por definición de unión $x \in (A \cup B)$ o $x \in C$ de donde resulta que ($x \in A$ o $x \in B$) o $x \in C$. Luego $x \in A$ o $x \in (B \cup C)$ esto es $x \in A \cup (B \cup C)$. Entonces $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$.

(b) Si $x \in A \cup (B \cup C)$ entonces por definición de unión $x \in A$ o $x \in (B \cup C)$ de donde $x \in A$ o $x \in B$ o $x \in C$. Luego $x \in (A \cup B)$ o $x \in C$ esto es $x \in (A \cup B) \cup C$.

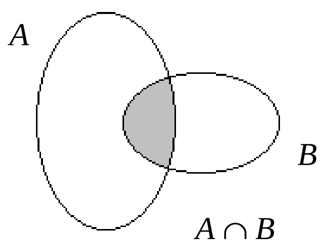
Entonces $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$.

De (a) y (b) se tiene que $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Intersección de conjuntos

<u>Definición</u>: Dados dos conjuntos A y B, se llama *intersección de A y B*, y se indica $A \cap B$, al conjunto cuyos elementos son los elementos comunes a A y a B, es decir los elementos que pertenecen simultáneamente a los dos conjuntos.

$A \cap B = \{ x \in U : x \in A \text{ y } x \in B \}$



De la definición se desprende inmediatamente que $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$.

Ejemplo: Consideremos los siguientes conjuntos: $A = \{ x \in \mathbb{N} : x \leq 4 \} = \{ 1, 2, 3, 4 \}$, y

$B = \{ x \in \mathbb{N}: x$ es divisor de $10 \} = \{ 1, 2, 5, 10 \}$. Entonces $A \cap B = \{ 1, 2 \}$.

Si la intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto vacío, se dice que A y B son *disjuntos*. Por ejemplo, el conjunto A de los números naturales pares y el conjunto B de los números naturales impares son disjuntos, ya que $A \cap B = \emptyset$.

Propiedades de la intersección.

1. *Idempotencia:* $A \cap A = A$.
2. *Conmutativa:* $A \cap B = B \cap A$.
3. *Asociativa:* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

La demostración de estas propiedades es análoga a la que hemos visto para las propiedades de la unión y quedan como ejercicio.

Teorema 1: $A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad A \cup B = B$.

Demostración: Supongamos que $A \subseteq B$. Para probar que $A \cup B = B$, debemos probar que

$B \subseteq A \cup B$ y que $A \cup B \subseteq B$.

La primera inclusión es ya conocida. Para la segunda, sea $x \in A \cup B$, entonces $x \in A$ o $x \in B$. Pero por hipótesis, $A \subseteq B$, luego $x \in B$ o $x \in B$ y por la idempotencia de la disyunción podemos deducir que $x \in B$. Luego $A \cup B \subseteq B$. De lo anterior, $A \cup B = B$.

Para la recíproca, supongamos que $A \cup B = B$. Probemos que $A \subseteq B$.

Sea $x \in A$. Entonces $x \in A \cup B$, y como por hipótesis $A \cup B = B$, se tiene que $x \in B$.

Luego $A \subseteq B$.

En forma análoga se prueba el siguiente

Teorema 2: $A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = A$.

Las siguientes leyes se demuestran aplicando los dos teoremas anteriores.

Leyes de absorción:

1. $A \cup (A \cap B) = A$.

Como $A \cap B \subseteq A$, entonces por el teorema 1 resulta $A \cup (A \cap B) = A$.

2. $A \cap (A \cup B) = A$.

Como $A \subseteq A \cup B$, entonces por el teorema 2 resulta $A \cap (A \cup B) = A$.

Leyes distributivas:

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Demostraremos sólo la primera, dejando la otra como ejercicio.

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Como se trata de probar una igualdad de conjuntos, debemos probar una doble inclusión.

(a) $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Sea $x \in A \cup (B \cap C)$ entonces por definición de unión $x \in A$ ó $x \in B \cap C$ y por definición de intersección $x \in A$ o ($x \in B$ y $x \in C$). Aplicando la propiedad distributiva de la disyunción respecto de la conjunción resulta que: ($x \in A$ o $x \in B$) y ($x \in A$ o $x \in C$). Por definición de unión $x \in A \cup B$ y $x \in A \cup C$. Luego $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Entonces $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(b) $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.

Sea $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ entonces por definición de intersección $x \in (A \cup B)$ y $x \in (A \cup C)$ de donde aplicando la definición de unión resulta que ($x \in A$ o $x \in B$) y ($x \in A$ o $x \in C$).

Aplicando la propiedad distributiva de la conjunción respecto de la disyunción resulta que:

$x \in A$ o ($x \in B$ y $x \in C$). Por lo tanto $x \in A \cup (B \cap C)$.

