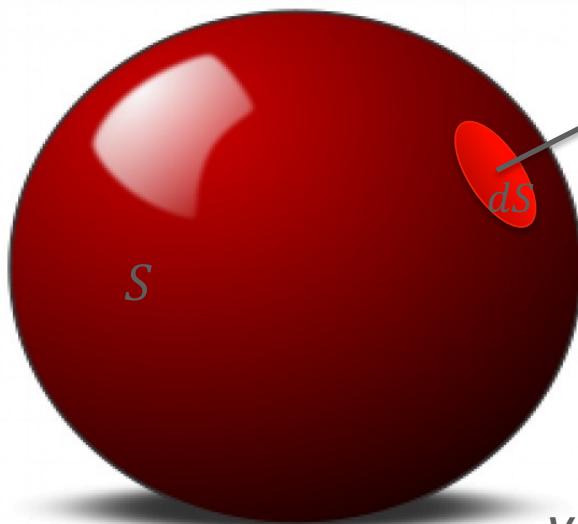


TRANSFERTS THERMIQUES

STPI2, semestre 4, filière Physique
Dr Jérôme Yon (jerome.yon@insa-rouen.fr)



Le flux résulte de l'intégration sur la surface considérée de flux élémentaires :



$$\vec{\varphi} = \varphi \vec{n}$$

Vecteur densité de flux
(quantité traversant la surface, par unité de surface et de temps)

$$d\Phi = \vec{\varphi} \cdot \vec{n} dS$$

Surface élémentaire

Vecteur unitaire normal à la surface, orienté vers l'extérieur du système

$$\Phi = \iint_S d\Phi$$

Flux élémentaires, quantité traversant la surface dS

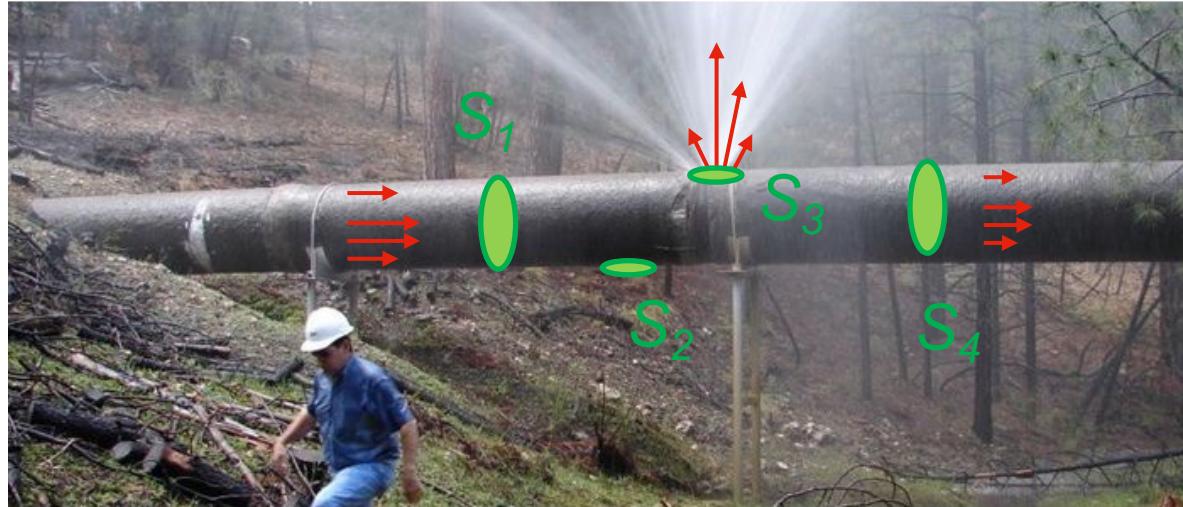
Que dire du signe de ce flux élémentaire?

Rmq : n est orienté vers l'extérieur par convention en TT, en thermodynamique c'est l'opposé...



Exemple d'une canalisation d'eau.

$$\Phi = \iint_S \vec{\varphi} \cdot \vec{n} dS$$



Discuter du flux au travers des surfaces S_1 , S_2 , S_3 et S_4

Quel est donc le rôle du produit scalaire dans ce calcul de flux?

wooclap *Quelle est l'unité de la densité de flux dans cet exemple?*





$$\Phi = \iint_S \vec{\varphi} \cdot \vec{n} dS$$

La densité de flux est donc un vecteur.

Dans le cas isotrope (indépendant de l'orientation) la densité de flux est elle-même portée par \vec{n} .

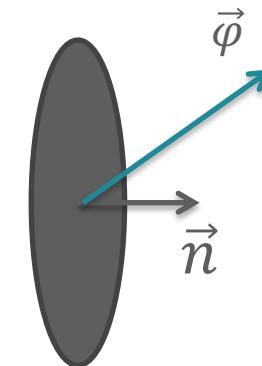
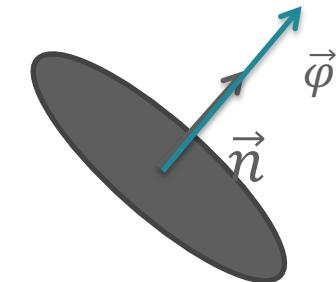
$$\Phi = \iint_S (\varphi \vec{n}) \cdot \vec{n} dS = \iint_S \varphi dS = \varphi S$$

*Si φ est uniforme
(ne varie pas spatialement)*

Dans le cas contraire, on utilise une approche « tensorielle » pour le calculer :

$$\vec{\varphi} = [\varphi] \vec{n}$$

Matrice dont les composantes varient spatialement.





La température est élevée dans les milieux qui ont emmagasiné une grande quantité d'énergie, stockée dans la matière sous forme d'agitation « thermique ».

Placée dans une enceinte adiabatique, cette énergie reste contenue et ne quitte pas le domaine (pas de transfert thermique).

Un flux d'énergie thermique n'est activé que s'il y a transport de cette énergie dans l'espace.

On distingue trois types de transfert thermique, qui peuvent coexister :

- ***la conduction***, due à la diffusion progressive de l'agitation thermique dans la matière ;
- ***la convection***, transfert thermique qui accompagne les déplacements macroscopiques de la matière ;
- ***le rayonnement***, qui correspond à la propagation de photons.



La conduction

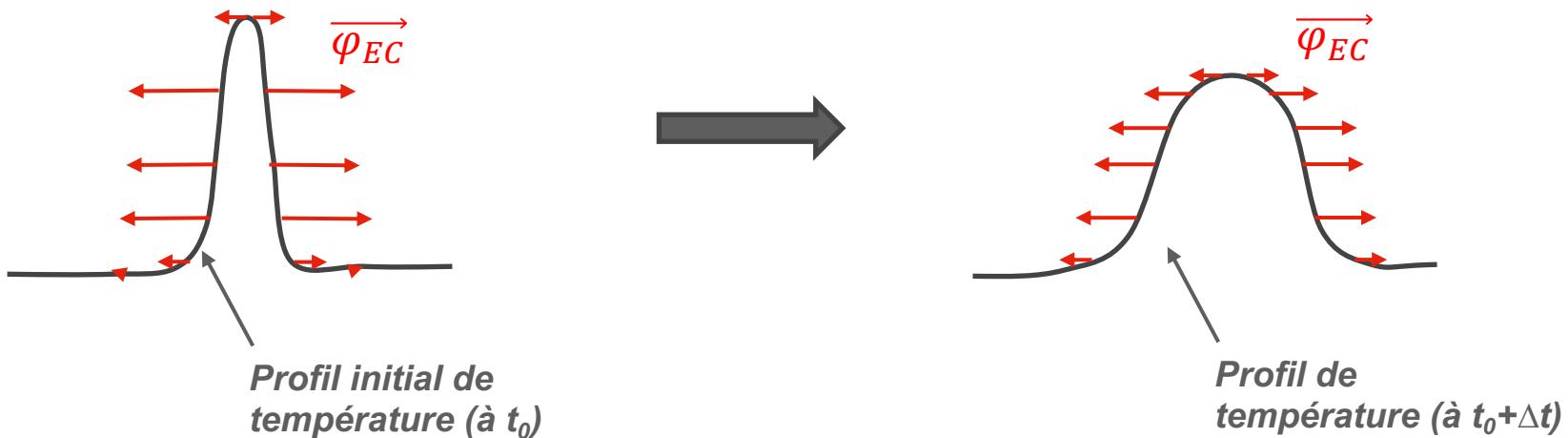
Après généralisation en 3 dimensions :

$$\overrightarrow{\varphi_{cond}} = -k_{tr} \overrightarrow{grad}(T)$$



C'est la loi de Fourier :

La densité de flux d'énergie est localement proportionnelle au gradient de température au sein du milieu et à sa conductivité thermique.



Le processus de conductivité thermique rééquilibre la répartition spatiale de température pour obtenir, à terme, un équilibre thermodynamique spatial. Ce processus est d'autant plus rapide que k_{tr} est grand.



La conduction

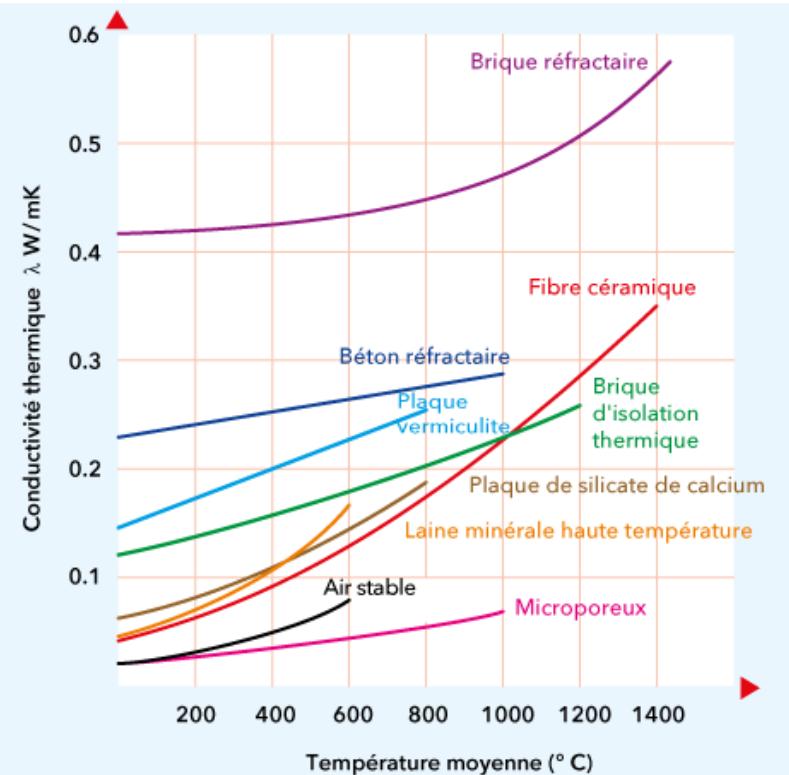
Quelques ordres de grandeurs
(à la température ambiante):

Matériaux	k _{tr} (W/m/K)
Air	0,025
Fibre de verre	0,03
Polystyrène expansé	0,033
Liège	0,07
Bois	0,4
Eau	0,6
Verre	0,93
Plastique	1,06
Béton	1,28
Marbre	2,9
Inox	16,3
Acier	50,2
Or pur	314
Cuivre	386
Argent	429
Diamant pur	2000

Capacité à conduire la chaleur

$$\overrightarrow{\varphi_{cond}} = -k_{tr} \overrightarrow{grad}(T)$$

Pour certains matériaux, la conductivité thermique peut dépendre de la température.
Elle a tendance à croître :



Source internet wikipedia

Source internet promat.

Rmq : On trouve souvent le symbole λ à la place de k_{tr}



La convection

$$\overrightarrow{\varphi_{conv}} = h (T_s - T_\infty) \vec{n}$$

Le transfert convectif est d'autant plus efficace que h est élevé. h dépend de la composition du fluide mais aussi de sa vitesse. En effet, on peut accroître les échanges thermiques en provoquant un écoulement important (convection dite « forcée »).

Echanges air-paroi	h (W/m ² /K)
paroi verticale en convection naturelle	9.1
paroi verticale en convection forcée	16.7
paroi horizontale en convection forcée	20
paroi horizontale flux descendant en convection naturelle	5.9
paroi horizontale flux ascendant en convection naturelle	11.1

Exemple 1 : En cas de fortes « chaleurs » températures, on se place devant un ventilateur afin de favoriser les échanges thermiques de notre corps vers l'air :

$$\overrightarrow{\varphi_{conv}} = \underbrace{h}_{\nearrow} (T_s - T_\infty) \vec{n}$$





La convection

$$\overrightarrow{\varphi_{conv}} = h (T_s - T_\infty) \vec{n}$$

Le transfert convectif est d'autant plus efficace que h est élevé. h dépend de la composition du fluide mais aussi de sa vitesse. En effet, on peut accroître les échanges thermiques en provoquant un écoulement important (convection dite « forcée»).

Echanges de fluides avec une paroi	h (W/m ² /K)
Air (convection naturelle)	5-25
Air/vapeur surchauffée (convection forcée)	20-300
Huile (convection forcée)	60-1800
Eau (convection forcée)	300-6000



Exemple 2 : Une trempe thermique se réalise en plongeant l'objet incandescent dans de l'eau, ce qui accélère son refroidissement par rapport à l'air.

wooclap

Par quel facteur augmente-t-on le TT en plongeant la pièce dans l'eau / air ?





Le rayonnement

L'émission de photons (source d'ondes électromagnétiques) peut se produire dans le vide (exemple du rayonnement solaire dans l'espace). C'est donc le seul moyen de transmettre de l'énergie dans le vide.

Par exemple, un objet incandescent placé dans le vide va mettre énormément de temps à se refroidir car il sera privé des autres voies d'échanges.

$$\overrightarrow{\varphi_{rad}} = \epsilon \sigma T^4 \vec{n}$$

Température de surface du matériaux (K)

Emissivité du matériaux (-), ≤ 1

Constante de Stefan-Boltzmann
 $(5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.K^{-4})$

Emissivités de différents matériaux	$\epsilon(-)$
Acier	0.20 – 0.32
Aluminium (feuille)	0.09
Aluminium anodisé	0.77
Béton	0.92
Bois	0.90
Sable	0.76



Objectifs et plan du cours

En départements, vous reviendrez en détail et beaucoup plus finement sur les 3 modes de transfert thermique dans des cours dédiés.

L'objectif de ce cours est de traiter le transfert thermique dans son ensemble et de l'illustrer de problèmes de la vie courante.

Les attendus à la fin de cet ½ EC sont :

- Savoir évaluer un flux thermique
- Savoir poser un bilan thermique
- Appréhender la résolution numérique d'un problème thermique
- Déterminer des échelles de températures, de durées d'échanges...
- Savoir traiter et modéliser un système couplé (échange mur – air par exemple)
- Comprendre l'effet de Serre et son lien au réchauffement climatique.
- ...
- Réaliser à quel point la physique est belle !**



Objectifs et plan du cours

Séance 1 : Introduction, généralités, objectifs (terminée)

Séance 2 : Bilan thermique et Equation de la chaleur

Séance 3 : Analyse dimensionnelle, milieux thermiquement minces

Séance 4 : Stratégies de résolution de l'équation de la chaleur

Séance 5 : Problèmes 2D, effusivité, T° ressentie et de confort

Séance 6 : Rayonnement (luminance, loi de Planck, éclairement...)

Séance 7 : Effet de Serre et réchauffement climatique

Chapitre 2 : Bilan thermique et Equation de la chaleur



Bilan thermique en régime stationnaire

Nous avons explicité les 3 modes d'échanges thermiques (flux):

$$\Phi = \iint_S \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \, dS \quad \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\varphi_{conv}} = h (T_s - T_\infty) \vec{n} \\ \overrightarrow{\varphi_{cond}} = -k_{tr} \overrightarrow{grad}(T) \\ \overrightarrow{\varphi_{rad}} = \epsilon \sigma T^4 \vec{n} \end{array} \right.$$

Les 3 peuvent co-exister et sont globalement positifs si l'objet perd de l'énergie, négatifs s'il en gagne et nul si les échanges sont globalement nuls (ou effectivement nul, cas adiabatique).

