1. Введение

Пусть в нашем распоряжении имеется две поверхности. Они представлены в параметрическом виде. Будем считать, что каждую точку этих поверхностей можно взаимно однозначно отобразить на поверхность сферы. Над поверхностями нам необходимо совершить операции аналогичные булевым. Необходимо добиться, чтобы сеть параметрических линий являлась непрерывной при переходе с одной поверхности на другую.

2. Перемещение сети параметрических линий по поверхности объекта

Пусть поверхность объекта, отображаемого на сферу, задана в виде $\vec{R}=\vec{R}(u,v)$, $u\in[0;u_p]$, $v\in[0;v_p]$. На сфере соответствующая точка строится по формулам $\vartheta=\pi\cdot\frac{u}{u_p}$, $\varphi=2\pi\cdot\frac{v}{v_p}$. При помощи мыши в интерактивном режиме мы можем назначить новое положение полюсов на объекте (см. рис. 1). На сфере им соответствуют значения ϑ_1,φ_1 и ϑ_2,φ_2 (рис. 2).

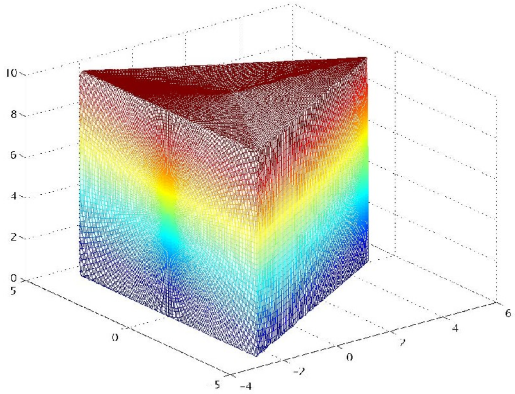

Рис. 1

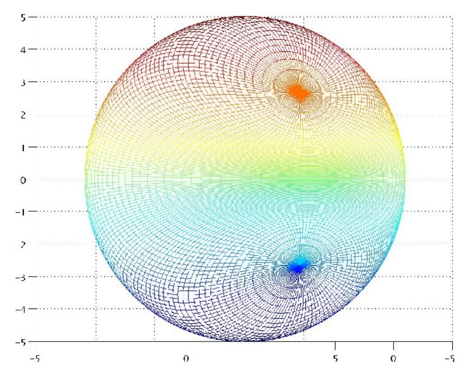

Рис. 2

Построим нормали $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ к сфере в точках ϑ_1,φ_1 и ϑ_2,φ_2. А также касательные плоскости Σ_1 и Σ_2 в этих точках. Рассмотрим однопараметрическое семейство плоскостей, содержащих линию пересечения Σ_1 и Σ_2 (рис. 3). Каждая из плоскостей пересекается со сферой по окружности. Положение точки на окружности и угол наклона к плоскости Σ_1 можно принять за новые координаты точки α,β. Параметр α есть угол между вектором, соединяющим центр окружности и точку на окружности, и вектором, проходящим через центр сферы и перпендикулярный линии пересечения плоскостей Σ_1 и Σ_2.

3. Расчет новой сети параметрических линий

Определим нормали $\vec{N}_1=\begin{bmatrix}\sin(\vartheta_1)\cdot\cos(\varphi_1)\\ \sin(\vartheta_1)\cdot\sin(\varphi_1)\\ \cos(\vartheta_1)\end{bmatrix}$ и $\vec{N}_2=-\begin{bmatrix}\sin(\vartheta_2)\cdot\cos(\varphi_2)\\ \sin(\vartheta_2)\cdot\sin(\varphi_2)\\ \cos(\vartheta_2)\end{bmatrix}$. Введем вектор $\vec{E}_1=\frac{[\vec{N}_2\times\vec{N}_1]}{|[\vec{N}_2\times\vec{N}_1]|}$, коллинеарный линии пересечения Σ_1 и Σ_2. Векторы $\vec{L}_1=\frac{[\vec{N}_1\times\vec{E}_1]}{|[\vec{N}_1\times\vec{E}_1]|}$ и

$\vec{L}_2 = \frac{[\vec{N}_2 \times \vec{E}_1]}{\left|[\vec{N}_2 \times \vec{E}_1]\right|}$ принадлежат плоскостям Σ_1 и Σ_2, соответственно, и перпендикулярны $\vec{E}_1$.

Пусть величина угла Ψ равна половине угла между плоскостями Σ_1 и Σ_2,

$\Psi = \frac{1}{2} \cdot \arccos\left(\frac{(\vec{L}_1 \cdot \vec{L}_2)}{|\vec{L}_1| \cdot |\vec{L}_2|}\right)$. Введем следующие обозначения $\vec{C}_x = \frac{\cos(\Psi - \beta)}{\sin(\Psi)} \cdot \cos(\beta)$,

$\vec{C}_y = \frac{\cos(\Psi - \beta)}{\sin(\Psi)} \cdot \sin(\beta)$, $\vec{C}_z = 0$. Это координаты центра окружности, получающейся в результате сечения сферы плоскостью Σ, в базисе $[\vec{L}_1, -\vec{N}_1, \vec{E}_1]$. Вектор

$\vec{P} = \vec{N}_1 + \frac{((\vec{N}_1 - \vec{N}_2) \cdot \vec{N}_2)}{(\vec{L}_1 \cdot \vec{N}_2)} \cdot \vec{L}_1$ переносит центр координат в точку $[C_x, C_y, C_z]$. Координаты

точки можно выразить следующим образом $[X, Y, Z] = [K_x, K_y, K_z] \cdot \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} + \vec{C}$, где

$[K_x, K_y, K_z] = [r \cdot \cos(\alpha) \quad r \cdot \sin(\alpha) \quad 0]$, $r = \sqrt{1 - \left(\frac{\sin(\Psi - \beta)}{\sin(\Psi)}\right)^2}$ - радиус окружности сечения,

$\vec{H}_1 = \frac{\vec{P} - \vec{C}}{|\vec{P} - \vec{C}|}$, $\vec{H}_2 = \vec{E}_1$, $\vec{H}_3 = [\vec{H}_1 \times \vec{H}_2]$, $\vec{C} = [C_x \quad C_Y \quad C_z] \cdot \begin{bmatrix} \vec{L}_1 \\ -\vec{N}_1 \\ \vec{E}_1 \end{bmatrix} + \vec{P}$.

