Números complejos

La ampliación del conjunto de números reales al conjunto de los números complejos tiene por objetivo obtener un sistema numérico en el cual toda ecuación con coeficientes reales o complejos tenga solución. Este resultado se conoce con el nombre de Teorema Fundamental del Álgebra.

Llamaremos *números complejos*, a los números de la forma $z = a + bi$, donde a y b son números reales e i es la *unidad imaginaria* y es tal que $i^2 = -1$. Los notaremos por C.

Esta forma de escribir a los números complejos se llama *forma binómica*.

Observaciones:

1) Dado un número complejo $z = a + bi$

- Diremos que a es la *parte real de z* y que b es *la parte imaginaria de z*. Escribiremos: $a = \operatorname{Re} z$ y $b = \operatorname{Im} z$.
- Si $b = 0$, entonces z se llama complejo real.
- Si $a = 0 \wedge b \neq 0$, entonces z se llama imaginario puro.

2) El conjunto R de los números reales está incluido en el conjunto C de los números complejos. Basta considerar a los números reales como números complejos con la parte imaginaria nula.

3) Sean $z = a + bi$, $z' = c + di$. Diremos que: $z = z' \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$.

Operaciones definidas en números complejos

Sean $z = a + bi$, $z' = c + di$. En C definiremos las siguientes operaciones:

Suma: $z + z' = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Producto: $z.z' = (a + bi).(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

La forma binómica nos permite aplicar para la suma y el producto de números complejos todas las propiedades de números reales, con sólo tener en cuenta que $i^2 = -1$.

Propiedades

$(S_1)\ (z + u) + w = z + (u + w) \quad ,\forall z, u, w \in C$

$(S_2)\ z + w = w + z \quad ,\forall z, w \in C$

(S_3) Existe un único elemento $0 = 0 + 0i \in C : z + 0 = z, \forall z \in C$

(S_4) Para cada $z = a + bi \in C$, existe un único elemento $-z = -a - bi \in C : z + (-z) = 0$

$(M_1)\ (z.u).w = z.(u.w) \quad ,\forall z,u,w \in C$

$(M_2)\ z.w = w.z \quad ,\forall z,w \in C$

(M_3) Existe un único elemento $1 = 1 + 0i \in C : z.1 = z, \forall z \in C$

(M_4) Para cada $z = a + bi \in C, z \neq 0$, existe un único elemento $z^{-1} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - \dfrac{b}{a^2+b^2} i \in C : z.z^{-1} = 1$

$(D)\ z.(u+w) = z.u + z.w, \forall z,u,w \in C$

Diferencia y cociente de números complejos

Sean $z = a + bi$, $z' = c + di$. Entonces:

Diferencia: $z - z' = (a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i$

Cociente: $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{(a+bi)}{(c+di)} \quad , z' \neq 0$.

Para transformar el divisor complejo en un divisor real se multiplica numerador y denominador por $c - di$ (veremos luego que se llama conjugado de z'), y se obtiene:

$$\frac{z}{z'} = \frac{(a+bi)}{(c+di)} = \frac{(a+bi).(c-di)}{(c+di).(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

Potencias de la unidad imaginaria

¿Qué resultados obtenemos al calcular i^n, $con\ n \in N_0$?

Se puede generalizar que para $n \in N_0$ vale:

$$i^n = i^{4q+r} = i^{4q}.i^r = (i^4)^q.i^r = 1.i^r = i^r$$

Conjugado de un número complejo

Dado el número complejo $z = a + bi$ llamaremos *conjugado de* z al número complejo $\overline{z} = a - bi$.

Propiedades: Sean z y w números complejos

1) $\overline{\overline{z}} = z$
2) $z + \overline{z} = 2\ Re\ z$
3) $z - \overline{z} = 2\ Im\ z\ i$

4) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$
5) $\overline{z.w} = \bar{z}.\bar{w}$

Módulo de un número complejo

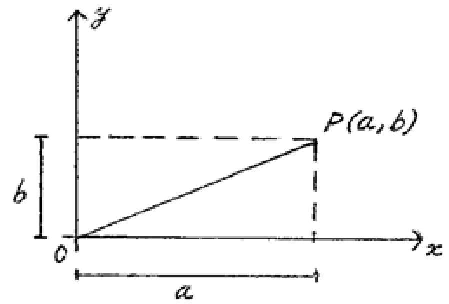
Dado un número complejo $z = a + bi$, llamaremos *módulo de z* al número real, positivo o nulo, $\sqrt{a^2 + b^2}$. Lo notaremos $|z|$.

Propiedades: Sean z y w números complejos

1) $|z| \geq 0$
2) $|z|^2 = z.\bar{z}$
3) $|z| = |\bar{z}| = |-z|$
4) $|z.w| = |z|.|w|$

Representación geométrica de los números complejos

A cada número complejo $z = a + bi$ le corresponde un punto del plano de abscisa a y ordenada b, y recíprocamente, a cada punto del plano $P(a,b)$ le corresponde un único número complejo $z = a + bi$, de *parte real a* y *parte imaginaria b*. El punto P correspondiente al número complejo z se llama *afijo de z*.