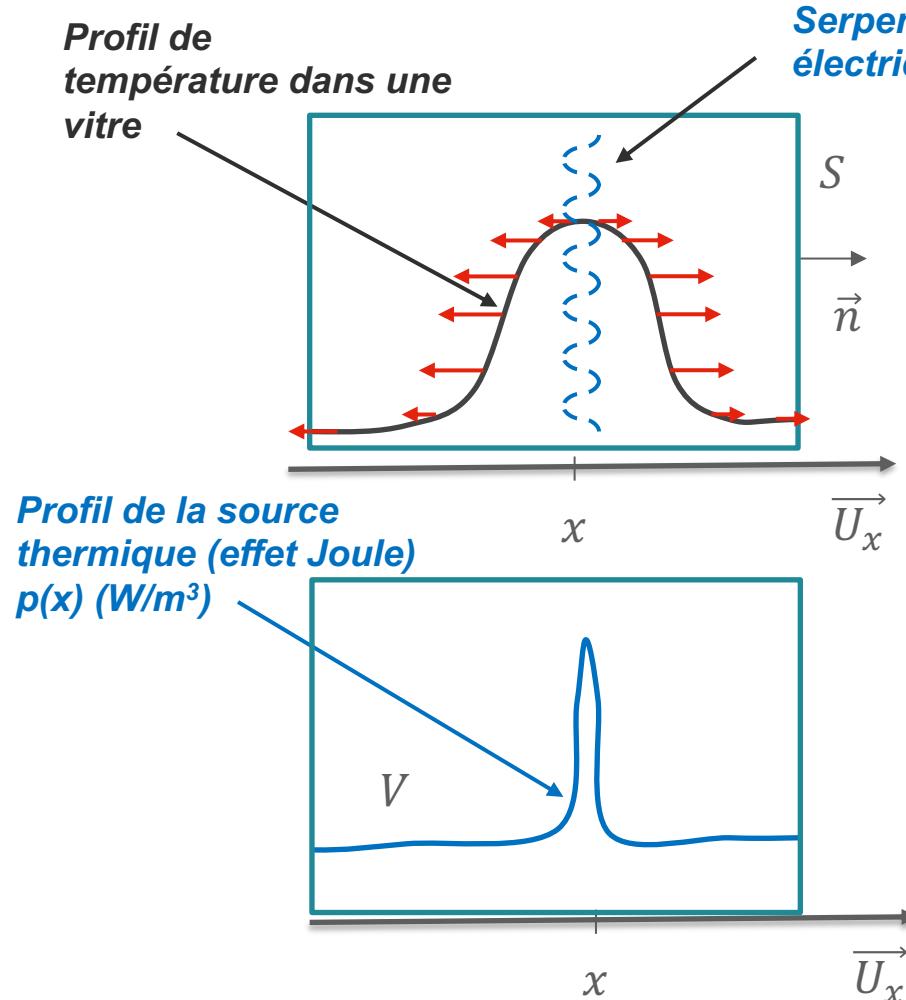
Le système est dit stationnaire si son état de T° et ses échanges n'évoluent pas au cours du temps.

Comment expliquer qu'un corps perdant de l'énergie par conduction, convection ou rayonnement puissent rester à l'état stationnaire ?





Bilan thermique en régime stationnaire



$$\Phi_{\text{éch}} = \iint_S \overrightarrow{\varphi_{\text{cond}}} \cdot \vec{n} dS$$

$$\boxed{\Phi_{\text{Prod}} = \Phi_{\text{éch}}}$$

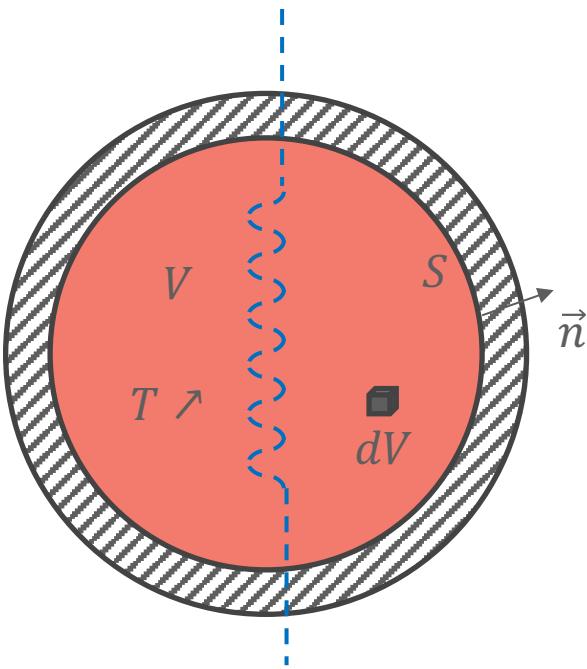
$$\Phi_{\text{Prod}} = \iiint_V \underbrace{\vec{J} \cdot \vec{E}}_p dV$$

Rmq. Le terme de « production » est inapproprié car on ne produit pas l'énergie thermique, on la convertit. On l'utilisera néanmoins.



Bilan thermique instationnaire et adiabatique

Il vient :



$$\Phi_{Prod} = \Phi_{stc}$$

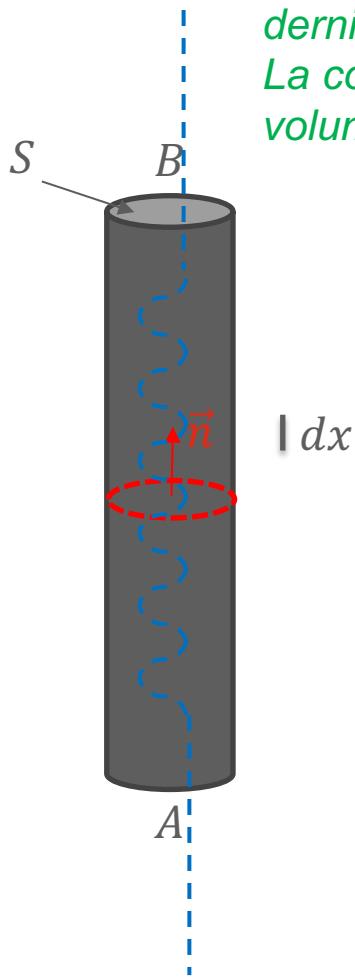
$$\iiint_V \underbrace{\vec{J} \cdot \vec{E}}_{p(M)} dV = Ri^2 = \iiint_V \rho C \frac{dT}{dt} dV$$



Bilan thermique instationnaire et adiabatique

De combien de degrés s'échauffe un fil de cuivre de rayon 1 mm, uniformément traversé par un courant de 10A pendant 10 minutes, si ce dernier est parfaitement isolé par l'extérieur ?

La conductivité électrique du cuivre est de $\sigma_e = 5.88 \times 10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$, sa masse volumique $\rho = 8960 \text{ kg/m}^3$ et sa capacité thermique $C = 385 \text{ J kg}^{-1} K^{-1}$.



$$\Phi_{Prod} = R i^2$$

Conductivité
électrique

$$i = \iint_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS = \iint_S \sigma_e \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \sigma_e E S \quad \text{car} \quad \vec{J} = \sigma_e \vec{E}$$

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot \overrightarrow{dOM} = \int_A^B E dx = E \cdot AB$$

$$V_A - V_B = R i$$

Résistance
électrique

$$R = \frac{AB}{\sigma_e S}$$

$$\Phi_{Prod} = \frac{AB}{\sigma_e S} i^2$$





Equation de la chaleur

On a donc

$$\Phi_{Prod} = \Phi_{stc} + \Phi_{éch}$$

En reprenant les développements précédent, il vient:

$$\iiint_V p dV = \iiint_V \rho C \frac{\partial T}{\partial t} dV + \iint_S \vec{\varphi} \cdot \vec{n} dS$$

Théorème de Green – Ostrogradsky : $\oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{A}) dV$





Equation de la chaleur

Il en résulte l'équation différentielle suivante:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = p - \operatorname{div}(\vec{\varphi})$$

$$(\Phi_{stc} = \Phi_{Prod} - \Phi_{éch})$$

Si le système est un solide, les échanges se réduisent au flux conductif:

$$\overrightarrow{\varphi_{cond}} = -k_{tr} \overrightarrow{\operatorname{grad}}(T)$$



$$\operatorname{div}(\vec{\varphi}) = \operatorname{div}(-k_{tr} \overrightarrow{\operatorname{grad}}(T))$$

Si le solide est homogène et uniforme



Laplacien



$$\operatorname{div}(\vec{\varphi}) = -k_{tr} \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}(T)) = -k_{tr} \Delta T$$



Equation de la chaleur

Il vient alors:

Coefficient de diffusion thermique ou diffusivité.

$$D = \frac{k_{tr}}{\rho C} \text{ (m}^2\text{s}^{-1}\text{)}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{p}{\rho C} + D\Delta T$$

En cartésien:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{p}{\rho C} + D \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

Equation différentielle du 2^{ème} degrés en temps et en espace....

Equation vérifiée au sein d'un même matériau conducteur.

Il existe une infinité de solutions excepté si l'on fixe les conditions aux limites spatiales et temporelles.

Rmq. La diffusivité thermique se note également a.

Chapitre 3 :

Notions de conditions limites et d'analyse dimensionnelle



Notions de conditions limites

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{p}{\rho C} + D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Cette équation est valable au sein d'un même matériau caractérisé par un coefficient de diffusion thermique uniforme.

Elle admet une infinité de solutions mathématiques de même que toute équation différentielle. Pour fixer la solution physique, il faut définir des conditions limites.

Par exemple, en mécanique du point, on doit fixer la position et la vitesse initiale...

L'équation de la chaleur est une équation différentielle en temps et en espace. Il convient donc de définir des conditions limites temporelles et spatiales.





Notions de conditions limites

Il existe deux grandes familles de conditions limites spatiales :

2-a La température est imposée sur les bords (condition de Dirichlet).
Fait appel à un dispositif de thermorégulation par exemple.

2-b Le flux est imposé sur les bords (condition de Neumann).

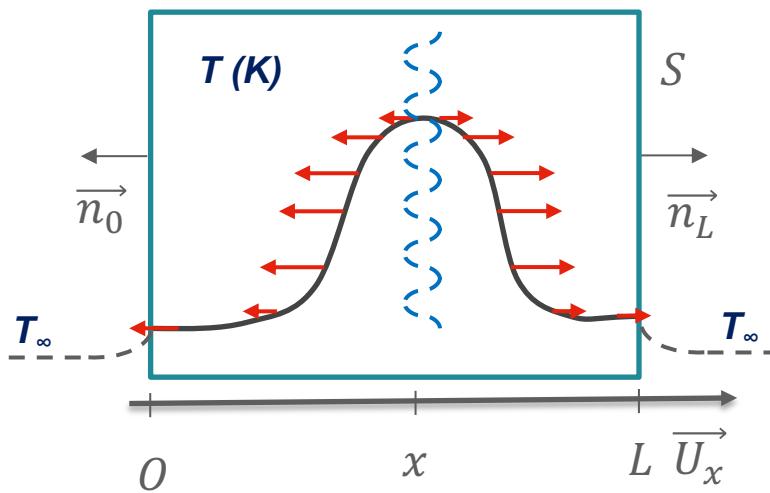
$$\underbrace{\overrightarrow{\varphi_{cond}} \cdot \vec{n} dS}_{\text{flux élémentaire quittant le domaine}} = \underbrace{\overrightarrow{\varphi_{conv}} \cdot \vec{n} dS}_{\text{échanges convectifs à l'interface}} + \underbrace{\overrightarrow{\varphi_{rad}} \cdot \vec{n} dS}_{\text{bilan de flux élémentaire radiatif à l'interface}}$$

$$\overrightarrow{\varphi_{cond}} = -k_{tr} \overrightarrow{grad}(T) \quad \overrightarrow{\varphi_{conv}} = h (T_s - T_\infty) \vec{n} \quad \overrightarrow{\varphi_{rad}} = \epsilon \sigma T^4 \vec{n}$$



Bien poser un problème

$L = 10\text{cm}$, $S = 1\text{m}^2$, $p = 200 \text{W/m}^3$
 (200W sur 1m de fil électrique),
 $\rho = 2480\text{kg.m}^{-3}$, $C = 700 \text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$,
 $k_{tr} = 0.87 \text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, $D = 0.5 \times 10^{-6} \text{m}^2.\text{s}^{-1}$,
 $h = 10 \text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$, $T_\infty = 273\text{K}$



Condition limite temporelle :

$$T(x, t = 0) = T_\infty$$

Système : Lame de verre avec chauffage électrique en son centre. Problème considéré 1D (à justifier).

Simplification : Etude adimensionnelle (traitée plus tard).

Inconnue : Evolution temporelle du profil de température dans la vitre (dans le cas le plus défavorable)

Equation régissant le problème :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{p}{\rho C} + D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Conditions limites spatiales:

$$-k_{tr} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L \text{ à } t} = h(T(L, t) - T_\infty)$$

$$k_{tr} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0 \text{ à } t} = h(T(0, t) - T_\infty)$$





Analyse Dimensionnelle de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{p}{\rho C} + D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Variation locale de T°
 (stockage) Source de chaleur Courbure locale du profil de T°

Pour ce faire, on associe à chaque variable un ordre de grandeur.

T_∞ : T° de l'air loin du matériau,
 L échelle de taille du matériau,
 t_c échelle de temps caractéristique du phénomène,
 p_c échelle de puissance caractéristique de la source,
 et l'on définit des nombres sans dimension :

$$\tilde{T} = \frac{T - T_\infty}{T_\infty}, \tilde{x} = \frac{x}{L}, \tilde{t} = \frac{t}{t_c}, \tilde{p} = \frac{p}{p_c}$$

Ch. 3 : Notions de conditions limites et d'analyse dimensionnelle

Analyse Dimensionnelle de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{p}{\rho C} + D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Variation locale de T°
 (stockage) Source de chaleur Courbure locale du profil de T°

Exprimons nos variables à l'aide des variables sans dimension :

$$T = \tilde{T} \times T_\infty + T_\infty, \quad \tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{t_c}, \quad p = p_c \times \tilde{p}$$

Exprimons les différents termes de l'équation :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial \tilde{t}} \times \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{T} \times T_\infty + T_\infty}{\partial \tilde{t}} \times \frac{\partial \frac{t}{t_c}}{\partial t} = T_\infty \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} \times \frac{1}{t_c} = \frac{T_\infty}{t_c} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial \tilde{x}} \times \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{T} \times T_\infty + T_\infty}{\partial \tilde{x}} \times \frac{\partial \frac{x}{L}}{\partial x} = T_\infty \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} \times \frac{1}{L} = \frac{T_\infty}{L} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial \frac{\partial T}{\partial x}}{\partial x} = \frac{\partial \frac{\partial T}{\partial \tilde{x}}}{\partial x} \times \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} = \frac{\partial \frac{T_\infty \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}}}{L}}{\partial \tilde{x}} \times \frac{\partial \frac{x}{L}}{\partial x} = \frac{T_\infty}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2}$$

$$\frac{p}{\rho C} = \frac{p_c}{\rho C} \tilde{p}$$



Analyse Dimensionnelle de l'équation de la chaleur

$$\frac{T_\infty}{t_c} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} = \frac{p_c}{\rho C} \tilde{p} + D \frac{T_\infty}{L^2} \Delta \tilde{T}$$

Il apparaît trois facteurs dont l'importance est à comparer

$$\times \frac{L^2}{DT_\infty}$$

$$\frac{L^2}{Dt_c} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} = \frac{p_c L^2}{\rho C D T_\infty} \tilde{p} + 1 \Delta \tilde{T}$$

Dans la partie non chauffée par effet joule $p_c = 0$ donc

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} = \frac{Dt_c}{L^2} \Delta \tilde{T}$$

On définit un nombre sans dimension appelé nombre de Fourier :

$$F_o = \frac{Dt_c}{L^2} = \frac{t_c}{t_D}$$

Temps caractéristique du phénomène
Temps caractéristique de
propagation du front thermique sur
l'échelle considérée $t_D = L^2/D$

Si ce nombre est grand devant 1, c'est que le profil s'est relaxé sur un temps court devant la durée de l'étude. Le système est donc à l'équilibre thermodynamique et peut être traité de façon stationnaire.





Analyse Dimensionnelle des conditions limites spatiales

$$-\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x} \text{ en } \frac{L}{2}} = B_i \tilde{T}(L/2, t)$$

$\brace{ \text{Flux conductif} }$
 $\brace{ \text{Flux convectif} }$

Lorsque $B_i = \frac{hL}{k} \ll 1$, les effets conductifs dominent la dissipation convective à l'interface. Les échanges avec l'air étant lents, la température s'uniformise dans le matériau. On parle de milieux thermiquement minces (Simplification du problème $\rightarrow T=Cst$ spatialement).

Lorsque $B_i = \frac{hL}{k} \gg 1$, la dissipation thermique est élevée et le champ de température ne peut pas être considéré uniforme (milieux thermiquement épais).

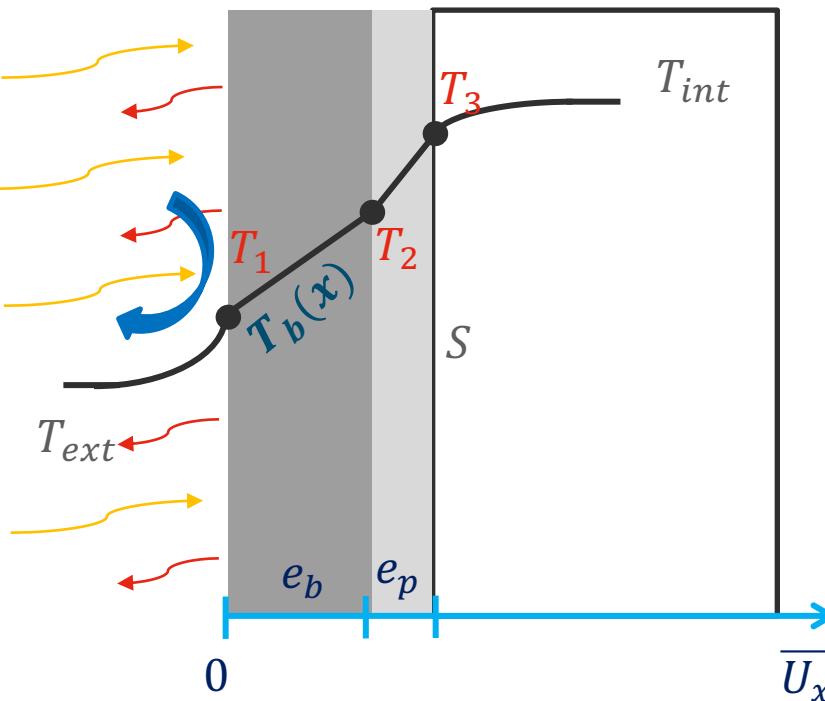
Chapitre 4 :

Méthodes de résolution de l'équation de la chaleur



Cas stationnaire, mise en évidence des résistances thermiques

Exemple typique d'un mur (1D), températures intérieure et extérieure imposées.



