Descripción de la conveción de Denavit-Hartenberg

Cinematica de Robots
Nadia Sarahi Murguía Chávez
Ing. Mecatrónica 7A

0.1 Convención de Denavit-Hartenberg

En el estudio de la robótica, exite un algoritmo, llamado algoritmo de Denavit-Hartenberg, que nos ayuda a establecer los sitemas de referencia para cada uno de los eslabones con los que cuenta el robot.
Se trata de un procedimiento sistemático para describir la estructura cinemática de una cadena articulada constituida por articulaciones con un solo grado de libertad.
Para ello, a cada articulación se le asigna un **Sistema de Referencia Local** con origen en un punto **Q** y ejes ortonormales [**X, Y, Z**], comenzando con un primer SR (Sistema de Referencia) fijo e inmovil dado por los ejes:

$$[\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0, \mathbf{Z}_0]$$

Anclado a un punto fijo **Q** de la **Base** sobre la que está montada toda la estructura de la cadena.
Este sistema de refrencia no tiene por que ser el UNiversal con origen en **(0, 0, 0)** y la base canónica.

0.1.1 Asignación de Sistemas de Referencia

Las articulaciones se numeran desde **1** hasta **n**. A la articulacion **i**-ésima se le asocia su propuo eje de rotación con eje:

$$\mathbf{Z}_i - 1$$

De forma que el eje de giro de la 1ra articulación es:

$$\mathbf{Z}_0$$

y en la la **n**- ésima articulación:

$$\mathbf{Z}_n - 1$$

En la figura 1 se muestra la estructura del robot PUMA junto con sus articulaciones y ejes de rotación. Para la articulación **i**-ésima (que es la que gira alrededor de **Z**), la elección del origen de coordenadas **Q** y del eje **X** sigue reglas muy precisas en función de la geometría de los brazos articulados. El eje **Y** por su parte, se escoge para que el sistema**X, Y, Z** se dextrógiro[1].

[1]

La especificación de cada eje **X** depende de la relación espacial entre **Z** y textbfZ, dsitinguiéndose 2 cosaso:

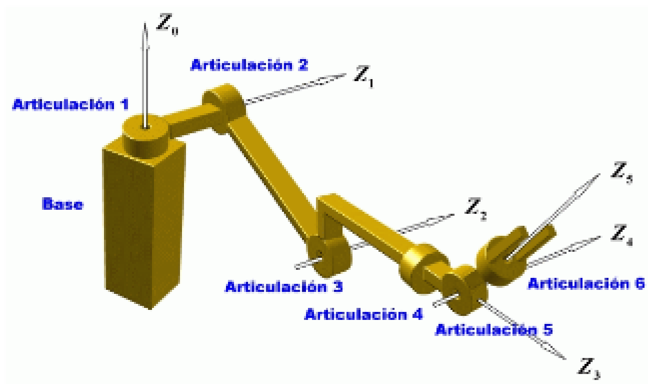

Figure 1: Robot PUMA

Z y Z no son paralelos

Entonces existe una única recta perpendicular a ambos, cuya intersección con los ejes proporciona su mínima distancia (que puede ser 0). Esta distancia, **a**, medida desde el eje **Z** hacia el eje **Z** (con su signo), es uno de los parámetros asociados a la articulación **i**-ésima. La distancia **d** desde **Q** a la intersección de la perpendicular común entre **Q** a la intersección de la perpedicular común entre **Z** y **Z** con **Z** es el 2do de los parámetros. En la figura 2, podemos denotar que el eje **X** es una recta, siendo el sentido positivo el que va desde el eje **Z** al **Z** si **a¿0**. El origen de coordenadas **Q** es la intesección de dicha recta con ele **Z**.

Z y z son paralelos

En esta situación el eje **X** se toma en el plano conteniendo a **Z** y **Z** y perpendicular a ambos. El origen **Q** es cualquiera punto conveniente del eje **Z**. El parámetro **a** es, como antes, la distancia perpendicular entre los ejes **Z** y **Z** y **d** es la distancia desde **Q**. Una vez determinado el eje **X**, a la articulación **i**-ésima se le asocia un 3er parámetro fijo **a** que es el ángulo que forman los ejes **Z** y **Z** en relaciónal eje **X**.
Nótese en la figura 3, que cuando el brazo **i**-ésimo (que une rigidamente las

