

*Софья Ильинична*  
П. К. РАШЕВСКИЙ

К У Р С  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ  
ГЕОМЕТРИИ

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ,  
ПЕРЕРАБОТАННОЕ

*Допущено Министерством высшего образования СССР в качестве учебника для государственных университетов*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1950 ЛЕНИНГРАД

## Опечатки

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть	По чьей вине
39	5 св.	$\tilde{F}_{xyy}, \frac{1}{3} \tilde{F}_{yyy}$ ,	$\tilde{F}_{xyy}, \frac{1}{3} \tilde{F}_{yyy}$	Тип.
76	1 сн.	$[\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)] - [\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0] \leqslant \ [\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)] - [\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0]\ $	$[\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)] - [\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0] \leqslant \ [\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)] - [\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0]\ $	»
96	1 сн.	$M_i M_i$	$M_i M'_i$	»
154	4 св.	$\nabla F^{(1)} \neq \nabla F^{(2)}$	$\nabla F^{(1)} \neq \nabla F^{(2)}$	»
214	3 сн.	так,	Итак,	»

Гедактор А. З. Рыскин.

Техн. редактор С. Н. Ахламов.

Т-00251. Подписано к печати 5/IV 1950 г. Бумага 60×92/16=13,375 бум. л.—26,75  
печ. л. 43452 типогр. эн. в печ. л. Тираж 10.000 экз. Цена книги 10 руб. 20 коп.  
Переплет 2 руб. Заказ № 58.

16-я типография Главполиграфиздата при Совете Министров СССР.  
Москва, Трехпрудный пер., 9.

## ОГЛАВЛЕНИЕ.

Предисловие к 3-му изданию . . . . .	7
Введение . . . . .	9
<b>Г л а в а I. Первоначальные сведения о кривых на плоскости . . . . .</b>	11
§ 1. Обыкновенные и особые точки плоской кривой . . . . .	11
§ 2. Строение кривой вблизи обыкновенной точки . . . . .	14
§ 3. Касательная и нормаль в обыкновенной точке. Декартовы координаты . . . . .	19
§ 4. Касательная и нормаль в обыкновенной точке. Параметрическое представление . . . . .	25
§ 5. Касательная и нормаль в обыкновенной точке. Полярные координаты . . . . .	27
§ 6. Строение кривой вблизи особых точек. Основные факты . . . . .	32
§ 7*. Строение кривой вблизи особых точек. Точная теория . .	38
§ 8. Огибающая семейства кривых . . . . .	51
§ 9*. Семейство кривых вблизи данной точки . . . . .	59
§ 10. Асимптоты . . . . .	64
§ 11*. Асимптота как предельное положение касательной . .	67
§ 12. Асимптоты алгебраических кривых . . . . .	69
<b>Г л а в а II. Дифференцирование вектор-функций и его простейшие применения к теории кривых . . . . .</b>	73
§ 13. Определение производной и техника дифференцирования . . . . .	73
§ 14. Истолкование вектор-функции как радиус-вектора кривой в параметрическом представлении . . . . .	79
§ 15. Достаточный признак обыкновенной точки . . . . .	81
§ 16. Геометрический смысл дифференцирования вектор-функции . . . . .	82
§ 17. Дифференциал вектор-функции . . . . .	86
§ 18. Две леммы . . . . .	87
§ 19. Ряд Тейлора для вектор-функции . . . . .	89
§ 20. Строение параметрически заданной кривой в окрестности произвольной точки . . . . .	92

§ 21. Длина дуги как параметр . . . . .	96
§ 22. Касание кривых . . . . .	102
§ 23*. Дополнительные сведения по теории касания кривых . . . . .	107
<b>Г л а в а III. Теория кривизны плоских кривых . . . . .</b>	<b>115</b>
§ 24. Соприкасающаяся окружность . . . . .	115
§ 25. Построение соприкасающейся окружности предельным переходом . . . . .	123
§ 26. Кривизна . . . . .	125
§ 27. Векторы $t$ , $n$ . . . . .	128
§ 28. Формулы Френе . . . . .	130
§ 29. Эволюта . . . . .	133
§ 30. Эвольвента . . . . .	138
§ 31. Натуральное уравнение кривой . . . . .	141
<b>Г л а в а IV. Теория кривизны пространственных кривых . . . . .</b>	<b>149</b>
§ 32. Касательные; нормали . . . . .	149
§ 33*. Касание кривой с поверхностью . . . . .	156
§ 34. Точки распрямления . . . . .	160
§ 35. Соприкасающаяся плоскость . . . . .	162
§ 36. Сопровождающий трехгранник . . . . .	165
§ 37. Две леммы об окружности . . . . .	169
§ 38. Соприкасающаяся окружность . . . . .	172
§ 39. Кривизна пространственной кривой . . . . .	174
§ 40. Формулы Френе. Кручение . . . . .	176
§ 41. Вычислительные формулы для кривизны и кручения . . . . .	183
§ 42. Строение кривой вблизи обыкновенной точки . . . . .	192
§ 43*. Соприкасающаяся сфера . . . . .	198
§ 44. Натуральные уравнения . . . . .	204
<b>Г л а в а V. Первичальные сведения по теории поверхностей . . . . .</b>	<b>217</b>
§ 45. Криволинейные координаты на поверхности . . . . .	217
§ 46. Кривые на поверхности . . . . .	222
§ 47. Первая основная квадратичная форма . . . . .	226
§ 48. Вторая основная квадратичная форма . . . . .	235
§ 49. Основная формула для кривизны кривой на поверхности . . . . .	239
§ 50. Теорема Менье . . . . .	240
§ 51. Линейная вектор-функция на плоскости . . . . .	245
§ 52. Собственные направления и собственные значения . . . . .	247
§ 53. Основная вектор-функция и главные направления . . . . .	251
§ 54. Исследование кривизны нормальных сечений . . . . .	253
§ 55. Формула Эйлера. Главные кривизны . . . . .	256
§ 56. Вычисление главных кривизн и главных направлений . . . . .	259
§ 57. Три типа точек на поверхности . . . . .	262
§ 58. Вычислительные формулы . . . . .	268

§ 59. Линии кривизны . . . . .	271
§ 60. Асимптотические линии . . . . .	276
§ 61. Третья основная квадратичная форма. Сопряженные направления . . . . .	283
§ 62*. Зависимость между тремя основными квадратичными формами . . . . .	287
§ 63. Сферическое отображение поверхности . . . . .	288
<b>Г л а в а VI. Линейчатые и развертывающиеся поверхности . . . . .</b>	<b>294</b>
§ 64. Понятие о линейчатых и развертывающихся поверхностях . . . . .	294
§ 65. Горловая точка . . . . .	298
§ 66. Горловая линия. Строение развертывающейся поверхности . . . . .	301
§ 67*. Параметр распределения . . . . .	307
§ 68. Огибающая семейства поверхностей от одного параметра . . . . .	310
§ 69. Развертывающаяся поверхность как огибающая семейства плоскостей . . . . .	315
§ 70*. Ребро возврата огибающей семейства плоскостей . . . . .	316
§ 71*. Асимптотические линии и полная кривизна линейчатой поверхности . . . . .	321
§ 72. Развертывающиеся поверхности как поверхности нулевой полной кривизны . . . . .	324
§ 73*. Ортогональные траектории развертывающихся поверхностей . . . . .	326
§ 74. Геометрические свойства линий кривизны . . . . .	332
§ 75*. Сопряженные сети на поверхности . . . . .	336
<b>Г л а в а VII. Внутренняя геометрия поверхности . . . . .</b>	<b>341</b>
§ 76. Попытке об изгиблении . . . . .	341
§ 77. Внутренняя геометрия и изгибание поверхности . . . . .	342
§ 78. Индексные обозначения . . . . .	343
§ 79. Деривационные формулы первой группы . . . . .	345
§ 80*. Деривационные формулы второй группы . . . . .	349
§ 81*. Роль второй квадратичной формы . . . . .	351
§ 82. Теорема Гаусса . . . . .	355
§ 83*. Формулы Петерсона-Кодаци . . . . .	358
§ 84*. Векторы на поверхности . . . . .	361
§ 85*. Градиент скалярного поля на поверхности . . . . .	363
§ 86*. Параллельное перенесение векторов на поверхности . . . . .	366
§ 87*. Свойства параллельного перенесения . . . . .	369

## ОГЛАВЛЕНИЕ

§ 88. Нормальная и геодезическая кривизна кривой на поверхности . . . . .	374
§ 89. Вычисление геодезической кривизны . . . . .	376
§ 90. Геодезические линии на поверхности . . . . .	379
§ 91*. Геодезические линии с точки зрения параллельного перенесения на поверхности . . . . .	383
§ 92*. Полугеодезическая система координат на поверхности . . . . .	383
§ 93*. Экстремальное свойство геодезических . . . . .	387
§ 94*. Об изгиении поверхностей непостоянной кривизны . . . . .	391
§ 95*. Случай поверхностей, изгибаемых в поверхности вращения . . . . .	397
§ 96*. Об изгиении поверхностей постоянной полной кривизны . . . . .	403
§ 97*. Поверхности вращения постоянной кривизны . . . . .	407
§ 98*. Обнесение вектора по замкнутому контуру . . . . .	413
Краткие исторические сведения . . . . .	422
Алфавитный указатель . . . . .	426

---

## ПРЕДИСЛОВИЕ К 3-му ИЗДАНИЮ.

При подготовке к 3-му изданию учебник подвергся значительной переработке, главным образом с целью некоторых улучшений в методике изложения, в расположении и планировке материала, в выборе доказательств и т. д. Особенное внимание было обращено на отчетливое выделение основного, минимального материала курса. Для этого все остальные темы (а они, как правило, близко примыкают к минимальному материалу и могут быть в том или ином выборе присоединены к нему) отнесены в параграфы, отмеченные звездочкой.

Что же касается самих фактических сведений, сообщаемых в курсе, то здесь изменения незначительны. Имеются лишь отдельные небольшие добавления: особые точки в случае параметрического представления кривой; построение соприкасающейся окружности предельным переходом; параметр распределения и горловая линия линейчатой поверхности.

К курсу присоединены также краткие исторические сведения.

Считаю своим долгом выразить глубокую признательность редактору книги А. З. Рывкину за его исключительно добровестную работу над текстом и сделанные им ценные замечания.

*Автор*

## ВВЕДЕНИЕ.

Хотя в математике обычно очень трудно составить себе общее представление о данной области до знакомства с ней по существу, дадим все же в самых общих чертах характеристику предмета дифференциальной геометрии.

Как известно, *аналитическая геометрия* основана на сопоставлении: каждой точке пространства—трех чисел (координат); каждой поверхности—уравнения, связывающего текущие координаты; каждой кривой—двух таких уравнений. Благодаря этому геометрические факты могут быть переведены на язык алгебры, геометрические задачи могут быть решены приемами алгебры, после чего результат при помощи обратного перехода вновь истолковывается на геометрическом языке. Основная идея здесь, очевидно, заключается в том, чтобы заставить сильный и действенный алгорифм алгебры регулярным образом работать для геометрических целей. При этом прогресс выражается не только и не столько в том, что старые задачи решаются более совершенным аналитическим методом, сколько в возможности неизмеримо расширить самый круг геометрических проблем по сравнению с проблемами, доступными элементарному подходу.

*Дифференциальная геометрия* означает аналогичное использование в геометрических целях аппарата *дифференциального исчисления*. При этом снова центр тяжести лежит в создании новой области геометрического исследования, куда позволяет проникнуть применение нового алгорифма. Чтобы отдать себе отчет, чем характеризуется эта область—область дифференциальной геометрии,—нужно вспомнить, где и как вообще находит себе применение аппарат анализа бесконечно малых. Чтобы привести элементарный пример, рассмотрим прямолинейное, но неравномерное движение точки по закону  $s = s(t)$ , выражающему пройденный путь в зависимости от времени. Изучим это движение за бесконечно малый промежуток времени от  $t$  до  $t + \Delta t$ . Тогда, как известно из дифференциального исчисления, пройденный за время  $\Delta t$  путь будет выражаться величиной

$$\Delta s = s'(t) \Delta t + \varepsilon \Delta t,$$

где  $s'(t)$ —производная, а  $\varepsilon$  стремится к нулю вместе с  $\Delta t$ . Мы замечаем, что если пренебречь  $\varepsilon \Delta t$ , бесконечно малой высшего порядка по отношению к  $\Delta t$ , то зависимость  $\Delta s$  от  $\Delta t$  окажется линейной с коэффициентом  $s'(t)$ , т. е. движение можно считать равномерным, с постоянной скоростью  $s'(t)$ .

Эта же идея лежит в основе всех приложений дифференциального исчисления: сложные зависимости становятся в бесконечно малом линейными, неравномерные процессы—равномерными и т. д., если пренебречь бесконечно малыми высших порядков. Мы получаем возможность изучать интересующие нас зависимости в чрезвычайно упрощенном виде, правда, лишь в бесконечно малом. Но, во-первых, это и само по себе бывает важно (в указанном примере мы пришли к вычислению мгновенной скорости путем дифференцирования пути по времени), во-вторых, интегральное исчисление дает нам возможность вернуться, где это нужно, к оценке процесса в целом<sup>1)</sup>.

Дифференциальная геометрия является осуществлением этой же идеи в области геометрии. Другими словами, геометрические объекты—линии и поверхности—будут изучаться нами с точки зрения их строения в бесконечно малых кусках. И это «микроскопическое исследование» обнаружит нам ряд стройных закономерностей, не видимых простым глазом и обнаруживающихся лишь в бесконечно малом. Возникает новый мощный метод исследования геометрических объектов, более отчетливое представление о котором мы получим при изучении его по существу.

Сделаем еще одно предварительное замечание. Так как сущность метода связана с применением дифференциального исчисления, то мы не должны быть связаны какими-либо ограничениями в смысле дифференцируемости рассматриваемых функций. Если не оговорено противное, мы будем раз навсегда предполагать, что все рассматриваемые функции однозначны и дифференцируемы, причем имеют непрерывные производные до любого порядка, который нам может понадобиться. Отметим также, что на протяжении всей книги рассматриваются исключительно вещественные переменные.

<sup>1)</sup> Мы говорим здесь о приложениях уже созданного дифференциального исчисления. На самом деле, не только эти приложения, но и само создание анализа бесконечно малых стало возможным только потому, что материальные процессы имеют тенденцию в малых размерах приобретать равномерный характер (пока, разумеется, не начинает сказываться атомное строение вещества). Эту тенденцию в абстрактной форме и отражает дифференциальное исчисление.

## ГЛАВА I.

### ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О КРИВЫХ НА ПЛОСКОСТИ.

Эта глава занимает в курсе довольно своеобразное место. В ней разбираются ряд вопросов, пограничных между анализом и геометрией и, следовательно, доступных исследованию без предварительных специально геометрических построений. Несмотря на важность этих вопросов и с точки зрения анализа, и с точки зрения геометрии, следует иметь в виду, что они, собственно, мало типичны для основного содержания дифференциальной геометрии и не находят себе там прямого приложения.

Читатель может, при желании, начать изучение курса сразу с главы II (особенно, если он знаком в основных чертах с содержанием главы I из курса анализа) и возвратиться к главе I позже.

#### § 1. ОБЫКНОВЕННЫЕ И ОСОБЫЕ ТОЧКИ ПЛОСКОЙ КРИВОЙ.

Так как нашей задачей является изучение кривых в бесконечно малом, то мы будем интересоваться не столько кривой в целом, сколько ее малыми кусками. Дадим основные определения. Назовем *простым отрезком*<sup>1)</sup> кривой геометрическое место точек, координаты которых хотя бы в одной какой-нибудь прямой угольной декартовой системе удовлетворяют уравнению

$$y = f(x) \text{ при } x_1 \leq x \leq x_2, \quad (1)$$

где  $x_1, x_2$ —два фиксированных значения. Конечно,  $f(x)$  предполагается однозначной, непрерывной и достаточное число раз дифференцируемой, как и все функции, которые мы будем рассматривать.