Système : Béton.

Inconnue : $T_b(x)$

Equation régissant le problème :

$$\frac{dT_b}{dx} = \frac{T_2 - T_1}{e_b} \quad (eq. 1)$$

Condition limite temporelle : inutile car problème stationnaire (pas de dépendance au temps).

Conditions limites spatiales:

$$P_{th} = -k_b \frac{dT_b}{dx} \Big|_{en\ 0} \quad S = -h_{ext}(T_1 - T_{ext})S - \sigma(T_1^4 - T_{ext}^4)S \quad (eq. 2)$$

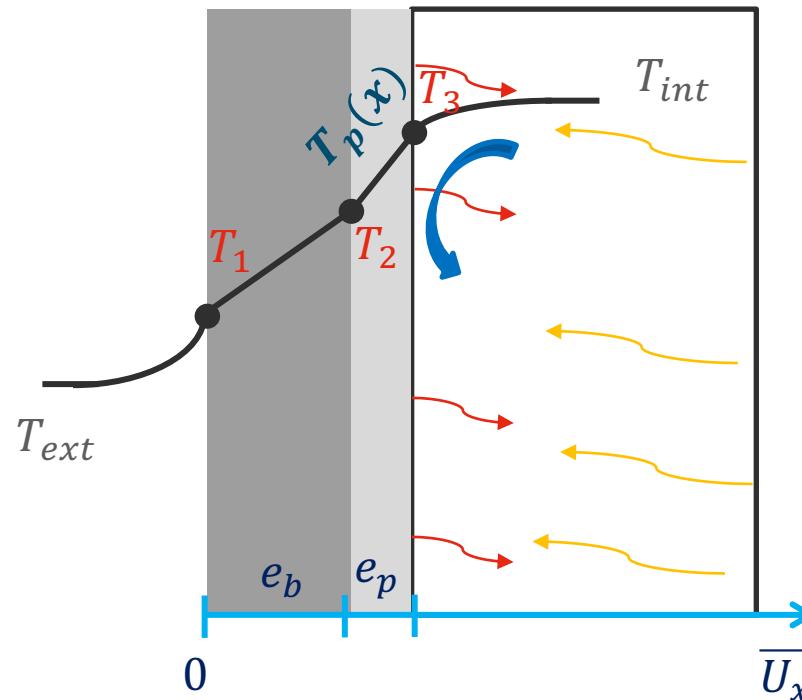
$$P_{th} = -k_b \frac{dT_b}{dx} \Big|_{en\ x=e_b} \quad S = -k_p \frac{dT_p}{dx} \Big|_{en\ x=e_b} \quad S \quad (eq. 3)$$

Que représente P_{th} , quel est son signe?



Cas stationnaire, mise en évidence des résistances thermiques

Exemple typique d'un mur (1D), températures intérieure et extérieure imposées.



Système : Polystyrène.

Inconnue : $T_p(x)$

Equation régissant le problème :

$$\frac{dT_p}{dx} = \frac{T_3 - T_2}{e_p} \quad (eq. 4)$$

Condition limite temporelle : inutile car problème stationnaire (pas de dépendance au temps).

Conditions limites spatiales:

$$P_{th} = -k_p \frac{dT_p}{dx} \text{ en } e_b + e_p \quad S = -h_{int}(T_{int} - T_3)S - \sigma(T_{int}^4 - T_3^4)S \quad (eq. 5)$$

$$P_{th} = -k_b \frac{dT_b}{dx} \text{ en } x=e_b \quad S = -k_p \frac{dT_p}{dx} \text{ en } x=e_b \quad (eq. 6 = eq. 3)$$





Cas stationnaire, mise en évidence des résistances thermiques

$$D_{th} \left(\frac{1}{S(h_{ext} + \sigma 4T_{ext}^3)} + \frac{1}{Sk_b/e_b} + \frac{1}{Sk_p/e_p} + \frac{1}{S(h_{int} + \sigma 4T_{int}^3)} \right) = \underbrace{T_{int} - T_{ext}}_{\text{Différence de } T^\circ (K) \rightarrow \text{ce qui provoque le flux thermique}}$$

Echanges extérieur

Conduction dans le polystyrène

Conduction dans le béton

Echanges intérieur

Déperdition thermique (W)

On trouve une analogie avec l'électricité $RI = U$!

La déperdition thermique (courant) activée par la différence de température (différence de potentiel électrique), est d'autant plus élevée que la résistance thermique est faible. Le flux parcours la lame d'air, de polystyrène, de béton et d'air extérieur séquentiellement : Les résistances sont en série !

$$R_{cond} = \frac{e}{k_{th} S}$$

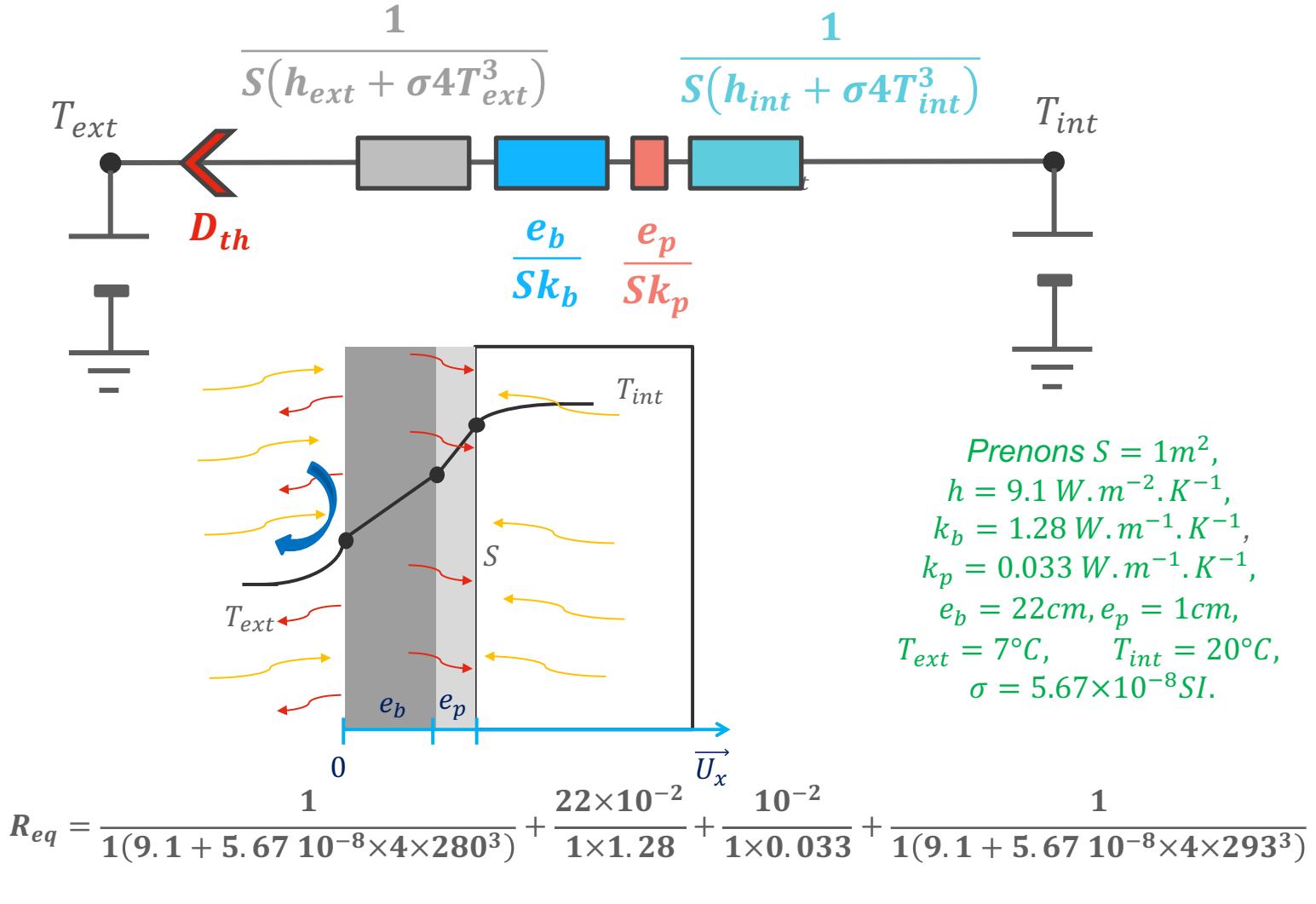
$$R_{conv-Ray} = \frac{1}{S(h + \sigma 4T^3)}$$

Rmq. Si on ne considère pas le rayonnement : $R_{conv} = \frac{1}{Sh}$





Cas stationnaire, mise en évidence des résistances thermiques



Prenons $S = 1m^2$,
 $h = 9.1 W.m^{-2}.K^{-1}$,
 $k_b = 1.28 W.m^{-1}.K^{-1}$,
 $k_p = 0.033 W.m^{-1}.K^{-1}$,
 $e_b = 22cm, e_p = 1cm$,
 $T_{ext} = 7^\circ C, T_{int} = 20^\circ C$,
 $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} SI$.

$$R_{eq} = 0.071 + 0.17 + 0.30 + 0.067 = 0.61 K/W$$

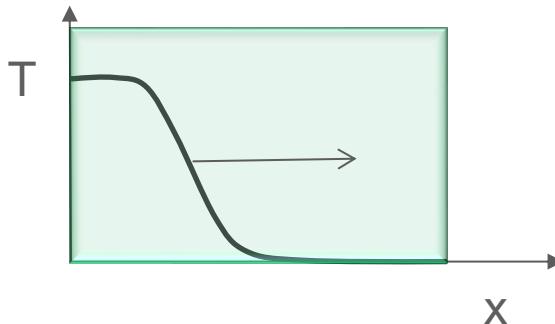


Cas résolvables de façon analytique

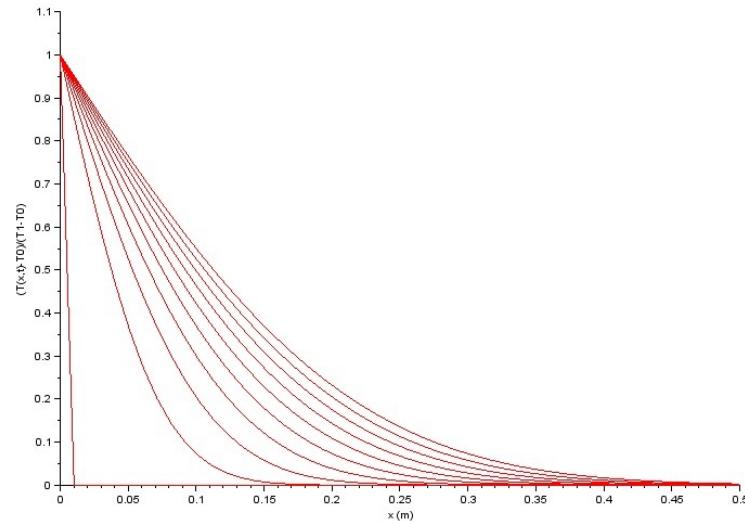
Dans certains cas (généralement simples), il est possible de résoudre analytiquement un problème de transfert thermique instationnaire et thermiquement épais (exemple d'une paroi 1D exposée à un front thermique).

Ces méthodes seront abordées en détail en département :

- Méthodes de séparation des variables $T(x, t) = f(x) \times g(t)$ (fait appel à la transformée de Fourier).
- Résolution à l'aide de la transformation de Laplace



Exemple d'un mur semi infini sur lequel est imposée une température à partir de $t=0s$.

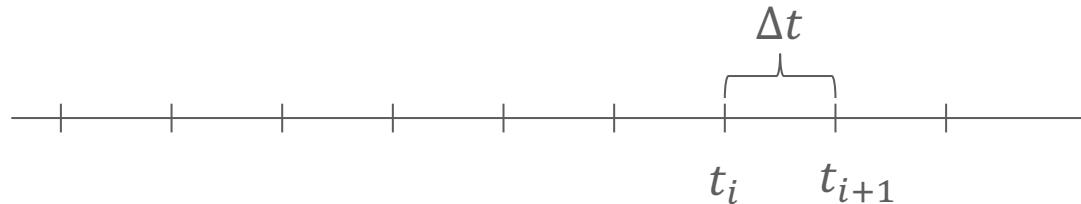




Résolution numérique

Pour les problèmes complexes on recourt souvent à la résolution numérique. Il existe plusieurs méthodes numériques permettant de résoudre les équations différentielles dépendantes du temps et de l'espace. Elles seront abordées en département.

Ces méthodes reposent toujours sur une discréttisation de l'espace et du temps.



Plus le pas spatial ou temporel est pris petit, plus le calcul sera précis mais plus il faudra d'itérations et d'espace mémoire pour résoudre un problème. Il y a donc un compromis à trouver.



Résolution numérique

Pour résoudre un problème 1D (exemple : profil thermique dans une paroi), on remplace les termes de l'équation de la chaleur:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{p}{\rho C} + D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$



$$\frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t} = \frac{p(x, t)}{\rho C} + D \frac{f(x - \Delta x, t) - 2f(x, t) + f(x + \Delta x, t)}{(\Delta x)^2}$$

Dans un espace discréteisé, on notera

$$\frac{f(x_i, t_{j+1}) - f(x_i, t_j)}{\Delta t} = \frac{p(x_i, t_j)}{\rho C} + D \frac{f(x_{i-1}, t_j) - 2f(x_i, t_j) + f(x_{i+1}, t_j)}{(\Delta x)^2}$$



Pour définir le profil à un temps ultérieur, on écrira:



$$f(x_i, t_{j+1}) = f(x_i, t_j) + \frac{\Delta t}{\rho C} p(x_i, t_j) + \frac{D \Delta t}{(\Delta x)^2} (f(x_{i-1}, t_j) - 2f(x_i, t_j) + f(x_{i+1}, t_j))$$

Rmq. Il y a des critères concernant Δt et Δx à respecter afin d'assurer la stabilité numérique de la résolution. Ce sera discuté en cours d'analyse numérique.



Résolution numérique

Si le profil 1D de température à un instant donné t_j se représente à l'aide d'un vecteur contenant autant d'éléments que de points discrétisés :

$$\vec{T}_j = \begin{vmatrix} T(1, j) \\ T(2, j) \\ \vdots \\ \vdots \\ T(N_i, j) \end{vmatrix}$$

Alors la résolution pourra s'écrire sous la forme d'un calcul matriciel:

$$\vec{T}_{j+1} = \vec{T}_j + \frac{\Delta t}{\rho C} \vec{P} + \frac{D \Delta t}{(\Delta x)^2} [M] \vec{T}_j$$

$$\vec{P} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ p(x_i, t_j) \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{Lieu de la source de chaleur (W/m}^3)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Voyez vous naturellement apparaître un nombre sans dimension ?





Résolution numérique : algorithme pour le cas 1D

1. On initialise le vecteur température à l'aide des conditions initiales temporelles : $\vec{T}_j = \vec{T}_1$
2. On répète donc le calcul suivant de façon itératif,

$$\vec{T}_{j+1} = \vec{T}_j + \frac{\Delta t}{\rho C} \vec{P} + \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} [M] \vec{T}_j$$

en prenant soin à chaque fois:

- a) d'imposer les conditions limites spatiales $\vec{T}_{j+1}(1) = \dots$ et $\vec{T}_{j+1}(N_i) = \dots$
- b) de faire avancer la variable de temps à chaque fois : $t \rightarrow t + \Delta t$





Résolution numérique : algorithme pour le cas 1D

Pour déterminer les conditions limites spatiales, il faut également passer par la discréétisation et décomposition de Taylor-Young.

Par exemple, si le bord gauche de la paroi subit une condition de flux du type :

$$-k_{tr} \frac{dT}{dx}_{en\ 0} S = -h(T_1 - T_{ext})S - \sigma(T_1^4 - T_\infty^4)S$$



$$-k_{tr} \frac{T_{j+1}(2) - T_{j+1}(1)}{\Delta x} = -h(T_{j+1}(1) - T_\infty) - \underbrace{\sigma(T_{j+1}(1) - T_\infty)4T_\infty^3}_{\text{Linéarisation}}$$



$$T_{j+1}(1) = \frac{T_{j+1}(2) + \left(\frac{h\Delta x}{k_{tr}} + \frac{\sigma 4T_\infty^3 \Delta x}{k_{tr}} \right) T_\infty}{\left(1 + \frac{h\Delta x}{k_{tr}} + \frac{\sigma 4T_\infty^3 \Delta x}{k_{tr}} \right)}$$

Voyez vous naturellement apparaître un nombre sans dimension ?