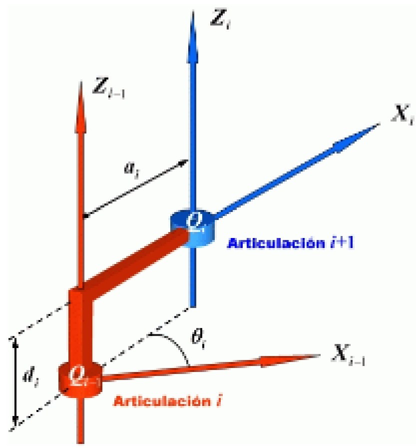

Figure 2: Planos

articulaciones **i** e **i+1**) gira en torno al eje **Z** (que es el de rotación de la articulación **i**), los parámetros **a**, **d** y **a** permamnecen cosntantes, pues depende exclusivamente de las posiciones/orientaciones relativas entre los ejes **Z** y **Z**, que son invariables. Por tanto, **a**, **d** y **a** pueden calcularse a partir de cualquier configuración de la esturctura articulada, en particular a partir de una configuración inicial estándar. Precisamente el ángulo θ, de giro que forman los ejes **X** y **X** con respecto al eje **Z** es el 4to parámetro asociado a la articulación **i** y el unico de ellos que varia cuando el brazo **i** gira. Es importente observar que le conjunto de los 4 parámetros **a**, **d**, **a** y θ determina totalmente el Sistema de Referencia de la articulación **i+1** en funci ón del S.R de la articulación **i**.

0.2 Transformación de coordenadas

De los 4 parámetros aosciados a una articulación, los 3 primeros son constantes y depende exclusivamente de la relación geometr
iaca entre las articulaciones **i** e **i+1**, mientras que el 4to parámetro θ es la única variable de la articulación, siendo el ángulo de giro del eje **X** alrededor del eje **Z** para llevarlo hasta **X**. Sabemos que dados 2 Sistemas de Referencia

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{Q}_1,[\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3]$$

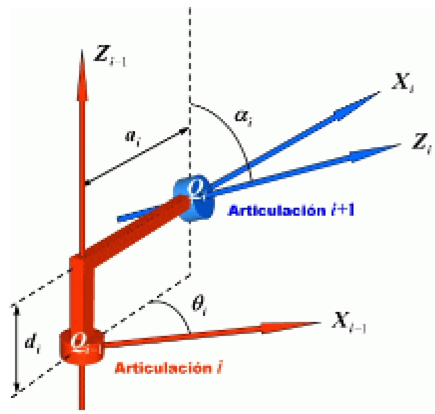

Figure 3: Coordenadas

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{Q}_2 . [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$$

con bases ortonormales asociadas, el cambio de coordenadas del segundo S.R al primero viene dado por:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & \lambda_1 \\ & R & & \lambda_2 \\ & & & \lambda_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Figure 4: matriz

donde:

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3$$

son las coordenadas de un punto en el S.R

$$R_2, R$$

es la matriz del Cmabio de Base tal que:

$$[\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_3] = [\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_3] \cdot \mathbf{R}$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$$

son las coordenadas del origen del segundo S.R., **Q** respecto al primero. La expresión permite entonces obtener las coordenadas:

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$$

del punto en cuestión con respecto al primero de los S.R. En nuestro caso, para pasar de la **(i+1)**-ésima articulación a la **i**-ésima, los Sistemas de Referencia son:

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{Q}_i - 1, [\mathbf{X}_i - 1, \mathbf{Y}_i - 1, \mathbf{Z}_i - 1]$$
$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{Q}_i, [\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i.\mathbf{Z}_1]$$

Estudiaremos por separado la matriz del Cambio de Base y la expresión de **Q** en el pierm S.R.

0.2.1 Matriz del Cambio de Base

Haciendo asignado los ejes a cada articulación mediante la representación Denavit-Hartenberg, tenemos que:

1- El eje **X** se obtiene rotando eleje **X** alrededor del eje **Z** un ángulo θ.

2-El eje **Z** se obtiene rotando el eje **Z** arededor del eje **X** un ángulo α.

Por su parte, el eje **Y** viene ya determinado por **X** y **Z**.

La primera transformación es una rotación alredeor del 3er vector de la 1ra Base, cuyas ecuaciones genéricas son:

$$[u_1^{(1)}|u_2^{(1)}|u_3^{(1)} = [u_1|u_2|u_3]R_3(\theta_1)$$

La segunda transofmración es una rotación alrededor del 1er vector de la base ya transformada y tiene por expresión:

$$[u_1^{(2)}|u_2^{(2)}|u_3^{(2)}] = [u_1^{(1)}|u_2^{(1)}|u_3^{(1)}]R_1(\alpha_i)$$

Por tanto, concatenándolas:

$$[u_1^{(2)}|u_2^{(2)}|u_3^{(2)}] = [u_1|u_2|u_3]R_3(\theta_i)R_1(\alpha_i)$$

Finalmente, cambiamos la notación para tener:

$$[X_i|Y_i|Z_i] = [X_{i-1}|Y_{i-1}|Z_{i-1}]R_3(\theta_i)R_1(\alpha_i)$$

Con lo cual, la matriz del cambio de base es:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_3(\theta_i)\boldsymbol{R}_1(\alpha_i) = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\operatorname{sen}\theta_i & 0 \\ \operatorname{sen}\theta_i & \cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\operatorname{sen}\alpha_i \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix}$$

Figure 5: Matriz 2

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\operatorname{sen}\theta_i\cos\alpha_i & \operatorname{sen}\theta_i\operatorname{sen}\alpha_i \\ \operatorname{sen}\theta_i & \cos\theta_i\cos\alpha_i & -\cos\theta_i\operatorname{sen}\alpha_i \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix}$$

Figure 6: Matriz 2.1

Coordenadas de Q en el primer S.R

Según la representación de Denavit-Hartenberg el origen del 2do Sistema de Referencia se obtiene mediante:

1- Traslación de **Q** a lo largo del eje **Z** por la magnitud **d**.

