Cinematica directa e inversa.

Alcala Villagomez Mario
Cinematica de Robots.
Ing. Mecatrónica

22 de octubre de 2019

0.1 Cinemática Directa

El problema cinemático directo consiste en determinar cuál es la posición y orientación del extremo final del robot, con respecto a un sistema de coordenadas que se toma como refrencia, conocidos los valores de las posiciones articulares y los parámetros geomt́ricos de los elementos del robot.

$$x = f(q)$$

En general, un robot de "n" grados de libertad está formado por "n" eslabones unidos por "n" articulaciones, de forma que cada par articulación-eslabón constituyen un grado de libertad. A cada eslabón se le puede asociar un sistema de refrencia solidario a él y, utilizando las transofmaciones homogéneas, es posible representar las rotaciones y traslaciones relativas entre los distintos eslabones que componen el rbot. La matriz de transformación homogénea que representa la posición y orientación relativa entre los distintos sistemas asociados a dos eslabones consecutivos del robot se denomina ${}^{i-1}A_i$. Del mismo modos, la matriz ${}^{0}A_k$, resultante del producto de las matrices ${}^{i-1}A_i$ con i desde 1 hasta k, es la que representa de forma total o parcial la cadena cinemática que forma el robot con respecto al sistema de referencia inercial asociado a la base. Cuando se considera todos los grados de libertad, a la matriz ${}^{0}A_n$ se le denomina T, matriz de transformación que relaciona la posición y orientación del extremo final del robot respecto del sistema fijo situado en la base del mismo. Así, dado un robot de 6 gdl, se tiene que la osición y orientación del eslab
on final vendrá dado por la matriz T:

$$T =^0 A_1 \cdot^1 A_2 \cdot^2 A_3......^n A_n$$

Para describir la relación que existe entre dos sistemas de referencia asociados a eslabones, se utiliza la representación Denavit-Hartenberg (D-H).

0.2 Cinematica Inversa

EL problema cinemático inverso consiste en encontrar los valores que deben adoptar las coordenadas articulares del robot [q=$q_1, q_2, ..., q_n$] para que su extremo se posicione y oriente según una determinada localización espacial.

Al contrario que el problema cinemático directo, el cálculo de la cinamática inversa no es sencilla ya que conssite en la resolución de una serie de ecuaciones fuertemen dependiente de la configuración del robot, además de existir diferentes *n-uplas* [q=q_1, q_2, ..., q_n] que resuelve el problema. En la actualidad existen procedimientos genéricos susceptibles de ser progrmados para la resolución de la cinemática inversa y obtener la *n-upla* de valores articulares que posionen y orienten el extremo final. Sin embargo, el principla inconveniente de estos procedimientos es que son métodos numéricos iterativos, que no siempre garantizan tener la solución en el momento adecuado. De esta manera, a la hora de resolver el problema cinemático inverso es mucho más adecuado encontrar una solución cerrada. Es decir, encontrar una relación matemática explícita de la forma:

$$q_k = f_k(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$$

$$k = 1...n(gradosdelibertad)$$

Para poder conseguir esta relación suele ser habitual emplear geométricos, que consisten en la utilización de las relaciones trigonométricas y la resolución de los tríangulos formados por los elementos y articulaciones del robot. La mayoría de los robots suele tener cadenas cinemáticas relativamente sencillas, y los tres primeros grados de libertad (gdl), que posicionan al robot en el espacio, suelen tener una estructura planar. Esta condición facilita la resolución de la *n-upla*. Además, los tres últimos grados de libertad suelen usarse para la orientación de la herramienta, lo cual permite la resolución desacolada (descoplo cinemático) de la posición del extremo del robot y de la orientación de la herramienta. Como alternativa para reoslver el mismo problema se puede recurrir a manipular directamente las ecuaiciones correspondientes al problema cinemático directo. Es decir, a partir de la relación entre la matriz de transformación y las ecuaciones en función de las coordenadas articulares q=[q_1, q_2, q_3, ..., q_n], es posible despejar las n variables articualaciones q_i en función de las componentes de los vectores **n**, **o**, **a** y **p**:

$$[\begin{matrix} n & o & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}] = [t_ij(q_i,...q_n)]$$

Donde los elementos t_{ij} son funciones de las coordenadas articulares (q_i,...,q_n)$\cdot$ e^t.