Легко уяснить наглядный смысл этого определения. Простой отрезок  $A_1A_2$  (черт. 1) находится, очевидно во взаимно однозначном соответствии с прямолинейным отрезком  $(x_1, x_2)$  на оси  $X$ , причем каждая точка  $A$  отрезка  $A_1A_2$  получена из соответствующей точки  $x$  на оси  $X$  смещением этой точки параллельно оси  $Y$ .

<sup>1)</sup> Термин этот не является общепринятым и вводится нами в целях уточнения терминологии.

где  $s'(t)$ —производная, а  $\varepsilon$  стремится к нулю вместе с  $\Delta t$ . Мы замечаем, что если пренебречь  $\varepsilon \Delta t$ , бесконечно малой высшего порядка по отношению к  $\Delta t$ , то зависимость  $\Delta s$  от  $\Delta t$  окажется линейной с коэффициентом  $s'(t)$ , т. е. движение можно считать равномерным, с постоянной скоростью  $s'(t)$ .

Эта же идея лежит в основе всех приложений дифференциального исчисления: сложные зависимости становятся в бесконечно малом линейными, неравномерные процессы—равномерными и т. д., если пренебречь бесконечно малыми высших порядков. Мы получаем возможность изучать интересующие нас зависимости в чрезвычайно упрощенном виде, правда, лишь в бесконечно малом. Но, во-первых, это и само по себе бывает важно (в указанном примере мы пришли к вычислению мгновенной скорости путем дифференцирования пути по времени), во-вторых, интегральное исчисление дает нам возможность вернуться, где это нужно, к оценке процесса в целом<sup>1)</sup>.

Дифференциальная геометрия является осуществлением этой же идеи в области геометрии. Другими словами, геометрические объекты—линии и поверхности—будут изучаться нами с точки зрения их строения в бесконечно малых кусках. И это «микроскопическое исследование» обнаружит нам ряд стройных закономерностей, не видимых простым глазом и обнаруживающихся лишь в бесконечно малом. Возникает новый мощный метод исследования геометрических объектов, более отчетливое представление о котором мы получим при изучении его по существу.

Сделаем еще одно предварительное замечание. Так как сущность метода связана с применением дифференциального исчисления, то мы не должны быть связаны какими-либо ограничениями в смысле дифференцируемости рассматриваемых функций. Если не оговорено противное, мы будем раз навсегда предполагать, что все рассматриваемые функции однозначны и дифференцируемы, причем имеют непрерывные производные до любого порядка, который нам может понадобиться. Отметим также, что на протяжении всей книги рассматриваются исключительно вещественные переменные.

<sup>1)</sup> Мы говорим здесь о приложениях уже созданного дифференциального исчисления. На самом деле, не только эти приложения, но и само создание анализа бесконечно малых стало возможным только потому, что материальные процессы имеют тенденцию в малых размерах приобретать равномерный характер (пока, разумеется, не начинает сказываться атомное строение вещества). Эту тенденцию в абстрактной форме и отражает дифференциальное исчисление.

## ГЛАВА I.

### ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О КРИВЫХ НА ПЛОСКОСТИ.

Эта глава занимает в курсе довольно своеобразное место. В ней разбираются ряд вопросов, пограничных между анализом и геометрией и, следовательно, доступных исследованию без предварительных специально геометрических построений. Несмотря на важность этих вопросов и с точки зрения анализа, и с точки зрения геометрии, следует иметь в виду, что они, собственно, мало типичны для основного содержания дифференциальной геометрии и не находят себе там прямого приложения.

Читатель может, при желании, начать изучение курса сразу с главы II (особенно, если он знаком в основных чертах с содержанием главы I из курса анализа) и возвратиться к главе I позже.

#### § 1. ОБЫКНОВЕННЫЕ И ОСОБЫЕ ТОЧКИ ПЛОСКОЙ КРИВОЙ.

Так как нашей задачей является изучение кривых в бесконечно малом, то мы будем интересоваться не столько кривой в целом, сколько ее малыми кусками. Дадим основные определения. Назовем *простым отрезком*<sup>1)</sup> кривой геометрическое место точек, координаты которых хотя бы в одной какой-нибудь прямоугольной декартовой системе удовлетворяют уравнению

$$y = f(x) \text{ при } x_1 \leq x \leq x_2, \quad (1)$$

где  $x_1, x_2$ —два фиксированных значения. Конечно,  $f(x)$  предполагается однозначной, непрерывной и достаточное число раз дифференцируемой, как и все функции, которые мы будем рассматривать.

Легко уяснить наглядный смысл этого определения. Простой отрезок  $A_1A_2$  (черт. 1) находится, очевидно во взаимно однозначном соответствии с прямолинейным отрезком  $(x_1, x_2)$  на оси  $X$ , причем каждая точка  $A$  отрезка  $A_1A_2$  получена из соответствующей точки  $x$  на оси  $X$  смещением этой точки параллельно оси  $Y$ .

<sup>1)</sup> Термин этот не является общепринятым и вводится нами в целях уточнения терминологии.

Таким образом, простой отрезок  $A_1A_2$  получен из прямолинейного отрезка  $(x_1, x_2)$  путем довольно простой деформации последнего; можно считать, что (1) выражает как раз закон этой деформации. При этом непрерывность и дифференцируемость  $f(x)$  гарантируют нам, с наглядной точки зрения, «плавный ход» отрезка  $A_1A_2$ . Так, на нем не может быть изломов, точек заострения типа  $M_2$  на черт. 2 и т. д.

Добавим еще следующее. По определению простого отрезка его уравнение, по крайней мере, в одной какой-нибудь прямоугольной декартовой системе координат, можно представить в виде (1); но это не значит, что то же самое возможно в любой прямоугольной системе координат. Так, если на черт. 1 поменять местами оси  $X$ ,  $Y$ , то  $f(x)$  перестанет быть однозначной.

Теперь нам нужно выяснить, в каком отношении находится понятие простого отрезка к более сложным понятиям. Рассмотрим геометрическое место точек, удовлетворяющих своим координатами  $x$ ,  $y$  — уравнению

$$F(x, y) = 0, \quad (2)$$

где  $F(x, y)$  определена на всей плоскости или в некоторой области на ней.

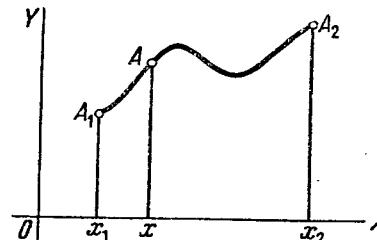
Это геометрическое место будем называть *кривой*. Такое название оправдывает тем, что, как мы сейчас увидим, малые куски геометрического места (2) имеют, как правило, форму простых отрезков.

Назовем  $M$  *обыкновенной точкой* кривой (2), если вблизи нее кривая имеет вид простого отрезка; точнее, если  $M$  можно заключить в прямоугольник (хотя бы очень малый) так, что попавшая внутрь него часть кривой (2) является *простым отрезком*. Точки, в которых нельзя этого добиться, как бы мы ни уменьшали размеры прямоугольника, называются *особыми*. (Таковы на черт. 2 точки  $M_1$  и  $M_2$ .)

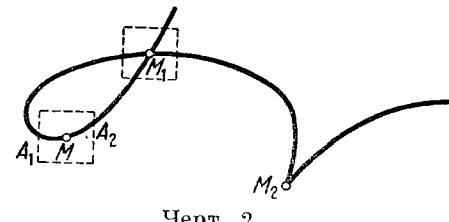
**Теорема.** Если в данной точке  $M_0(x_0, y_0)$  на кривой (2) значения частных производных от  $F(x, y)$  по  $x$  и  $y$

$$F_x(x_0, y_0), \quad F_y(x_0, y_0)$$

не обращаются в нуль одновременно, то точка  $M_0(x_0, y_0)$  обыкновенная.



Черт. 1.



Черт. 2.

Доказательство вытекает немедленно из теоремы существования неявной функции. Пусть для определенности  $F_y(x_0, y_0) \neq 0^1$ .

Кроме того, так как  $(x_0, y_0)$  лежит на кривой (2),

$$F(x_0, y_0) = 0.$$

Тогда теорема существования утверждает следующее: можно указать заключающий точку  $M_0$  прямоугольник со столь малыми сторонами  $2\eta$  и  $2h$  (черт. 3), что в нем (т. е. при значениях  $x$ ,  $y$ , ограниченных неравенствами  $x_0 - \eta \leq x \leq x_0 + \eta$ ,  $y_0 - h \leq y \leq y_0 + h$ ) уравнение

$$F(x, y) = 0$$

однозначно разрешается относительно  $y$ , т. е. может быть заменено эквивалентным ему уравнением вида

$$y = f(x)^2.$$

Здесь, как всегда у нас,  $f(x)$  — однозначная и дифференцируемая функция. Следовательно,

указанный прямоугольник вырезает из нашей кривой простой отрезок, и точка  $M_0$  — обыкновенная по определению.

Из доказанной теоремы следует, что *особыми могут быть только те точки кривой (2), в которых*

$$F_x(x, y) = F_y(x, y) = 0, \quad (3)$$

т. е. обе частные производные обращаются в нуль одновременно. Любопытно, что, таким образом, координаты  $x$ ,  $y$  особых точек, если такие существуют на кривой, должны удовлетворять сразу трем уравнениям: уравнению (2) и двум уравнениям (3).

Заметим, что формулированный в нашей теореме достаточный признак обыкновенной точки не является необходимым. Возьмем, например, параболу

$$y^2 - x = 0,$$

которая, очевидно, вся состоит из обыкновенных точек ( $F_x = -1 \neq 0$ ).

<sup>1)</sup> Если бы было  $F_y(x_0, y_0) = 0$ , то, в силу нашего предположения, обязательно выполнялось бы неравенство  $F_x(x_0, y_0) \neq 0$ , и мы поменяли бы роли оси координат.

<sup>2)</sup> См., например, Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, том I, 1947, гл. VI, § 2. Напомним еще раз, что в нашем изложении подразумеваются существование и непрерывность производных рассматриваемых функций.

Рассмотрим уравнение, полученное из данного умножением его левой части на  $x^2 + y^2$ :

$$(x^2 + y^2)(y^2 - x) = 0.$$

Новое уравнение определяет ту же самую параболу, так как множитель  $x^2 + y^2$  обращается в нуль только в точке  $x = y = 0$ , а эта точка и раньше принадлежала параболе<sup>1)</sup>.

Между тем теперь, как легко проверить, частные производные по  $x$  и  $y$  у левой части уравнения в точке  $x = y = 0$ , обе обращаются в нуль, хотя начало координат попрежнему является обыкновенной точкой на нашей параболе.

Итак, не меняя кривой, а изменив лишь аналитическую природу уравнения, можно добиться обращения в нуль  $F_x$  и  $F_y$  одновременно в точке, остающейся попрежнему обыкновенной.

В соответствии со сказанным признак (3) для особой точки является необходимым, но не достаточным. Точки, где  $F_x$  и  $F_y$  не обращаются в нуль одновременно, мы будем называть *заведомо обыкновенными*.

## § 2. Строение кривой вблизи обыкновенной точки.

Как мы знаем, вблизи любой обыкновенной точки  $M_0(x_0, y_0)$  кривая представляет собой простой отрезок, т. е. может быть представлена уравнением

$$y = f(x) \text{ при } x_0 - \eta \leq x \leq x_0 + \eta.$$

Изучим поведение кривой вблизи фиксированной обыкновенной точки  $M_0(x_0, y_0)$ . Возьмем точку  $M(x, y)$  на выделенном около  $M_0$  простом отрезке кривой. Обозначая для краткости

$$x - x_0 = \Delta x, \text{ т. е. } x = x_0 + \Delta x,$$

можно написать, пользуясь разложением в ряд Тейлора с остаточным членом:

$$y = f(x) = y_0 + y'_0 \Delta x + y''_0 \frac{(\Delta x)^2}{2!} + y'''_0 \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \cdots + y^{(n)}_0 \frac{(\Delta x)^n}{n!} + R_n. \quad (4)$$

Здесь  $y_0, y'_0, y''_0, \dots$  представляют собой значения  $f(x)$  и ее последовательных производных в точке  $x = x_0$ . Остаточный член  $R_n$  имеет вид

$$R_n = f^{(n+1)}(\xi) \frac{(\Delta x)^{n+1}}{(n+1)!},$$

где  $\xi$  подходящим образом взято между  $x_0$  и  $x$ .

<sup>1)</sup> Как было оговорено во введении, мы рассматриваем исключительно вещественные переменные, так что мнимые ветви для нас не существуют.

## § 2]. СТРОЕНИЕ КРИВОЙ ВБЛИЗИ ОБЫКНОВЕННОЙ ТОЧКИ

Ценность выражения (4) заключается в том, что ордината  $y$  некоторой соседней точки  $M$  на кривой оказывается равной ординате  $y_0$  в точке  $M_0$ , плюс добавочные члены, расположенные по возрастающим степеням  $\Delta x$ .

По общей установке дифференциальной геометрии мы будем изучать кривую в бесконечно малой области около точки  $M_0$ , т. е. при  $M$ , стремящейся по кривой в  $M_0$ , и следовательно, при  $\Delta x$ , стремящемся к нулю. Но тогда члены, идущие после  $y_0$  в выражении (4), будут бесконечно малыми соответственно 1-го, 2-го, 3-го и т. д. порядков малости относительно  $\Delta x$ . Если нас интересуют в данном вопросе лишь бесконечно малые до  $n$ -го порядка включительно, а порядками более высокими мы пренебрегаем, то мы будем говорить, что рассмотрение ведется с *точностью*  $n$ -го *порядка*. В этом случае мы имеем право откинуть остаточный член  $R_n$ , который будет бесконечно малым  $n+1$ -го порядка (не ниже, как видно из его выражения), и уравнение (4) принимает вид

$$y \approx y_0 + y'_0 \Delta x + \cdots + y^{(n)}_0 \frac{(\Delta x)^n}{n!}, \quad (5)$$

т. е.  $y$  выражается через  $\Delta x$  (а следовательно, и через  $x$ ) многочленом  $n$ -й степени. Итак, в бесконечно малом уравнение кривой приобретает упрощенную форму (5); но нельзя, конечно, упускать из виду, что уравнение (5) имеет место лишь с точностью  $n$ -го порядка, т. е. с ошибкой, бесконечно малой (не ниже)  $n+1$ -го порядка. В связи с этим мы употребляем знак приближенного равенства. Точность  $n$ , с которой мы ведем рассмотрение, может быть различной.

Начнем с наиболее грубой оценки поведения кривой. Положим  $n = 1$ , т. е. будем учитывать лишь бесконечно малые одного порядка с  $\Delta x$ , пренебрегая порядками высшими.

Тогда (4) переописывается в виде

$$y = y_0 + y'_0 \Delta x + R_1,$$

или, что то же,

$$y = y_0 + y'_0 (x - x_0) + R_1, \quad (6)$$

где

$$R_1 = \frac{1}{2} y''(\xi) (\Delta x)^2.$$

Мы замечаем, что (6) представляет собой, если пренебречь бесконечно малым 2-го порядка  $R_1$ , уравнение прямой линии, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0)$ , с угловым коэффициентом  $y'_0$ . Таким образом, с точностью 1-го порядка кривая вблизи обыкновенной точки  $M_0$  (по обе ее стороны) неотличима от прямой линии

$$y = y_0 + y'_0 (x - x_0). \quad (7)$$

Точнее это означает, что расхождение  $NM$  по ординате между прямой линией (7) и кривой (6) будет бесконечно малым высшего порядка по сравнению с  $\Delta x$  (черт. 4). Действительно, так как ордината для точки  $M$  на кривой выражается правой частью (6), а для соответствующей точки  $N$  на прямой—правой частью (7), то разность между ними  $NM$  равна как раз остаточному члену  $R_1$ , бесконечно малому не ниже 2-го порядка.

