Explicacion del Operador Jacobiano.

Nadia Sarahi Murguia Chavez
Cinematica de Robots
Ing. Mecatronica 7 A

15 de octubre de 2019

0.1 Jacobiano

En cálculo vectorial, se llama **jacobiano** o **determinante jacobiano** al determinar de la **matriz jacobiana**. Tanto la matriz jacobiana como el determinante jacobiano reciben su nombre en honor al matemático Carl Gustav Jacobi.
En geometría algebraica, el **jacobiano** de una curva hace referencia a la variedad jacobiana, un grupo y variedad algebraica asociada a la curva, donde puede ser embebida.
La **matriz jacobiana** es una matriz formada por las derivadas parciales de primer orden de una función. Una de las aplicaciones más interesantes de esta matriz es la posibilidad de aproximar linealmente a la función en un punto. En este sentido, el jacobiano representa la derivada de una función multivariable.
Propiamente deberíamos hablar más que de matriz jacobiana, de **diferencial jacobiana** o **aplicación lineal jacobiana** ya que la forma de la amtriz dependera de la base o coordenadas elegidas. Es decir, dadas dos bases diferenciales la aplicación lineal jacobiana tendrá componentes diferenciales aún tratándose del mismo objeto matemático. La propiedad básica de la "matriz" jacobiana es la siguienes, dada una aplicación cualquiera **F:** $\mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$ continua, es decir:

$$\mathbf{F} \in \mathbf{C}^{(k)}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$$

Se dira que es diferencial si exite una aplicación lineal $\curlywedge \in \boldsymbol{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ tal que:

$$\lim_{||x-y|| \to 0} \frac{||\mathbf{F(x)} - \mathbf{F(y)} - \curlywedge(\mathbf{x} - \mathbf{y})||}{||\mathbf{x} - \mathbf{y}||} = 0$$

0.2 Matriz Jacobiana de un campo vectorial

Como último caso particular de la noción diferencial, suponemos ahora que el espacio normao de partida es $\mathbb{R}^N$ con N $\succ$ 1, y el de llegada es $\mathbb{R}^M$, tambien con M $\succ$ 1. Estudiando por tanto la diferenciabilidad de una función definida en uun abierto de $\mathbb{R}^N$ y con valores de N y M tenemos campos vectoriales muy variopintos, siendo lógicamente N=M=2 Y N=M=3, los casos más interesantes. Usando las bases usuales de $\mathbb{R}^N$ y $\mathbb{R}^M$, la diferencial de nuestra función en un punto, cuando existe, viene representada por una matriz M x N con coeficientes reales que será la *matriz jacobiana*. Sus filas son los gradientes de M campos escalares en $\mathbb{R}^N$, las M componentes de nuestro campo vectorial.

A la composición de aplicaciones lineales corresponde entonces el producto de matrices, con lo que obtenemos una *regla de la cadena para las derivadas parciales*. Como aplicación geométria que merece destacarse, cuando N =2 y M=3 estudiamos el plano tangente a una *superficie parametrica* en $\mathbb{R}^3$, generalizando lo que ya sabemos para superficies explícitas.

0.2.1 Matriz de una aplicación lineal

Toda aplicación lineal T $\in$ L ($\mathbb{R}^N$, $\mathbb{R}^M$) admite una expresión matricial que vamos a recordar. Denotamos por $\mathcal{M}_{MxN}$ al conjunto de todas la matrices M x N (M filas y N colummnas) con coeficientes reales, cuya estructura algebraica suponemos bien conocida. Para casa x $\in\mathbb{R}^N$, sus coordenadas x_1, x_2, ..., x_N en la base usual de $\mathbb{R}^N$ forman una matriz colummna que también denotamos por x, por lo que escribimos x $\in\mathcal{M}_{NX1}$. Análogamente, el vector y =T(x) $\in\mathbb{R}^M$ tiene sus coordenadas y_1, y_2, ..., y_M en la base usual de $\mathbb{R}^M$, que forma la matriz columna y=T(x)como producto de matrices: y= **A**.x

De hecho, si escribimos A=(α_{kj}) para indicar los coeficientes de la matriz A, se tiene.

$$\alpha_{kj} = (\pi_k \circ T)(e_j) \forall \mathbf{k} \in \boldsymbol{I}_M, \forall_j \in \boldsymbol{I}_N$$

donde e_j es el j-ésimo vector de la base usual de $\mathbb{R}^N$ y π_k la k-ésima proyección coordenada en $\mathbb{R}^M$, tmabien con respecto a la base usual.