La matriz de tranfomación homogénea es una matriz 4 x 4 que transforma un vector de posición expresado en coordenadas homogénas desde un sistema de coordenado a otro. En general se representa:

$$\mathrm{T} = \left[\begin{array}{cc} R_{3x3} & P_{3x1} \\ F_{1x3} & 1x1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \textbf{rotación} & \textbf{traslación} \\ \textbf{perspectiva} & \textbf{escaldo} \end{array} \right.$$

0.3 Metodo Geométrico

El método gemoetrico explota la configuración de un manipulador particular para resolver por medio de relaciones geométricas planas los valores de cada ángulo de articulación. A continuación se presenta una solución geométrica para el robot Mitsubushi RV-M1.

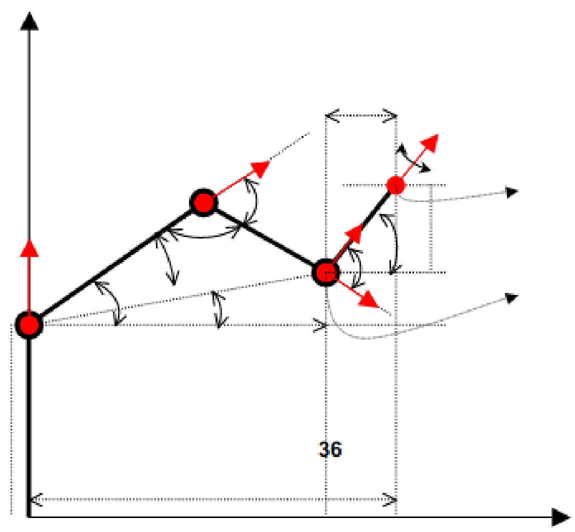

Figure 1: RV-M1

La solución para la articulación de cintura está dad por:

$$\theta_1 = atan2(p_y, p_x)$$

Es posible, dada la configuración cinemática del Mitsubishi RV-M1, simplifacar el conjunto de parámetros requeridos para solucionar las variables siguientes (eliminando las coordenadas sobre el eje "y") llevando la geometría a coincidencia con un solo plano, tal y como se muestra en la la figura anterior (plano xz). Para ellos es necesario aplicar una rotación de $-\theta_1$ alrededor del eje z_0 sobre la matriz de transofrmación homogénea que expresa la posición y orientación del efector final El resultado se utilizaría eentonces para hallar las variables del ángulo siguientes.

$$Tn_5^0 = T_{z_0 - \theta_1} T_5^0$$

Sin embargo, tomaremos la vía convencional.

En primera instancia determinamos el punto coincidente con el origen de la articulación de muñeca.

$$p_m = p - d_3 a$$

Donde, α corresponde al vector unitario de aproximación del efecto extraído de T_5^0, d_5 al largo del efecto final y p al subvector de posición extraído de T_5^0.

