

# Модель параллельного сближения на плоскости группы преследователей с одновременным достижением цели.

Дубанов А. А.

Бурятский Государственный Университет, Российская Федерация

**Аннотация.** В данной статье рассматривается кинематическая модель преследования группой одиночной цели методом параллельного сближения. Модель основывается на том, что преследователи стараются придерживаться заранее спроектированных траекторий. Траектории преследователя имеют ограничения по кривизне. Начальные направления скоростей преследователей имеют произвольный характер, что вносит изменения в известный метод параллельного сближения. В нашей модели цель достигается преследователями одновременно. Это происходит из-за изменения длин прогнозируемых траекторий таким образом, чтобы синхронизировать время достижения цели. Изменение длины происходит за счет увеличения радиуса кривизны на первоначальном участке траектории.

**Ключевые слова.** Преследование, цель, достижение, синхронизация, сближение

## 1. Введение

Характерная особенность метода параллельного сближения на плоскости [1], [2], [3] заключается в том, что скорость преследователя направлена в точку на окружности Аполлония. На рисунке 1 это точка  $K_i$ , а точка  $P_i$  – положение преследователя, точка  $T_i$  – положение цели в  $i$  момент времени.

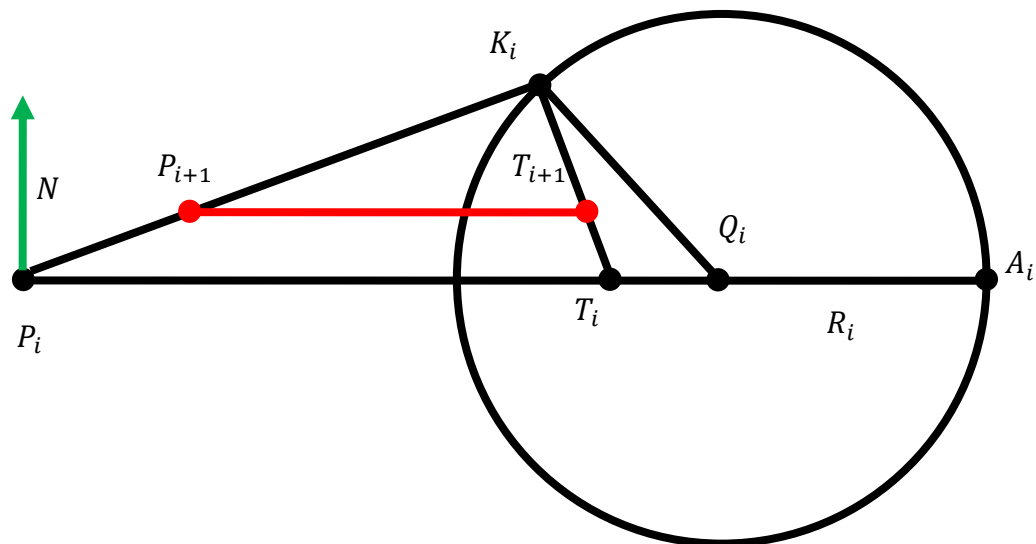


Figure 1 - Parallel approach of the pursuer and the target

Итерационная схема метода параллельного сближения представлена на рисунке 1. Следующий шаг итераций является таким:

$$P_{i+1} = P_i + V_p \cdot \frac{P_i K_i}{|P_i K_i|} \cdot \Delta T, T_{i+1} = T_i + V_t \cdot \frac{T_i K_i}{|T_i K_i|} \cdot \Delta T.$$

Радиус  $R_i$  и центр окружности  $Q_i$  Аполлония рассчитываются следующим образом:

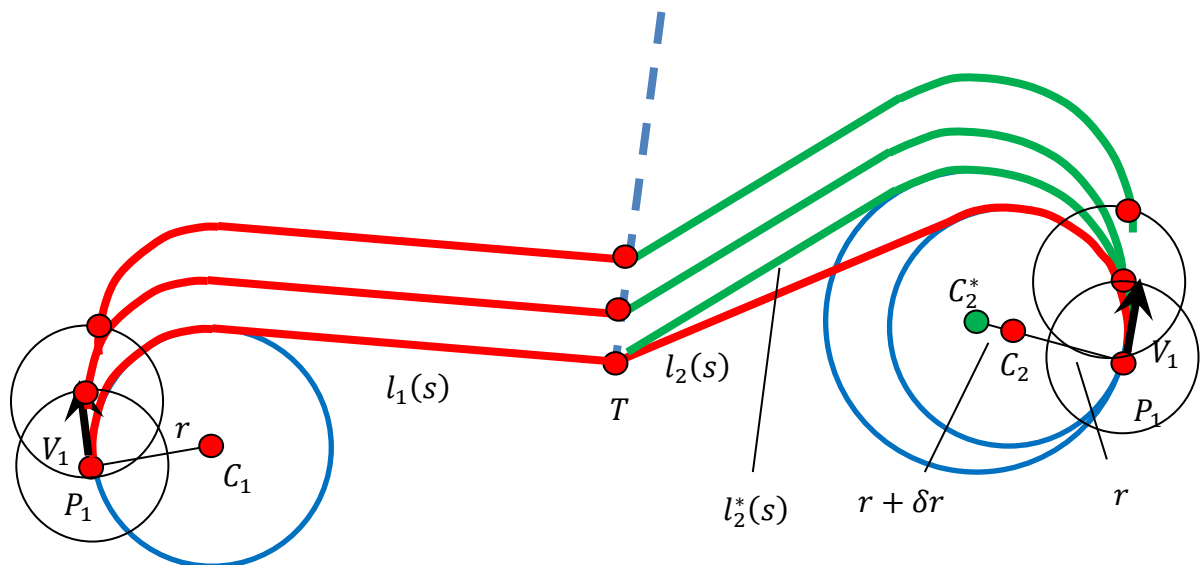
$$R_i = \frac{V_T^2}{V_P^2 - V_T^2} \cdot |T_i - P_i|, Q_i = T_i + \frac{V_T^2}{V_P^2 - V_T^2} \cdot (T_i - P_i).$$

Координаты точки  $K_i$  есть продукт решения системы уравнений относительно непрерывного параметра  $t$ :

$$\begin{cases} (K_i - Q_i)^2 = R_i^2 \\ K_i = T_i + V_T \cdot \frac{T_{i+1} - T_i}{|T_{i+1} - T_i|} \cdot t. \end{cases}$$

## 2. Постановка задачи

Как видно из описания метода параллельного сближения, начальная скорость преследователя не может иметь произвольного направления в начальной постановке задачи.



**Figure 2 – Kinematic model of the parallel group approach**

Мы, в данной статье хотим реализовать метод, близкий к методу параллельного сближения. В этом методе скорости  $V_1$ ,  $V_2$  преследователей  $P_1$ ,  $P_2$  направлены произвольно (Figure 2).

Нашей задачей является для каждого из преследователей сформировать однопараметрическое множество конгруэнтных линий (Figure 2), которые будут являться прогнозируемыми траекториями в определенный момент времени. Положение прогнозируемых траекторий в момент времени диктуется положением цели  $T$ .

Нашей целью в этой модели является модифицировать прогнозируемые траектории так, чтобы передвижение преследователей в момент достижения цели завершилось одновременно. На Figure 2 показана итерационная схема расчета следующего каждого из преследователей. Это точка пересечения окружности с центром в точке текущего нахождения преследователя с радиусом дискретного шага с линией, соответствующей следующему положению цели.

### 3. Теория

#### 3.1 Моделирование составной кривой

Для решения поставленной задачи, мы должны смоделировать для каждого из преследователей составную кривую (Figure 3).