Как известно из основ дифференциального исчисления, касательной к кривой в точке  $M_0$  называется предельное положение секущей  $M_0M$  при  $M$ , стремящейся в  $M_0$  по кривой; касательная имеет угловой коэффициент  $y'_0$  и, конечно, проходит через  $M_0$ .

Следовательно, касательная в точке  $M_0$  совпадает с прямой (7) и, значит, с точностью 1-го порядка неотличима от кривой вблизи  $M_0$ . В этом и заключается основной геометрический смысл касательной, который сказывается и в различных приложениях дифференциальной геометрии. Так, если материальная точка принуждена сначала двигаться по криволинейной траектории, а затем получает свободу и движется по инерции, то ее новая прямолинейная траектория будет касательной к прежней криволинейной траектории в точке отрыва от последней. Это значит, что движение продолжается по инерции так, как если бы в момент отрыва точка двигалась не по кривой, а по касательной к ней.

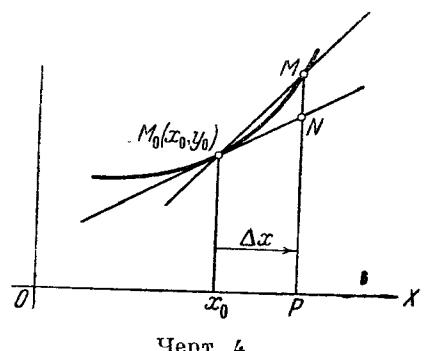
Аналогично, если мы имеем тяжелую нить, подвешенную за два конца и провисшую по некоторой кривой, то сила натяжения нити, действующая на точку подвеса, будет направлена по касательной, т. е. так, как если бы вблизи точки подвеса нить была натянута вдоль касательной. (Заметим, между прочим, что однородная тяжелая нить провисает по так называемой цепной линии

$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ , которая обладает, как мы увидим далее, многими замечательными свойствами.)

Изучим теперь уклонение кривой (6) от ее касательной (7). Мы уже установили, что разность ординат для точек кривой (6) и касательной (7) при данном  $x$  имеет вид

$$NM = R_1 = \frac{1}{2} y''(\xi) (\Delta x)^2, \quad (8)$$

где  $\xi$  заключено между  $x_0$  и  $x_0 + \Delta x$ .



Черт. 4.

ней криволинейной траектории в точке отрыва от последней. Это значит, что движение продолжается по инерции так, как если бы в момент отрыва точка двигалась не по кривой, а по касательной к ней.

Аналогично, если мы имеем тяжелую нить, подвешенную за два конца и провисшую по некоторой кривой, то сила натяжения нити, действующая на точку подвеса, будет направлена по касательной, т. е. так, как если бы вблизи точки подвеса нить была натянута вдоль касательной. (Заметим, между прочим, что однородная тяжелая нить провисает по так называемой цепной линии

$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ , которая обладает, как мы увидим далее, многими замечательными свойствами.)

Изучим теперь уклонение кривой (6) от ее касательной (7). Мы уже установили, что разность ординат для точек кривой (6) и касательной (7) при данном  $x$  имеет вид

$$NM = R_1 = \frac{1}{2} y''(\xi) (\Delta x)^2, \quad (8)$$

где  $\xi$  заключено между  $x_0$  и  $x_0 + \Delta x$ .

Допустим сначала, что  $y''$  в точке  $x_0$  положительна:  
 $y'' > 0$ .

Так как  $y''(x)$ —непрерывная функция, то и около  $x_0$ , в достаточно малой окрестности  $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ , она сохраняет положительный знак. Беря  $\Delta x$  настолько малым, чтобы  $x_0 + \Delta x$ , а следовательно, и  $\xi$  попали в эту окрестность, мы будем иметь в выражении (8) заведомо положительный коэффициент  $y''(\xi)$ ; следовательно, и все выражение будет больше нуля при любом знаке у  $\Delta x$ , т. е. при смещении по кривой как вправо, так и влево.

Следовательно, вблизи  $x_0$  уклонение  $NM$  кривой от касательной будет в случае  $y'' > 0$  положительным, и кривая расположится над своей касательной.

В этом случае мы говорим, что в точке  $M_0$  кривая обращена выпуклостью вниз.

Допустим теперь, что  $y'' < 0$ . Тогда в достаточно малой окрестности точки  $x_0$   $y''(x)$  сохраняет отрицательный знак; в формуле (8)  $y''(\xi) < 0$ , а так как  $(\Delta x)^2 > 0$  всегда, то

$$NM < 0.$$

Кривая вблизи  $M_0$  расположится под своей касательной; мы будем говорить, что в точке  $M_0$  выпуклость кривой обращена сверху.

В обоих случаях, как видно из (8), уклонение кривой от касательной будет бесконечно малым 2-го порядка.

Остается изучить случай  $y'' = 0$ . Допустим, что при этом  $y''' \neq 0$ . Используем формулу (4) при  $n = 2$ . Получим

$$y = y_0 + y'_0 \Delta x + y'''(\xi) \frac{(\Delta x)^3}{6}. \quad (9)$$

(Член 2-й степени относительно  $\Delta x$  исчез, так как  $y'' = 0$ .)

Сравнивая (9) с уравнением касательной (7), мы видим, что разность ординат кривой (9) и касательной (7) выражается при каждом значении  $x$  так:

$$NM = \frac{1}{6} y'''(\xi) (\Delta x)^3. \quad (10)$$

Итак, вблизи  $M_0$ , где  $y'' = 0$ , кривая неотличима от своей касательной с точностью уже по крайней мере 2-го порядка (уклонение  $NM$  не ниже 3-го порядка). В этом случае мы назовем  $M_0$  точкой расправления. Изучим теперь уклонение кривой от касательной при сделанном выше предположении  $y''' \neq 0$  (наиболее типичный случай).

Ограничеваемся снова столь малой окрестностью точки  $x_0$ ,  $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ , что в ней непрерывная функция  $y'''(x)$  сохраняет тот же знак, который она имела в  $x_0$ , т. е. знак  $y'''_0$ .

Тогда, беря  $x = x_0 + \Delta x$  в пределах этой окрестности, в силу чего  $\xi$  тоже попадает в нее, мы получаем неизменный знак у первого множителя в (10). Что же касается второго множителя, то он меняет знак вместе с  $\Delta x$ , т. е. в зависимости от того, смеcтимся ли мы от  $x_0$  вправо или влево.

В результате  $NM$  будет иметь знак плюс при смещении в одну сторону от точки  $x_0$  и знак минус при смещении в другую сторону. Другими словами, в одну сторону от точки  $M_0$  кривая расположена над, а в другую сторону — под своей касательной (черт. 5).

В этом случае точка  $M_0$  называется *точкой перегиба*. Такие точки являются пограничными между точками с выпуклостью кверху и точками с выпуклостью книзу. Вблизи точки перегиба, как видно из (10), кривая уклоняется от касательной лишь на бесконечно малое 3-го порядка.

Итак, случай  $y''_0 \neq 0$  изучен полностью, случай же  $y''_0 = 0$  (точка распрямления) — лишь в предположении  $y'''_0 \neq 0$  (точка перегиба).

Перейдем теперь к самому общему случаю<sup>1)</sup>. Выпишем последовательность производных в точке  $x_0$ :

$$y'_0, y''_0, \dots, y^{(n)}_0, y^{(n+1)}_0, \dots$$

Пусть  $y^{(n+1)}_0$  будет первое по порядку число среди чисел этой последовательности, отличное от нуля. Таким образом,

$$y^{(n+1)}_0 \neq 0; \quad y''_0 = y'''_0 = \dots = y^{(n)}_0 = 0. \quad (11)$$

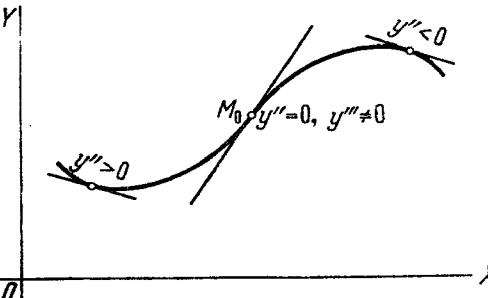
При  $n=1$  и  $n=2$  мы получаем только что разобранные случаи. Выпишем формулу (4), используя условия (11); она примет вид

$$y = y_0 + y'_0 \Delta x + y^{(n+1)}(\xi) \frac{(\Delta x)^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (12)$$

Вычитая из ординаты точки кривой (12) ординату точки касательной (7) при том же значении  $x$ , мы получим уклонение  $NM$ :

$$NM = y^{(n+1)}(\xi) \frac{(\Delta x)^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (13)$$

<sup>1)</sup> Если оставить в стороне возможн ость обращения в нуль всех существующих в точке  $M_0$  производных от  $y(x)$ .



Черт. 5.

### § 3] КАСАТЕЛЬНАЯ И НОРМАЛЬ. ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ 19

Снова  $y^{(n+1)}(x)$  сохраняет в достаточно малой окрестности точки  $x_0$  постоянный знак, именно, знак  $y^{(n+1)}_0$ , и вопрос сводится к поведению  $(\Delta x)^{n+1}$ . Здесь нужно различать два случая:

1) *нечетное*. Тогда при любом знаке  $\Delta x$   $(\Delta x)^{n+1}$  положительно, и  $NM$  сохраняет постоянный знак, совпадающий со знаком  $y^{(n+1)}(\xi)$ , т. е. со знаком  $y^{(n+1)}_0$ . Отсюда, если  $y^{(n+1)}_0 > 0$ , то кривая лежит над касательной, если  $y^{(n+1)}_0 < 0$ , то — под касательной, в обоих случаях — по обе стороны точки касания  $M_0$ . Имеем, соответственно, выпуклость книзу или кверху. От разобранного выше случая  $y''_0 \neq 0$  отличие здесь будет в том, что кривая уклоняется от касательной на бесконечно малое  $NM$  более высокого порядка, если  $n=3, 5, 7, \dots$ . При  $n=1$  возвращаемся к случаю  $y''_0 \neq 0$ .

2) *четное*. Тогда  $(\Delta x)^{n+1}$  имеет тот же знак, что и  $\Delta x$ , т. е. меняет знак в зависимости от того, вправо или влево смещаемся мы по кривой из точки касания  $M_0$ . Вместе с  $(\Delta x)^{n+1}$  будет менять знак и  $NM$ , как видно из (13). Следовательно, кривая по одну сторону  $M_0$ , расположена над, а по другую — под касательной. Имеем точку перегиба общего вида, причем при  $n=2$  приходим к выше рассмотренному случаю  $y''_0 = 0, y'''_0 \neq 0$ . При  $n=4, 6, \dots$  получаются точки перегиба со все более тесным примыканием кривой к касательным, взятым в этих точках:  $NM$  будет бесконечно малым 5-го, 7-го, ... порядка.

Практически кривая (в ее простом отрезке) состоит, вообще говоря, из точек, удовлетворяющих условию  $y'' \neq 0$ . Лишь отдельные точки оказываются точками распрямления, т. е. точками перегиба, или точками выпуклости с более тесным примыканием кривой к касательной, чем обычно.

### S 3. Касательная и нормаль в обыкновенной точке. Декартовы координаты.

Пусть кривая задана уравнением

$$F(x, y) = 0. \quad (14)$$

Рассмотрим какую-нибудь точку  $M_0(x_0, y_0)$  на этой кривой, в которой  $F_x$  и  $F_y$  не обращаются одновременно в нуль. Пусть для определенности

$$F_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

Тогда вблизи точки  $M_0$ , которая будет обыкновенной, кривую можно представить в виде простого отрезка

$$y = f(x). \quad (15)$$

Уравнение касательной в точке  $M_0$  будет, согласно (7), иметь вид

$$y = y_0 + y'_0(x - x_0), \quad (16)$$

где  $x, y$  — текущие координаты касательной.

Так как  $y'_0$  есть значение производной от функции, неявно определяемой уравнением (14), то

$$y'_0 = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}.$$

Вставляя это выражение в (16) и освобождаясь от знаменателя, получим уравнение касательной в  $M_0$  в виде

$$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0. \quad (17)$$

Ввиду симметрии этого уравнения относительно координатных осей  $x, y$  оно сохранит свой вид и в том случае, если обыкновенный характер точки  $M_0$  обеспечивается условием

$$F_x(x_0, y_0) \neq 0.$$

Как мы знаем, кривая вблизи любой обыкновенной точки  $M_0$  с точностью 1-го порядка неотличима от подходящее выбранной прямой линии, именно, от своей касательной в точке  $M_0$ . В связи с этим мы естественным образом можем ввести понятие об угле, образуемом двумя кривыми в их общей точке  $M_0$ , предполагая, что  $M_0$  является обыкновенной точкой для обеих кривых. А именно, *углом между кривыми в точке  $M_0$  мы назовем угол между их касательными в этой точке* (черт. 6).

Если уравнения кривых известны, то легко найти угловые коэффициенты их касательных в  $M_0$ , а отсюда и тангенс угла между ними.

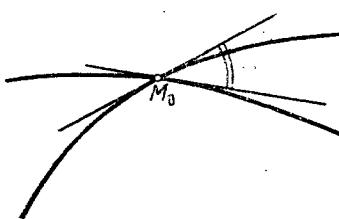
Во многих вопросах важную роль играет понятие *нормали*. *Нормалью к кривой в данной ее точке  $M_0$  называется прямая, проходящая через  $M_0$  и образующая с кривой прямой угол* (т. е. *перпендикулярная к касательной в точке  $M_0$* ).

Нормаль представляет собой, таким образом, нечто вроде перпендикуляра к кривой, чем и определяется ее значение.

Пусть, например, материальная точка может свободно двигаться по данной кривой, но не может с нее сходить (просверленный шарик, наложенный на изогнутый металлический прут). Тогда эта материальная точка будет находиться в равновесии под действием приложенной к ней силы в том и только в том случае, когда сила направлена по нормали к кривой.

Уравнение нормали легко получить из уравнения касательной (17), переставив коэффициенты при  $x - x_0$  и  $y - y_0$  и изменив у одного из них знак на обратный:

$$F_x(x_0, y_0)(y - y_0) - F_y(x_0, y_0)(x - x_0) = 0. \quad (18)$$



Черт. 6.

Действительно, как легко проверить по правилам аналитической геометрии, прямая (18) проходит через  $M_0(x_0, y_0)$  перпендикулярно к касательной (17), т. е. является нормалью.

В некоторых случаях для изучаемой кривой можно указать определенную прямую линию, которая связана с ней какими-либо интересными геометрическими зависимостями (например, для параболы — ее директрису, с которой парабола связана равенством расстояний от точек параболы до директрисы и фокуса; или ее ось, относительно которой парабола расположена симметрично, и т. д.).

Часто бывает целесообразно принять указанную прямую за ось  $X$ , что облегчает изучение кривой и прямой в их взаимной связи. В частности, может оказаться интересным узнать положение точек пересечения  $T$  и  $N$  касательной и нормали к кривой с указанной прямой, принятой за ось  $X$  (черт. 7). Пусть  $P$  — проекция точки  $M_0$  кривой на ось  $X$ . Рассмотрим отрезки  $PT$  и  $PN$ , приписывая им направление на оси  $X$  от  $P$  соответственно к  $T$  и  $N$  и боя их численное выражение со знаком  $\pm$  в зависимости от их направленности в положительную или отрицательную сторону оси  $X$ . Отрезки  $PT$  и  $PN$  называются соответственно *подкасательной* и *поднормалью*.

Найдем абсциссы  $x_T$  и  $x_N$  точек  $T$  и  $N$ . Положим в уравнении касательной (17)  $y = 0$ ; тогда  $x$  превратится в абсциссу точки пересечения касательной с осью  $X$ , т. е. в  $x_T$ .