Chapitre 5 :

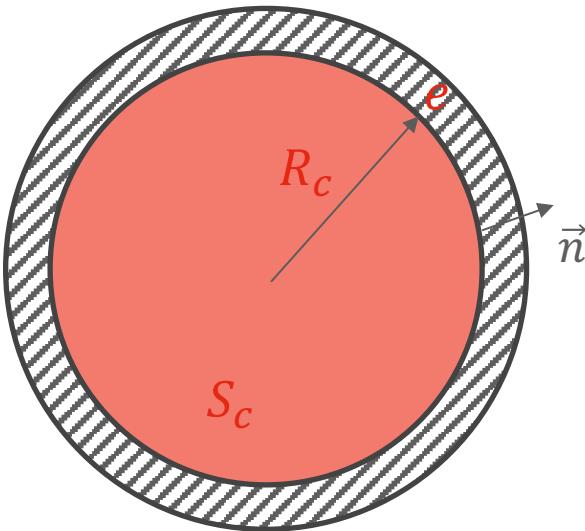
Traitement Analytique d'un problème et notions de confort thermique



Problème d'un fil électrique

Considérons un fil de cuivre de rayon R_c de longueur L parcouru par un courant I . Il est recouvert d'un isolant en plastique d'épaisseur e . Le fil est suspendu dans de l'air au repos à 20°C. La gaine en plastique ne doit pas dépasser une température de fusion T_f . Quel courant électrique maximum peut supporter ce fil électrique? On fera le bilan sur une longueur unitaire.

Système 1 : Le fil de cuivre.



Nombres adimensionnels:

$$F_o = \frac{D_c \times t_c}{R_c^2} = \frac{117 \times 10^{-6} \times 3600}{(0.9 \times 10^{-3})^2} = 530466 \gg 1$$

Sur une étude couvrant une durée d'une heure, le système peut être considéré comme stationnaire.

$$B_i = \frac{h \times R_c}{k_c} = \frac{10 \times 0.9 \times 10^{-3}}{400} = 0.00002$$

Le profil de température est également uniforme dans le cuivre.

Inconnue : Température du fil et flux produit.



Problème d'un fil électrique : Résolution cas simplifié

Le problème étant stationnaire, on peut considérer que le flux produit par effet joule traverse les deux matériaux.

$$T_i = T_\infty + \frac{I^2}{\sigma_e S_c 2\pi(R_c + e)(h + \sigma 4T_\infty^3)} < T_f$$

$$I < \sqrt{\sigma_e S_c 2\pi(R_c + e)(h + \sigma 4T_\infty^3)(T_f - T_\infty)}$$

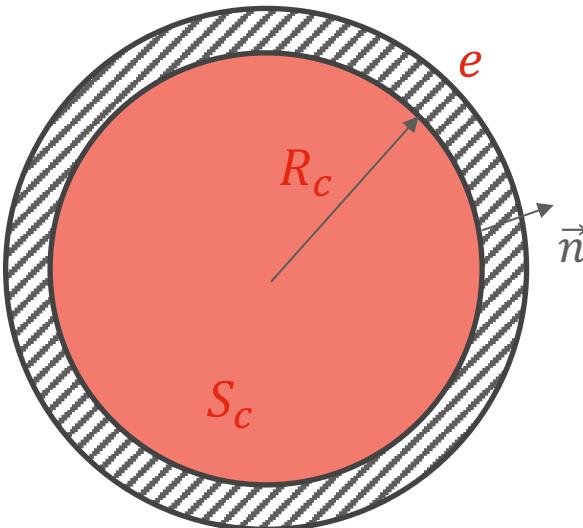
Calcul pour un fil électrique de 2.5 mm^2 parcouru par un courant de 20A (limite autorisée par la norme). La température maximale de fusion (85°C) n'est pas atteinte mais la température extérieure de la gaine atteint 40.24°C .

Le courant de 40A peut conduire à un début de fusion de la gaine plastique.



Problème d'un fil électrique (Cas non uniforme) :

Considérons un fil de cuivre de rayon R_c de longueur L parcouru par un courant I . Il est recouvert d'un isolant en plastique d'épaisseur e . Le fil est suspendu dans de l'air au repos à 20°C. La gaine en plastique ne doit pas dépasser une température de fusion T_f . Quel courant électrique maximum peut supporter ce fil électrique? On fera le bilan sur une longueur unitaire.



Système 1 : Le fil de cuivre.

Inconnue : Profil de température dans le cuivre.

Equation régissant le problème :

$$\cancel{\frac{\partial T}{\partial t}} = \frac{p}{\rho C} + D_c \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_c}{\partial r} \right)$$

On traite le Problème en stationnaire

Source uniforme par effet joule

Laplacien en polaire (1D)

$$p = \frac{\Phi_{Prod}}{LS} = \frac{I^2}{\sigma_e S^2}$$

Conditions limites spatiales:

$$\overrightarrow{\varphi_{cond,c}}(r = 0) = \vec{0} \quad \longleftarrow \quad \text{Imposé par la symétrie}$$

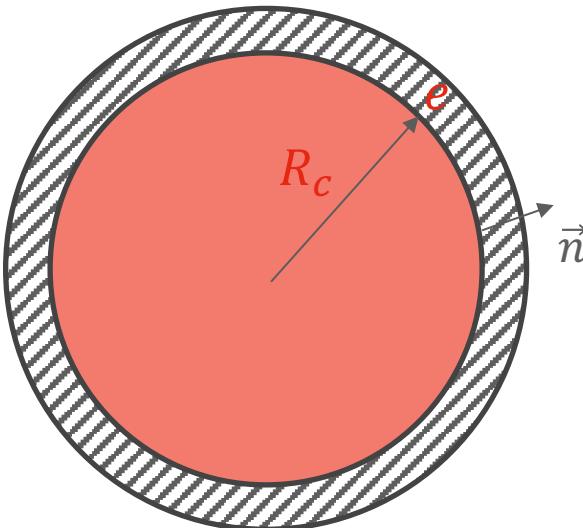
$$\overrightarrow{\varphi_{cond,c}}(r = R_c) = \overrightarrow{\varphi_{cond,i}}(r = R_c) \quad \longleftarrow \quad \text{Continuité des flux}$$





Problème d'un fil électrique (Cas non uniforme) :

Considérons un fil de cuivre de rayon R_c de longueur L parcouru par un courant I . Il est recouvert d'un isolant en plastique d'épaisseur e . Le fil est suspendu dans de l'air au repos à 20°C. La gaine en plastique ne doit pas dépasser une température de fusion T_f . Quel courant électrique maximum peut supporter ce fil électrique? On fera le bilan sur une longueur unitaire.



Système 2 : L'isolant.

Inconnue : Profil de température dans l'isolant.

Equation régissant le problème :

$$\cancel{\frac{\partial T}{\partial t}} = \cancel{\frac{\rho C}{\kappa}} + D_i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_i}{\partial r} \right)$$

On traite le Problème en stationnaire

Pas de sources

Laplacien en polaire (1D)

Conditions limites spatiales:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\varphi_{cond,i}}(r = R_c + e) &= \overrightarrow{\varphi_{conv}} + \overrightarrow{\varphi_{ray}} && \xleftarrow{\hspace{1cm}} \text{Echanges avec l'air} \\ \overrightarrow{\varphi_{cond,c}}(r = R_c) &= \overrightarrow{\varphi_{cond,i}}(r = R_c) && \xleftarrow{\hspace{1cm}} \text{Continuité des flux} \end{aligned}$$



Problème d'un fil électrique (Cas non uniforme) : ensemble des équations du problème

Le fil de cuivre.

$$\frac{I^2}{\rho C \sigma_e S_c^2} + D_c \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_c}{\partial r} \right) = 0$$

Conditions limites spatiales

$$\frac{\partial T_c}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0$$

$$\Phi_{Prod} = -2\pi R_c k_c \frac{\partial T_c}{\partial r} \Big|_{r=R_c} \times L$$

L'isolant.

$$D_i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_i}{\partial r} \right) = 0$$

$$\Phi_{Prod} = -2\pi R_c k_i \frac{\partial T_i}{\partial r} \Big|_{r=R_c} \times L$$

$$\Phi_{Prod} = -2\pi (R_c + e) k_i \frac{\partial T_i}{\partial r} \Big|_{r=R_c+e} \times L$$

$$\Phi_{Prod} = 2\pi(R_c + e)(h + \sigma 4T_\infty^3)(T_i(R_c + e) - T_\infty) \times L$$



Problème d'un fil électrique (Cas non uniforme) : Résolution

Le fil de cuivre.

$$T_c = -\frac{A}{4}r^2 + B \ln(r) + E$$

Avec $A = \frac{I^2}{\rho C D_c \sigma_e S_c^2}$

L'isolant.

$$T_i = F \ln(r) + G$$

Conditions limites spatiales

$$\frac{\partial T_c}{\partial r}_{r=0} = 0 \rightarrow \frac{dT_c}{dr} = -\frac{A}{2}r + \frac{B}{r} = 0 \rightarrow B = 0$$

$$\Phi_{Prod} = -2\pi R_c L k_c \frac{\partial T_c}{\partial r}_{r=R_c} \rightarrow \Phi_{Prod} = \pi R_c^2 L k_c A$$

$$\Phi_{Prod} = -2\pi R_c L k_i \frac{\partial T_i}{\partial r}_{r=R_c} \rightarrow \Phi_{Prod} = -2\pi L F k_i$$

$$\Phi_{Prod} = -2\pi (R_c + e) L k_i \frac{\partial T_i}{\partial r}_{r=R_c+e} \rightarrow \Phi_{Prod} = -2\pi L F k_i$$

$$\Phi_{Prod} = 2\pi(R_c + e)(h + \sigma 4T_\infty^3)(T_i(R_c + e) - T_\infty)L$$

$$\Phi_{Prod} = 2\pi(R_c + e)(h + \sigma 4T_\infty^3)(F \ln(R_c + e) + G - T_\infty)L$$



Problème d'un fil électrique (Cas non uniforme) : Résolution

Le fil de cuivre.

$$T_c = -\frac{A}{4}r^2 + E$$

Avec $A = \frac{I^2}{\rho C D_c \sigma_e S_c^2}$

L'isolant.

$$T_i = F \ln(r) + G$$

Par continuité de T° :

$$\begin{aligned} T_c(R_c) &= T_i(R_c) \\ -\frac{A}{4}R_c^2 + E &= F \ln(R_c) + G \end{aligned}$$

$$\rightarrow E = T_\infty + \frac{AR_c^2}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{k_c}{(R_c + e)(h + \sigma 4T_\infty^3)} + \frac{k_c}{k_i} \ln \left(1 + \frac{e}{R_c} \right) \right)$$

Conditions limites spatiales

$$\Phi_{Prod} = \pi R_c^2 L k_c A$$

Evaluation de la déperdition thermique

$$\Phi_{Prod} = -2\pi L F k_i \quad \rightarrow$$

$$F = -\frac{R_c^2 k_c A}{2k_i}$$

$$\Phi_{Prod} = 2\pi(R_c + e)(h + \sigma 4T_\infty^3)(F \ln(R_c + e) + G - T_\infty)L$$



$$R_c^2 k_c A = 2(R_c + e)(h + \sigma 4T_\infty^3) \left(-\frac{R_c^2 k_c A}{2k_i} \ln(R_c + e) + G - T_\infty \right)$$



$$G = T_\infty + \frac{R_c^2 k_c A}{2(R_c + e)(h + \sigma 4T_\infty^3)} + \frac{R_c^2 k_c A}{2k_i} \ln(R_c + e)$$



Problème d'un fil électrique (Cas non uniforme) : Résultats

$$\Phi_{Prod} = \frac{LI^2}{\sigma_e S_c}$$

← *On retrouve la puissance thermique délivrée par l'effet joule*

$$T_c = T_\infty + \frac{AR_c^2}{2} \left(\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{r}{R_c} \right)^2 \right) + \frac{k_c}{(R_c + e)(h + \sigma 4T_\infty^3)} + \frac{k_c}{k_i} \ln \left(1 + \frac{e}{R_c} \right) \right)$$

$$T_i = T_\infty + \frac{AR_c^2}{2} \left(\frac{k_c}{(R_c + e)(h + \sigma 4T_\infty^3)} + \frac{k_c}{k_i} \ln \left(\frac{R_c + e}{r} \right) \right)$$

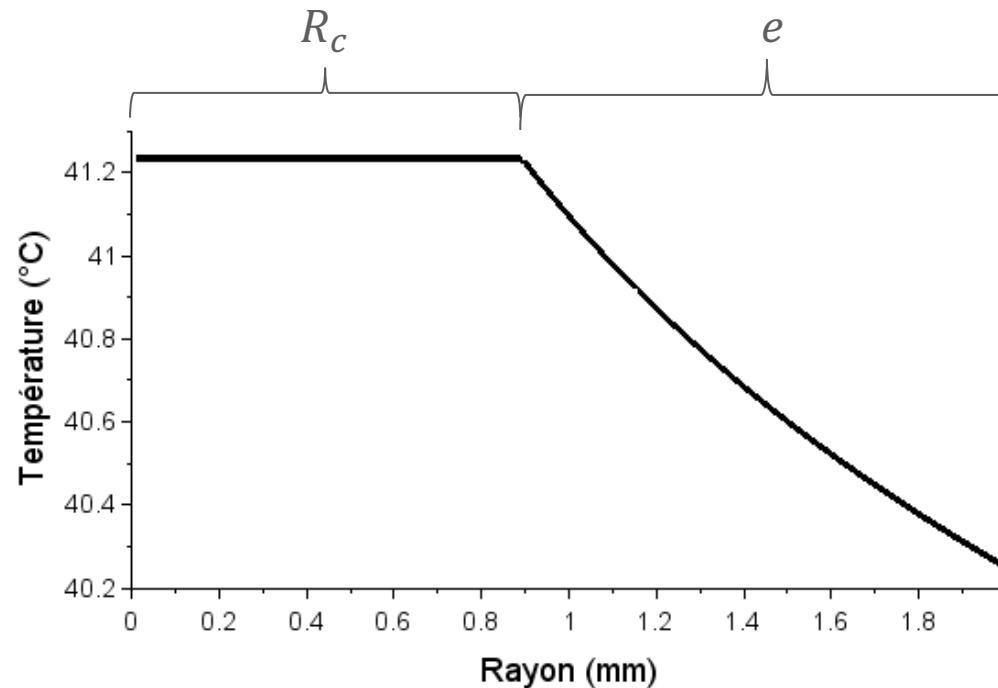
La température maximale dans l'isolant est obtenue en $r = R_c$

$$T_i^{max} = T_\infty + \frac{AR_c^2}{2} \left(\frac{k_c}{(R_c + e)(h + \sigma 4T_\infty^3)} + \frac{k_c}{k_i} \ln \left(1 + \frac{e}{R_c} \right) \right) < T_f$$

$$I < \sqrt{\frac{2\sigma_e \pi^2 R_c^2 (T_f - T_\infty)}{\frac{1}{(R_c + e)(h + \sigma 4T_\infty^3)} + \frac{1}{k_i} \ln \left(1 + \frac{e}{R_c} \right)}}$$



Problème d'un fil électrique (Cas non uniforme) : Résultats



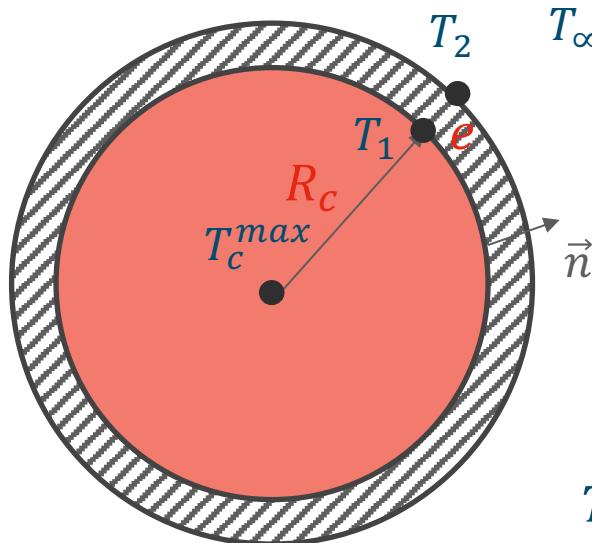
On retrouve les mêmes résultats que dans l'étude simplifiée mais on accède au profil de température (qui peut effectivement être considéré comme plat...).

Nous allons cependant voir que cette étude détaillée permet de mettre en évidence un schéma électrique équivalent.



