Figure 1:

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA
DE LA ZONA METROPOLITANA DE GUADALAJARA

UNIVERSIDAD POLITECNICA METROPOLITANA DE GUADALAJARA

Par de Rotación y Cuaternios

Cinematica de Robots

Nadia Sarahi Murguía Chávez

Ing. Mecatrónica 7A

17 de septiembre de 2019

0.1 Par de Rotación

Definición:

La representación de la orientación de un sistema OUVW (es decir, la representación espacial del robot con respecto al plano), con respecto al sistema de referencia OXYZ (es decir, los ejes del plano con respecto al origen) tambien puede realizarse mediante la definición de un vector y un ángulo:

$$k = [k_x k_y k_z]$$

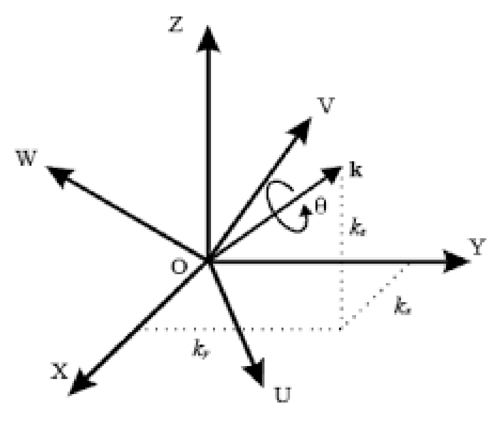

Figure 2: Sistema OUVW en un sistema OXYZ

tal que el sistema OUVW corresponde al sistema OXYZ girando un ángulo θ sobre el eje k. El eje k ha de pasar por el origen O de ambos sistemas. Al par (k, θ) se le denomina par de rotacion y es único.

$$Rot(k, \theta)p = pcos\theta - (kxp)sin\theta + (k \bullet p)(1 - cos\theta)$$

0.2 Cuaternios

Sea **C** el conjunto de números complejos tal que:

$$C = [a + b/a, b \in \Re]$$

El conjunto **R**, **C**, **Q** forma un *campo*

Definicion:
Un campo **F** consiste de un conjunto con dos operaciones (suma y producto) en el que se demuestran las propiedades de cerradura, conmutatividad, neutro, asociatividad, inverso y distributividad.

Definicion:
Los cuaternios se definen como el conjunto de números de la forma:

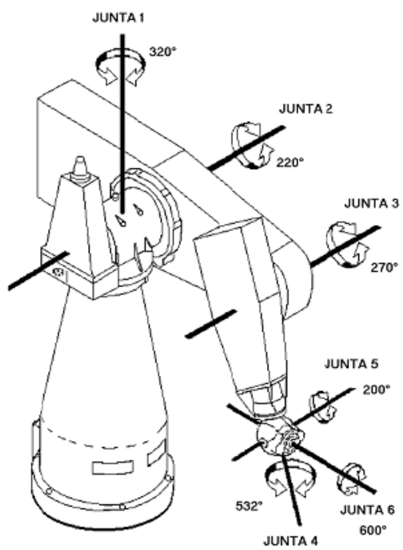

Figure 3: Los cuaternios y su aplicacion en robotica

$$H = [a + b\mathbf{I} + c\mathbf{J} + d\mathbf{K}/a, b, c, d \in \Re]$$

$$\mathbf{I}^2 = \mathbf{J}^2 = \mathbf{K}^2 = \mathbf{IJK} = -1$$

Sí
I=

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

J=

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

K=

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

Se define el cuartenio: $h \in \boldsymbol{H}/h =$

$$\begin{pmatrix} a+di & b+ci \\ -b+ci & a-di \end{pmatrix}$$

Este conjunto de cuaternios cumple todas las propiedades de un campo excepto al conmutatividad.
Por lo tanto recibe en nombre de ***anillo***