Получим

$$F_x \cdot (x_T - x_0) + F_y \cdot (-y_0) = 0,$$

откуда

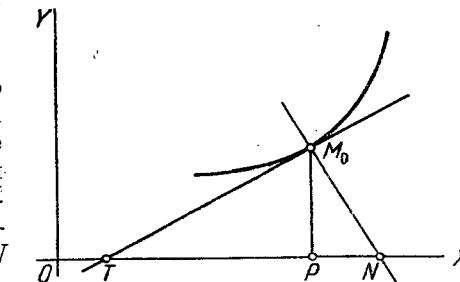
$$x_T - x_0 = \frac{F_y}{F_x} y_0. \quad (19)$$

Поступая аналогично с уравнением нормали (18), получим

$$x_N - x_0 = -\frac{F_x}{F_y} y_0. \quad (20)$$

В левой части (19) стоит разность абсцисс точек  $T$  и  $P$ , т. е. численное выражение отрезка  $PT$ ; аналогично, в левой части (20) — численное выражение  $PN$ . Напишем

$$\left. \begin{aligned} PT &= -\left(\frac{dx}{dy}\right)_0 y_0, \\ PN &= \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 y_0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$



Черт. 7.

Здесь в правых частях уравнений мы заменили для краткости  $\frac{F_y(x_0, y_0)}{F_x(x_0, y_0)}$  через  $-\left(\frac{dx}{dy}\right)_0$  и в соответствии с этим  $-\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}$  через  $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$  по правилам дифференцирования неявной функции.

Под  $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$  мы понимаем взятое в точке  $M_0$  отношение дифференциалов переменных, связанных уравнением (14). Конечно, формулы (21) легко было бы вывести из наглядных соображений, пользуясь тригонометрией:  $TP$  есть один катет,  $y_0 = PM_0$  — другой катет в треугольнике  $TPM_0$ , а  $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$  — тангенс угла наклона касательной. Следовательно,

$$TP \left( \frac{dy}{dx} \right)_0 = y_0,$$

откуда следует сейчас же первая из формул (21). Мы предпочли аналитический вывод формул (21) ввиду его полной общности, в то время как при наглядном выводе пришлось бы трудиться над исследованием различных возможных случаев расположения треугольников  $TPM_0$  и  $NPM_0$ , учитывая знаки отрезков и т. д.

Длины отрезков  $M_0T$  и  $M_0N$  (взятые по абсолютной величине) иногда называют, соответственно, *длиной касательной* и *длиной нормали*.

Пользуясь формулой расстояния между двумя точками, получим

$$\begin{aligned} M_0T &= \sqrt{(x_T - x_0)^2 + y_0^2}, \\ M_0N &= \sqrt{(x_N - x_0)^2 + y_0^2}. \end{aligned}$$

Заменяя здесь  $x_T - x_0$  и  $x_N - x_0$  через  $PT$  и  $PN$ , выраженные по формулам (21), и вынося  $|y_0|$  из-под корней, приходим к формулам

$$\left. \begin{aligned} M_0T &= |y_0| \sqrt{1 + \left( \frac{dx}{dy} \right)_0^2}, \\ M_0N &= |y_0| \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)_0^2}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Рассмотрим теперь несколько примеров, где требуется найти кривую, определенным образом связанную геометрически с прямой, принятой за ось  $X$ .

1. Кривая с постоянной поднормалью  $PN = a$ .

Мы ставим требование, чтобы для *всех* точек кривой поднормаль  $PN$  сохраняла постоянную величину  $a$  (черт. 8). Пользуясь второй из формул (21), запишем

$$a = \frac{dy}{dx} y \quad \text{или} \quad a dx = y dy.$$

### § 3] КАСАТЕЛЬНАЯ И НОРМАЛЬ. ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ

Интегрируя это уравнение почленно, получаем

$$ax = \frac{1}{2} y^2 + C,$$

или

$$y^2 = 2ax - 2C.$$

Мы получили параболу с осью, совпадающей с осью  $X$ , и с параметром  $p = |a|$ . Кривая обращена вогнутостью влево в случае  $a < 0$  и вправо — в случае  $a > 0$ .

2. Кривая с постоянной подкасательной  $PT = a$ .

Запишем требование постоянства подкасательной во всех точках кривой, пользуясь первой из формул (21):

$$-\frac{dx}{dy} y = a \quad \text{или} \quad -\frac{dx}{a} = \frac{dy}{y}.$$

Интегрируя почленно, получаем

$$-\frac{x}{a} + C = \ln y,$$

откуда

$$y = y_0 e^{-\frac{x}{a}},$$

где через  $y_0$  обозначено  $e^C$ . Мы по-

лучили график показательной функции (черт. 9; изображен случай  $a > 0$ ).

3. Кривая с постоянной длиной нормали  $M_0N = a$  (для любой точки  $M_0$  на кривой).

Пользуясь второй из формул (22), запишем наше требование в виде

$$|y| \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} = a,$$

или

$$y^2 \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = a^2,$$

или, наконец,

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = \frac{a^2}{y^2} - 1,$$

откуда

$$dx = \pm \frac{y dy}{\sqrt{a^2 - y^2}}.$$

Интегрируя почленно, получим

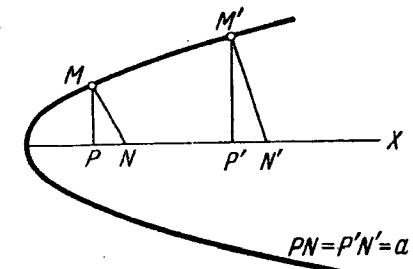
$$x = \mp \sqrt{a^2 - y^2} + C,$$

откуда

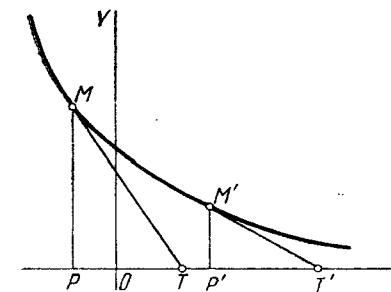
$$(x - C)^2 + y^2 = a^2.$$

Мы получили окружность радиуса  $a$  с центром на оси  $X$ .

4. Кривая с постоянной длиной касательной  $MT = a$ .



Черт. 8.



Черт. 9.

Записывая это требование для любой точки кривой, получим, пользуясь первой из формул (22),

$$y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = a. \quad (23)$$

Мы будем рассматривать кривую лишь в верхней полуплоскости и поэтому имеем право считать  $|y| = y > 0$ .

Введем в рассмотрение угол  $\varphi$ ,  $0 < \varphi < \pi$ , определяемый из условия

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}. \quad (24)$$

Очевидно,  $\varphi$  есть угол, образуемый касательной к кривой с осью  $X$ . Заменяя в (23)  $\frac{dx}{dy}$  через  $\operatorname{ctg} \varphi$ , получим  $\frac{y}{\sin \varphi} = a$  или

$$y = a \sin \varphi. \quad (25)$$

Отсюда

$$dy = a \cos \varphi d\varphi.$$

Но из (24)

$$dx = dy \operatorname{ctg} \varphi.$$

Вставив сюда полученное для  $dy$  выражение, получим

$$dx = a \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} d\varphi,$$

или

$$dx = a \left( \frac{1}{\sin \varphi} - \sin \varphi \right) d\varphi.$$

Интегрируя почленно, найдем

$$x = a \left( \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \cos \varphi \right) + C. \quad (26)$$

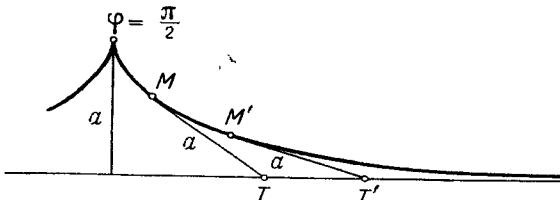
Мы получили искомую кривую в параметрической записи (см. следующий параграф), а именно, уравнения (25) и (26) выражают  $x$  и  $y$  как функции угла  $\varphi$ . Исследуя ее форму, легко убедиться, что она расположена симметрично относительно своей ординаты, соответствующей значению

$\varphi = \frac{\pi}{2}$  (т. е. при  $x = C$ ), где имеет особую точку с касательной, для обеих ветвей направленной параллельно оси  $Y$  (черт. 10).

Кривая эта называется *трактисой*; в теории поверхностей играет важную роль поверхность, об-

разованная ее вращением около оси  $X$ , так называемая *псевдосфера*.

Во всех четырех примерах произвольное постоянное  $C$  в ответах означает лишь возможность сдвигать полученную кривую параллельно оси  $X$  как твердое тело; при этом кривая продолжает, очевидно, удовлетворять условиям задачи.



Черт. 10.

#### § 4. Касательная и нормаль в обыкновенной точке. Параметрическое представление.

Рассмотрим геометрическое место точек  $M(x, y)$ , координаты которых определяются из уравнений

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad (27)$$

где  $t$  — независимое переменное, пробегающее всевозможные значения в определенной области изменения

$$a \leq t \leq b.$$

Такое геометрическое место мы будем называть *кривой в параметрическом представлении*.

Как мы сейчас увидим, в малых кусках мы будем, вообще говоря, получать простые отрезки, как и в случае задания кривой уравнением (2). Если же брать кривую в целом (что нас, вообще говоря, интересовать не будет), то эти два способа определения кривой не всегда равносильны.

Рассмотрим на кривой точку  $t = t_0$ ,  $x_0 = \varphi(t_0)$ ,  $y_0 = \psi(t_0)$ , в которой производные

$$\varphi'(t_0), \quad \psi'(t_0)$$

не обращаются в нуль одновременно. Положим для определенности, что отлична от нуля именно  $\varphi'(t_0)$ :

$$\varphi'(t_0) \neq 0. \quad (28)$$

Перепишем первое из уравнений (27) в виде

$$-x + \varphi(t) = 0. \quad (29)$$

Мы можем рассматривать (29) как частный случай уравнения вида

$$F(x, t) = 0.$$

При этом в точке  $x = x_0$ ,  $t = t_0$  уравнение (29) удовлетворяется, а частная производная по  $t$  от его левой части, равная, очевидно,  $\varphi'(t_0)$ , отлична от нуля согласно (28). Тогда при значениях  $x$  и  $t$ , достаточно близких к  $x_0$  и  $t_0$ , уравнение (29) однозначно разрешается относительно  $t$  (согласно общей теореме существования неявной функции — см. сноска<sup>2</sup>) на стр. 13) и может быть переписано в виде

$$t = t(x).$$

Теперь  $t$ , выраженное как функция  $x$ , мы можем подставить во второе из уравнений (27), и тогда  $y$  выразится через  $x$  однозначной функцией

$$y = f(x),$$

где  $f(x) = \psi(t(x))$ . Полученное уравнение имеет место при значениях  $x$  и  $t$ , взятых в достаточно малой окрестности  $x_0, t_0$ ; в этой окрестности наша кривая представляет собой *простой отрезок*.

Итак, при изменении  $t$  вблизи выбранного значения  $t_0$  кривая (27) представляет собой *простой отрезок*, за исключением, может быть, тех отдельных значений  $t_0$ , которые удовлетворяю *трем* сразу двум уравнениям:

$$\varphi'(t_0) = \psi'(t_0) = 0. \quad (30)$$

Следует подчеркнуть, что здесь, таким образом, близость к точке  $t = t_0$  берется в смысле значений параметра  $t$ . Возможны случаи, когда при изменении  $t$  кривая, пройдя через какую-нибудь

точку при  $t = t_1$ , снова проходит через нее уже при значении  $t = t_2$  (черт. 11). Геометрически мы имеем здесь одну точку и, очевидно, особую (самопересечение). Но при параметрическом представлении нам придется исследовать эту точку дважды: при значении  $t = t_1$  и при  $t = t_2$ . Пусть уравнения (30) не выполняются ни

при  $t_1$ , ни при  $t_2$ , так что кривая вблизи значения  $t_1$  является простым отрезком  $PQ$ , а вблизи  $t_2$  — простым отрезком  $RS$ . Таким образом, особая точка получается за счет того, что точки  $t = t_1$  и  $t = t_2$ , удаленные друг от друга по значениям  $t$ , геометрически совпадают и простые отрезки  $PQ$  и  $RS$  пересеклись.

В дальнейшем мы рассматриваем кривую (27) лишь в таких точках  $t_0$ , в которых из  $\varphi'(t_0), \psi'(t_0)$  хотя бы одна не обращается в нуль и которые, следовательно, заведомо являются *обыкновенными*, если ограничиться значениями  $t$ , достаточно близкими к  $t_0$ .

Дифференцируя (27), мы получим

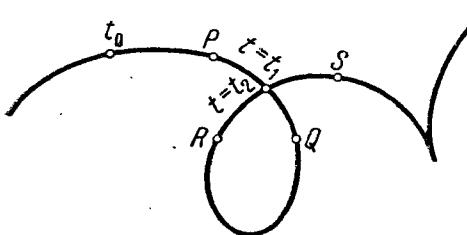
$$dx = \varphi'(t) dt, \quad dy = \psi'(t) dt.$$

Отсюда в рассматриваемой точке  $t_0$  [предполагая  $\varphi'(t_0) \neq 0$ ]

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_0 = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)};$$

кроме того,

$$x_0 = \varphi(t_0), \quad y_0 = \psi(t_0).$$



Черт. 11.

### § 5] КАСАТЕЛЬНАЯ И НОРМАЛЬ. ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ

Вставляя все это в уравнение касательной (7), получим его в виде

$$y = \psi(t_0) + \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)} [x - \varphi(t_0)]$$

или

$$\varphi'(t_0) [y - \psi(t_0)] = \psi'(t_0) [x - \varphi(t_0)]. \quad (31)$$

[Ввиду симметрии этого выражения относительно обеих осей оно сохранит свой вид и в предположении  $\psi'(t_0) \neq 0$ .] Такой вид имеет уравнение касательной в точке  $t = t_0$ . Уравнение нормали отсюда легко получить как уравнение перпендикуляра к прямой (31), проведенного через ту же точку  $(x_0, y_0)$ . Для этого достаточно поменять местами коэффициенты при скобках, изменив знак у одного из них. Получим

$$\varphi'(t_0) [x - \varphi(t_0)] + \psi'(t_0) [y - \psi(t_0)] = 0. \quad (32)$$

Действительно, уравнения (32) и (31) удовлетворяют известному условию перпендикулярности прямых; очевидно также, что прямая (32) проходит через точку  $x_0 = \varphi(t_0), y_0 = \psi(t_0)$ .

Если использовать уравнение (31) при  $t_0 = t_1$  или  $t_0 = t_2$  (черт. 11), получатся уравнения касательных соответственно к отрезкам  $PQ$  или  $RS$  в точке их пересечения.

### § 5. Касательная и нормаль в обыкновенной точке. Полярные координаты.

В некоторых случаях, например, когда с кривой связана геометрическими зависимостями определенная точка (например центр для окружности), является целесообразным изучать кривую в полярных координатах, приняв эту точку за полюс.

Уточним понятие о полярных координатах на плоскости. Пусть фиксирована некоторая точка  $O$ , которую мы будем называть *полюсом*, и выходящая из  $O$  *полуправая*, которую будем называть *полярной осью*. Пусть на плоскости дана любая точка  $M$ ; соединяя ее с  $O$ , получим прямую  $OM$ .

Назовем *полярным углом* точки  $M$  угол  $\varphi$ , на который нужно повернуть полярную ось, чтобы она попала на прямую  $OM$ . Очевидно, угол  $\varphi$  определится лишь с точностью до угла, кратного  $\pi$ , так как при добавочном повороте на  $180^\circ$  полярная ось попадает на ту же прямую  $OM$ , хотя и по другую сторону от точки  $O$ .