Problème d'un fil électrique : Résistances équivalentes

A partir des résultats précédents, et quelques calculs, on arrive à :



$$T_2 - T_\infty = \Phi_{Prod} \left(\frac{1}{2\pi L(R_c + e)(h + \sigma 4T_\infty^3)} \right)$$

$$T_1 - T_\infty = \Phi_{Prod} \frac{1}{2\pi L(R_c + e)(h + \sigma 4T_\infty^3)} + D_{th} \frac{1}{2\pi Lk_i} \ln \left(1 + \frac{e}{R_c} \right)$$

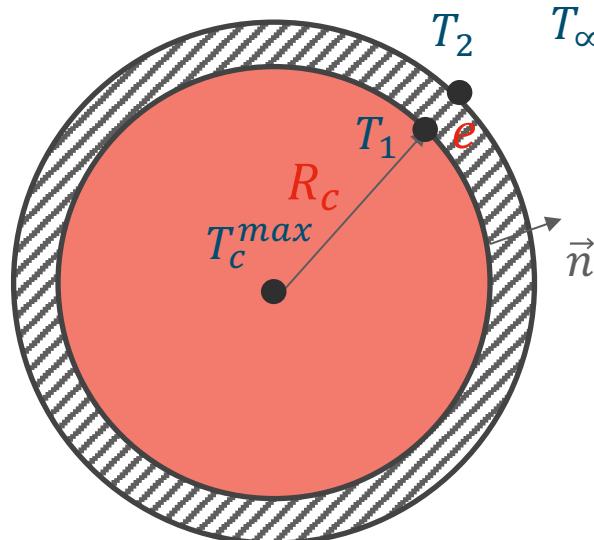
$$T_c^{max} - T_\infty = \frac{\Phi_{Prod}}{4\pi Lk_c} + \Phi_{Prod} \frac{1}{2\pi L(R_c + e)(h + \sigma 4T_\infty^3)} + \Phi_{Prod} \frac{1}{2\pi Lk_i} \ln \left(1 + \frac{e}{R_c} \right)$$





Problème d'un fil électrique : Résistances équivalentes

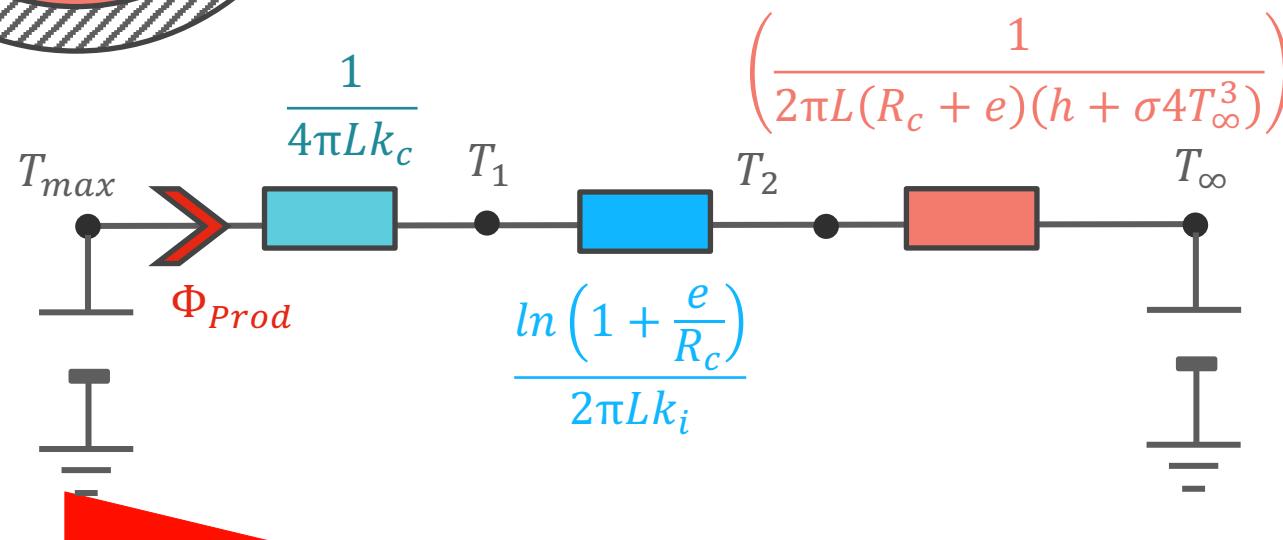
A partir des résultats précédents, et quelques calculs, on arrive à :



$$T_c^{max} - T_1 = \Phi_{Prod} \frac{1}{4\pi L k_c}$$

$$T_1 - T_2 = \Phi_{Prod} \frac{\ln\left(1 + \frac{e}{R_c}\right)}{2\pi L k_i}$$

$$T_2 - T_\infty = \Phi_{Prod} \left(\frac{1}{2\pi L (R_c + e)(h + \sigma 4 T_\infty^3)} \right)$$



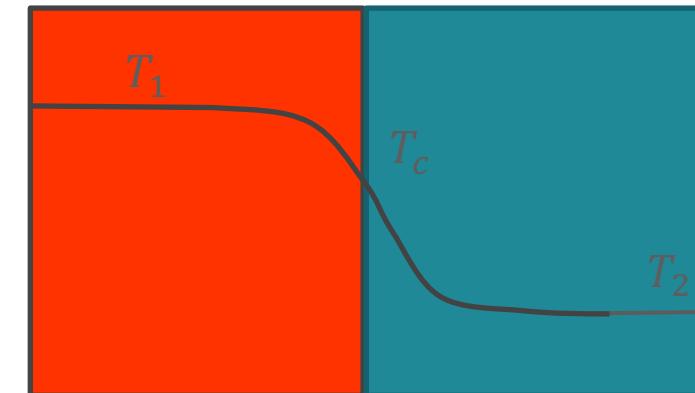
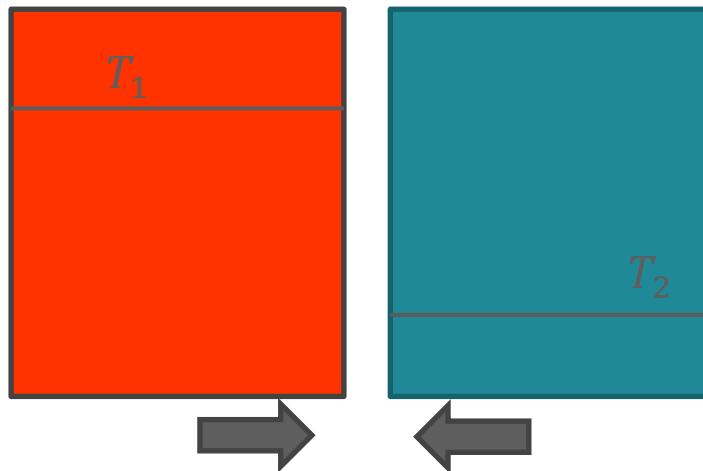


Notion d'effusivité

Plus le matériaux a une effusivité élevée, plus l'échange thermique avec son environnement est élevé.

$$b = \frac{k_{tr}}{\sqrt{D}} = \sqrt{k_{tr}\rho C} \text{ (J.K}^{-1}.m^{-2}.s^{-\frac{1}{2}}\text{)}$$

Application à la température de contact entre deux matériaux de températures uniformes T_1 et T_2 d'effusivités respectives b_1 et b_2 :



Les blocs se mettent en contact à partir de $t = 0$ Normandie Université





Notion d'effusivité

On a vu que le flux thermique se produisant dans un milieu semi infini à température pariétale imposée est de la forme :

$$\vec{\varphi} = b \frac{(T_c - T_0)}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \vec{U}_x$$



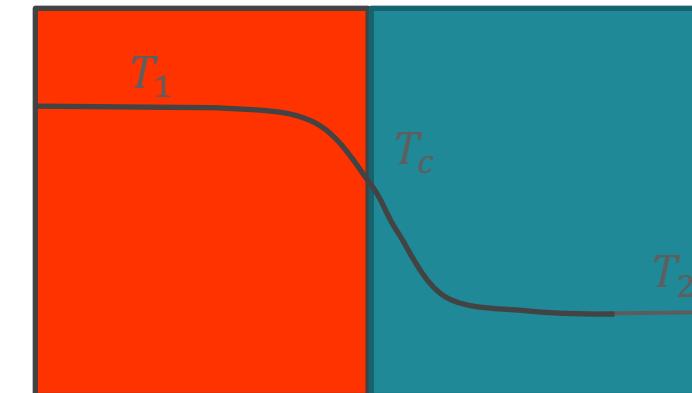
$$\vec{\varphi}_{x=0} = b_1 \frac{(T_1 - T_c)}{\sqrt{\pi t}} \vec{U}_x$$

$$\vec{\varphi}_{x=0} = b_2 \frac{(T_c - T_2)}{\sqrt{\pi t}} \vec{U}_x$$

$$b_1(T_1 - T_c) = b_2(T_c - T_2)$$



$$T_c = \frac{b_1 T_1 + b_2 T_2}{b_1 + b_2}$$





Notion d'effusivité

Le milieu de plus forte effusivité impose sa température au niveau du contact.
Exemple : si la chair humaine à une effusivité négligeable devant celle du marbre ($b_1 \ll b_2$) :

$T_c \rightarrow T_2$ Sensation de froid au touché

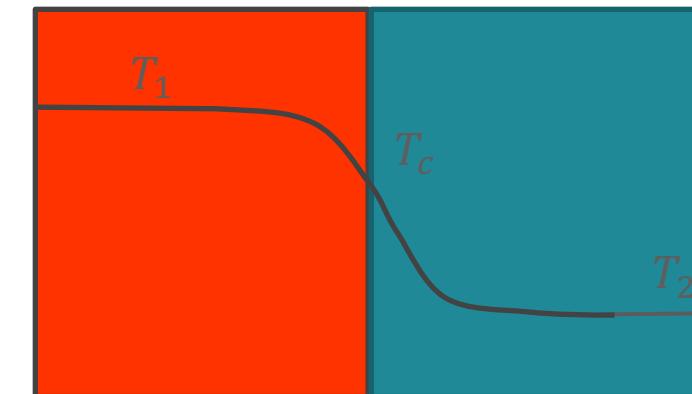
Au contraire, si l'on touche du polystyrène $b_2 \ll b_1$

$T_c \rightarrow T_1$ Sensation de chaleur au touché

Même si dans les deux cas T_1 et T_2 sont inchangés !



$$T_c = \frac{b_1 T_1 + b_2 T_2}{b_1 + b_2}$$





Température ressentie

L'exemple précédent montre que le ressenti humain peut être trompeur. En l'occurrence, la capacité du matériau à produire un flux thermique (le marbre) conduit à puiser de l'énergie dans celui qui s'y expose (le doigt). Cette « fuite » d'énergie est perçue comme une sensation de « froid ».

La sensation de froid apparaît lorsque le corps cède plus d'énergie thermique que son métabolisme lui en procure.

Les échanges se font par :

-**Conduction** (exemple du touché discuté précédemment et importance de l'effusivité).

-**Convection** (le coefficient h va accentuer les échanges thermiques, exemple d'une convection forcée avec un ventilateur)

-**Rayonnement** : on a déjà invoqué le rôle des couvertures de survie.

-**Evapotranspiration**: Exploitation de l'énergie nécessaire au changement d'état de la sueur (chaleur latente d'évaporation). Ce phénomène est favorisé ou freiné en fonction de l'humidité relative de l'air.



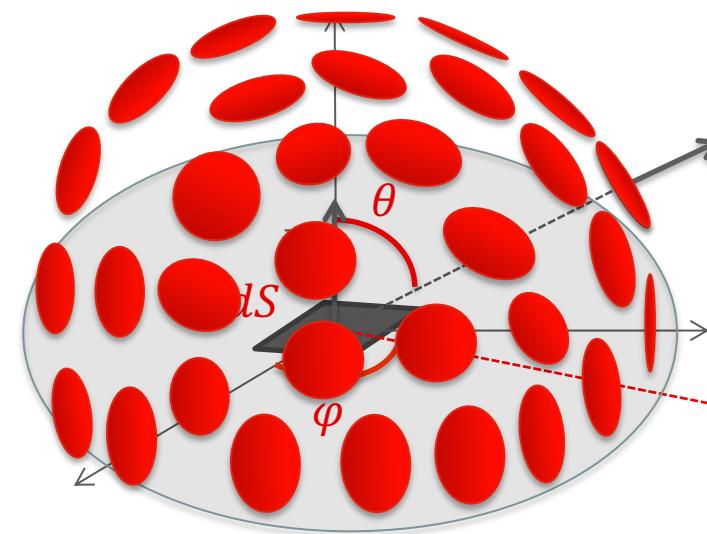
Chapitre 6 : Rayonnement



Outils mathématiques pour exprimer l'émission thermique des corps

L'émittance du corps noir $M_\lambda^0(\vec{r}, T)$ (Wm^{-3})

Représente la densité de flux d'énergie émis par la surface dans toutes les directions :



$$d^3\Phi_\lambda = M_\lambda(\vec{r}) \cos(\theta) d^2S d\lambda$$

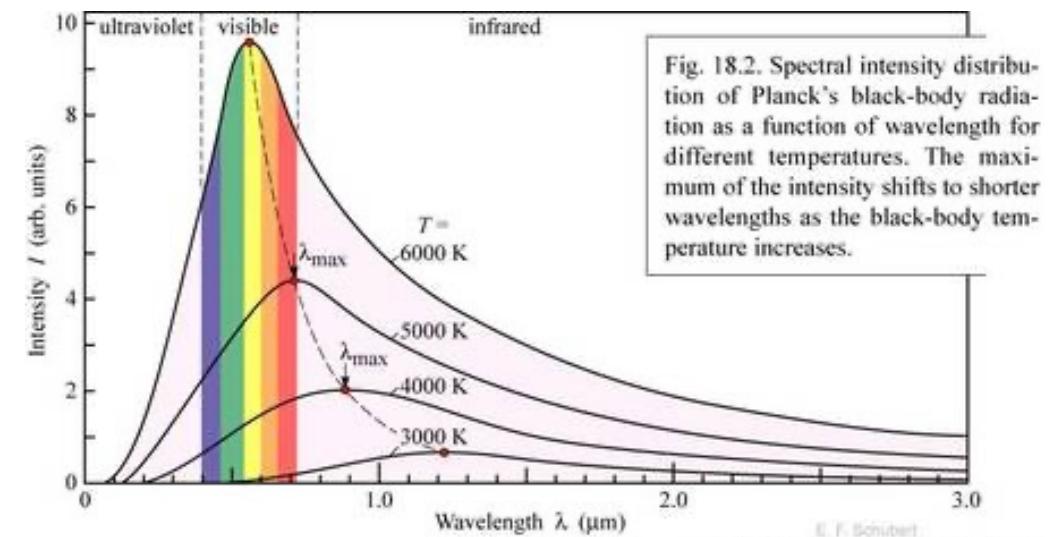
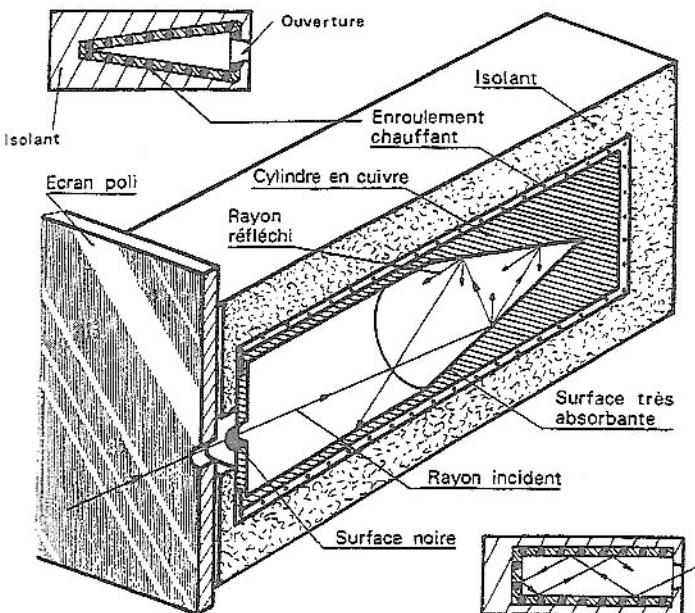


Outils mathématiques pour exprimer l'émission thermique des corps

L'émittance du corps noir $M_\lambda^0(\vec{r}, T)$ (Wm^{-3})

Le **corps noir** est un objet idéal qui permet d'évaluer le flux thermique **maximum** que peut rayonner un corps, en fonction de sa température.

Le rayonnement du corps noir peut être obtenu à partir d'une cavité aux parois opaques et isothermes dont on peut admettre qu'elle absorbe tout rayonnement perçu.





Outils mathématiques pour exprimer l'émission thermique des corps

La mécanique statistique permet d'évaluer la luminance du corps noir.