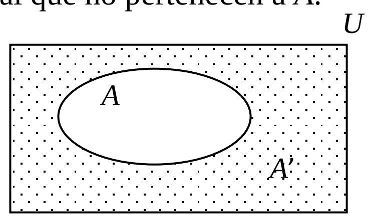
Luego $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.

De (a) y (b) resulta: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Complemento

<u>Definición</u>: Dado el conjunto A, se llama *complemento de A* y lo notamos A', al conjunto formado por todos los elementos del conjunto universal que no pertenecen a A.

$A' = \{ x \in U : x \notin A \}$



Por ejemplo, si U es el conjunto de los números enteros, A el conjunto de los números enteros pares, entonces A' es el conjunto de los números enteros impares.

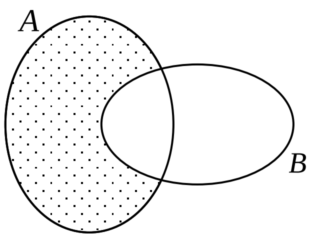
De la definición resulta en forma inmediata que:

1. $(A')' = A$, 2. $A \cup A' = U$, 3. $A \cap A' = \varnothing$, 4. $U' = \varnothing$ y 5. $\varnothing' = U$

Diferencia entre conjuntos

<u>Definición</u>: Dados dos conjuntos A y B, se llama *diferencia entre A y B*, en ese orden, al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B. Se nota $A - B$.

$A - B = \{ x \in U : x \in A \text{ y } x \notin B \}$.



Por ejemplo, si $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ y $B = \{ 2, 4, 6, 8 \}$, entonces:

$A - B = \{ 1, 3 \}$ y $B - A = \{ 6, 8\}$.

Como casos particulares tenemos los siguientes:

- Si $A \subseteq B \Rightarrow A - B = \varnothing$ y $B - A = C_B A$.

- Si $A = B \Rightarrow A - B = \varnothing$ y $B - A = \varnothing$.

- Si $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A - B = A$ y $B - A = B$.

Observación. La siguiente propiedad es muy útil y resulta en forma inmediata de la definición de diferencia: $A - B = A \cap B'$.

Teorema $A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$.

Demostración. Supongamos que $A \subseteq B$ y probemos que $B' \subseteq A'$.

Sea $x \in B'$. Entonces $x \notin B$, y como por hipótesis $A \subseteq B$, entonces $x \notin A$, luego $x \in A'$. Luego $B' \subseteq A'$.

Supongamos ahora que $B' \subseteq A'$ y probemos que $A \subseteq B$.

Sea $x \in A$. Entonces $x \notin A'$, y como por hipótesis $B' \subseteq A'$, entonces $x \notin B'$, es decir $x \in B$. Luego $A \subseteq B$.

Leyes de De Morgan.

1. $(A \cap B)' = (A' \cup B')$
2. $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

Antes de demostrarlas, conviene tener presente que:

- $x \notin A \cup B$ significa que no es cierto que $x \in A \cup B$ esto equivale a decir que no es cierto que, $x \in A$ o $x \in B$. Aplicando la ley de De Morgan para la disyunción resulta que $x \notin A$ y $x \notin B$.
- $x \notin A \cap B$ significa que $x \notin A$ o $x \notin B$ que se prueba de manera análoga a la proposición anterior.

Demostración.

1. Para probar que $(A \cap B)' = A' \cup B'$ debemos probar:

(a) $A' \cup B' \subseteq (A \cap B)'$ y (b) $(A \cap B)' \subseteq A' \cup B'$.

(a) Sea $x \in A' \cup B'$ entonces $x \in A'$ o $x \in B'$. Aplicando la definición de complemento resulta que $x \notin A$ o $x \notin B$ por lo que $x \notin A \cap B$ de donde $x \in (A \cap B)'$.

Luego $A' \cup B' \subseteq (A \cap B)'$.

(b) Sea $x \in (A \cap B)'$ entonces $x \notin A \cap B$ por lo tanto $x \notin A$ o $x \notin B$ es decir $x \in A'$ o $x \in B'$ de donde $x \in A' \cup B'$.

Luego $(A \cap B)' \subseteq A' \cup B'$.

De (a) y (b) se tiene $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

2. Para probar que $(A \cup B)' = A' \cap B'$ debemos probar:

(a) $(A \cup B)' \subseteq A' \cap B'$ y (b) $A' \cap B' \subseteq (A \cup B)'$.

(a) Sea $x \in (A \cup B)'$ entonces $x \notin A \cup B$ por lo que $x \notin A$ y $x \notin B$. Por definición de complemento $x \in A'$ y $x \in B'$ entonces $x \in A' \cap B'$.

Luego $(A \cup B)' \subseteq A' \cap B'$.

(b) Sea $x \in A' \cap B'$ entonces $x \in A'$ y $x \in B'$. Por lo tanto $x \notin A$ y $x \notin B$ entonces $x \notin A \cup B$ por lo que $x \in (A \cup B)'$.