La distancia entre el eje de articulación del hombro y el eje de la muñeca (p_m) está dado por,

$$R = \sqrt{p_m^2 + p_m^2 + (p_{m_x}^2 - d_1)^2}$$

Encontrando el ángulo parcial asociado con el hombro,

$$\theta_{2a} = atan2(p_m, \sqrt{p_{m_x}^2 + p_{m_y}^2})$$

y aplicando la ley de cosenos para resolver por $0 \leq \theta_{2b} \leq \pi$ de tal manera que se preserva la geometría

$$\theta_{2b} = |acos(\frac{R^2 + a_2^2 - a_3^2}{2a_2 R})|$$

Entonces,

$$\theta_2 = \{ \begin{array}{lll} \theta_{2b} & -\theta_{2a} & siR \leq (a_2 + a_3) \\ \theta_{2a} & -\theta_{2b} & siR \succ (a_2 + a_3) \end{array}$$

z_0 Nuevamente empleando la ley de cosenos para halar la variable de articulación n úmero tres (θ_3)

$$\theta_3 = -|acos(\frac{R^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2 a_3})|$$

El signo de θ_3 es simepre negativo, debido a la limitación en movimiento del codo en este manipulador.

Estos tres primeros ángulos de arituclación representan la posición de la muñeca en el espacio euclídeo tridimencional. Empleando estos resultados parciales para encontrar la posición y orientación de la muñeca podemos deducir rapidamente los ángulos restantes que otorgan la orientación de la misma.

$$T_3^0 = A_1^0(\theta_1)A_2^1(\theta_2)A_3^2(\theta_3)$$

El vector de aproximación de la mano, α, se extrae directamente de T_5^0 y según la morfología del manipulador se orienta en el sentido del elemento d_5 y es referenciado con respecto del sistema de base del robot. Examinando la geometría del efecto final, de manera más precisa la orientación de los vectores de la mano estraídos de T_5^0, en relación con T_3^0 encontramos que el movimiento de "pitch" está siempre sobre el plano de θ_1.

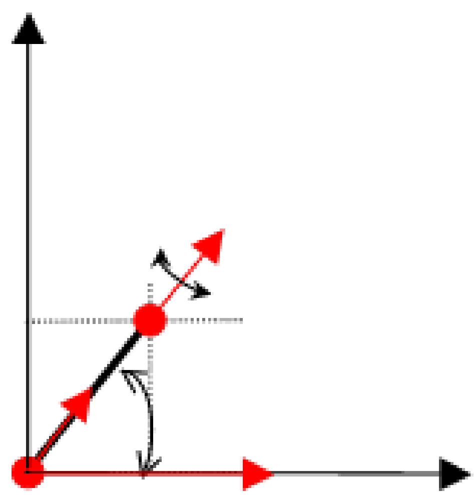

Figure 2: Esquematico 2

Consecuentemene,

$$sen(\theta_4) = a' \cdot w_3$$

$$cos(\theta_4) = a' \cdot u_3$$

$$\theta_4 = atan2(a^T \cdot u_3, a^T \cdot w_3)$$

De igual manera para θ_5, encontramos T_4^0, y evaluamos las proyecciones de T_5^0, sobre el sistema de coordenadas resultante,

$$sen(\theta_5) = n^T \cdot v_4$$

$$cos(\theta_5) = o^T \cdot v_4$$

$$\theta_5 = atan2(n^T \cdot v_4, o^T \cdot v_4)$$

Es de notar que para el caso del ángulo de "roll" se utiliza el vector de deslizamiento/orientación de la uña.

Caracteristicas del Metodo Geométrico

Es un método no sistemático que útiliza las relaciones geométricas para obtener la posición del extremo del robot.

Normalmente se emplea para la obtención de la posición y no de la orientación.

Se usan en robots de pocos grados de libertad.

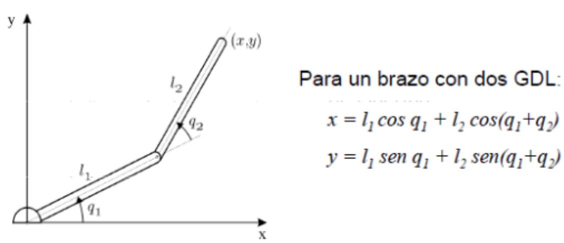

Figure 3: Caracteiristicas del metodo geométrico

0.4 Metodo Algebraico

Como se discutío en la sección anterior sólo en casos especiales pueden los robots manipuladores resolverse de manera cerrada y analítica. Para ello el manipulador debe cumplir alguna de las siguientes condiciones:

Tres ejes de articulación adyacentes intersectantes en un punto y/o muchos α_i iguales a 0 ± 90 grados.