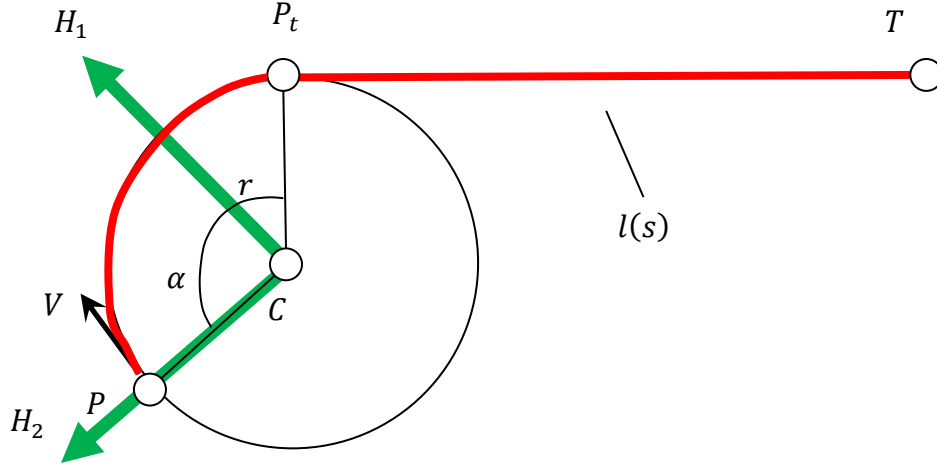


Figure 3 – Modeling many parallel lines

Так как в нашей модели существуют ограничения на кривизну траектории всех участников задачи преследования, то наш преследователь  $P$  в прогнозируемой траектории (Figure 3) пройдет по дуге  $\overline{PP_t}$ , потом выйдет на прямолинейный участок  $[P_tT]$  до цели  $T$ . Радиус кривизны  $r$  окружности  $(C, r)$  в нашей модели считается заданным и может изменяться в сторону увеличения. Центр  $C$  окружности  $(C, r)$  удовлетворяет системе уравнений:

$$\begin{aligned} |C - P| &= r \\ V \cdot (C - P) &= 0 \end{aligned}$$

В локальной системе координат  $(H_1, H_2)$  с центром в точке  $C$  уравнение дуги  $\overline{PP_t}$  будет:

$$L_{circle}(\alpha)^* = r \cdot \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \end{bmatrix}.$$

Где  $\alpha$  принимает значения от 0 до  $\arccos\left(\frac{(P-C) \cdot (P_t-C)}{|P-C| \cdot |P_t-C|}\right)$ . Базисные векторы  $(H_1, H_2)$  равны:

$$H_1 = \frac{V}{|V|}, H_2 = \frac{P - C}{|P - C|}.$$

Перевод в мировую систему координат линии  $L_{circle}(\alpha)$  будет таким:

$$L_{circle}(\alpha) = \begin{bmatrix} L_{circle}(\alpha)^* \cdot E_1^* \\ L_{circle}(\alpha)^* \cdot E_2^* \end{bmatrix} + C$$

$$E_1^* = \begin{bmatrix} E_1 \cdot H_1 \\ E_1 \cdot H_2 \end{bmatrix}, E_2^* = \begin{bmatrix} E_2 \cdot H_1 \\ E_2 \cdot H_2 \end{bmatrix}$$

$E_1, E_2$  – базисные векторы МСК

Уравнение для прямолинейного участка  $[P_tT]$  представим в виде:

$$L_{line}(\varepsilon) = (1 - \varepsilon) \cdot P_t + \varepsilon \cdot T.$$

Полученные сегменты линий  $L_{circle}(\alpha)$  и  $L_{line}(\varepsilon)$  необходимо объединить в одну составную линию и выполнить параметризацию от длины дуги.

В тестовой программе, написанной по материалам статьи, мы получили объединенные массивы координат  $\{X_i, Y_i\}, i \in 0..N$  нашей составной кривой. Введем формальный параметр  $\tau$ , который непрерывно пробегает значения от 0 до  $N$ . После процедуры кубической сплайн-интерполяции будем иметь непрерывные координатные функции  $X(\tau)$  и  $Y(\tau)$  от формального параметра  $\tau$ .

