LÓGICA PROPOSICIONAL

Lógica es la ciencia que se dedica a estudiar la estructura o formas del pensamiento humano para establecer leyes y principios válidos para obtener criterios de verdad.

Se enfoca en analizar si un razonamiento es correcto.

La lógica es un esquema de reglas que permite deducir verdades a partir de otras verdades, a través de lo que llamamos **razonamiento lógico**.

Ejemplo:
Todos los matemáticos usan anteojos.
Todos los que usan anteojos tienen más de 50 años.
Todos los matemáticos tienen más de 50 años.

La Lógica, analizando la estructura de este razonamiento, establece si es válido o no.
Se centra en la relación entre las afirmaciones y no en el contenido de las afirmaciones, en particular.

La lógica se usa:

En matemáticas para demostrar teoremas

En las ciencias de la computación, para lograr que los programas hagan lo que deben hacer.

Ejemplo: Si se pide a un estudiante que desarrolle un programa para que encuentre la trayectoria más corta entre varias ciudades.

La lógica también sirve para aclarar la escritura común

Ejemplo: “Será ilegal que una persona tenga más de tres perros y tres gatos en su propiedad”

Si tengo cinco perros y no tengo gatos, ¿violo la ordenanza?

Proposiciones y valor de verdad

Ejercicio 1: En caso de ser posible, indicar ¿cuáles de las siguientes oraciones son verdaderas y cuáles son falsas?

a) Los únicos enteros positivos que dividen a 5 son 1 y el mismo 5.
b) ¡Ojalá llueva!
c) La Tierra es el único planeta en el universo que tiene vida.
d) Cierren la puerta cuando entran.
e) $x + 2 = 5$
f) Si $x = 8$ entonces $x + 2 = 10$
g) $x > 0 \;\; y \quad x < 1$
h) $\frac{1}{2} > 0 \quad y \quad \frac{1}{2} < 1$

Una ***proposición*** es un enunciado declarativo que puede ser verdadero o falso, pero no ambas cosas a la vez.

Ejercicio 2: De las oraciones del ej. 1, analizar cuáles son proposiciones y cuáles no.

Cuando analizamos si la proposición es verdadera o falsa decimos que estamos analizando su **valor de verdad .**

Las **proposiciones simples** son aquellas que tienen un sujeto y un predicado, en el sentido gramatical.

Las indicaremos con letras minúsculas $p, q, r, s, \ldots$

Ejemplo: p: $8\ es\ un\ número\ par$.
q: $2+2=5$

Cuando analizamos si la proposición es verdadera o falsa decimos que estamos analizando su VALOR DE VERDAD

Valor de verdad de la proposición p: v(p) = V o v(p)=1

Valor de verdad de la proposición q: v(q) = F o v(q)=0

Usando los conectivos lógicos podemos combinar proposiciones simples y así formar **proposiciones compuestas.**

Ejemplo: $8\ es\ un\ número\ par\ y\ 2+2=5$

Hay proposiciones que pareciese que tienen distinto valor de verdad, según el caso.

Ejemplo: $p: Hoy\ es\ lunes$

$q: Hoy\ está\ nublado$

$p: Hoy, 15\ de\ marzo\ del\ 2021, es\ lunes.$

$q: Hoy, 15\ de\ marzo\ del\ 2021, está\ nublado.$

Conectivos lógicos

Los **conectivos lógicos** son las operaciones entre proposiciones.

Conectivo lógico	Símbolo	Se escribe	Se lee
Negación	$\sim$	$\sim p$	no p
Conjunción	$\wedge$	$p \wedge q$	p y q
Disyunción	$\vee$	$p \vee q$	p o q
Implicación o condicional	$\Longrightarrow$	$p \Longrightarrow q$	si p entonces q (1)
Equivalencia o bicondicional	$\Longleftrightarrow$	$p \Longleftrightarrow q$	p si y sólo si q (2)

(1) También se lee: p implica q o si p, q o q si p

(2) También se lee: p equivale a q o p es equivalente a q o p ssi q

Negación ($\sim$)

Negar la proposición p, es obtener su proposición contraria u opuesta, en el sentido de su valor de verdad.

Ejemplo:

$p: 5\ es\ un\ número\ primo$ $\qquad v(p) = V \qquad v(\sim p) = F$

$q: \frac{1}{2}\ es\ un\ número\ natural$ $\qquad v(q) = F \qquad v(\sim q) = V$

p	$\sim p$
V	F
F	V

Conjunción (∧)

Ejemplo:

p: 3 *divide a* 15 $\quad v(p) = V$

q: 6 *divide a* 15 $\quad v(q) = F$

r: 5 *divide a* 15 $\quad v(r) = V$

s: 10 *divide a* 15 $\quad v(s) = F$

Calculemos:

$v(p \wedge r) =$V

$v(p \wedge q) = F$

$v(p \wedge s) = F$

$v(s \wedge q) = V$

$v(p \wedge \sim q) = V$

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Una conjunción de proposiciones es verdadera cuando ambas proposiciones lo son; pero si al menos una de ellas es falsa, entonces toda la conjunción es falsa.