C'est la loi de Planck (Wm^{-3}) :

Indique « corps noir »



$$M_{\lambda,T}^0 = \frac{\pi C_1}{\lambda^5} \left(\exp \left(\frac{C_2}{\lambda T} \right) - 1 \right)^{-1}$$

$$C_1 = 2h \left(\frac{c_0}{n} \right)^2 \approx 1.19 \times 10^8 W \cdot m^{-2} \cdot \mu m^{-4}$$

Cst de Planck

Vitesse de la lumière dans le vide

*Indice optique
proche de 1 dans l'air*

$$C_2 = \frac{h c_0}{k_B n} \approx 14400 \mu m \cdot K$$



Constante de Boltzmann

$$1.3806488 \times 10^{-23} m^2 kg s^{-1} K^{-1}$$



Outils mathématiques pour exprimer l'émission thermique des corps

L'exitance totale du corps noir $M^0(\vec{r}, T)$ (Wm^{-2})

$$M^0 = \int_0^\infty M_\lambda^0 d\lambda = \int_0^\infty \pi \frac{C_1}{\lambda^5} \left(\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1 \right)^{-1} d\lambda = \sigma T^4$$

Constante de Stefan
 $5.67 \cdot 10^{-8} W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$





Outils mathématiques pour exprimer l'émission thermique des corps

La puissance radiative maximale par unité de surface pouvant être émise par une surface à température T dans tout le plan hémisphérique supérieur est l'émittance du corps noir:

$$M_T^0 = \sigma T^4$$

On dit d'un corps qu'il est « noir » s'il a cette capacité maximale d'émission. Dans le cas contraire, on lui attribue une émissivité ϵ (facteur sans dimension compris entre 0 et 1) de façon à ce que l'on puisse déduire son émittance de celle du corps noir :

$$M_T = \epsilon \sigma T^4$$

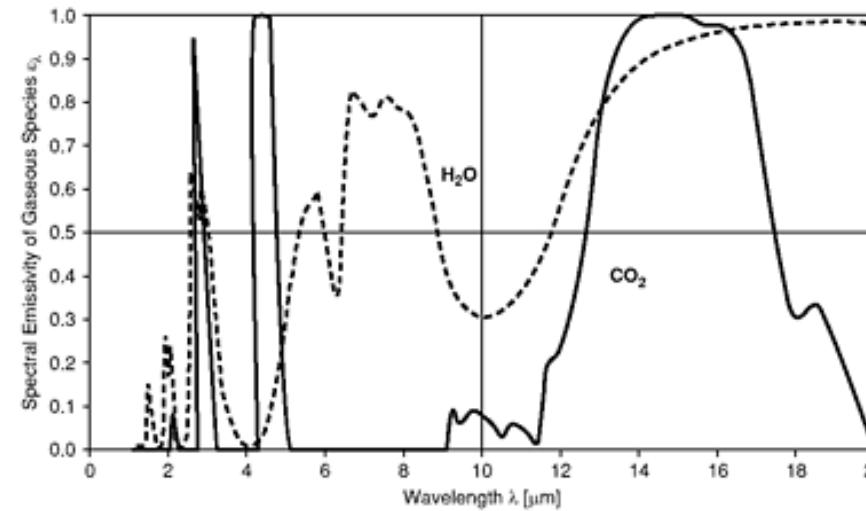


Outils mathématiques pour exprimer l'émission thermique des corps

Rmq : on peut utiliser le même formalisme pour exprimer l'émittance spectrique $M_\lambda(\vec{r}) = \epsilon_\lambda M_\lambda^0(\vec{r})$ mais il convient alors de connaître l'émissivité spectrique du matériau.

Émissivité de l'eau et du CO₂

$$M_T = \epsilon \sigma T^4$$



<http://accessengineeringlibrary.com/graph>



Outils mathématiques pour exprimer l'absorption lumineuse d'un corps

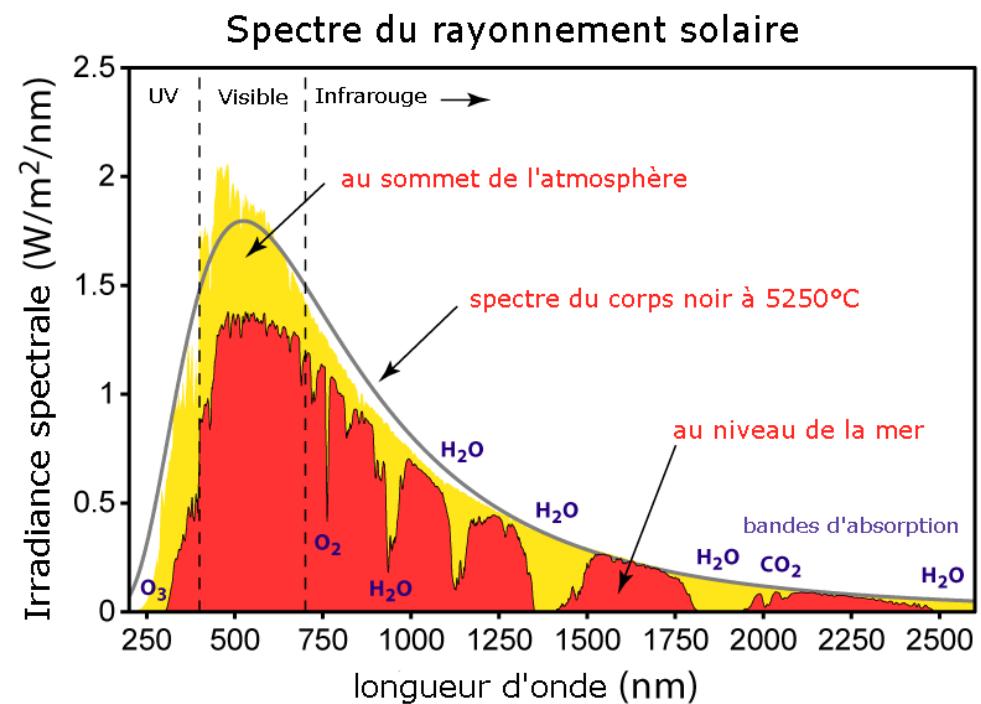
L'éclairement spectrique $E_\lambda(\vec{r})$ (Wm^{-3}) et total $E(\vec{r})$ (Wm^{-2})

Intensité, flux, luminance et exitance ont été établis pour permettre le calcul de la puissance radiative émise par une surface élémentaire.

Lorsque l'on souhaite évaluer la puissance radiative (monochromatique ou non) reçue sur une surface d^2S , on introduit l'éclairement :

$$d^3\Phi_\lambda = E_\lambda(\vec{r})d^2Sd\lambda$$

$$d^2\Phi = E(\vec{r})d^2S$$





Echanges entre surfaces

Lorsqu'un rayonnement parvient sur un matériau,
Une fraction de la puissance radiative incidente est :

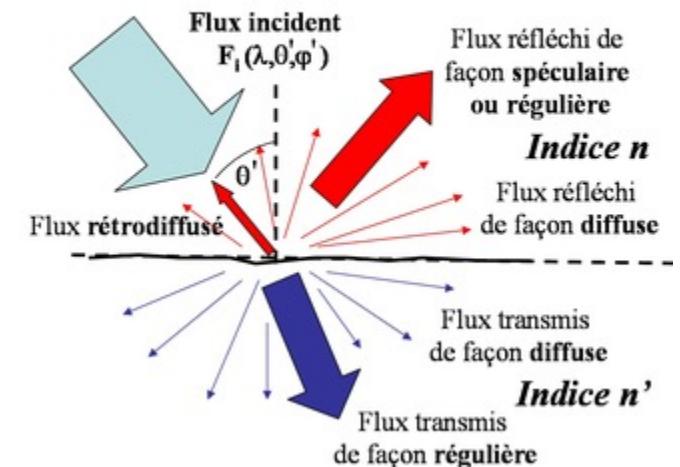
- α : absorbée par le matériau
- ρ : réfléchie (de façon spéculaire (loi de Descartes) ou diffuse
- τ : transmise de l'autre côté du matériau

Ces paramètres peuvent être définis de façon spectrale ou
De façon globale.

La conservation de l'énergie implique que $\alpha_\lambda + \rho_\lambda + \tau_\lambda = 1$

Le verre est transparent dans le visible $\tau_{vis} \rightarrow 1$ et donc $\alpha_{vis} + \rho_{vis} \rightarrow 0$

Le verre est opaque dans l'infrarouges $\tau_{IR} \rightarrow 0$ et donc $\alpha_{IR} + \rho_{IR} \rightarrow 1$



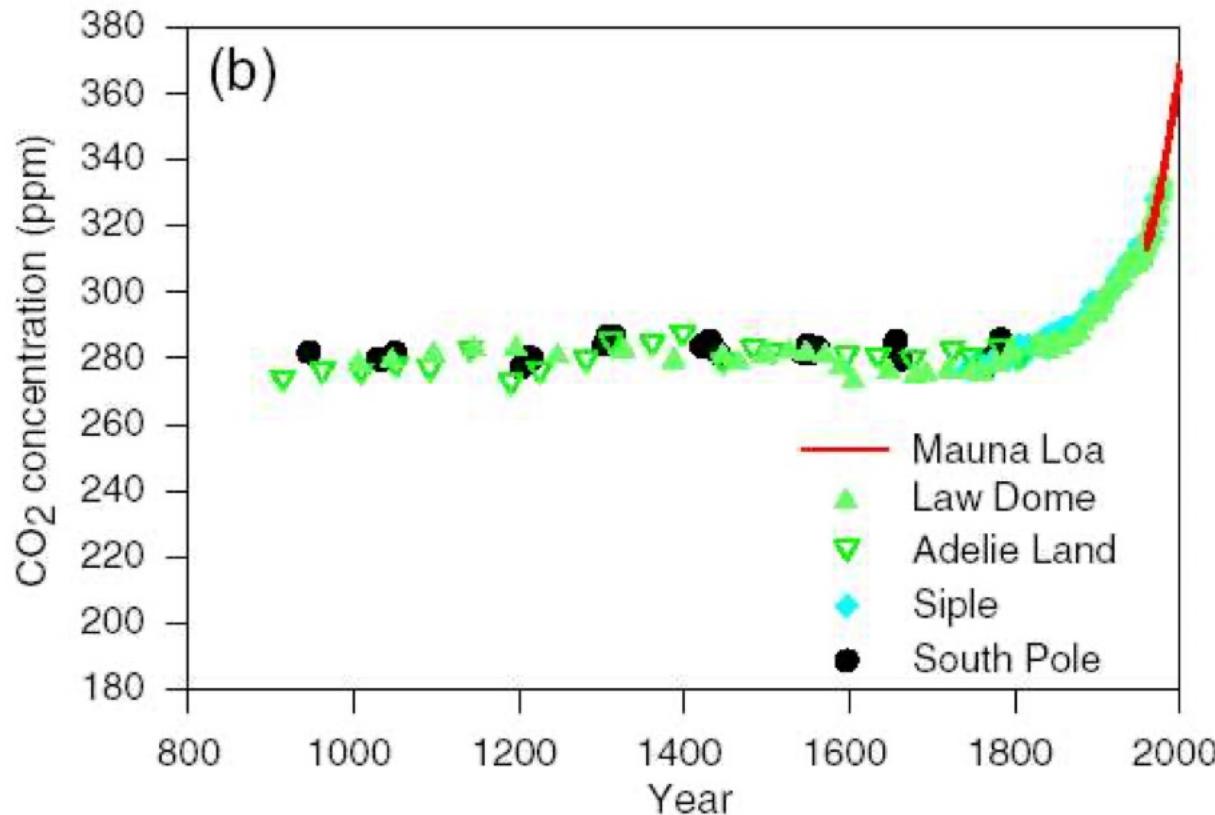
http://www.optique-ingenieur.org/fr/cours/OPI_fr_M05_C05/co/Contenu_06.html

Chapitre 7 : **Effet de Serre et réchauffement climatique**



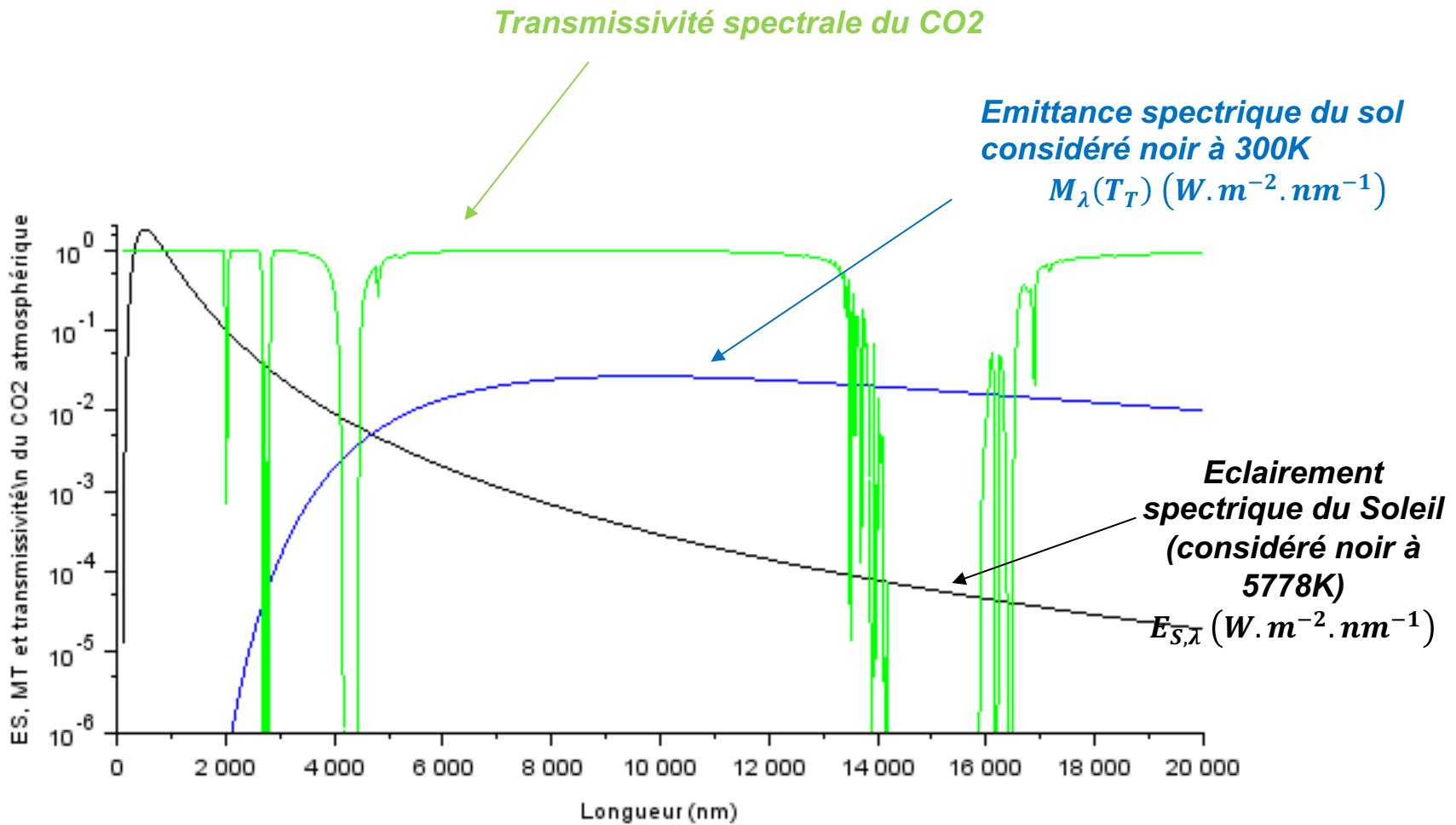
Bilan thermique terrestre avec atmosphère CO2

Estimation de la concentration en CO2 dans l'atmosphère depuis 1000 ans (basée sur l'analyse de carottes glaciaires en Antarctique)





Bilan thermique terrestre avec atmosphère CO₂ (415 ppm)



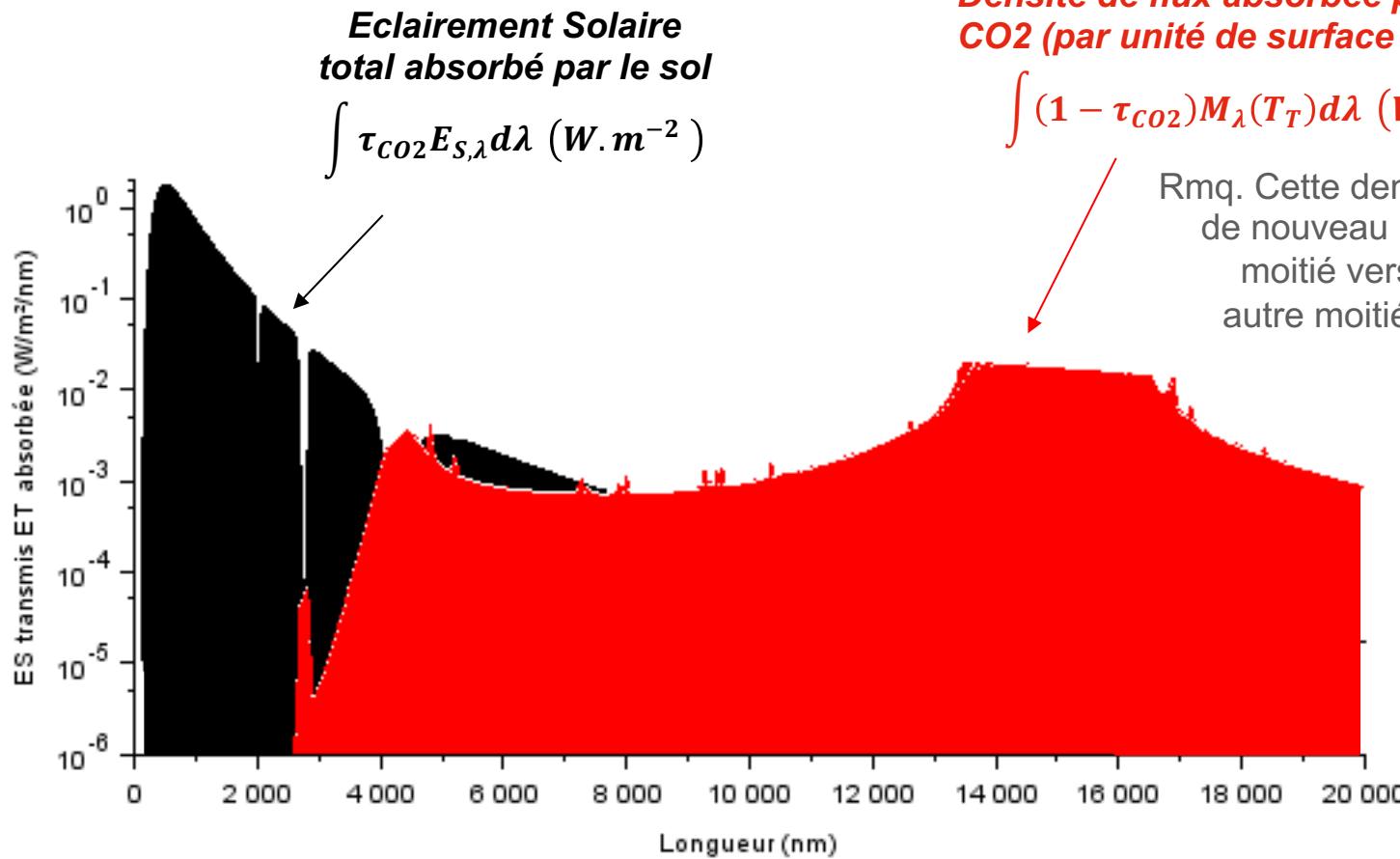
Quel rôle va jouer le CO₂ ?