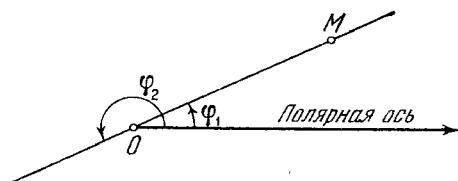
Когда полярный угол  $\varphi$  как-нибудь выбран, назовем *радиусом*<sup>1)</sup> точки  $M$  расстояние  $r = OM$ , взятое со знаком  $+$ , если

<sup>1)</sup> Мы не будем употреблять здесь обычный термин «радиус-вектор», так как в дальнейшем он употребляется с большим основанием в совершенно другом смысле.

полярная ось после поворота прошла через точку  $M$  (на черт. 12 это будет при  $\varphi = \varphi_1$ ), и со знаком  $-$ , если полярная ось заняла положение по другую сторону точки  $O$  (на чертеже — в случае  $\varphi = \varphi_2$ ).

Таким образом, данной точке  $M$  полярный угол  $\varphi$  отвечает неоднозначно, а  $r$  — однозначно, но после выбора  $\varphi$ . Зато, обратно, заданием  $\varphi$  и  $r$  точка  $M$  определяется вполне однозначно: мы поворачиваем полярную ось на угол  $\varphi$  и откладываем на ней от точки  $O$  расстояние  $r$  в положительную или отрицательную сторону в зависимости от знака  $r$ .

Часто ограничиваются случаем  $r > 0$ , в связи с чем угол  $\varphi$  выбирают так, чтобы повернутая полярная ось обязательно прошла через  $M$ ;  $\varphi$  определяется тогда с точностью до угла, кратного  $2\pi$ . Однако это ограничение оказывается неудачным, так как иногда приходится приписывать  $r$  отрицательные значения в силу аналитического характера уравнения кривой. Итак, у нас обе координаты принимают любые значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ .



Черт. 12.

Геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению в полярных координатах:

$$r = r(\varphi), \quad (33)$$

можно при желании рассматривать как параметрически заданную кривую в прямоугольных декартовых координатах. Действительно, если принять полюс  $O$  за начало, а полярную ось за положительное направление по оси  $X$  (см. черт. 12), то очевидно, что декартовы координаты любой точки  $M$  однозначно выразятся через ее полярные координаты:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Рассматривая геометрическое место (33), мы получим здесь  $x$ ,  $y$  как функции независимого параметра  $\varphi$ :

$$\left. \begin{aligned} x &= r(\varphi) \cos \varphi, \\ y &= r(\varphi) \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

т. е. кривую в параметрическом представлении. Было бы нетрудно проверить, что кривая (34) при значениях  $\varphi$ , близких к какому-нибудь данному значению  $\varphi_0$ , всегда является простым отрезком

### § 5] КАСАТЕЛЬНАЯ И НОРМАЛЬ. ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ

за исключением, быть может, тех значений  $\varphi_0$ , для которых

$$r(\varphi_0) = r'(\varphi_0) = 0^1).$$

Оставляя в стороне этот случай, рассмотрим в полярных координатах касательную к нашей кривой в какой-нибудь точке  $M(r, \varphi)$  (черт. 13).

Уточним сначала общее понятие об угле между двумя прямыми  $a$ ,  $b$  на плоскости.

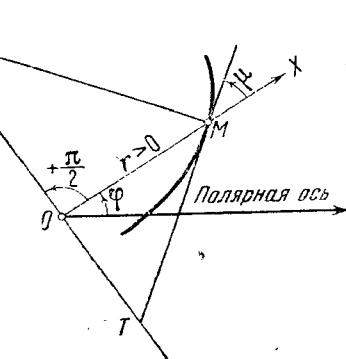
Будем называть углом поворота  $\hat{ab}$  от прямой  $a$  до прямой  $b$  угол, на который нужно повернуть  $a$ , чтобы сделать ее параллельной ( $или совпадающей$ ) с  $b$ . Угол этот берется со знаком  $+$  или  $-$  в зависимости от направления поворота (против или по часовой стрелке) и определяется, очевидно, с точностью до любого угла, кратного  $\pi$ . Тем самым тангенс угла  $\hat{ab}$  будет вполне определенной величиной. Углы  $\hat{ab}$  и  $\hat{ba}$  отличаются, конечно, знаками. Подчеркнем, что положительные направления на прямых  $a$  и  $b$  не играют при этом никакой роли.

Обозначим через  $\mu$  угол поворота от прямой  $OM$  до касательной в точке  $M$ . Роль угла  $\mu$  заключается в том, что если в заданной точке  $M$  указать еще значение  $\mu$ , то касательная в  $M$  вполне определится. Мы хотим прежде всего научиться находить  $\mu$  из уравнения (33). Как окажется,

$$\operatorname{tg} \mu = r \frac{d\varphi}{dr}. \quad (35)$$

Если за полюс  $O$  принята не какая-нибудь случайная точка, а геометрически связанныя с кривой, то часто бывает интересным детальнее изучить взаимное расположение полюса  $O$ , точки кривой  $M$ , касательной и нормали в ней. С этой целью восставим в  $O$  перпендикуляр к  $OM$ , за положительное направление на котором примем положительное направление на  $OM$ , повернутое на угол  $+\frac{\pi}{2}$ . Численные выражения (со знаками) отрезков  $OT$  и  $ON$  на этом перпендикуляре, где  $T$  и  $N$  — точки его пересечения с касательной  $MT$  и нормалью  $MN$ , называются соответственно *полярной под*

<sup>1)</sup> К такому виду приводятся условия (30) в нашем случае.



Черт. 13.

касательной и полярной поднормалью. Как окажется, их выражения имеют вид

$$OT = -r^2 \frac{d\varphi}{dr}, \quad ON = \frac{dr}{d\varphi}. \quad (36)$$

Выведем теперь формулы (35), (36) для произвольно выбранной точки  $M$  нашей кривой (черт. 13). Для этой цели перейдем в новые полярные координаты, повернув полярную ось так, чтобы она проходила через точку  $M$ . В новых полярных координатах полярный угол точки  $M$  равен, очевидно, нулю, а полярный радиус  $r$  сохраняет прежнее значение.

Принимая  $O$  за начало, новую полярную ось — за положительную полуось  $X$ , перпендикуляр к ней с положительным направлением на нем — за ось  $Y$  и пользуясь формулами (34), получаем в точке  $M$

$$x = r, \quad y = 0.$$

Кроме того, дифференцируя (34), получим

$$\begin{aligned} dx &= dr \cos \varphi - r \sin \varphi d\varphi, \\ dy &= dr \sin \varphi + r \cos \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Но в точке  $M$   $\varphi = 0$  и, если  $dx, dy$  вычислены при смещении из точки  $M$ , мы получаем из этих формул

$$dx = dr, \quad dy = r d\varphi.$$

Так как прямая  $OM$  совпадает с осью  $X$ , то  $\operatorname{tg} \mu$  есть угловой коэффициент касательной в координатах  $x, y$ , и следовательно,

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{dy}{dx} = r \frac{d\varphi}{dr}.$$

Формула (35) доказана.

Найдем теперь точки  $T$  и  $N$ , в которых касательная и нормаль пересекают перпендикуляр к полярной оси в полюсе, т. е. ось  $Y$ . Ординаты этих точек  $y_T$  и  $y_N$  определяются из требования, чтобы угловой коэффициент отрезка  $TM$ , т. е.  $\frac{0 - y_T}{x - 0}$ , был равен угловому коэффициенту касательной  $\operatorname{tg} \mu$ , а угловой коэффициент отрезка  $NM$ , т. е.  $\frac{0 - y_N}{x - 0}$ , был обратным  $\operatorname{tg} \mu$  по величине и по знаку. Запишем эти условия, пользуясь формулой (35) и зная, что в  $M$   $x = r$ :

$$-\frac{y_T}{r} = r \frac{d\varphi}{dr} \quad \text{и} \quad -\frac{y_N}{r} = -\frac{dr}{r d\varphi},$$

откуда

$$y_T = -r^2 \frac{d\varphi}{dr}, \quad y_N = \frac{dr}{d\varphi}.$$

Так как ординаты  $y_T, y_N$  совпадают с численными выражениями  $OT$  и  $ON$ , то формулы (36) тоже доказаны.

Конечно, формулы (35), (36) доказаны лишь в новых полярных координатах, в которых полярная ось проходит через исследуемую точку  $M$ . Но тем самым формулы будут верны и в старых (произвольных) полярных координатах. Действительно, в результате поворота полярной оси полярный радиус  $r$  каждой точки остается прежним, а полярный угол  $\varphi$  изменяется на константу (угол поворота), а значит,  $d\varphi$  не меняется. Но в формулы (35) и (36) входят лишь  $r, dr, d\varphi$  и, следовательно, формулы остаются верными в любой полярной системе координат.

Приведем некоторые примеры того, как рассмотренные величины характеризуют геометрическую связь между кривой и определенной точкой, принятой за полюс.

1. Кривая, пересекающая под постоянным углом все лучи, выходящие из полюса:  $\mu = \mu_0 = \text{const}$ .

Пользуясь формулой (35), запишем это требование:

$$r \frac{d\varphi}{dr} = \operatorname{tg} \mu_0$$

или

$$\operatorname{ctg} \mu_0 d\varphi = \frac{dr}{r}.$$

Интегрируя почленно, получаем

$$\varphi \operatorname{ctg} \mu_0 + C = \ln r,$$

откуда

$$r = r_0 e^{\varphi \operatorname{ctg} \mu_0},$$

где через  $r_0$  обозначено  $e^C$ . Итак, в этом случае  $r$  выражается показательной функцией от  $\varphi$ , причем  $\operatorname{ctg} \mu_0$  является коэффициентом в показателе. Мы получили *логарифмическую спираль*.

2. Поднормаль  $ON = a$  — постоянная.

Запишем это требование, пользуясь второй из формул (36). Получим

$$\frac{dr}{d\varphi} = a$$

или

$$dr = a d\varphi.$$

Интегрируя почленно, получаем

$$r = ar + C.$$

Полярный радиус  $r$  выражается линейной функцией  $\varphi$ . Мы получили *архimedову спираль*.

3. Подкасательная  $OT = a$  — постоянная.

Запишем это требование, пользуясь первой из формул (36). Получим

$$-r^2 \frac{d\varphi}{dr} = a$$

или

$$\frac{d\varphi}{a} = -\frac{dr}{r^2}.$$

Интегрируя почленно, находим

$$\frac{\varphi}{a} + C = \frac{1}{r}.$$

Мы получили гиперболическую спираль.

Заметим, что во всех трех случаях произвольная постоянная интегрирования  $C$  не влияет на форму кривой; изменение  $C$  влечет лишь увеличение всех полярных углов на одну и ту же величину, т. е. поворот кривой как твердого тела около  $O$ . Интересуясь лишь формой кривой, можно считать  $C=0$ .

### § 6. Строение кривой вблизи особых точек. Основные факты.

Мы вернемся к изучению кривой, заданной в координатах  $x, y$  уравнением

$$F(x, y)=0. \quad (37)$$

Поведение кривой вблизи ее любой обыкновенной точки  $M_0$ , изучено нами достаточно хорошо в § 2; кривая является там простым отрезком, и в бесконечно малом по обе стороны  $M_0$  она устроена, грубо говоря, как слегка искривленный прямолинейный отрезок.

Теперь нам нужно составить себе представление о поведении кривой (37) вблизи ее особой точки  $M_0$ , по крайней мере в наиболее распространенных случаях особых точек. Согласно (3), в особой точке первые производные левой части (37) обязательно равны нулю:

$$F_x = F_y = 0. \quad (38)$$

Так как (38) имеет место не тождественно, а лишь в рассматриваемой точке  $M_0$ , то вторые частные производные от  $F$  по  $x, y$  не имеют никаких оснований обращаться в нуль в этой точке и практически, вообще говоря, не обращаются в нуль.

Лишь в исключительных случаях в  $M_0$  помимо (38) имеют место еще равенства

$$F_{xx} = F_{xy} = F_{yy} = 0. \quad (38')$$

Если в  $M_0$  условия (38) имеют место, а (38') — нет, т. е. первые производные — обе нули, а из вторых по крайней мере одна не равна нулю, то мы говорим, что у нас *двойная особая точка*. Это наиболее распространенный случай особой точки. Геометрический смысл названия выяснится позже.

Если имеют место и (38) и (38'), но среди производных третьего порядка

$$F_{xxx}, F_{xxy}, F_{xyy}, F_{yyy}$$

хотя бы одна в точке  $M_0$  отлична от нуля, то мы называем  $M_0$  *тройной особой точкой*. И вообще, если в  $M_0$  все частные производные от  $F$  до  $n-1$ -го порядка включительно обращаются в 0, но

среди производных  $n$ -го порядка есть хотя бы одна, отличная от 0, то мы называем  $M_0$   *$n$ -кратной особой точкой*.

В этом параграфе мы ставим себе целью лишь ориентироваться в основных фактах, не давая исчерпывающих доказательств (которые в теории особых точек достаточно сложны). Мы будем рассуждать так. За ранее мы не знаем, что представляет собой кривая вблизи особой точки  $M_0$ . Предположим, однако, что из этой кривой можно выделить часть, представляющую собой простой отрезок, содержащий точку  $M_0$ .

Пусть уравнение этого простого отрезка будет:

$$y = f(x).$$

Так как простой отрезок входит в состав кривой, то после подстановки  $y=f(x)$  в уравнение кривой (37) должно получиться тождество

$$F(x, f(x))=0.$$

Всякое тождество можно дифференцировать любое число раз по входящему в него независимому переменному. В данном случае дифференцируем по  $x$ , считая, что в левой части стоит сложная функция  $F(x, y)$ , где  $y=f(x)$ . Получим

$$\left. \begin{aligned} F_x + F_y f'(x) &= 0, \\ F_{xx} + 2F_{xy}f'(x) + F_{yy}f'(x)^2 + F_y f''(x) &= 0, \\ F_{xxx} + 3F_{xxy}f'(x) + 3F_{xyy}f'(x)^2 + F_{yyy}f'(x)^3 + \\ &\quad + 2F_{xy}f''(x) + 2F_{yy}f'(x)f''(x) + \frac{d}{dx}(F_y f''(x)) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Рассмотрим эти равенства в особой точке  $M_0$ ,  $(x_0, y_0)$ . Предположим сначала, что эта точка *двойная*. Тогда

$$F_x^0 = F_y^0 = 0,$$

а среди  $F_{xx}^0, F_{xy}^0, F_{yy}^0$  имеется хотя бы одна производная, отличная от нуля [нульком вверху мы отмечаем то обстоятельство, что производные вычислены в точке  $M_0(x_0, y_0)$ ]. Будем считать для определенности, что  $F_{yy}^0 \neq 0$ ; этого всегда можно добиться поворотом координатных осей. Первые два из равенств (39) примут вид

$$\left. \begin{aligned} F_x^0 + F_y^0 f'(x_0) &= 0, \\ F_{xx}^0 + 2F_{xy}^0 f'(x_0) + F_{yy}^0 f'(x_0)^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (39')$$

В случае обыкновенной точки мы из первого равенства (39) могли вычислить угловой коэффициент  $f'(x_0)$ ; теперь это невозможно, так как  $F_x^0 = F_y^0 = 0$  и относительно  $f'(x_0)$  мы имеем не уравнение, а тождество. Зато во втором равенстве (39) выпало

$F_y f''(x_0)$ , и мы получаем уравнение по отношению к угловому коэффициенту  $f'(x_0)$ , но уже не линейное, а квадратное.

Итак, если кривая содержит простой отрезок  $y = f(x)$ , проходящий через двойную особую точку  $M_0$ , то угловой коэффициент его касательной в точке  $M_0$ , т. е.  $f'(x_0)$ , должен быть корнем квадратного уравнения

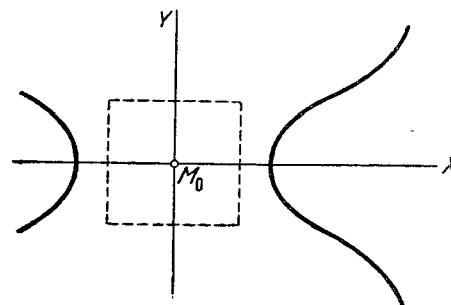
$$F_{xx}^0 + 2F_{xy}^0 f'(x_0) + F_{yy}^0 f'(x_0)^2 = 0.$$

Рассмотрим три возможных здесь случая.