Tres ejes de articulación adyacentes son paralelos entre sí (condición suficiente).

Las siguientes equivalentes trigonometricas son de gran utilidad para simplificar las expreciones matriciales a partir de las condiciones anteriore:

$$sen(a+b) = sen(a)cos(b) + cos(a)sen(b)$$

$$cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sen(a)sen(b)$$

$$sen(a+b+c) = sen(a)cos(b)cos(c)+cos(a)sen(b)cos(c)-sen(a)sen(b)sen(c)+cos(a)cos(b)sen(c)$$

$$cos(a+b+c) = cos(a)cos(b)cos(c)-sen(a)sen(b)cos(c)-sen(a)cos(b)sen(c)-cos(a)sen(b)sen(c)$$

El siguiente método se le atribuye a Paul y consiste en encontrar cada variable de manera secuencial, aisalado cada una mediante la premultiplicación las correspondientes transformadas inversas, como se indica en las ecuaciones (AQUÍ QUEDAMOS). Para el caso de un manipulador de 6 grados de libertad los productos de las transformaciones dadas en las matrices homogénea 4x4, comenzando desde la articulación 6 hasta llegar a la base del robot están dados por; seis ecuaiones matriales se pueden obtener a partir de esta ecuación, pre-multiplicandola sucesivamente por las inversas de las matrices A.

$$(A_1^0)^{-1}T_6^0 = T_0^1$$

$$(A_2^1)-1(A_1^0)^{-1}T_6^0 = T_6^2$$

$$(A_3^2)^{-1}(A_2^1)^{-1}(A_1^0)^{-1}T_6^0 = T_6^3$$

$$(A_4^3)^{-1}(A_3^2)^{-1}(A_2^1)^{-1}(A_1^0)^{-1}T_6^0 = T_6^4$$

$$(A_5^4)^{-1}(A_4^3)^{-1}(A_3^2)^{-1}(A_2^1)^{-1}(A_1^0)^{-1}T_6^0 = T_6^5$$

El procedimineto consiste en revisar los elementos del lado derecho de las ecuaciones, encontrar aquellos que sean cero o constantes, e igualarlos con los elementos respectivos del lado izquierdo de la ecuación.

La matriz homogénea T^0 qie especifican la localización del sistema de coordenadas i-ésimo con respecto al sistema de coordenadas de la base esta dado por;

$$T_i^0 = A_1^0 A_2^1 ... A_i^{i-1} = \prod_{j=1}^{i} A_j^{j-1} = [\begin{matrix} R_j^0 & p_i^0 \\ 0 & 1 \end{matrix}]$$

$i = 1, 2, ..., n$

Donde;

$\mathbf{R}_i^0$: Matriz de orientación del sistema de coordenadas i-ésimo establecido en el elemento i con respecto al sistema de coordenadas de la base. Es la submatriz superior izquierda de 3x3 de T_i^0

$\mathbf{p}_1^0$: Vector de posición que apunta desde el origen del sistema de coordenadas de la base hasta el origen del sistema de coordenada i-ésimo. Es la submatriz superior derecha 3x1 de T_i^0.

0.5 Desacoplo Cinemático

Ahora bien, como es sabido, en general no basta con posicionar el extremo del robot en un punto del espacio, sino que casi siempre es preciso también conseguir que la herramienta que aquel porta se oriente de una manera determinada. Para ello, los robots cuentan con otros tres grados de libertad de una manera determinada. Para ello, los robots cuentan con otros tres grados de libertad, situados al final de la cadena cinemática y cuyos ejes, generalmente, se cortan en un punto, que infomralmente se denomina muñeca del robot.