Bilan thermique terrestre avec atmosphère CO₂

On intègre sur la longueur d'onde:





Bilan thermique terrestre avec atmosphère CO₂

Bilan thermique sur la Terre :

$$\phi_{Sol,abs} + \phi_{CO_2,abs} = \phi_{Sol,émis}$$

$$\pi R_T^2 \int \tau_{CO_2} E_{S,\lambda} d\lambda + 2\pi R_T^2 \int (1 - \tau_{CO_2}) M_\lambda(T_T) d\lambda = 4\pi R_T^2 \int M_\lambda(T_T) d\lambda$$

*Puissance radiative
solaire absorbée par le sol*

*Puissance radiative
rayonnée par le CO₂ et
absorbée par la Terre*

*Puissance radiative émise par
le sol*

$$f(\mathbf{T}_T) = \int \tau_{CO_2} E_{S,\lambda} d\lambda - 2 \int (1 + \tau_{CO_2}) M_\lambda(\mathbf{T}_T) d\lambda = 0$$

L'équilibre est atteint pour une température T_T du sol donnée!

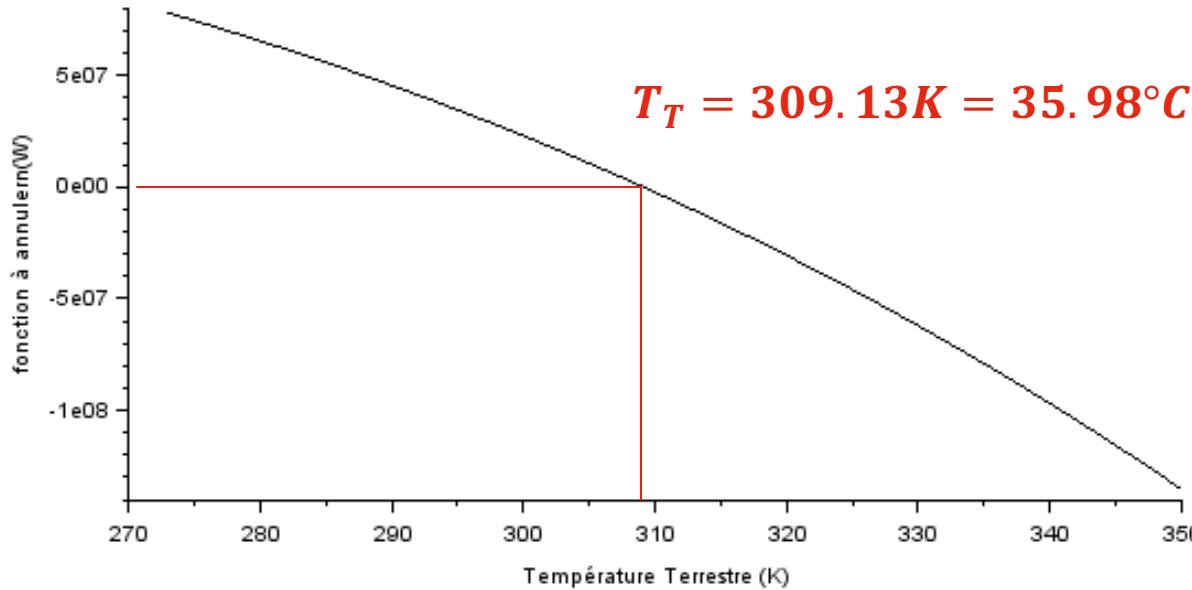
Rmq : Le rayon de la Terre n'intervient finalement pas dans le bilan...



Bilan thermique terrestre avec atmosphère CO2

Bilan thermique sur la Terre :

$$f(\mathbf{T}_T) = \int \tau_{CO_2} E_{S,\lambda} d\lambda - 2 \int (1 + \tau_{CO_2}) M_\lambda(\mathbf{T}_T) d\lambda = 0$$



L'équilibre thermique en présence de CO2 est atteint pour 36°C





Bilan thermique terrestre avec atmosphère CO2

La prise en compte du CO2 dans cet exemple illustre un réchauffement de la surface terrestre de 31°C par rapport au calcul initial sans atmosphère.

Cette valeur (35°C) est bien supérieure à la réalité (15°C). Qu'est ce qui peut expliquer cela ?

- La composition gazeuse de l'atmosphère est bien plus complexe.
- Le sol terrestre n'est pas un corps noir (exemple, la neige, les forêts...).
- Il y a des nuages des gouttelettes d'eau et de la glace dans l'air (renforçant l'albédo = pouvoir réfléchissant de l'atmosphère).
- Une partie du rayonnement incident participe à l'évaporation de l'eau (chaleur latente d'évaporation à considérer).

Gaz	Formule	Pouvoir réchauffant relatif/CO2
Dioxyde de carbone	CO ₂	1
Méthane	CH ₄	21
Protoxyde d'azote	N ₂ O	310
Perfluorocarbonates	C _n F _{2n+2}	6 500 à 8 700
Hydrofluorocarbones	C _n H _m F _p	140 à 11 700
Hexafluorure de soufre	SF ₆	23 900

Tableau I - source : GIEC

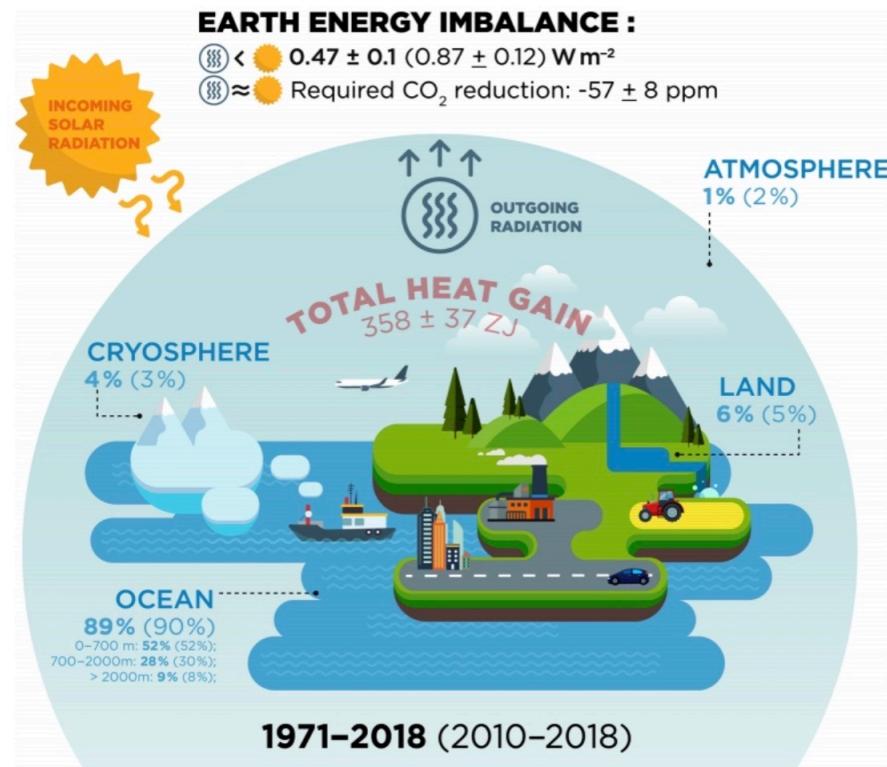


Ch. 7 Effet de Serre et réchauffement climatique



Pour les amateurs de chiffres, on note que le déséquilibre énergétique global est évalué à **0,87 W/m²** sur la période 1971-2018. Une valeur qui équivaut à une énergie effectivement absorbée de 358 zettajoules (10 puissance 21 joules).

La figure ci-contre illustre comment se répartie le stockage de l'énergie thermique sur la Terre.

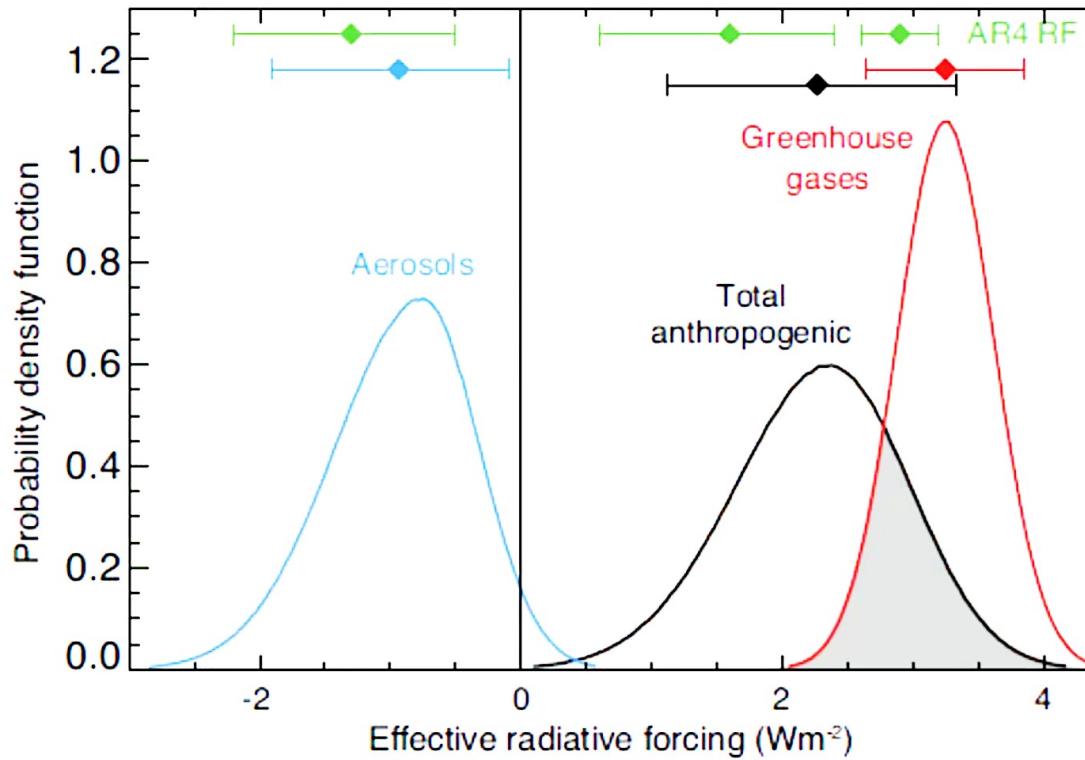


Les nombres en gras représentent les valeurs sur la période 1971-2018. Ceux entre parenthèses, les valeurs sur la période 2010-2018. Le déséquilibre énergétique global est indiqué en haut, de même que la réduction de CO₂ nécessaire pour ramener le système à l'équilibre. Plus précisément, ce dernier resterait plus chaud mais serait stabilisé. Crédits : Karina von Schuckmann & al. 2020.



Le CO₂ est-il seul responsable ?

Les gaz à effet de serre jouent un rôle mais pas uniquement. Les aérosols ont également un effet qui peut être négatif ou positif selon leur nature.

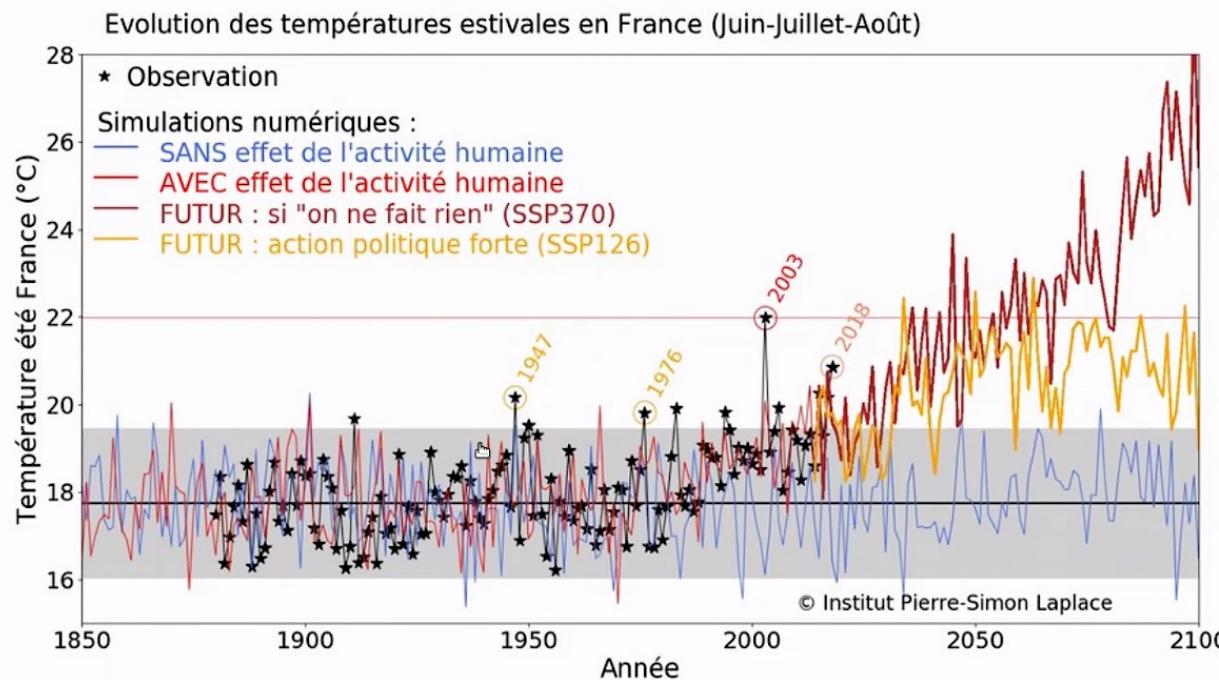


IPCC, 5th AR, 2013



Le CO₂ est-il seul responsable ?

L'effet de serre résulte du fait de la présence d'espèces qui laissent transmettre la lumière visible (du soleil) et bloquent (absorbent ou réfléchissent) les infrarouges (émission terrestre).



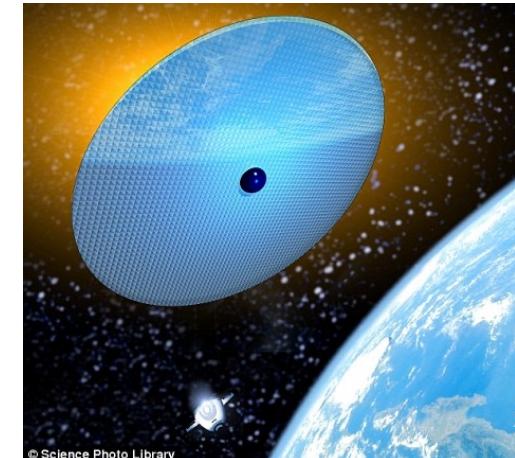


Bilan thermique terrestre avec atmosphère CO2

Que peut-on faire pour réduire le réchauffement climatique ?

-Réduire l'émission de gaz à effet de serre.

-Réduire le rayonnement solaire (un éclairement réduit de 1361 W/m^2 à 1000 Wm^2 réduit la température de 35°C à 17°C dans notre modèle de CO2).