Disyunción (∨)

La unión de proposiciones con la palabra “o” con sentido **no excluyente**

Ejemplo

p: 3 $divide\ a$ 15 $\quad v(p) = V$

q: 6 $divide\ a$ 15 $\quad v(q) = F$

r: 5 $divide\ a$ 15 $\quad v(r) = V$

s: 10 $divide\ a$ 15 $\quad v(s) = F$

Calculemos:

$v(p \vee q) = V$

$v(p \vee r) =$V

$v(p \vee s) = V$

$v(s \vee q) = F$

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Para que la disyunción sea Verdadera **al menos una** de las dos proposiciones debe ser verdadera, aunque sin excluir la posibilidad de que ambas sean verdaderas

Implicación o condicional ($p \Longrightarrow q$)

p se llama *antecedente* $\qquad$ q se llama *consecuente*

Ejemplo:
p: *Llueve*
q: *Voy al cine*

$p \Longrightarrow q$: *llueve y voy al cine*

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Analizar el valor de verdad para $p \Longrightarrow q$:
Si hoy llueve y voy al cine $\quad v(p \Longrightarrow q) =$

Si hoy llueve y no voy al cine $\quad v(p \Longrightarrow q) =$

Si hoy no llueve, puedo ir al cine o no $\quad v(p \Longrightarrow q) =$

Solamente si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, la implicación es falsa.

Observación La proposición "si p entonces q" se puede leer de varias maneras:

Ejemplo:
$p: Llueve$
$q: Voy\ al\ cine$

p implica q	Que llueva implica que vaya al cine
p solo si q	Llueve solo si voy al cine
q si p	Voy al cine, si llueve
Si p, q	Si llueve, voy al cine

Equivalencia o bicondicional ($\Leftrightarrow$)

Es la conjunción de dos condicionales contrarios $(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)$

Ejemplo:
p: *Apruebo el parcial*
q: *la nota es mayor o igual a* 6

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Una equivalencia es verdadera cuando las dos proposiciones tienen el mismo valor de verdad

Ejercicio.

Dadas las proposiciones : $p: 20\ es\ un\ número\ par$ $v(p) = V$

$q: 5\ divide\ a\ 20$ $v(q) = V$

$r: 20\ es\ divisible\ por\ 6$ $v(r) = F$

$s: 20 < 6^2$ $v(s) = V$

Escribir en lenguaje coloquial cada una de las siguientes proposiciones compuestas y analizar el valor de verdad de cada una de ellas

$a)\ \sim p \vee r$ $b) \sim (p \vee r)$ $c)\ \sim (p \wedge r) \Longrightarrow q$ $d)\ (q \wedge r) \vee (s \Longrightarrow \sim q)$

$e)\ (-q \vee s) \Longleftrightarrow (r \Longrightarrow p)$

$a)\ \sim p \vee r$

$\sim p \vee r$: 20 es un número impar o es divisible por 6

Como $v(p) = V$ entonces $v(\sim p) = F$ y además, $v(r) = F$

Por lo tanto, $v(\sim p \vee r) = V$

p: 20 *es un número par*
q: 5 *divide a* 20
r: 20 *es divisible por* 6
s: $20 < 6^2$

$b) \sim(p \vee r)$

$\sim(p \vee r)$: No es cierto que, 20 sea un número par o sea divisible por 6

$v(p \vee r) = V$ pues $v(p) = V$ y $v(r) = F$. Entonces $v\big(\sim(p \vee r)\big) = F$

$c) \underbrace{\sim(p \wedge r)}_{ANTECEDENTE} \Longrightarrow q$

$p: 20\ es\ un\ número\ par$
$q: 5\ divide\ a\ 20$
$r: 20\ es\ divisible\ por\ 6$
$s: 20 < 6^2$

$d)\ (q \wedge r) \vee (s \Longrightarrow \sim q)$

$e)\ (-q \vee s) \Longleftrightarrow (r \Longrightarrow p)$

Tautologías

Son formas proposicionales que toman el valor de verdad Verdadero para cualquier valor de verdad de las proposiciones simples que la componen.

Ejemplo: Analicemos el valor de verdad de:

a) $p \vee \sim p$

p	$\vee$	$\sim p$
V	V	F
F	V	V

$b)\ (p \vee q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim p \wedge \sim q$	$(p \vee q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	V	F	V
F	F	V	V	F	V	V

Contradicciones

Son formas proposicionales que toman valor de verdad Falso sin importar el valor de verdad de las proposiciones simples que la componen.

