Matrices

Definición: Una *matriz* de orden $m \times n$ es un arreglo de números con m filas y n columnas. Los números de dicho arreglo se denominan *elementos* de la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplos:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} -2 & 1/2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$$

Como se puede ver en estos ejemplos, las matrices varían en tamaño u orden. El tamaño u orden de una matriz se describe especificando el número de filas (líneas horizontales) y columnas (líneas verticales) que aparecen en la matriz. En general notaremos el orden de A con ord(A). Luego ord(A) = $m \times n$ y si $m = n$ escribiremos ord(A) = m. La matriz B del ejemplo tiene 3 filas y 2 columnas, por lo tanto su tamaño u orden es de 3 por 2 y se escribe ord(B) = 3×2. El primer número siempre indica el número de filas y el segundo número el número de columnas. Por consiguiente las matrices restantes del ejemplo anterior tienen los siguientes órdenes: ord(C) = 1×4, ord(D) = 3, ord(E) = 3×1 y ord(F) = 1×1.

El número de filas de una matriz puede ser menor, igual o mayor que el número de columnas.

El número a_{ij} es el elemento de la matriz A que está en la fila i y en la columna j.

Usaremos la notación $A = (a_{ij}), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, para designar una matriz de orden $m \times n$.

El conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ con elementos reales se simboliza $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Definiciones:

(1) Si $n = 1$, la matriz tiene una sola columna y se llama *matriz columna*

(2) Si $m = 1$, la matriz tiene una sola fila y se llama *matriz fila*

(3) Si $m = n$, la matriz tiene igual número de filas y columnas y se llama *matriz cuadrada de orden n*

(4) Si A es una matriz cuadrada de orden n, los elementos a_{11}, a_{22}, a_{33}, ... , a_{nn}, determinan la *diagonal principal* de A

(5) Se llama *traza* de una matriz cuadrada A de orden n a la suma de los elementos de la diagonal principal. En símbolos:

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

Definiciones: Una matriz cuadrada de orden n, $A = (a_{ij}), 1 \leq i \leq n$ se dice:

(1) *Triangular Superior* si $a_{ij} = 0$ para $i > j$

(2) *Triangular Inferior* si $a_{ij} = 0$ para $i < j$

(3) *Diagonal* si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$

(4) *Escalar* si es diagonal y $a_{11} = a_{22} = a_{33} = \ldots = a_{nn}$

(5) *Identidad* si $a_{ii} = 1$ para todo i, $1 \leq i \leq n$, y $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Se nota I ó I_n

(6) *Simétrica* si $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $i, j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$

Por ejemplo:

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -4 \\ -3 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

I_4 e I_2 son las matrices identidad de orden 4 y 2 respectivamente

F, H y J son matrices triangular superior

G, H y J son matrices triangular inferior

I_4, I_2, H y J son matrices diagonales

I_4, I_2 y J son matrices escalares

I_4, I_2, H, J y K son matrices simétricas

Observación: Las matrices cuyos elementos son todos iguales a cero se llaman ***matrices nulas*** y se notan por 0. No necesariamente deben ser cuadradas. Por ejemplo, la matriz nula cuadrada de orden 3 y la matriz nula de orden 2×4, serían:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definición: Dos matrices de orden $m \times n$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, son **iguales** si $a_{ij} = b_{ij}$ para todos los valores posibles de los subíndices i y j.

Ejemplo: Sean las matrices $A = (a_{i,j}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $B = (b_{i,j}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ y $C = (c_{i,j}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

Se puede observar que $A \neq B$ ya que $a_{22} \neq b_{22}$, $A \neq C$ pues no tienen el mismo orden y $B \neq C$ por la misma razón.

<u>Definición</u>: La *suma* de dos matrices A y B de orden $m \times n$ es otra matriz de orden $m \times n$ que se obtiene sumando los elementos correspondientes de A y B. En símbolos, si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, entonces:

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

Ejemplo: Sean $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

Entonces $A + B = \begin{bmatrix} -2+6 & 1+3 & 4+0 \\ 2-2 & -3+0 & 5-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}$

$A + B$ y $B + C$ no se pueden realizar pues sus órdenes no coinciden.

Propiedades: Sean A, B, C matrices de orden $m \times n$. Entonces:

(S_1) $(A + B) + C = A + (B + C)$
(S_2) $A + B = B + A$
(S_3) Existe la matriz 0 tal que $0 + A = A + 0 = A$ para toda matriz A
(S_4) Dada $A = (a_{ij})$, existe $B = (-a_{ij})$ tal que $A + B = B + A = 0$

<u>Definición</u>: El *producto de un número real k y la matriz A* es la matriz kA que se obtiene multiplicando por el número k cada uno de los elementos de A. En símbolos,

$$k\,A = k\,(a_{ij}) = (k\,a_{ij})$$

En estos casos es costumbre llamar escalares a los números reales, y la operación anterior se denomina *multiplicación por un escalar*.