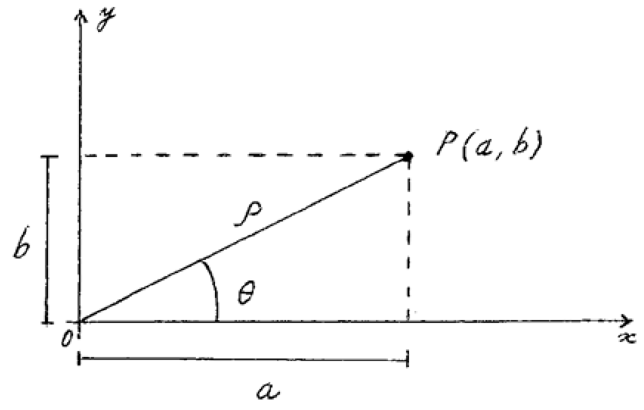


Si z es un complejo real su afijo está sobre el eje de las abscisas, por esta razón se llama eje real. Si z es imaginario puro, entonces su afijo está sobre el eje de las ordenadas, que recibe el nombre de eje imaginario.

Observando la representación geométrica de z y recordando que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, vemos que el módulo de z es la longitud del vector $\overline{OP}$, y lo indicaremos $\rho = |z|$.

Forma polar o trigonométrica de un número complejo

Dado un número complejo $z = a + bi$, $z \neq 0$, llamaremos <u>*argumento principal de z*</u> y lo notaremos $\theta = Argz$, a la medida radial del ángulo formado por el semieje real positivo y el vector posición del afijo de z, tomándose como sentido positivo el sentido antihorario.
El argumento del complejo $z = 0$ no está definido.



Vemos a partir de la gráfica que se verifican las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} a = |z|\cos\theta = \rho\cos\theta \\ b = |z|sen\,\theta = \rho sen\,\theta \end{cases} \; y \begin{cases} |z| = \rho = \sqrt{a^2+b^2} \\ tg\,\theta = \dfrac{b}{a}, a \neq 0 \end{cases}$$

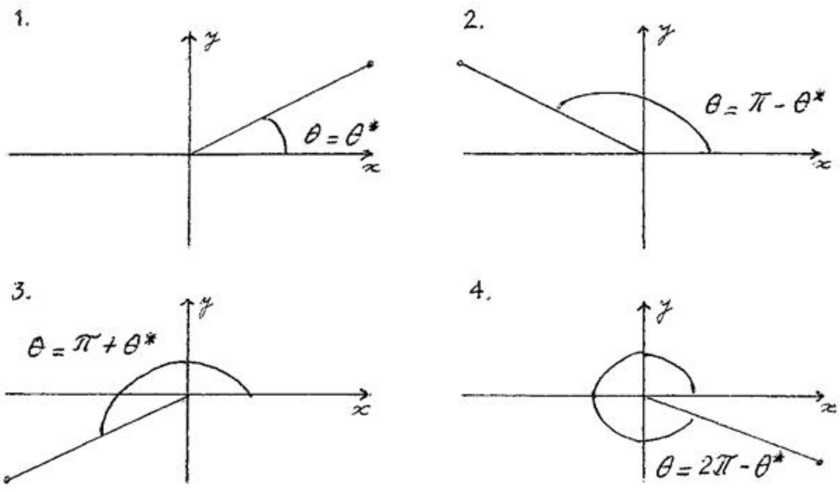
Si $z \neq 0$ se tiene que $z = |z|(\cos\theta + isen\theta) = \rho(\cos\theta + isen\theta)$, denominada la *forma trigonométrica o polar de* z. Abreviaremos escribiendo $z = |z|_\theta = \rho_\theta = |z| ci\,s\theta$.

Observemos que si consideramos $\alpha = \theta + 2k\pi$, $k \in Z$, se tiene por la periodicidad de las funciones seno y coseno, que $z = \rho_\theta = \rho_\alpha$.

Dado $z = \rho_\theta$, $0 \leq \theta < 2\pi$, diremos que α es un argumento de z y notaremos $\alpha = \arg z$ si $\alpha = \theta + 2k\pi = Argz + 2k\pi$, $k \in Z$.

En la práctica para calcular θ, puede ser conveniente determinar primero un ángulo auxiliar θ^* del primer cuadrante, haciendo $\theta^* = arctg\dfrac{|b|}{|a|}$, y para determinar al cuadrante al que pertenece se considera el signo de a y de b.

1. Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces θ pertenece al primer cuadrante y $\theta = \theta^*$
2. Si $a < 0$ y $b > 0$, entonces θ pertenece al segundo cuadrante y $\theta = \pi - \theta^*$
3. Si $a < 0$ y $b < 0$, entonces θ pertenece al tercer cuadrante y $\theta = \pi + \theta^*$
4. Si $a > 0$ y $b < 0$, entonces θ pertenece al cuarto cuadrante y $\theta = 2\pi - \theta^*$



Recíprocamente, si tenemos un complejo en forma polar podemos pasarlo a la forma binómica desarrollando la expresión y calculando los valores correspondientes.

Por ejemplo $z = 4.cis\frac{3}{4}\pi$ en forma binómica es

$$z = 4.\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i sen\frac{3}{4}\pi\right) = 4.\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i$$

Observaciones:

- El número complejo z es real positivo $\Leftrightarrow Argz = 0$
- El número complejo z es real negativo $\Leftrightarrow Argz = \pi$
- El número complejo z es imaginario puro $\Leftrightarrow Argz = \frac{\pi}{2} \vee Argz = \frac{3}{2}\pi$

Operaciones en forma polar

Producto de números complejos en forma polar

Si $z = \rho\, cis\theta$ y $z' = \rho'\, cis\theta'$ entonces $z.z' = (\rho.\rho')\, cis\,(\theta + \theta')$

Cociente de números complejos en forma polar

Si $z = \rho\, cis\theta$ y $z' = \rho'\, cis\theta' \neq 0$, entonces $z : z' = (\rho : \rho')\, cis\,(\theta - \theta')$