Ejercicio: Analicemos el valor de verdad de $\sim [(p \land q) \Longrightarrow q]$

p	q	$p \land q$	$(p \land q) \Longrightarrow q$	$\sim [(p \land q) \Longrightarrow q]$

Contingencias

Son las proposiciones compuestas cuya tabla de valores de verdad dan verdaderos y falsos

Ejemplo: analicemos el valor de verdad de la forma proposicional: $(p \wedge q) \vee (p \vee q)$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \vee (p \vee q)$

Implicaciones asociadas

Sea la implicación $p \Longrightarrow q$, que llamaremos *directa*

$q \Longrightarrow p$ Recíproca $\sim p \Longrightarrow \sim q$ Contraria $\sim q \Longrightarrow \sim p$ Contrarrecíproca

Ejercicio: Verificar que la implicación directa y la contrarrecíprocas son equivalentes

$$(p \Longrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Longrightarrow \sim p)$$

p	q	$\sim q$	$\sim p$	$p \Longrightarrow q$	$\sim q \Longrightarrow \sim p$	$(p \Longrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Longrightarrow \sim p)$

Queda como ejercicio demostrar que la implicación recíproca y su contrarrecíproca son equivalentes: $(q \Longrightarrow p) \Leftrightarrow (\sim p \Longrightarrow \sim q)$

Ejercicio: Demostrar que:

a) $(p \Longrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$

p	q	$\sim p$	$p \Longrightarrow q$	$\sim p \vee q$	$(p \Longrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$

b) $\sim (p \Longrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$

p	q	$\sim q$	$p \Longrightarrow q$	$\sim (p \Longrightarrow q)$	$p \wedge \sim q$	$\sim (p \Longrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$

Implicaciones lógicas

Llamamos $c: contradicción$
$t: tautología$

1. Adición: $p \Longrightarrow (p \vee q)$

2. Simplificación: $(p \wedge q) \Longrightarrow p$

3. Modus ponens: $[\,(p \Longrightarrow q) \wedge p] \Longrightarrow q$

4. Modus tollens: $[(p \Longrightarrow q) \wedge\sim q] \Longrightarrow\sim p$

5. Silogismo disyuntivo: $[(p \vee q) \wedge\sim p] \Longrightarrow q$

6. Silogismo hipotético: $[(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow r)] \Longrightarrow (p \Longrightarrow r)$

7. Absurdo: $(p \Longrightarrow \boldsymbol{c}) \Longrightarrow\sim p$

Equivalencias lógicas

1. Doble negación: $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$

2. Leyes conmutativas: $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$$

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$$

3. Leyes de idempotencia: $(p \vee p) \Leftrightarrow p$

$$(p \wedge p) \Leftrightarrow p$$

4. Leyes de De Morgan: $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

$$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$$

5. Leyes asociativas: $\left[(p \vee q) \vee r\right] \Leftrightarrow \left[p \vee (q \vee r)\right]$

$$\left[(p \wedge q) \wedge r\right] \Leftrightarrow \left[p \wedge (q \wedge r)\right]$$

6. Leyes distributivas: $[(p \vee q) \wedge r] \Leftrightarrow [(p \wedge r) \vee (q \wedge r)]$

$[(p \wedge q) \vee r] \Leftrightarrow [(p \vee r) \wedge (q \vee r)]$

7. Leyes de Absorción: $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

8. Leyes de Identidad: $(p \vee \boldsymbol{c}) \Leftrightarrow p$ $\quad (p \wedge \boldsymbol{c}) \Leftrightarrow \boldsymbol{c}$

$(p \vee \boldsymbol{t}) \Leftrightarrow \boldsymbol{t}$ $\quad (p \wedge \boldsymbol{t}) \Leftrightarrow p$

Ejercicio: Demostrar que $[(p \wedge q) \Rightarrow p] \Leftrightarrow \boldsymbol{t}$

$$[(p \wedge q) \Rightarrow p] \underset{(1)}{\Longleftrightarrow} \sim (p \wedge q) \vee p \underset{(2)}{\Longleftrightarrow} (\sim p \vee \sim q) \vee p \underset{(3)}{\Longleftrightarrow} p \vee (\sim p \vee \sim q) \underset{(4)}{\Longleftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow (p \vee \sim p) \vee \sim q \underset{(5)}{\Longleftrightarrow} t \vee \sim q \underset{(6)}{\Longleftrightarrow} t$$

(1) Definición de Implicación

(2) De Morgan

(3) Conmutatividad

(4) Asociatividad

(5) Tautología

(6) Leyes de Identidad

Ejercicio: Si q es una proposición Verdadera, hallar el valor de verdad de:

$$\underbrace{\underbrace{(p \Rightarrow \underset{V}{q})}_{V} \wedge \underbrace{(p \wedge \underbrace{\sim \underset{V}{q}}_{F})}_{F}}_{F}$$

Ejercicio: Sabiendo que $p \Longrightarrow (q \vee\sim s)$ es una proposición falsa, hallar si es posible, el valor de verdad de:

$$(\sim p \wedge s) \Leftrightarrow [r \Longrightarrow (\sim q \vee t)]$$

$$\underbrace{\underset{V}{p} \Longrightarrow \underbrace{(\underset{F}{q} \vee \underbrace{\sim \underset{V}{s}}_{F})}_{F}}_{F}$$

Así, $v(p) = V$, $v(q) = F$, $v(s) = V$

Con estos datos podemos analizar ahora el valor de verdad del bicondicional.

$$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{\sim \underset{V}{p}}_{F} \wedge \underset{V}{s})}_{F} \Leftrightarrow \underbrace{[r \Longrightarrow \underbrace{(\underbrace{\sim \underset{F}{q}}_{V} \vee t)}_{V}]}_{V}}_{F}$$