Ejemplo: Si $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$, entonces $3A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -15 \\ 6 & -9 & 6 \end{bmatrix}$

Propiedades: Sean A, B matrices de orden $m \times n$ y λ, λ' números reales. Entonces:

(1) $\lambda\,(A + B) = \lambda\,A + \lambda\,B$
(2) $(\lambda + \lambda')\,A = \lambda\,A + \lambda'\,A$
(3) $(\lambda\,\lambda')\,A = \lambda\,(\lambda'\,A)$
(4) $1A = A$

<u>Definición</u>: Sea A una matriz de orden $m \times n$, y sea B una matriz de orden $n \times p$. El *producto* de A y B es la matriz AB de orden $m \times p$ definida por:

$$AB = (c_{ij})$$

donde

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{tj}$$

Observemos que para poder definir AB es necesario que el número de columnas de la primera matriz coincida con el número de filas de la segunda matriz.

El orden del producto está dado por la cantidad de filas de la primera matriz y por la cantidad de columnas de la segunda.

Ejemplos

1) Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ entonces

$$AB = \begin{bmatrix} 1.5+4.0 & 1.(-1)+4.2 & 1.3+4.(-2) \\ -3.5+2.0 & (-3).(-1)+2.2 & (-3).3+2.(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -5 \\ -15 & 7 & -13 \end{bmatrix}$$

Observemos que en este ejemplo no es posible efectuar el producto BA

2) Si $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$ entonces

$$AB = \begin{bmatrix} 3.5+(-2).(-6) & 3.1+(-2).3 \\ 1.5+4.(-6) & 1.1+4.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & -3 \\ -19 & 13 \end{bmatrix} \quad \text{y}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 5.3+1.1 & 5.(-2)+1.4 \\ (-6).3+3.1 & (-6).(-2)+3.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -6 \\ -15 & 24 \end{bmatrix}$$

En este ejemplo, ambos productos AB y BA pueden efectuarse, sin embargo $AB \neq BA$

3) Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Entonces $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $B\,A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

De lo anterior se deduce que:

- El producto de matrices no es, en general, conmutativo
- El producto puede ser nulo sin que ninguno de los factores lo sea

Propiedades: Siempre que el producto pueda efectuarse, se verifican:

(M_1) $A\,(B\,C) = (A\,B)\,C$
(M_2) $A\,(B + C) = A\,B + A\,C$, $(B + C)\,A = B\,A + C\,A$
(M_3) Existe la matriz I tal que $A\,I = I\,A = A$, para toda matriz A de orden n
(M_4) $(\lambda\,A)\,B = A\,(\lambda\,B) = \lambda\,(A\,B)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Definición: Se llama *matriz traspuesta* de la matriz A, y se nota A^t, a la matriz que se obtiene al intercambiar las filas y las columnas de A. Es decir, si $A = (a_{ij})$, entonces $A^t = (b_{ij})$, con $b_{ij} = a_{ij}$.

Observación:

- Si A es de orden $m \times n$ entonces A^t es de orden $n \times m$

- A se dice *simétrica* si y sólo si $A = A^t$

Ejemplo: La matriz traspuesta de la matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & -7 \end{bmatrix}$ es la matriz $A^t = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$

Propiedades:

(1) $(A^t)^t = A$
(2) $(A + B)^t = A^t + B^t$
(3) $(\lambda A)^t = \lambda A^t \quad \lambda \in \mathbb{R}$
(4) $(A B)^t = B^t A^t$, si el producto AB está definido

Definición: Sea $A = (a_{ij})$ de orden $m \times n$. Entonces A se dice *matriz escalonada reducida* si verifica que:

(1) Si la matriz posee alguna o algunas filas que consten exclusivamente de ceros, éstas se encuentran concentradas en la parte inferior de la matriz

(2) Para cada fila de la matriz que no consta exclusivamente de ceros, el primer elemento distinto de cero (leyendo éstos en el orden natural de izquierda a derecha) de tal fila es 1 o un elemento distinto de cero

(3) Para cada dos filas consecutivas que no constan exclusivamente de ceros, el primer elemento distinto de cero de la fila superior se encuentra a la izquierda del primer elemento distinto de cero de la fila a la que precede

(4) Cada columna que contiene un primer elemento distinto de cero de alguna fila, tiene en las posiciones restantes ceros

Si la matriz A satisface las condiciones (1), (2) y (3) pero no la (4), entonces A se dice *matriz escalonada*.

Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad I_n = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

A, C, F, G son matrices escalonadas y B, I_n, D, E son matrices escalonadas reducidas

Dada cualquier matriz A ¿cómo llevarla a la forma escalonada?
Esto se puede realizar mediante las siguientes operaciones elementales.