2- Traslación a lo largo del eje **X** por la magnitud α

La pirmera transformación es:

$$Q_{i-1}^{(1)} = Q_{i-1} + d_i Z_{i-1}$$

La segunda transformaciión es:

$$Q_i = Q_{i-1}^{(1)} + \alpha_i X_i$$

Teniendo ahora en cuenta que:

$$\left[X_i \mid Y_i \mid Z_i\right] = \left[X_{i-1} \mid Y_{i-1} \mid Z_{i-1}\right] \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\operatorname{sen}\theta_i \cos\alpha_i & \operatorname{sen}\theta_i \operatorname{sen}\alpha_i \\ \operatorname{sen}\theta_i & \cos\theta_i \cos\alpha_i & -\cos\theta_i \operatorname{sen}\alpha_i \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix}$$

Figure 7:

Se tiene el 1er vector como:

$$X_i = \left[X_{i-1} \mid Y_{i-1} \mid Z_{i-1}\right] \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_i \\ \operatorname{sen}\theta_i \\ 0 \end{bmatrix} = \cos\theta_i \cdot X_{i-1} + \operatorname{sen}\theta_i \cdot Y_{i-1}$$

Figure 8:

de donde:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\operatorname{sen}\theta_i \cos\alpha_i & \operatorname{sen}\theta_i \operatorname{sen}\alpha_i \\ \operatorname{sen}\theta_i & \cos\theta_i \cos\alpha_i & -\cos\theta_i \operatorname{sen}\alpha_i \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_i \cos\theta_i \\ a_i \operatorname{sen}\theta_i \\ d_i \end{bmatrix}$$

Figure 9:

$$Q_i = Q_{i-1}^{(1)} + \alpha_i X_i = Q_{i-1} + d_i Zi - 1 + \alpha_i(cos\theta_i \cdot X_{i-1} + sen\theta_1 \cdot Y_{i-1})$$

$$Q_i = Q_{i-1} + (\alpha_i cos\theta_i)X_{i-1} + (\alpha_i sen\theta_i)Y_{i-1} + d_i Z_{i-1}$$

y por tanto, las coordenadas de ,**Q** es el 1er Sistema de Referencia son:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i \cos\theta_i \\ a_i \operatorname{sen}\theta_i \\ d_i \end{bmatrix}$$

Figure 10:

Finalmente, la transformación de coordenadas del S.R. **Q,** [**X, Y, Z**] al S.R. **Q,** [**X, Y, Z**] es:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\operatorname{sen}\theta_i \cos\alpha_i & \operatorname{sen}\theta_i \operatorname{sen}\alpha_i \\ \operatorname{sen}\theta_i & \cos\theta_i \cos\alpha_i & -\cos\theta_i \operatorname{sen}\alpha_i \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_i \cos\theta_i \\ a_i \operatorname{sen}\theta_i \\ d_i \end{bmatrix}$$

Figure 11:

Cambiando la notación para las coordenadas:

$$\begin{bmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \\ z_{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\operatorname{sen}\theta_i \cos\alpha_i & \operatorname{sen}\theta_i \operatorname{sen}\alpha_i \\ \operatorname{sen}\theta_i & \cos\theta_i \cos\alpha_i & -\cos\theta_i \operatorname{sen}\alpha_i \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_i \cos\theta_i \\ a_i \operatorname{sen}\theta_i \\ d_i \end{bmatrix}$$

Figure 12:

Donde el subindice denota el Sistema de Referencia respecto al cual están expresadas las coordenadas.

En coordenadas homogéneas:

$$\begin{bmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \\ z_{i-1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\mathrm{sen}\theta_i \cos\alpha_i & \mathrm{sen}\theta_i \mathrm{sen}\alpha_i & a_i \cos\theta_i \\ \mathrm{sen}\theta_i & \cos\theta_i \cos\alpha_i & -\cos\theta_i \mathrm{sen}\alpha_i & a_i \mathrm{sen}\theta_i \\ 0 & \mathrm{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Figure 13:

Bibliography

[1] **Barrientos A.; Pein L. F.; Balaguer C.**& **Aracil R.** Fundamentos de Robotica 2 Ed. McGraw-Hill, 2007

[2] **FU, K. S.; Gónzalez, R. C.** & **Lee, C. S. G.** Robotica: control, deteccion, vision e inteligencia mcgraw-hill, 1998