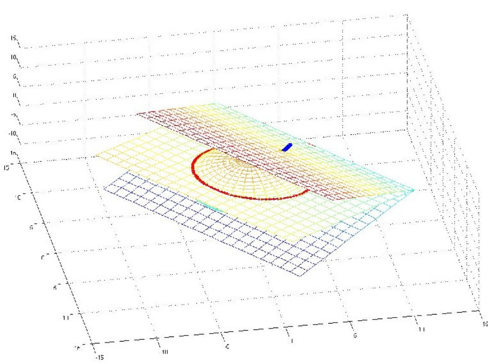

Рис. 3

Расчет новой параметрической сети можно произвести по формулам

$\vartheta = \arccos\left(\frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}\right)$, $\cos(\varphi) = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$, $\sin(\varphi) = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$, $u = \frac{u_p}{\pi}\vartheta$, $v = \frac{v_p}{2\pi}\varphi$.

4. Совмещение сегментов поверхностей

Расчет новой параметрической сети производится из следующих соображений. Пусть в нашем распоряжении имеется поверхность $\vec{R}(u,v)$. И мы хотим совместить ее с поверхностью $\vec{G}(t,h)$ так, чтобы сеть параметрических линий оставалась непрерывной.

В общем случае, нам необходимо определить линию пересечения $f(u,v) = 0$. И анализируя эту функцию, выделить два множества, если $f(u,v) \le 0$, то точка принадлежит поверхности $\vec{R}(u,v)$, если $f(u,v) \succ 0$, то поверхности $\vec{G}(t,h)$. Составим функции

$F_1(u,v)=\begin{cases}1, & f(u,v)\le 0\\ 0, & else\end{cases}$ и $F_2(u,v)=\begin{cases}1, & f(u,v)\succ 0\\ 0, & else\end{cases}$. Еще необходимо найти функцию отображения $\vec{G}(t(u,v),h(u,v))$. После этого можно составить уравнение композиционной поверхности $\vec{S}(u,v)=F_1(u,v)\cdot\vec{R}(u,v)+F_2(u,v)\cdot\vec{G}(t(u,v),h(u,v))$.

Задача заключается в том, чтобы этот процесс происходил в автоматизированном режиме. Этого и можно добиться, используя вышеописанный метод. Допустим, мы имеем две поверхности, которые необходимо совместить (рис. 4).

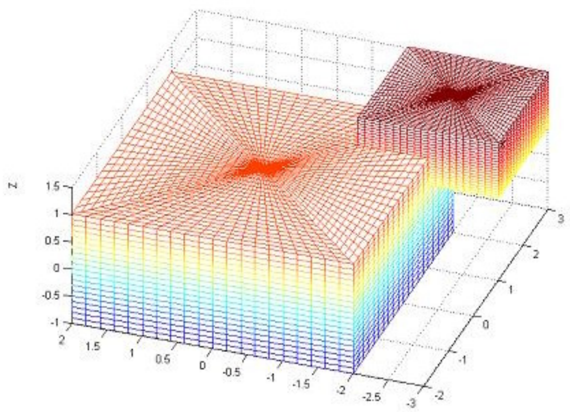

Рис. 4

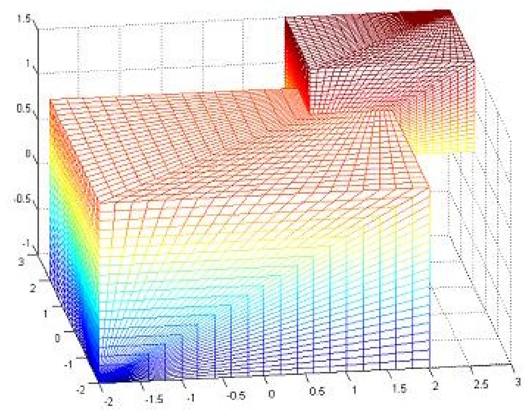

Рис. 5

Используя предлагаемый нами метод, мы сможем получить ситуацию, изображенную на рис. 5. Тогда на областях определения линии пересечения соответствуют функциональные зависимости, допустим $u_c(v)$ и $t_c(h)$. Причем, параметры v и h синхронизированы. Тогда задача отображения сегментов поверхностей сводится $\vec{G}(u,v)=\vec{G}\left(t_c\cdot\frac{u-u_c}{u_p-u_c},v\right)$. Вообще, вид функции отображения зависит от выбора булевой операции, совершаемой над объектами. В нашем случае это операция аналогичная объединению.

5. Заключение

Целью проводимых исследований является создание программного комплекса интерактивного конструирования составных поверхностей. Конструктор должен выбрать операцию, совершаемую над объектами (объединение, пересечение или вычитание). При помощи мыши назначить полюса и дальше все должно выполняться в автоматизированном режиме.