### 3.2 Параметризация составной кривой от длины дуги

Из уравнения для полного дифференциала длины дуги  $ds^2 = dX^2 + dY^2$  мы получим дифференциальное уравнение первого порядка для дальнейшей передачи во встроенные решатели задачи Коши:

$$D(\tau, s) = \frac{ds}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{\frac{dX^2}{d\tau} + \frac{dY^2}{d\tau}}}, \tau(0) = 0.$$

Таким образом, нами получены зависимости  $X(s)$  и  $Y(s)$  от параметра длины дуги. Если параметр длины будет удовлетворять соотношению  $s = V \cdot t$ , где  $t$  - это реальное время, то мы получим зависимости  $X(t)$  и  $Y(t)$ , являющимися координатными функциями базовой линии  $l(t)$ .

Для того чтобы выделить линию, соответствующую положению цели  $T(t)$ , необходимо к базовому уравнению линии  $l(t)$  прибавить вектор  $T(t) - T(0)$  (Figure 2).

### 3.3 Модификация длины прогнозируемых траекторий

Если у нас возникает необходимость увеличения длины базовой линии, то мы поступаем следующим образом. Длина базовой линии зависит от следующих параметров: координат цели  $T$ , координат преследователя  $P$ , вектора скорости  $V$  преследователя и радиуса  $r$  минимального радиуса кривизны (Figure 2, 3).

Пусть функция длины траектории будет такой  $L = L(T, P, V, r)$ . Если преследователи  $P_1$  и  $P_2$  достигают цель  $T$  за промежутки времени  $t_1$  и  $t_2$ , то мы выбираем наибольший из этих промежутков и обозначим его, как  $t_f$ . Было бы некорректным в нашей модели рассчитывать временные промежутки так

$$t_1 = \frac{L(T, P_1, V_1, r_1)}{|V_1|} \text{ и } t_2 = \frac{L(T, P_2, V_2, r_2)}{|V_2|}.$$

Поскольку перемещение преследователей не является перемещением по одной линии с постоянной скоростью, а является перемещением по линиям из однопараметрического множества. Следующее положение преследователя есть точка пересечения окружности с радиусом равным дискретному шагу с линией, соответствующей следующему положению цели (Figure 2).

Так как представленная модель группового преследования является квазидискретной, то задача о синхронизации временных промежутков  $t_1$  и  $t_2$  сводится к программному увеличению радиуса кривизны  $r$  до тех пор, пока наименьший из временных промежутков не будет равен наибольшему.

## 4. Результаты

По материалам статьи изготовлена тестовая программа, в которой два преследователя с произвольным направлением скоростей начинают преследовать цель, движущуюся прямолинейно с постоянной скоростью.