-Augmenter l'albédo (pouvoir réfléchissant dans le visible, toitures et routes peintes en blanc, ensemencer le ciel en microgouttelettes...).





Que peut-on faire pour réduire le réchauffement climatique ?

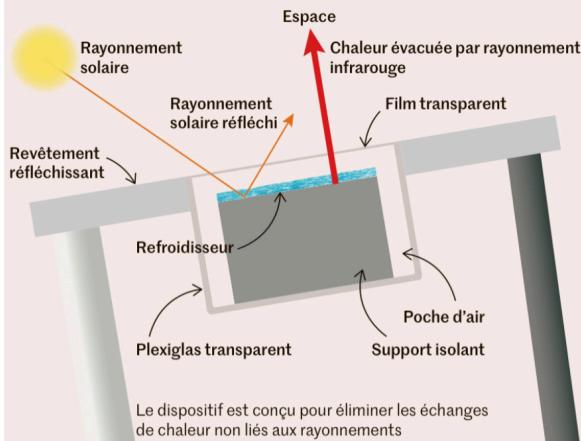
-Des solutions à l'étude

LE MONDE

LES SUPPLÉMENTS

DES SUPER-REFROIDISSEURS ÉCONOMES EN ÉNERGIE

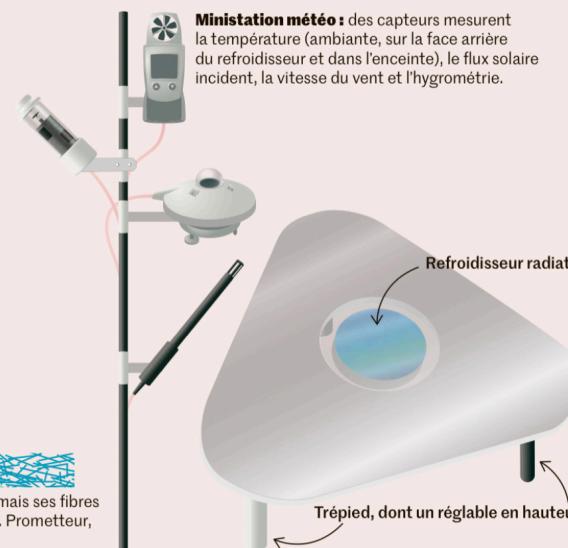
Le refroidisseur réfléchit le rayonnement solaire dans le spectre visible et proche infrarouge (moins de 4 µm). En parallèle, il émet de la chaleur dans l'infrarouge moyen (8 à 13µm), une fenêtre où les ondes traversent l'atmosphère, ce qui permet des échanges avec l'espace, une source infinie de froid.



Refroidisseur: ce matériau à base de nanofibres de verre ressemble à la laine de verre, mais ses fibres de silice enchevêtrées sont plus petites, de l'ordre de quelques centaines de nanomètres. Prometteur, il possède une forte puissance de refroidissement (jusqu'à 178 W/m²).

Depuis juin 2020, à l'Institut Pprime de Poitiers, un démonstrateur permet aux scientifiques de tester des refroidisseurs radiatifs passifs. Ces surfaces artificielles restent plus froides que l'air environnant (en moyenne 10 °C en dessous de la température ambiante), même en plein soleil, grâce à leur capacité à réfléchir le rayonnement solaire et à émettre de la chaleur. Un dispositif unique en France, selon l'Institut international du froid,

Sources : J. Drévillon, R. A. Yalçın, K. Joulain, E. Blandre Institut Pprime, CNRS, université de Poitiers, ISAE-Ensma



une organisation indépendante et intergouvernementale basée à Paris. Les chercheurs utilisent les techniques de nanofabrication pour concevoir des matériaux performants. Parmi ceux explorés, des nanofibres de verre, ainsi qu'un empilement de couches de métaux et de semi-conducteurs. L'enjeu, à terme, serait de rafraîchir un bâtiment ou une voiture sans consommer d'énergie, ni aggraver le réchauffement climatique.

Texte : Nathalie Picard Infographie : Philippe Da Silva



Fin de la première partie

-

Rappels sur les opérateurs

Le gradient : $f \rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}(f)$

Dans la base cartésienne :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \begin{vmatrix} \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \\ \partial f / \partial z \end{vmatrix}$$

De façon générale :

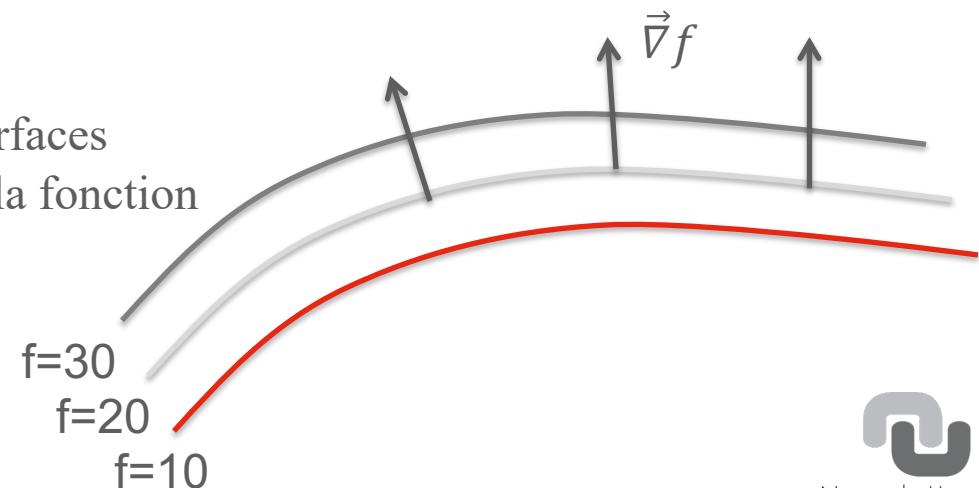
$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla}f \text{ avec}$$

$$df = \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot d\overrightarrow{OM}$$

$$\vec{\nabla} = \begin{vmatrix} \partial / \partial x \\ \partial / \partial y \\ \partial / \partial z \end{vmatrix}$$

Propriétés géométriques :

- Le gradient est orthogonal aux iso-surfaces
- Il est dirigé dans le sens croissant de la fonction



Le gradient : $f \rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}(f)$

$$\begin{aligned} \text{Linéarité : } & \overrightarrow{\text{grad}}(\alpha f + \beta g) = \alpha \overrightarrow{\text{grad}}(f) + \beta \overrightarrow{\text{grad}}(g) \\ & \overrightarrow{\text{grad}}(\alpha f g) = \alpha(f \overrightarrow{\text{grad}}(g) + \overrightarrow{\text{grad}}(f)g) \end{aligned}$$

Le gradient d'un vecteur est une matrice: $\vec{A} \rightarrow [\text{grad}(\vec{A})]$

Dans la base cartésienne :

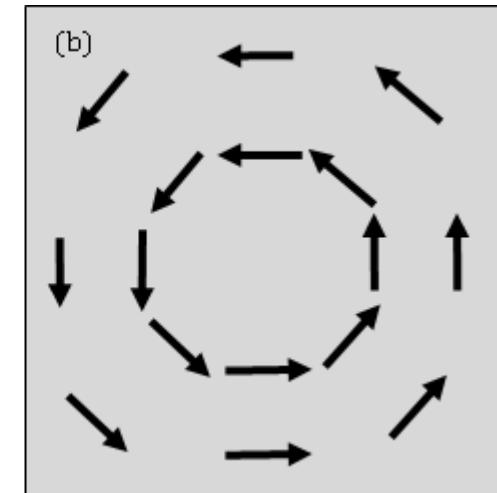
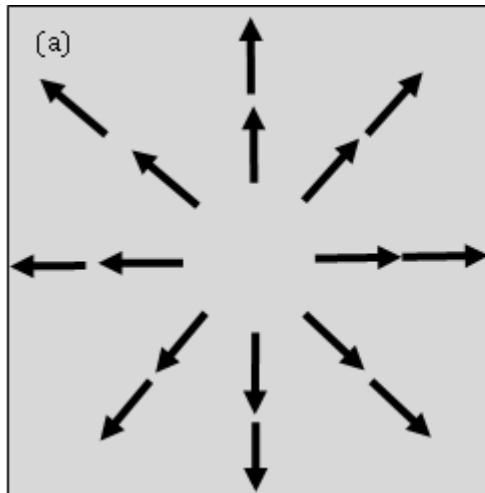
$$[\text{grad}(\vec{A})] = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} & \frac{\partial A_x}{\partial y} & \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial y} & \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_z}{\partial x} & \frac{\partial A_z}{\partial y} & \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \text{Tel que} \quad d\vec{A} = [\text{grad}(\vec{A})] \cdot d\overrightarrow{OM}$$

La divergence: $\vec{A} \rightarrow \operatorname{div}(\vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ Dans la base cartésienne

$$\operatorname{div}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{vmatrix}$$

Ce produit scalaire entre le vecteur nabla (qui indique la direction de la croissance de \vec{A}) et le vecteur \vec{A} est maximum (ou minimum) lorsque \vec{A} est colinéaire à son propre gradient :

$$\operatorname{div}(\vec{A}) \neq 0$$



$$\operatorname{div}(\vec{A}) = 0$$

La divergence est associée à une notion de point « puit » ou « source »

La divergence: $\vec{A} \rightarrow \operatorname{div}(\vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ Dans la base cartésienne

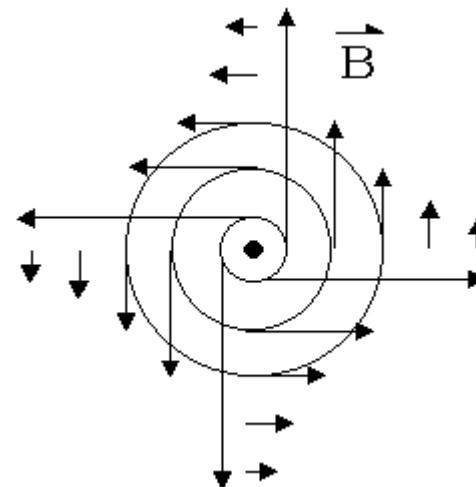
Linéarité : $\operatorname{div}(\alpha \vec{A} + \beta \vec{B}) = \alpha \operatorname{div}(\vec{A}) + \beta \operatorname{div}(\vec{B})$

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}(\alpha f \vec{A}) = \alpha \left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}(f) \cdot \vec{A} + f \operatorname{div}(\vec{A}) \right)$$

$$\text{Le rotationnel : } \vec{A} \rightarrow \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & A_x \\ \frac{\partial}{\partial y} & A_y \\ \frac{\partial}{\partial z} & A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Dans la base cartésienne

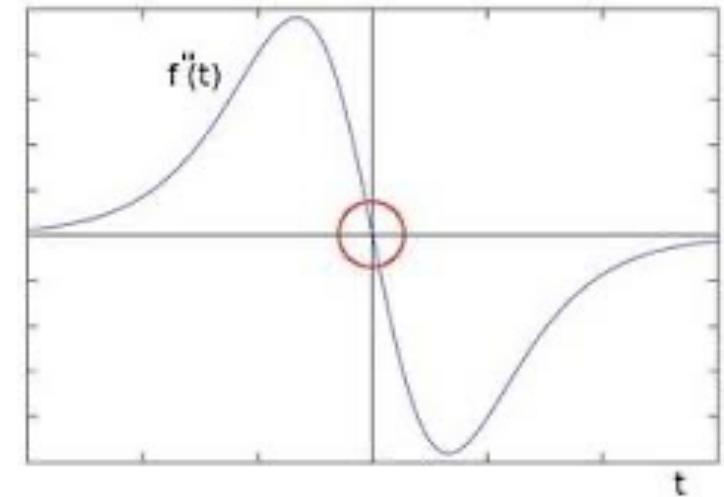
Capacité des variations spatiales du champ vectoriel à induire un mouvement de rotation...



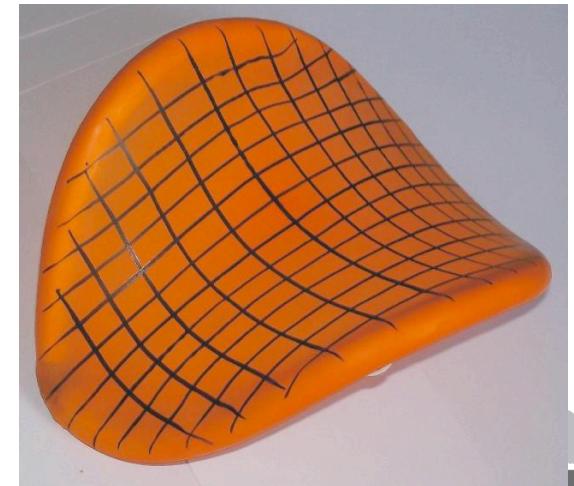
$$\text{Le laplacien: } \Delta f = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}(f)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Dans la base cartésienne

Pour une fonction 1D, le laplacien $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ est associé à la courbure locale. $\Delta f = 0$ représente le point d'inflexion.

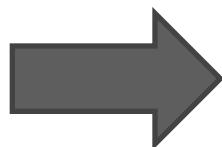


Pour une fonction 2D, le laplacien $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ est toujours associé à la courbure locale $\Delta f = 0$ est un point celle, compensation des courbures positives et négatives dans deux directions différentes :



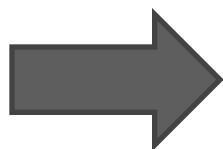
Quelques relations simples à démontrer :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}(f)) = \vec{0} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} f = \vec{0} \text{ (produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires)}$$



Si $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) = \vec{0}$ alors, il existe f tel que $\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}(f)$, on dit que \vec{A} dérive d'un potentiel.

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})) = 0 \text{ car ce équivaut à } \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})$$



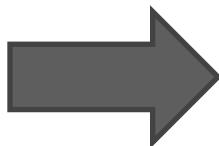
Si $\text{div}(\vec{A}) = 0$ alors, il existe \vec{B} que $\vec{A} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B})$, on dit que \vec{A} dérive d'un rotationnel.

Quelques relations un peu moins simples à démontrer :

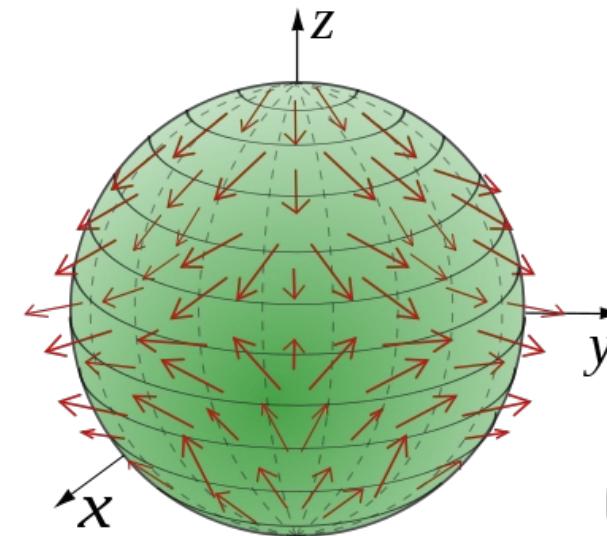
Théorème de Green-Ostrogradski :

Soit un champ vectoriel défini continu et dérivable en tout point, délimité par un volume délimité par une courbe fermée

$$\iint_S \vec{A}(N) \cdot \overrightarrow{d^2S} = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{A}(M)) d^3V$$



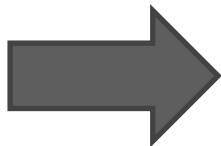
L'intégrale du flux du champ \vec{A} sur la surface équivaut à l'intégrale volumique de la divergence de \vec{A} .



Théorème de Stokes :

Soit un champ vectoriel défini continu et dérivable en tout point d'une surface elle-même délimitée par une courbe fermée.

$$\int_{\Gamma} \vec{A}(l) \cdot d\vec{\lambda} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}} (\vec{A}(N)) \cdot \overrightarrow{d^2S}$$



La circulation sur le contour de la courbe fermée équivaut au flux de rotationnel sur la surface.

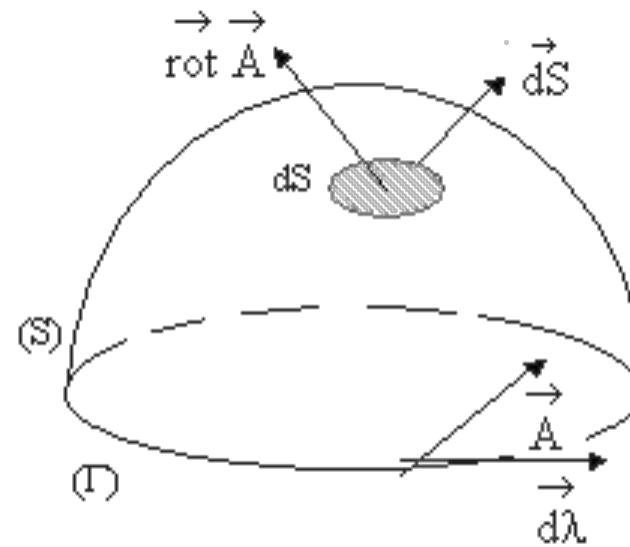


Fig.33