1-й случай:

$$F_{xx}^0 F_{yy}^0 - F_{xy}^{02} > 0.$$

Корни квадратного уравнения комплексно сопряженные, а значит, такого простого отрезка вообще не может существовать,



Черт. 14.

так как угловой коэффициент его касательной оказался бы комплексным (мы же рассматриваем лишь вещественные кривые). Более детальное исследование (см. ниже § 7\*) показывает, что в этом случае в достаточно малой окрестности точки  $M_0(x_0, y_0)$  вообще нет точек кривой, кроме самой точки  $M_0$ .

Такой геометрически несколько неожиданный результат объясняется тем, что у

нас кривая была определена как место точек, удовлетворяющих уравнению (2), т. е. более аналитически, чем геометрически. Существование же некоторых точек кривой, лежащих «отдельно», мы теперь уже вынуждены принять как логическое следствие нашего определения.

Точка  $M_0$  называется изолированной особой точкой кривой (черт. 14).

Приведем пример. Кривая

$$y^2 = -4x^2 + x^4$$

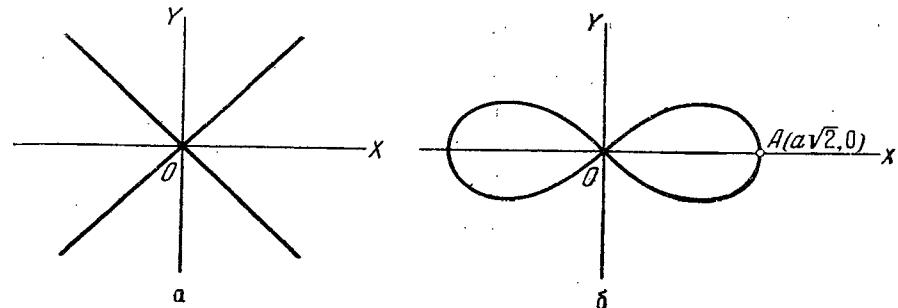
имеет точку  $(0, 0)$  изолированной, ибо при значениях  $0 < |x| < 2$  правая часть уравнения отрицательна и не может быть равна  $y^2$  ни при каком вещественном значении  $y$ . При  $|x| > 2$  кривая располагается симметрично относительно обеих осей и состоит целиком из обычных точек.

Кривая  $x^2 + y^2 = 0$  вообще состоит из одной только изолированной точки  $O(0, 0)$ .

2-й случай:

$$F_{xx}^0 F_{yy}^0 - F_{xy}^{02} < 0.$$

Корни квадратного уравнения—вещественные различные, и можно ожидать существования двух простых отрезков. И действительно, более детальное исследование (§ 7\*) показывает, что в этом случае в окрестности двойной точки кривая состоит из двух взаим-



Черт. 15.

но пересекающихся простых отрезков. Это так называемая *узловая точка* или *точка самопересечения*.

Элементарным примером узловой точки служит точка  $O(0, 0)$  на кривой  $y^2 - x^2 = 0$ . Кривая эта представляет собой пару прямых, делящих пополам углы между осями и пересекающихся в начале (черт. 15, а). Другим примером может служить лемниската<sup>1)</sup>

$$(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2 x^2 = a^4.$$

Эта кривая имеет форму восьмерки с точкой самопересечения в начале координат (черт. 15, б).

3-й случай:

$$F_{xx}^0 F_{yy}^0 - F_{xy}^{02} = 0.$$

Корни вещественные равные.

Этот случай не может быть столь же исчерпывающе охарактеризован, как первые два, и встречается в геометрически различных формах. У всех них есть, однако, общая черта: все ветви кривой, подходящие к особой точке  $M_0$ , имеют в ней общую касательную (отвечающую двойному корню квадратного уравнения).

Рассмотрим некоторые примеры двойных особых точек, отвечающие 3-му случаю.

1) Лемниската—кривая, для точек которой произведение расстояний от двух данных точек  $F_1, F_2$  (фокусов) постоянно и равно  $\frac{1}{4} \overline{F_1 F_2}^2$ .

1. Точка возврата 1-го рода. Рассмотрим полукубическую параболу (черт. 16)

$$F(x, y) = y^2 - x^3 = 0.$$

Легко проверить, что в начале координат

$$F_x^0 = F_y^0 = F_{xx}^0 = F_{xy}^0 = 0, \quad F_{yy}^0 = 2,$$

и следовательно, мы имеем двойную точку. При этом

$$F_{yy}^0 F_{xx}^0 - F_{xy}^0 = 0,$$

так что налицо 3-й случай. Кривая подходит к точке  $O$  двумя ветвями (а именно,  $y = x\sqrt[3]{x}$ ,  $y = -x\sqrt[3]{x}$ ), имеющими в точке  $O$  общую касательную и расположеными по одну сторону от общей нормали и по разные стороны от общей касательной.

Когда вблизи двойной точки имеет место такая геометрическая картина, мы называем эту точку *точкой возврата 1-го рода*.

Практически в 3-м случае, как правило, мы встречаемся с точкой возврата 1-го рода, и лишь в виде исключения — с другой геометрической картиной поведения кривой. Точный смысл этого утверждения будет раскрыт в § 7\*. Приведем примеры исключительных случаев.

2. Точка возврата 2-го рода. Рассмотрим кривую

$$F(x, y) = (y - x^2)^2 - x^5 = 0.$$

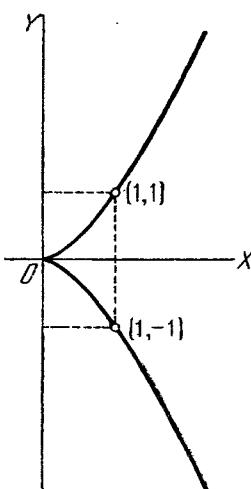
Черт. 16.

Значения частных производных 1-го и 2-го порядков в точке  $O(0, 0)$  те же, что в предыдущем примере. Снова имеет место 3-й случай. Однако форма кривой вблизи точки  $O$  существенно иная (черт. 17). Кривая подходит к точке  $O$  двумя ветвями (а именно,  $y = x^2 + x^2\sqrt{x}$ ,  $y = x^2 - x^2\sqrt{x}$ ), имеющими в точке  $O$  общую касательную и расположеными (вблизи точки  $O$ ) по одну сторону от общей нормали и по одну сторону от общей касательной (нужно учесть, что  $x^2\sqrt{x}$  при достаточно малых  $x$  мало отличается от  $x^2$  и не имеет влияния на знак  $y$ ).

В случае такой геометрической картины мы будем называть двойную точку *точкой возврата 2-го рода*.

3. Точка самоприкосновения. Исследуем кривую

$$F(x, y) = y^2 - x^4 = 0.$$



Значения частных производных 1-го и 2-го порядков в точке  $O(0, 0)$  — прежние; имеет место 3-й случай.

Кривая состоит из двух парабол  $y = x^2$ ,  $y = -x^2$ , касающихся друг друга в точке  $O$  (черт. 18).

До сих пор мы ограничивались двойными точками.

Пусть теперь  $M_0$  будет *тройной особой точкой* и, следовательно,

$$F_x^0 = F_y^0 = F_{xx}^0 = F_{xy}^0 = F_{yy}^0 = 0.$$

Первое и второе из равенств (39) обращаются при этом в тождество относительно  $f'(x_0)$ ,  $f''(x_0)$ . Зато третье из равенств (39) дает уравнение для определения  $f'(x_0)$  уже не квадратное, а кубическое:

$$F_{xxx}^0 + 3F_{xxy}^0 f'(x_0) + 3F_{xyy}^0 f'(x_0)^2 + F_{yyy}^0 f'(x_0)^3 = 0.$$

Для определенности будем считать  $F_{yyy}^0 \neq 0$ .

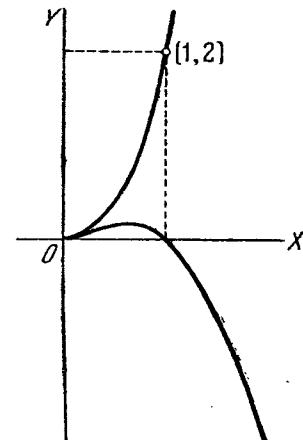
Таким образом, угловые коэффициенты касательных к простым отрезкам кривой, проходящим через тройную особую точку  $M_0$ , удовлетворяют (в этой точке) только что полученному кубическому уравнению.

Приведем без доказательства следующие факты.

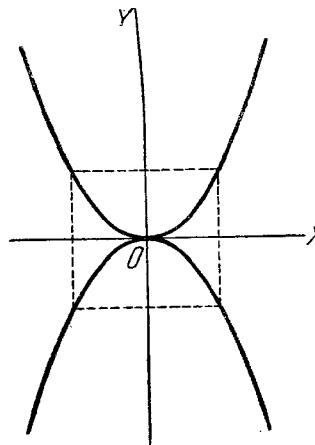
Каждому *простому вещественному* корню этого уравнения отвечает простой отрезок, принадлежащий данной кривой и проходящий через особую точку с угловым коэффициентом касательной, равным этому корню.

Если кратных вещественных корней нет, то кривая в окрестности точки  $M_0$  целиком состоит из простых отрезков, пересекающихся в точке  $M_0$  и отвечающих различным вещественным корням. Если имеются три различных вещественных корня, то таких отрезков 3, если вещественный корень один, то отрезок тоже один (так что по существу мы возвращаемся к случаю обыкновенной точки).

В случае *кратных вещественных* корней положение значительно усложняется, и на этом мы останавливаться не будем.



Черт. 17.



Черт. 18.

Аналогично обстоит дело и в случае  $n$ -кратной особой точки  $M_0$ : первые  $n-1$  равенств (39) обращаются в тождества [относительно  $f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n-1)}(x_0)$ ], а  $n$ -е равенство дает уравнение  $n$ -й степени относительно  $f'(x_0)$ . Это уравнение составляется аналогично ранее полученным квадратному и кубическому уравнениям (тоже с биномиальными коэффициентами). То, что было сказано о вещественных корнях кубического уравнения, остается справедливым в этом общем случае.

### § 7\*. Строение кривой вблизи особых точек. Точная теория.

В этом параграфе мы дадим полное доказательство фактов, изложенных в § 6, по крайней мере в отношении двойных особых точек.

Рассмотрим кривую

$$F(x, y) = 0.$$

Для простоты выкладок перенесем начало координат  $O$  в изучаемую точку  $M_0(x_0, y_0)$ . Так как старые координаты получаются из новых добавлением к ним постоянных, то в каждой данной точке значения частных производных от  $F(x, y)$  по новым координатам будут те же, что и по старым (по правилу дифференцирования функции от функции). Поэтому все сказанное об  $F_x, F_y, F_{xx}, F_{xy}, \dots$  в новой системе координат будет справедливо и в старой, т. е. в любой системе координат.

Разложим  $F(x, y)$  в ряд Тейлора по степеням  $x, y$  с остаточным членом  $R_2$ . Как известно, это разложение имеет вид

$$F(x, y) = F^0 + F_x^0 x + F_y^0 y + \frac{1}{2} (F_{xx}^0 x^2 + 2F_{xy}^0 xy + F_{yy}^0 y^2) + R_2, \quad (40)$$

где нулем наверху отмечены значения  $F(x, y)$  и ее производных, взятые в точке  $(0, 0)$ , остаточный же член  $R_2$  имеет вид

$$R_2 = \frac{1}{6} (\tilde{F}_{xxx} x^3 + 3\tilde{F}_{xxy} x^2 y + 3\tilde{F}_{xyy} x y^2 + \tilde{F}_{yyy} y^3).$$

Здесь над частными производными поставлен значок  $\sim$ , чтобы отметить, что они взяты в некоторой промежуточной точке  $(\theta x, \theta y)$ , где  $0 < \theta < 1$ .

Но так как начало  $(0, 0)$  сейчас находится в точке  $M_0$  на нашей кривой, то оно удовлетворяет уравнению кривой, и мы имеем

$$F^0 = 0,$$

а так как, кроме того, точка  $M_0$  особая, то в ней

$$F_x^0 = F_y^0 = 0,$$

т. е. имеют место условия (38).

### § 7] СТРОЕНИЕ КРИВОЙ ВБЛИЗИ ОСОБЫХ ТОЧЕК. ТОЧНАЯ ТЕОРИЯ 39

Вставляя теперь в уравнение кривой вместо  $F(x, y)$  его разложение, мы получим уравнение кривой в виде

$$\frac{1}{2} (F_{xx}^0 x^2 + 2F_{xy}^0 xy + F_{yy}^0 y^2) + R_2 = 0.$$

Умножим обе части уравнения на 2 и обозначим для краткости в выражении остаточного члена  $\frac{1}{3} \tilde{F}_{xxx}, \tilde{F}_{xxy}, \tilde{F}_{xyy}, \frac{1}{3} \tilde{F}_{yyy}$ , соответственно, через  $A, B, C, D$ . Получим

$$F_{xx}^0 x^2 + 2F_{xy}^0 xy + F_{yy}^0 y^2 + (Ax^3 + Bx^2 y + Cxy^2 + Dy^3) = 0. \quad (41)$$

Конечно, не нужно забывать, что  $A, B, C, D$  суть также функции от  $x, y$  и именно в них скрыта вся сложная сторона уравнения (41). При этом можно считать, что  $A, B, C, D$ —непрерывные функции, имеющие столько же непрерывных частных производных по  $x, y$ , сколько их имеют соответственно  $F_{xxx}, F_{xxy}, F_{xyy}, F_{yyy}$ <sup>1</sup>.

Мы будем изучать поведение кривой вблизи особой точки  $M_0(0, 0)$ , т. е. в некоторой окружающей эту точку области, которую для простоты можно взять квадратной и определить условиями

$$|x| < \eta, \quad |y| < \eta;$$

Эта квадратная область берется достаточно малой, чтобы в ней (включая границу) выполнялись наши обычные предположения

<sup>1)</sup> При выводе остаточного члена ряда Тейлора в двух переменных для  $F(x, y)$  обычно рассматривают  $F(tx, ty)$ , считая  $x, y$  произвольно фиксированными, а  $t$  переменным. Тогда  $F(tx, ty)$  есть функция одного переменного  $t$ , которую можно разложить в ряд Тейлора по степеням  $t$  с остаточным членом  $R_2$  в интегральной форме, положив затем  $t=1$ . Получается как раз разложение (40), где остаточный член имеет вид

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{1}{2!} \int_0^1 \frac{d^3}{dt^3} F(tx, ty) (1-t)^2 dt = \\ &= \frac{x^3}{2} \int_0^1 F_{xxx}(tx, ty) (1-t)^2 dt + \frac{3x^2 y}{2} \int_0^1 F_{xxy}(tx, ty) (1-t)^2 dt + \dots, \end{aligned}$$

так что

$$A = \frac{1}{2} \int_0^1 F_{xxx}(tx, ty) (1-t)^2 dt, \quad B = \frac{3}{2} \int_0^1 F_{xxy}(tx, ty) (1-t)^2 dt,$$

и аналогично для  $C$  и  $D$ .

Если, например,  $F_{xxx}$  имеет непрерывную производную по  $x$  (или по  $y$ ), то имеет ее и  $A$ , причем  $\frac{\partial A}{\partial x}$  получится дифференцированием по  $x$  под знаком интеграла. Повторяя это дифференцирование нужное число раз, мы докажем наше утверждение о дифференцируемости  $A, B, C, D$ .