Operaciones Elementales:

(E_1) Intercambiar dos filas entre sí: $\boldsymbol{f_i \leftrightarrow f_j}$

(E_2) Multiplicar una fila por un escalar no nulo: $\boldsymbol{f_i \leftrightarrow c.f_i}$, $\boldsymbol{c\ cte}$, $\boldsymbol{c \neq 0}$

(E_3) Reemplazar una fila por la suma de ella y un múltiplo escalar de otra fila: $\boldsymbol{f_i \leftrightarrow f_i + c.f_j}$, $\boldsymbol{j \neq i}$

<u>Definición</u>: Dada una matriz A, se llama *matriz equivalente a A* a toda matriz B que se puede obtener a partir de A, realizando en esta operaciones elementales en sus filas.

Teorema: Toda matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ es equivalente a una matriz escalonada.

<u>Definición</u>: Se llama *rango de A* y se nota $Rg(A)$ al número de filas no nulas de una matriz escalonada, equivalente a A.

Observación: Se puede calcular $Rg(A)$ mirando el número de filas no nulas sin que en la matriz escalonada el primer elemento no nulo de la fila sea necesariamente 1, el rango de esta matriz coincide con el de A.

Ejemplos:

a) Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & -7 & 2 \end{bmatrix}$ entonces

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & -7 & 2 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & -7 & 2 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[f_2 \leftarrow f_2 + (-2).f_1]{f_3 \leftrightarrow f_3 + 1.f_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 10 & -4 \\ 0 & -10 & 4 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{f_3 \leftrightarrow f_3 + 1.f_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 10 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $Rg(A) = 2$ porque la matriz equivalente a A en forma escalonada tiene 2 filas no nulas

b) Si $B = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ entonces

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[f_3 \leftrightarrow f_3 + 2.f_1]{f_2 \leftrightarrow f_2 + 3.f_1} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $Rg(B) = 3$

<u>Definición</u>: Si A es una matriz cuadrada de orden n y existe una matriz B tal que $AB = BA = I_n$, donde I_n es la matriz identidad de orden n, entonces A se dice *inversible* y B se llama la *inversa* de A.

Se nota $B = A^{-1}$

Ejemplos:

1) Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, la inversa de A es $B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ pues se verifica que

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = BA \quad \text{luego} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

2) Si $A = I_n$ entonces $A^{-1} = I_n$ pues $AA^{-1} = I_n I_n = I_n = A^{-1}A$

3) La matriz nula 0, no tiene matriz inversa pues $0B = 0 \neq I_n$, para toda matriz B

Teorema: Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible, entonces:

(1) La inversa de A es única

(2) Si $AB = I_n$ entonces $BA = I_n$

Teorema: Si A y B son matrices inversibles del mismo orden entonces:

(1) AB es inversible

(2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(3) $A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \ldots A^{-1}}_{n\ veces}$, $n \in \mathbb{N}$

(4) $\forall\, k \neq 0, kA$ es inversible y $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$

(5) A^{-1} es inversible y $(A^{-1})^{-1} = A$

(6) A^n es inversible y $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$, $n = 0, 1, \ldots$

(7) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

<u>Cálculo de la inversa de una matriz utilizando operaciones elementales</u>

Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$. Aplicándole una cantidad finita de operaciones elementales (de tipo (E_1), (E_2), (E_3)) a sus filas, se puede obtener, si existe, la matriz inversa de A (A^{-1}) de la siguiente manera:

A la derecha de A se escribe la matriz identidad del mismo orden que A. Se le aplican a A las operaciones elementales necesarias, hasta lograr la matriz identidad y al mismo tiempo, se aplican las mismas operaciones a la matriz identidad, quedando ésta transformada en una matriz cuadrada de orden n, que es la inversa de A. Es decir,

$$\begin{array}{ccc} A & \vdots & I \\ \downarrow & \vdots & \downarrow \\ I & \vdots & A^{-1} \end{array}$$

<u>Observación</u>: Si al aplicar las operaciones elementales a la matriz A se obtiene una fila nula, entonces A *no es inversible*.

Ejemplos

a) Si $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ entonces

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xleftrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xleftrightarrow[f_3 \leftrightarrow f_3+(-2).f_2]{f_1 \leftrightarrow \frac{1}{4}.f_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xleftrightarrow{f_3 \leftrightarrow \left(-\frac{1}{5}\right).f_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \end{array}\right] \xleftrightarrow[f_1 \leftrightarrow f_1+(-\frac{1}{2}).f_3]{f_2 \leftrightarrow f_2+(-3).f_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{10} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \end{array}\right]$$

Luego, $A^{-1}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$

Ejercicio: Comprobar que $AA^{-1}=I_3$

b) Si $B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ no existe B^{-1} pues no se puede lograr la matriz identidad

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xleftrightarrow{f_1 \leftrightarrow (\frac{1}{2}).f_1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xleftrightarrow{f_3 \leftrightarrow f_3+(-2).f_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xleftrightarrow{f_3 \leftrightarrow f_3+(-1).f_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

No se puede llegar a la matriz identidad