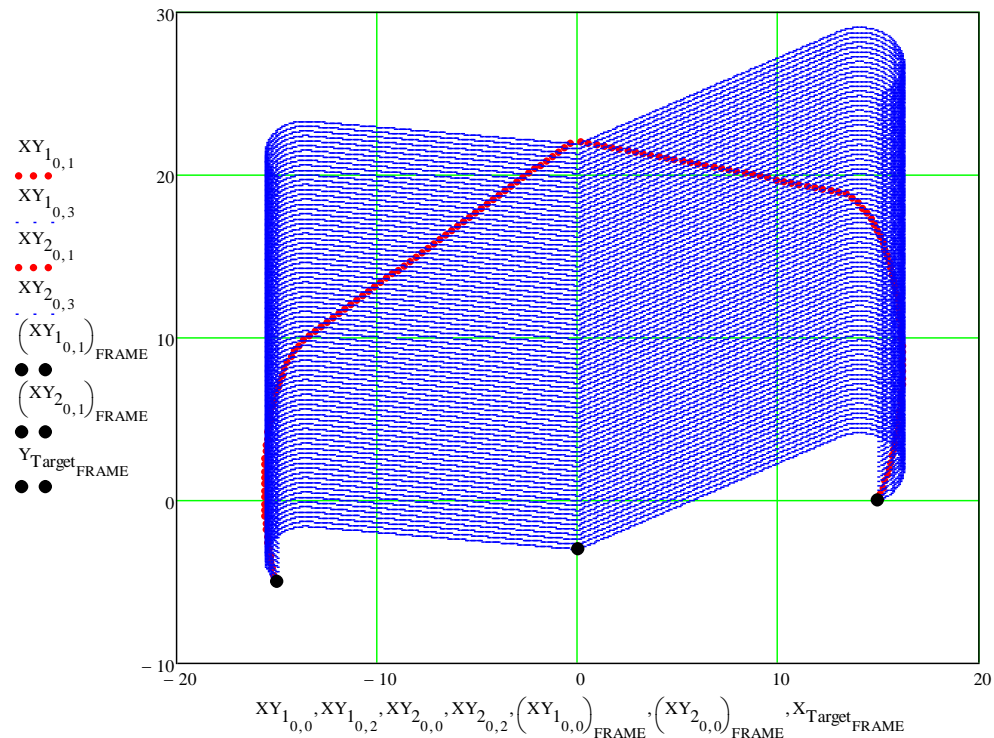


Figure 4 – Results of the program simulating the simultaneous achievement of the goal

На figure 4 представлен первый кадр работы программы. Figure 4 дополнен ссылкой на анимированное изображение [8].

Отметим, что с текстом программы можно ознакомиться на сайте автора [9]. В своей работе мы опирались на результаты, полученные в работах [4-7]. Также были приняты внимание работы [10-13]

## 5. Выводы

В тестовой программе нами выбран прямолинейный характер движения цели из-за того, что любую криволинейную траекторию можно трактовать как совокупность прямолинейных участков. И выбор следующих шагов преследователей с синхронизацией времени достижения цели моделировать так, как будто бы цель двигалась прямолинейно. На следующем прямолинейном участке все будет повторяться.

Мы рассмотрели преследование только одной цели, но ничто не препятствует разработанные методы и алгоритмы применить и в случае одновременного достижения группы из нескольких целей группой из нескольких преследователей.

Данная тестовая программа рассматривает предопределенную траекторию цели. В дальнейшем, мы как перспективу, будем рассматривать адаптивное поведение цели с различными стратегиями.

## 6. Список литературы

1. Isaacs R. Differential games. Moscow: Mir, 1967.
2. L. S. Pontryagin. Linear differential game of evasion. Tr. MIAN SSSR. 1971. T. 112. P. 30-63.
3. N. N. Krasovsky, A. I. Subbotin. Positional differential games. Moscow-Nauka, 1974
4. Yu. N. Zhelnin. Linearized pursuit and evasion problem on the plane // Scientific notes of TSAGI, no. 3, Vol. 8, 1977, Pp. 88-98.
5. Burdakov S. V., Sizov P. A. Algorithms for motion control by a mobile robot in the pursuit problem // Scientific and technical Bulletin of the Saint Petersburg state Polytechnic University. Computer science. Telecommunications. Management. 2014. no. 6 (210). Pp. 49-58.
6. E. N. Simakova. On a differential game of pursuit // Automatics and telemekhanics, 1967, no. 2, Pp. 5-14.
7. Algorithm for following predicted paths in the pursuit problem. URL: <http://dubanov.exponenta.ru> (date accessed: 22.07.2019)
8. Video, results of the program simulating the simultaneous achievement of the goal, <https://www.youtube.com/watch?v=7VNHNwCbWrg>
9. <http://dubanov.exponenta.ru> Section " Group pursuit with different strategies for a single goal»
10. Vagin D. A., Petrov N. N. the Task of chasing tightly coordinated escapees // Izvestiya RAS. Theory and control systems. 2001. no. 5. Pp. 75-79.
11. Bannikov A. C., Some non-stationary problems of group pursuit, proceedings Of the Institute of mathematics and computer science of Udsu. 2013. Issue 1 (41), p. 3-46
12. Bannikov A. S. non-Stationary task of group pursuit // Proceedings of the Lobachevsky Mathematical center. Kazan: Publishing house of the Kazan mathematical society, 2006, Vol. 34, Pp. 26-28.
13. Izmestev I. V., Ukhobotov V. I., "the problem of chasing small-maneuverable objects with a terminal set in the form of a ring", Proceedings of the international conference "Geometric methods in control theory and mathematical physics: differential equations, integrability, qualitative theory" Ryazan, September 15-18, 2016, Results of science and technology. Lie. Mat. and its ADJ. Temat. obz., 148, VINITI RAS, Moscow, 2018, 25-31