о дифференцируемости функции  $F(x, y)$  достаточное число раз, и как следствие этого была справедлива формула (41). При этом непрерывные функции  $A, B, C, D$  будут, конечно, и ограниченными в пределах рассматриваемой квадратной области.

Ограничимся рассмотрением двойной особой точки, т. е. допустим, что в (41) у членов 2-й степени все коэффициенты сразу обращаются в нуль. Для удобства выкладок нам при этом желательно, чтобы среди этих коэффициентов именно для  $F_{yy}^0$  было гарантировано необращение в нуль. Но это не составит нового предположения, так как в случае

$$F_{yy}^0 = 0$$

мы можем повернуть координатные оси, и тогда остальные члены 2-й степени (не исчезающие тождественно, как мы предположили) выделят в новой системе координат отличный от 0 коэффициент при  $y^2$ . Итак, мы считаем

$$F_{yy}^0 \neq 0. \quad (42)$$

Докажем теперь, что в достаточно малой области около  $M_0(0, 0)$  отношение  $\frac{x}{y}$  для точек кривой ограничено снизу по абсолютной величине:

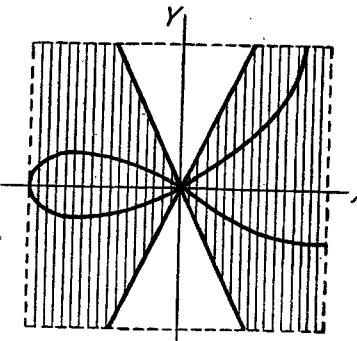
$$\left| \frac{x}{y} \right| > a > 0,$$

т. е. около оси  $Y$  можно построить пару вертикальных углов, куда точки изучаемой кривой не попадают (черт. 19).

Допустим противное, а именно, что в сколь угодно малой области  $|x| < \eta, |y| < \eta$  найдутся точки  $(x, y)$  на кривой, для которых отношение  $\frac{x}{y}$  сколь угодно близко к нулю. Так как эти точки берутся на кривой, то для них удовлетворяется уравнение (41). Разделив обе его части на  $y^2$ , получим

$$F_{xx}^0 \left( \frac{x}{y} \right)^2 + 2F_{xy}^0 \frac{x}{y} + F_{yy}^0 + y \left\{ A \left( \frac{x}{y} \right)^3 + B \left( \frac{x}{y} \right)^2 + C \frac{x}{y} + D \right\} = 0.$$

Но так как окрестность берется сколь угодно малой, то здесь  $y$  сколь угодно мало; а так как в окрестности, по предположению, находятся точки кривой со сколь угодно малыми отношениями  $\frac{x}{y}$ , то все члены [левой части, кроме  $F_{yy}^0$ , сколь угодно малы



Черт. 19.

### § 7] СТРОЕНИЕ КРИВОЙ В БЛИЗИ ОСОБЫХ ТОЧЕК. ТОЧНАЯ ТЕОРИЯ 41

для этих точек. Но  $F_{yy}^0$  постоянное, отличное от нуля, и, следовательно, не может обращаться в нуль при добавлении сколь угодно малых величин. Получилось противоречие, доказывающее наше утверждение.

Итак, в достаточно малой окрестности точки  $M_0(0, 0)$  (этой окрестностью мы и ограничимся)  $\left| \frac{x}{y} \right|$  для точек  $M(x, y)$  на кривой ограничено снизу<sup>1)</sup>, а следовательно,  $\left| \frac{y}{x} \right|$  ограничено сверху. Введем для отношения  $\frac{y}{x}$  особое обозначение  $u$ ; имеем

$$u = \frac{y}{x}, \quad |u| < Q, \quad (43)$$

где  $Q$  — некоторое постоянное.

Перешлем теперь (41), разделив обе его части на  $x^2$  (см. сноску). Получим, пользуясь обозначением (43),

$$F_{xx}^0 + 2F_{xy}^0 u + F_{yy}^0 u^2 + x(A + Bu + Cu^2 + Du^3) = 0. \quad (44)$$

Решим уравнение (44) как квадратное уравнение относительно  $u$ ; в качестве свободного члена берем  $F_{xx}^0$  в сумме с четвертым членом левой части, не обращая внимания на зависимость последнего от  $u$ . Получим

$$u = -\frac{F_{xy}^0}{F_{yy}^0} \pm \sqrt{\left( \frac{F_{xy}^0}{F_{yy}^0} \right)^2 - \frac{F_{xx}^0 + x(A + Bu + Cu^2 + Du^3)}{F_{yy}^0}}. \quad (45)$$

Такое выражение для  $u$  оказывается полезным, несмотря на то, что в этом выражении  $u$  фигурирует в правой части снова. Дело в том, что выражение

$$x(A + Bu + Cu^2 + Du^3), \quad (45')$$

через которое входит  $u$  в правой части, стремится к нулю, если заставить точку кривой  $M(x, y)$  стремиться по кривой в  $M_0(0, 0)$ . Действительно, в выражении (45'), как известно из предыдущего, величины  $A, B, C, D$  и  $u$  ограничены; поэтому выражение становится сколь угодно мало по модулю вместе с  $x$ , т. е. вместе с выбором достаточно малой окрестности точки  $M_0(0, 0)$ .

Итак, ограничиваясь достаточно малой окрестностью, мы делаем выражение (45') сколь угодно близким к нулю, а следовательно, значения  $u$ , пользуясь их выражением (45), сколь угодно близкими к

$$-\frac{F_{xy}^0}{F_{yy}^0} \pm \sqrt{\left( \frac{F_{xy}^0}{F_{yy}^0} \right)^2 - \frac{F_{xx}^0}{F_{yy}^0}}.$$

<sup>1)</sup> В частности,  $\frac{x}{y} \neq 0$ ; следовательно,  $x$  не может обращаться в нуль нигде, за исключением самой точки  $M_0$ .

Обозначим через  $u_1$  и  $u_2$  два возможных здесь значения, т. е. два корня квадратного уравнения

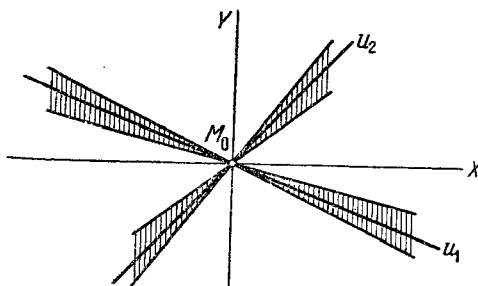
$$F_{xx}^0 + 2F_{xy}^0 u + F_{yy}^0 u^2 = 0. \quad (46)$$

Мы можем окончательно формулировать следующий результат: *значения  $u$ , т. е. отношения  $\frac{y}{x}$ , для точек изучаемой кривой сколь угодно близки или к  $u_1$ , или к  $u_2$ , если кривая рассматривается в достаточно малой окрестности своей особой точки  $M_0(0, 0)$ .*

Точнее: для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать сколь малое  $\eta$ , что для всех точек  $M(x, y)$  на кривой внутри окрестности  $|x| < \eta, |y| < \eta$

$$\text{или } \left| \frac{y}{x} - u_1 \right| < \varepsilon, \text{ или } \left| \frac{y}{x} - u_2 \right| < \varepsilon. \quad (47)$$

Геометрически условия (47) означают, что угловой коэффициент прямой  $M_0M$ , направленной из начала  $M_0$  в какую-нибудь точку  $M$  на кривой, сколь угодно мало отличается либо от  $u_1$ , либо от  $u_2$  или (что то же), что *все точки кривой попадают либо в пару вертикальных углов, сколь угодно тесно охватывающих прямую с угловым коэффициентом  $u_1$ , либо в аналогичную пару для  $u_2$ , если только кривая рассматривается в достаточно малой окрестности точки  $M_0$*  (черт. 20).



Черт. 20.

Как ясно заранее, полученный результат будет иметь совершенно различный геометрический смысл в зависимости от характера корней уравнения (46). Мы разберем поэтому отдельно три различных возможных здесь случая.

1-й случай:

$$F_{xx}^0 F_{yy}^0 - F_{xy}^0{}^2 > 0^1). \quad (48)$$

Корни  $u_1, u_2$  — комплексные сопряженные.

<sup>1)</sup> Выписанное условие имеет одинаковый вид при любом выборе прямоугольной декартовой системы  $x, y$ , так как из аналитической геометрии известно, что дискриминант членов 2-й степени в инвариантном выражении — в данном случае в левой части (41) — инвариантен при преобразованиях  $x, y$ .

### § 7] СТРОЕНИЕ КРИВОЙ ВБЛИЗИ ОСОБЫХ ТОЧЕК. ТОЧНАЯ ТЕОРИЯ 43

Мы утверждаем, что в этом случае около точки  $M_0(0, 0)$  можно выделить сколь малую окрестность  $|x| < \eta, |y| < \eta$ , в которой *совершенно нет точек нашей кривой, кроме самой точки  $M_0(0, 0)$ .*

Допустим противное, т. е. что в сколь угодно малой окрестности точки  $M_0$  найдутся точки нашей кривой, отличные от  $M_0$ . Тогда, как мы знаем, для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать достаточно малую окрестность, в которой для точек кривой имеют место неравенства (47).

Так как сколь угодно мало, то это означает, что *вещественное* переменное  $\frac{y}{x}$  способно неограниченно приближаться к комплексным постоянным  $u_1, u_2$ , что невозможно.

Итак, некоторая окрестность  $M_0$  совершенно свободна от точек нашей кривой, за исключением самой  $M_0(0, 0)$ . Что же касается  $M_0$ , то она принадлежит кривой, что можно проверить, подставив в (41) значения  $x = y = 0$ . Мы получили изолированную точку.

2-й случай:

$$F_{xx}^0 F_{yy}^0 - F_{xy}^0{}^2 < 0. \quad (49)$$

Корни  $u_1$  и  $u_2$  — вещественные различные.

В этом случае нет оснований думать, что кривая не существует в окрестности точки  $M_0$ , но, наученные опытом предыдущего случая, мы должны это существование доказать. Кроме того, у нас нет еще никакого обоснованного представления о том, как расположится вблизи  $M_0$  точки нашей кривой (если она там существует), кроме результата на стр. 42, указывающего на их сгущение около направлений  $u_1$  и  $u_2$ .

Нам придется перейти вместо  $x$  и  $y$  к новым переменным  $x$  и  $u$ , где  $u = \frac{y}{x}$  и, следовательно,

$$y = ux. \quad (50)$$

Так как для точек кривой, попавших в достаточно малую окрестность точки  $M_0(0, 0)$ , значения  $u$  становятся как угодно близкими либо к  $u_1$ , либо к  $u_2$  (стр. 42), то переменные  $x, u$  достаточно рассматривать вблизи значений

$$\text{или } x = 0, u = u_1, \text{ или } x = 0, u = u_2.$$

Ограничиваюсь, следовательно, значениями  $x, u$  из какой-нибудь окрестности  $|x| < \eta, |u - u_1| < \varepsilon$  в первом случае и  $|x| < \eta, |u - u_2| < \varepsilon$  во втором случае, мы не упустим при этом ни одной точки кривой, попавшей внутрь достаточно малой окрестности точки  $M_0(0, 0)$  в плоскости  $x, y$ .

Для определенности изучим точки, для которых значения  $x, u$  лежат в окрестности значений  $x = 0, u = u_1$ . Для точек, расположенных вблизи  $x = 0, u = u_2$ , все рассуждения повторятся словесно.

Нам уже известно, что, разделив левую часть уравнения кривой на  $x^2$ , мы приводим его к виду (44):

$$\frac{F(x, y)}{x^2} \equiv F_{xx}^0 + 2F_{xy}^0 u + F_{yy}^0 u^2 + x(A + Bu + Cu^2 + Du^3) = 0.$$

Здесь  $A, B, C, D$ —непрерывные и дифференцируемые функции от  $x, y$ , а следовательно, и от  $x, u$ .

Обозначим левую часть этого уравнения, рассматриваемую как функция от  $x$  и  $u$ , через  $\varphi(x, u)$ :

$$\varphi(x, u) \equiv F_{xx}^0 + 2F_{xy}^0 u + F_{yy}^0 u^2 + x(A + Bu + Cu^2 + Du^3). \quad (51)$$

Само же уравнение, связывающее  $x$  и  $u$ , примет вид

$$\varphi(x, u) = 0. \quad (52)$$

Вычислим еще частную производную от  $\varphi$  по  $u$ :

$$\varphi_u(x, u) = 2(F_{xy}^0 + F_{yy}^0 u) + x \frac{\partial}{\partial u}(A + Bu + Cu^2 + Du^3). \quad (53)$$

Посмотрим теперь, что происходит с уравнением (52) при значениях  $x=0, u=u_1$ , в окрестности которых рассматриваются переменные  $x, u$ . Вставляя  $x=0$  и  $u=u_1$  в (51), мы видим, что первые три члена дают 0, так как  $u_1$  есть корень уравнения (46); последний же член равен 0 вместе с  $x$ .

Итак,

$$\varphi(0, u_1) = 0, \quad (54)$$

т. е. уравнение (52) удовлетворяется при  $x=0, u=u_1$ . Что же касается частной производной (53), то она при тех же значениях принимает вид

$$\varphi_u(0, u_1) = 2(F_{xy}^0 + F_{yy}^0 u_1) \neq 0. \quad (55)$$

Неравенство нулю имеет здесь место потому, что в противном случае

$$u_1 = -\frac{F_{xy}^0}{F_{yy}^0},$$

а такой вид корень квадратного уравнения (46) имеет только в случае равных корней и не может иметь сейчас, когда в силу (49) корни  $u_1, u_2$  действительны и различны.

Из (54) и (55) следует<sup>1)</sup>, что уравнение (52) в достаточно малой окрестности значений  $x=0, u=u_1$  однозначно разрешимо относительно  $u$ , так что уравнение (52) в пределах этой окрестности можно переписать в виде

$$u = \varphi_1(x), \quad (56)$$

<sup>1)</sup> Теорема существования неявной функции.

## § 7] СТРОЕНИЕ КРИВОЙ ВЕЛИЗИ ОСОБЫХ ТОЧЕК. ТОЧНАЯ ТЕОРИЯ 45

где функция  $\varphi_1(x)$  непрерывна и дифференцируема нужное число раз. При этом (56) удовлетворяется при  $x=0, u=u_1$ , другими словами,

$$\varphi_1(0) = u_1.$$

Уравнение (56) выражает в простой форме зависимость между  $x$  и  $u$  для точек нашей кривой в окрестности значений  $x=0, u=u_1$ .

Теперь нетрудно, ограничиваясь той же окрестностью, в простой форме переписать уравнение нашей кривой в переменных  $x, y$ . А именно, так как  $y=ux$ , то (56) дает

$$y = x\varphi_1(x). \quad (57)$$

Мы получаем нашу кривую в виде простого отрезка, если ограничиться достаточно малой окрестностью вблизи значений  $x=0, u=u_1$ .

Совершенно аналогично в достаточно малой окрестности значений  $x=0, u=u_2$  мы получим кривую в виде

$$y = x\varphi_2(x), \quad (58)$$

т. е. также в виде простого отрезка.

Другими словами, точки кривой, для которых значения  $x, u$  лежат в окрестности значений  $0, u_1$ , образуют простой отрезок (57); а те точки, для которых  $x, u$  лежат в окрестности значений  $0, u_2$ , образуют другой простой отрезок (58). Эти два простых отрезка исчерпывают все точки нашей кривой в достаточно малом квадрате  $|x| < \eta, |y| < \eta$  около точки  $M_0(0, 0)$  в плоскости  $x, y$ , потому что, в силу результата (47), значения  $x, u$  для таких точек обязательно попадут в первую или вторую окрестность.

Очевидно, что простые отрезки (57) и (58) проходят оба через точку  $x=0, y=0$  (убеждаемся подстановкой), так что в данном случае особая точка образована в пересечении двух простых отрезков, принадлежащих оба изучаемой кривой.