Diremos que A es la **la matriz de la aplicación lineal** T, pero debemos entender su unicidad: es la única matriz que representa a T en la forma y=A.x cuando, para x$\in\mathbb{R}^N$ y para y=T(x) $\in$ $\mathbb{R}^M$, usemos sus coordenadas bases usuales, escritas como matrices columna. Tenemos de hecho un isomorfismo entre los espacio vectoriales $\mathbf{L}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^M)$ y $\mathcal{M}_{MxN}$, que identifique cada $\boldsymbol{T}\in$ $\mathbf{L}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^M)$ con su matriz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{MxN}$, recién definida.

0.2.2 Matriz Jacobiana

En todo lo que sigue fijamos un abierto Ω de $\mathbb{R}^N$ y una función f: $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^M$. Cuando M=1 tenemos un campo escalar en $\mathbb{R}^M$, los dos casos que ya

hemos estudiando. Todo lo que hagamos será válido en ambos casos, pero ahora nos interesa lo que ocurre cuando N $\succ$ 1 y M $\succ$ 1. Entonces se dice que f es un **campo vectorial** y, si conviene precisar los valores de **M** y N, podemos decir que f es un campo vectorial M-dimesional en N variables. Escribimos f=(f_1,f_2, ..., f_M) para indicar las M componentes de f, que son campos escalares como producto de matrices: y=$\boldsymbol{J}f(\alpha)$.x
De (1) deducimos que los coeficientes de las matriz jacobiana, $\boldsymbol{J}f(\alpha)$=($\alpha_k j$) $\in \mathcal{M}_{MxN}$, viene dando por $\alpha_k j$=[$\pi_k \circ$ **D**$f(\alpha)$](e_j), para cualesquiera **k**$\in \boldsymbol{I}_M$ y j $\in$**textitI**$_N$. Recordemos ahora que, para cada **k** $\in$**textitI**$_M$, la k-ésima componente f_k=$\pi_k \circ f$ es diferenciable en α con **D**$\boldsymbol{f}_k(\alpha)$=$\pi_k \circ$**D**$f(\alpha)$. Pero además, para todo $j \in \boldsymbol{I}_N$, **D**$f_k(e_j)$ es la derivada parcial de f_k con respecto a la j-ésima variable en el punto α, luego

$$\alpha_k j = \mathbf{D}f_k(\alpha)(e_j) = \frac{\mathrm{d}f_k}{\mathrm{d}x_j}(\alpha)\forall_k \in \boldsymbol{I}_M, \forall_j \in \boldsymbol{I}_N$$

Así pues, la matriz jacobiana de f en α viene dada por:

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N}(a) \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_M}{\partial x_2}(a) & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_M}{\partial x_N}(a) \end{pmatrix}$$

Figure 1: Matriz

Se recuerda fácilmente, pues para cada $\mathbf{k} \in \boldsymbol{I}_M$, su k-ésima fila es la gradiente de f_k en α, es decir, las M filas de la matriz jacobiana son los gradientes de las M componentes de f.
Cuando M=1, tenemos un campo escalar, cuya matriz jacobiana es su gradiente, escrito como una matriz fila, $\boldsymbol{J}f(\alpha)$=∇ $f(\alpha) \in \mathcal{M}_{1xM}$, de forma que, para todo x $\in \mathbb{R}^N$, el producto escalar ($\nabla f(\alpha)$—x) coincida con el producto de matrices $\boldsymbol{J}f(\alpha)$.x=$\nabla f(\alpha)$.x.