Luego $A' \cap B' \subseteq (A \cup B)'$.

De (a) y (b) se tiene $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

Conjunto de partes de un conjunto

Dado un conjunto *A*, se puede considerar siempre el conjunto formado por los subconjuntos de *A*, el cual recibe el nombre de conjunto de las partes de *A*, y se indica $\mathcal{P}(A)$.

$$\mathcal{P}(A) = \{ X : X \subseteq A \}.$$

Observemos que $\mathcal{P}(A)$ nunca es vacío, pues como $\emptyset \subseteq A$ y $A \subseteq A$ cualquiera sea *A*, éstos son elementos de $\mathcal{P}(A)$, es decir, $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ y $A \in \mathcal{P}(A)$.

Ejemplo: Sea $A = \{a, b, c\}$. Los subconjuntos de *A* son:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\},\{a, c\},\{b, c\},\{a, b, c\}.$$

Entonces $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\},\{a, c\},\{b, c\},\{a, b, c\}\}$.

Observemos que en este ejemplo, el número de elementos de *A* es 3 y el de $\mathcal{P}(A)$ es $8 = 2^3$. Más generalmente, es posible probar que si *A* es un conjunto con *n* elementos, entonces $\mathcal{P}(A)$ es un conjunto con 2^n elementos.

Producto Cartesiano

Dados dos conjuntos *A* y *B*, y objetos cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$, consideraremos *pares ordenados* de primera coordenada *a* y segunda coordenada *b*, que notaremos (a, b). Dos pares ordenados (a, b) y (a', b') son iguales si y sólo si $a = a'$ y $b = b'$, es decir:

$$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a' \wedge b = b'.$$

<u>Definición</u>: *Dados dos conjuntos A y B, llamamos producto cartesiano de A y B, y lo notamos* $A \times B$*, al conjunto formado por todos los pares ordenados* (a, b)*, con* $a \in A$ *y* $b \in B$*. Es decir,*

$$A \times B = \{(a, b): a \in A \text{ y } b \in B \}.$$

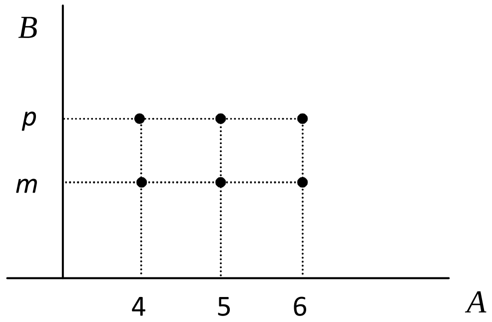
Ejemplo: Si $A = \{4, 5, 6\}$ y B $\{m, p\}$ entonces

$$A \times B = \{(4, m), (4, p), (5, m), (5, p), (6, m), (6, p)\}$$

$$\text{y} \quad B \times A = \{(m, 4), (m, 5), (m, 6), (p, 4), (p, 5), (p, 6)\}.$$

El producto cartesiano de *A* por *B* se suele representar en el plano considerando dos rectas perpendiculares. Los elementos de *A* se representan por puntos sobre la recta horizontal, y los elementos de *B* se representan por puntos sobre la recta vertical.

Cada elemento (a, b) de A x B se representa por el punto del plano que se obtiene como intersección de rectas perpendiculares a los ejes por los puntos que corresponden a a y a b.



Al producto cartesiano A x A se lo nota A^2. Si $A \neq B$, entonces A x $B \neq B$ x A.

Conjuntos finitos – Cardinalidad

<u>Definición</u>: *Un conjunto es* ***finito*** *cuando contiene un número finito de elementos diferentes. En caso contrario el conjunto es* ***infinito****.*

Ejemplos: - El conjunto de los habitantes de un determinado país es finito.

- El conjunto de los números naturales múltiplos de 3 es infinito.

<u>Definición</u>: *Se llama* **cardinal de A** *al número de elementos del conjunto A y lo notamos por* $\#A$ *ó* $|A|$ *ó* $n(A)$.

Teorema: Si A y B son dos conjuntos finitos, se cumple que $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$.

Ejemplo: Sea $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ y $B = \{1, 2, 3, 10, 12, 20\}$. Entonces $\#A = 8$, $\#B = 6$ y $\#(A\cap B) = 3$, por lo tanto $\#(A \cup B) = 8 + 6 - 3 = 11$.

Observaciones.

1. Si A y B son conjuntos finitos, entonces $A \cup B$ y $A \cap B$ también son conjuntos finitos.
2. Si A y B son conjuntos finitos disjuntos, entonces $\#(A \cup B) = \#A + \#B$.

El teorema anterior se puede extender a más de dos conjuntos. La generalización de este resultado se llama **principio de inclusión – exclusión** y es una técnica muy importante utilizada en los problemas de enumeración.

En el caso de tres conjuntos finitos se puede probar que:

Teorema: Si A, B y C son conjuntos finitos, entonces

$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C).$$