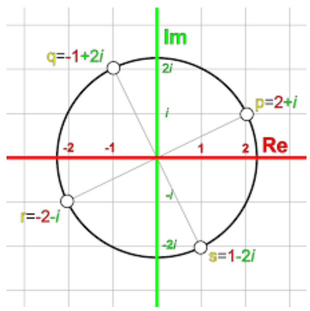

Figure 4: Anillo

Propiedades:

$$||h||_2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

$$\bar{h} = a - b\mathbf{I} - c\mathbf{J} - d\mathbf{K}$$

$$h\bar{h} = \bar{h}h$$

$$h^{-1} = \frac{\bar{h}}{\| h \|}$$

En robótica, los cuaternios se utilizan para la locación espacial de un cuerpo sólido aunque con un ligero cambio de notación:

$$\mathrm{Q} = q_0 q_1 q_2 q_3 / q_0 \mathbf{e} + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k} = \mathbf{Q}(s, \mathbf{v})$$

s: representa la parte escalar

v: representa la parte vectorial

0.2.1 Operaciones Algebraicas

Ley de composición interna

o	**e**	**i**	**j**	**k**
e	e	i	j	k
i	j	-e	k	-j
j	j	-k	-e	i
k	k	J	-i	-e

Producto de cuaternios

$$Q_3 = Q_1 \circ Q_2 = (s_1, \mathbf{v}_1) \circ (s_2, \mathbf{v}_2) = (s_1 s_2 - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 + s_1 \mathbf{v}_2 + s_2 \mathbf{v}_1)$$

NO es conmutativo

Suma de cuaternios

$$Q_3 = Q_1 + Q_2 = (s_1, \mathbf{v}_1) + (s_2, \mathbf{v}_2) = (s_1 + s_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$$

Producto escalar

$$Q_3 = \mathbf{a} Q_2 = \mathbf{a}(s_2, \mathbf{v}_2) = (\mathbf{a} s_2, \mathbf{a}\mathbf{v}_2)$$

Norma e Inverso

$$Q \circ Q^* = (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)\mathbf{e} \Longrightarrow NumeroReal$$

Norma:

$$\parallel Q \parallel = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

Inverso:

$$Q^{-1} = \frac{Q^*}{\parallel Q \parallel}$$

0.2.2 Utilización de los cuaternios

Giro θ sobre un eje k

$$Q = Rot(\mathbf{k},\theta) = (cos\frac{\theta}{2}, \mathbf{k}sin\frac{\theta}{2})$$

De esta asociación arbitraria y gracias a las propiedades de los cuaternios, se obtiene una importante herramienta analítica para el tratamiento de giros y cambios de orientación.

Rotación del cuaternio Q a un vector r

$$Q \circ (0, \mathbf{r}) \circ Q$$

Composicion de rotaciones

$$Q_3 = Q_1 \circ Q_2$$

El resultado de rotar según el cuaternio Q_1,para posteriormente rotar según Q_2, es el mismo que el de rotar según Q_3. Es importante tener en cuenta que el producto de cuaternios no es conmutativo.

$$Q_1 \circ Q_2 \neq Q_2 \circ Q_1$$

Rotación y Traslación

El resultado de aplicar una traslación **p** al vector **r** seguida de una rotación **Q** al sistema OXYZ, es un nuevo sistema OUVW, tal que las coordenadas de un vector **r** en el sistema OXYZ, conocidas en OUVW serán:

$$(0, \mathbf{r}_X YZ) = \mathbf{Q} \circ (0, \mathbf{r}_U VW) \circ \mathbf{Q}^* + (0, \mathbf{p})$$

Si se mantiene el sistema OXYZ fijo y se traslada el vector **r** según **p** y luego se le rota según **Q** se obtendrá el vector **r'** de coordenadas:

$$(0, \mathbf{r'} = \mathbf{Q} \circ (0, \mathbf{r}+\mathbf{p}) \circ \mathbf{Q}^*$$

Bibliography

[1] ROBOTICA Manipuladores y robots moviles, Ollero Baturone Aníbal *Robótica Manipuladores y robots móviles*, primera edición, marcombo, Barcelona (Espaa) 2001,

[2] Herramientas Matematicas para la localizacion espacial *Cecilia Garcia*, M.H, segunda edición, Chile 2009