Si bien la variación de estos tres ultimos grados de libertad origina un cambio en la posición final del extremo real del robot, su verdadero obejtivo es poder orientar la herramienta del robot libremente en el espacio.

El método de desacoplo cinemático saca de este hecho, separando ambos problemas; Posición y Orientación. Para ello, dada una posición y orientación final deseada, establece las coordenadas del punto de corte de los 3 ultimos ejes (muñeca del robot) calculándo los valores de las tres primeras variables articulares q_1, q_2, q_3 que consiguen este punto.(ver figure 4)

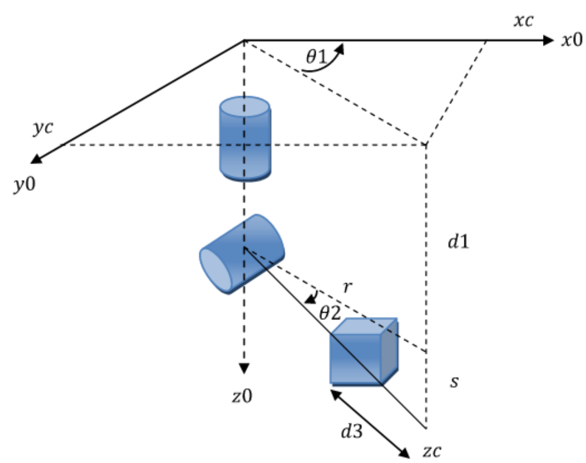

Figure 4: Cinemática Inversa

La primera variables articular se calcula de la sigueinte manera:

$$\theta_1 = atan2(x_c, y_c)$$

Siempre y cuando x_c, y_c ambas no sean cero.
De la figura 4, el ángulo θ_2 se calcula de la siguente manera:

$$\theta_2 = atan2(r, s) + \frac{n}{2}$$

Donde:

$$r^2 = x_c^2 + y_c^2, s = z_c - d_1$$

La distancia lineal d_3 se calcula como sigue:

$$d_3 = \sqrt{r^2 + s^2} = \sqrt{x_c^2 + y_c^2 + (z_c^2 - d_1)}$$

En cuanto a la cinemática inversa de orientación, las últimas dos variables articulares θ_4, θ_5 se calculan utilizando los ángulos de Euler. Dada una matriz R denotando la orientación deseada del marco del efector final respecto del marco inercia y la amtriz de rotación R_0^3 es posible encontrar θ_4 y θ_5, como a continuación se muestra.

Matriz R_0^3

$$R_0^3 = [\begin{matrix} cos\theta_1 cos\theta_2 & -cos\theta_1 sin\theta_2 & -sin\theta_1 & -(cos\theta_1 sin\theta_2)d_3 \\ sin\theta_1 cos\theta_2 & -sin\theta_1 sin\theta_2 & cos\theta_1 & -(sin\theta_1 sin\theta_2)d_3 \\ -sin\theta_2 & -cos\theta_2 & 0 & -(cos\theta_2)d_3 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}]$$

Matriz R_3^5

$$R_3^5 = [\begin{matrix} cos\theta_4 cos\theta_5 & -cos\theta_4 sin\theta_5 & -sin\theta_4 \\ sin\theta_4 cos\theta_5 & -sin\theta_4 sin\theta_5 & cos\theta_4 \\ -sin\theta_5 & cos\theta_5 & 0 \end{matrix}]$$

Y la solución de Euler se puede aplicar en la siguiente ecuación:

$$R_3^5 = (R_0^3)^T R$$

$$-S_4 = C_1 2 r_1 3 + S_1 C_2 r_2 3 - S_2 r_3 3$$

$$C_4 = -C_1 S_2 r_1 3 - S_1 2 r_2 3 - C_2 r_3 3$$

$$\theta_4 = atan2(-S_4)$$

$$\theta_5 = atan2(C_4)$$