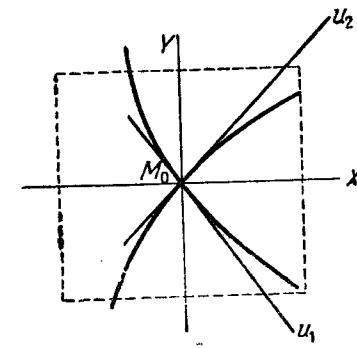
Мы получили узловую точку (черт. 21). Угловой коэффициент касательной к простому отрезку (57) в точке  $M_0(0, 0)$  легко получить, дифференцируя

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_1(x) + x\varphi_1'(x)$$

и подставляя затем  $x=0$ :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \varphi_1(0) = u_1.$$

Аналогично угловой коэффициент касательной к (58) в точке  $M_0(0, 0)$  равен  $u_2$ . Примеры узловых точек даны на стр. 35.



3-й случай:

$$F_{xx}^0 F_{yy}^0 - F_{xy}^{02} = 0.$$

Корни уравнения (46)  $u_1, u_2$ —вещественные равные, т. е.

$$u_1 = u_2 = -\frac{F_{xy}^0}{F_{yy}^0}. \quad (59)$$

Снова переходим вместо  $x, y$  к переменным  $x, u$ , где  $u = \frac{y}{x}$ . Пользуясь результатом (47), утверждаем, что если  $(x, y)$  есть точка на кривой в достаточно малой окрестности  $|x| < \eta, |y| < \eta$  около  $M_0(0, 0)$ , то значения  $x, u$  находятся в сколь угодно малой окрестности значений 0,  $u_1$  [теперь оба неравенства (47) означают одно и то же, так как  $u_2 = u_1$ ]. В дальнейшем мы ограничиваемся некоторой окрестностью значений  $x=0, u=u_1$ . Прежним путем приводим уравнение к виду (52):

$$\varphi(x, u) = 0, \quad (60)$$

где

$$\varphi(x, u) = F_{xx}^0 + 2F_{xy}^0 u + F_{yy}^0 u^2 + x(A + Bu + Cu^2 + Du^3). \quad (61)$$

Однако дальше нам не удается повторить исследование в том виде, как оно шло для 2-го случая. Дело в том, что, вычисляя значение  $\varphi_u(x, u)$  при  $x=0, u=u_1$ , мы получим совершенно тем же путем, как в формуле (55),

$$\varphi_u(0, u_1) = 2(F_{xy}^0 + F_{yy}^0 u_1);$$

но это выражение, в противоположность формуле (55), будет заведомо равно нулю—достаточно сослаться на выражение (59) для  $u_1$ . Итак,

$$\varphi_u(0, u_1) = 0, \quad (62)$$

и мы не можем применить теорему существования неявной функции так, как это было сделано во 2-м случае.

Заметим, что, дифференцируя выражение (61) для  $\varphi(x, u)$  по  $u$  два раза и подставляя в результат  $x=0, u=u_1$ , мы получим [согласно (42)]

$$\varphi_{uu}(0, u_1) = 2F_{yy}^0 \neq 0. \quad (62')$$

Не имея возможности выразить  $u$  через  $x$  из уравнения (60) вблизи значений  $x=0, u=u_1$ , попытаемся выразить, наоборот,  $x$  через  $u$ . Найдем частную производную

$$\varphi_x(x, u) = (A + Bu + Cu^2 + Du^3) + x \frac{\partial}{\partial x} (A + Bu + Cu^2 + Du^3).$$

### § 7] СТРОЕНИЕ КРИВОЙ ВБЛИЗИ ОСОБЫХ ТОЧЕК. ТОЧНАЯ ТЕОРИЯ 47

Положим здесь  $x=0, u=u_1$ ; второй член обращается в нуль вместе с  $x$ . Что же касается первой скобки, то здесь нужно вспомнить, что через  $A, B, C, D$  обозначены  $\frac{1}{3}F_{xxx}, F_{xxy}, F_{xyy}, \frac{1}{3}F_{yyy}$  при значениях аргументов  $\theta x$  и  $\theta y$  (см. стр. 39). Когда мы положим  $x=0, u=u_1$ , то  $y$ , равное  $ux$ , тоже обращается в нуль, и эти частные производные 3-го порядка получат аргументы  $x=0, y=0$ , что мы обозначим нулем наверху. В результате

$$\varphi_x(0, u_1) = \frac{1}{3}(F_{xxx}^0 + 3F_{xxy}^0 u_1 + 3F_{xyy}^0 u_1^2 + F_{yyy}^0 u_1^3)_{u=u_1}. \quad (63)$$

Весь вопрос теперь в том, является ли  $u_1$ , т. е. двойной корень квадратного уравнения (46)

$$F_{xx}^0 + 2F_{xy}^0 u + F_{yy}^0 u^2 = 0,$$

в то же самое время корнем кубического многочлена, стоящего в правой части (63). Никаких причин общего характера для этого нет, и лишь в отдельных исключительных случаях, когда квадратный и кубический многочлены (46) и (63) почему-либо имеют общий корень  $u_1$  [двойной для (46)], выражение (63) обращается в нуль.

Этот случай, требующий дополнительных исследований и приводящий к иным формам строения кривой вблизи данной особой точки, мы оставим в стороне.

Ограничимся основным случаем, когда  $u_1$  не обращает в нуль кубический многочлен, и, следовательно,

$$\varphi_x(0, u_1) \neq 0. \quad (64)$$

К этому следует добавить, что, подставляя  $x=0, u=u_1$  в (61) и учитывая, что  $u_1$  есть корень уравнения (46), мы получаем

$$\varphi(0, u_1) = 0. \quad (65)$$

Снова применяем теорему существования неявной функции, на этот раз к  $x$ , как функции  $u$ . А именно, переменные  $x, u$  связаны вдоль кривой уравнением (60), левая часть которого  $\varphi(x, u)$  удовлетворяет при значениях  $x=0, u=u_1$  условиям (64) и (65). Отсюда следует, что в достаточно малой окрестности значений  $x=0, u=u_1$  уравнение (60) однозначно разрешается относительно  $x$  и может быть переписано в виде

$$x = x(u). \quad (66)$$

Так как уравнение (60) удовлетворяется при  $x=0, u=u_1$ , то равносильное ему уравнение (66) тоже удовлетворяется, и мы имеем

$$x(u_1) = 0. \quad (67)$$

Так как у нас  $u = \frac{y}{x}$ , то легко написать выражение для  $y$ :

$$y = ux(u). \quad (68)$$

Уравнения (66), (68) дают параметрическое представление нашей кривой в окрестности значений  $x = 0$ ,  $u = u_1$  для переменных  $x$ ,  $u$ , или, что то же самое (см. начало исследования 3-го случая), в некоторой окрестности точки  $M_0(0, 0)$  в плоскости  $x$ ,  $y$ . По нему нетрудно составить себе представление о ходе кривой вблизи исследуемой особой точки. Вычислим прежде всего  $x'(u)$ . Так как (66) есть разрешенное относительно  $x$  уравнение (60), то по формуле дифференцирования неявной функции имеем

$$x'(u) = -\frac{\varphi_u(x, u)}{\varphi_x(x, u)}, \quad x''(u) = -\frac{[\varphi_{uu} + \varphi_{ux}x'(u)]\varphi_x - \varphi_u \frac{d}{du}\varphi_x}{\varphi_x^2}.$$

Положим теперь  $u = u_1$ ; тогда  $x = 0$  и, в силу (62),

$$x'(u_1) = 0, \text{ а следовательно, } x''(u_1) = -\frac{\varphi_{uu}(0, u_1)}{\varphi_x(0, u_1)} \neq 0^1). \quad (69)$$

Разложим теперь (66) в ряд Тейлора по степеням  $u - u_1$ . Так как значения функции  $x(u)$  и ее первой производной [согласно (67) и первой из формул (69)] обращаются в нуль при  $u = u_1$ , то разложение начнется с членов второй степени:

$$x(u) = \frac{1}{2}x''(u_1)(u - u_1)^2 + R_2,$$

где

$$R_2 = \frac{1}{6}x'''(\tilde{u})(u - u_1)^3,$$

причем  $\tilde{u}$ —некоторое промежуточное значение между  $u_1$  и  $u$ .

Обозначая для краткости  $\frac{1}{2}x''(u_1) \neq 0$  через  $a$ , запишем

$$x(u) = a(u - u_1)^2 + R_2. \quad (70)$$

Рассматривая  $u$  вблизи  $u_1$ , мы можем считать  $u - u_1$  как положительным, так и отрицательным, т. е. как  $u > u_1$ , так и  $u < u_1$ . В обоих случаях первый член разложения (70) будет сохранять один и тот же знак, именно, знак  $a$ . А вместе с ним сохраняет тот же знак и все разложение, так как при достаточно малой разности  $|u - u_1|$  остаточный член  $R_2$ , содержащий  $(u - u_1)^3$ , станет как угодно мал по абсолютной величине сравнительно с первым членом, содержащим только  $(u - u_1)^2$ .

Таким образом, при достаточно малом  $|u - u_1|$ , т. е. в достаточно малой окрестности точки  $M_0(0, 0)$ ,  $x(u)$  сохраняет все время один и тот же знак, так что кривая располагается по одну сторону оси  $Y$ .

<sup>1)</sup> См. (62') и (64).

### § 7] СТРОЕНИЕ КРИВОЙ ВБЛИЗИ ОСОБЫХ ТОЧЕК. ТОЧНЯЯ ТЕОРИЯ 49

Перепишем формулу (68), отняв от обеих частей равенства по  $u_1x$ :

$$y - u_1x = (u - u_1)x. \quad (71)$$

Очевидно, что  $u_1x$  есть ордината прямой с угловым коэффициентом  $u_1$ , проведенной через начало  $M_0$ . Следовательно, левая часть (71) есть *уклонение NM* нашей кривой от прямой  $u_1$  по ординате. Итак,

$$NM = (u - u_1)x. \quad (72)$$

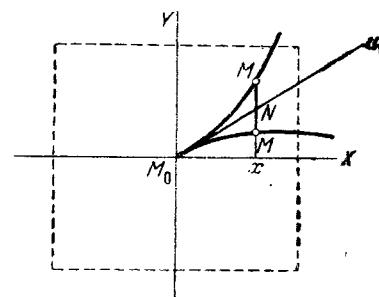
Так как  $x$  сохраняет постоянный знак, то это выражение меняет знак в зависимости от того, берем ли мы  $u < u_1$  или  $u > u_1$ . В первом случае точки кривой расположаются по одну сторону прямой  $u_1$ , во втором случае—по другую (на черт. 22 соответственно книзу и кверху).

Итак, кривая подходит к точке  $M_0(0, 0)$  двумя ветвями, отвечающими значениям  $u \ll u_1$  и  $u \gg u_1$ , обе—по одну сторону от оси  $Y$ , но одна книзу от прямой  $u_1$ , а другая кверху от этой прямой.

Чтобы окончательно составить себе представление о ходе кривой, заметим, что при  $u$ , стремящемся к  $u_1$ , т. е. при стремлении точки  $M$  к кривой в точку  $M_0$ ,  $x$ , согласно (70), есть бесконечно малое 2-го порядка, а  $NM$ , согласно (72), бесконечно малое 3-го порядка относительно  $u - u_1$ . Таким образом, уклонение  $NM$  кривой от прямой  $u_1$  является бесконечно малым высшего порядка сравнительно с абсциссой  $x$ . Это имеет место, разумеется, для каждой из двух ветвей нашей кривой, которые, таким образом, сближаются с прямой  $u_1$  быстрее, чем с осью  $Y$ . Наглядно на чертеже это сказывается в том, что две ветви нашей кривой, прилегая к прямой  $u_1$  сверху и снизу, образуют в  $M_0$  заострение. Действительно, так как отношение  $\frac{y}{x} = u$  при стремлении  $M$  в  $M_0$  по кривой (по той или другой ветви, безразлично) стремится, очевидно, к  $u_1$ , то угловой коэффициент секущей  $M_0M$  имеет для обеих ветвей предельное значение  $u_1$ , а значит, обе они касаются прямой  $u_1$  (по разные ее стороны, но по одну сторону от оси  $Y$ ).

Итак, в основном случае—когда кубический многочлен (63) не обращается в нуль—мы получаем точку возврата 1-го рода.

Случай, когда многочлен (63) обращается в нуль, мы будем считать исключительным; в этом случае кривая может иметь другое строение, что и было показано на примерах в § 6.



Черт. 22.

Укажем дополнительно, как обстоит дело в случае параметрического задания кривой  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ . Мы знаем, что вблизи данного значения  $t = t_0$  кривая имеет форму простого отрезка, если хотя одна из производных  $\varphi'(t_0)$ ,  $\psi'(t_0)$  отлична от нуля. Если же в данной точке  $M_0$  обе эти производные обратились в нуль,  $\varphi'(t_0) = \psi'(t_0) = 0$ , но

$$(\varphi''\psi'' - \psi''\varphi'')_{t=t_0} \neq 0, \quad (*)$$

то оказывается, что кривая имеет точку возврата первого рода. Действительно, перенесем для упрощения выкладок начало координат в изучаемую точку  $M_0$ , так что теперь  $\varphi(t_0) = \psi(t_0) = 0$ , и разложим  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  в ряды Тейлора по степеням  $t - t_0$ :

$$x = \frac{1}{2} \varphi''(t_0)(t - t_0)^2 + \dots, \quad y = \frac{1}{2} \psi''(t_0)(t - t_0)^2 + \dots$$

В силу  $(*)$   $\varphi''(t_0)$ ,  $\psi''(t_0)$  не обращаются в нуль одновременно. Пусть для определенности  $\varphi''(t_0) \neq 0$ . Тогда ясно, что кривая лежит по одну сторону от оси  $Y$ , причем  $x$ —бесконечно малое 2-го порядка относительно  $t - t_0$ .

Проведем через  $M_0$  прямую с угловым коэффициентом  $w_1 = \frac{\psi''(t_0)}{\varphi''(t_0)}$  и вычислим уклонение  $NM$  нашей кривой от этой прямой по ординате, т. е. разность ординат  $y_M - y_N$  (черт. 22). При этом для кривой:

$$y_M = \frac{1}{2} \psi''(t_0)(t - t_0)^2 + \frac{1}{6} \psi'''(t_0)(t - t_0)^3 + \dots$$

для прямой:

$$y_N = \frac{\psi''(t_0)}{\varphi''(t_0)} x = \frac{\psi''(t_0)}{\varphi''(t_0)} \left[ \frac{1}{2} \varphi''(t_0)(t - t_0)^2 + \frac{1}{6} \varphi'''(t_0)(t - t_0)^3 + \dots \right].$$

В силу условия  $(*)$   $NM$  будет бесконечно малым точно 3-го порядка относительно  $t - t_0$ , т. е. снова получается вся картина точки возврата первого рода.

#### Упражнения.

1. Эпициклоидой называется кривая, описываемая какой-нибудь точкой  $M$  подвижной окружности (радиус обозначим через  $\lambda a$ , где  $\lambda, a > 0$ ), которая катится без скольжения<sup>1)</sup> по неподвижной окружности (радиуса  $a$ ). находясь вне последней. Если же подвижная окружность катится по неподвижной, находясь внутри ее, то полученная кривая называется гипоциклоидой. (В этом случае, очевидно,  $\lambda < 1$ .)

Показать, что если за начало координат принят центр неподвижной окружности, а ось  $X$  проведена через точку  $M$  в том ее положении, когда она попадает на неподвижную окружность и служит точкой касания,

<sup>1)</sup> Это значит, что точка касания пробегает равные пути по обеим окружностям.

то уравнения эпициклоиды и гипоциклоиды имеют соответственно вид

$$\frac{x}{a} = (1 + \lambda) \cos \lambda \varphi - \lambda \cos(1 + \lambda) \varphi,$$

$$\frac{y}{a} = (1 + \lambda) \sin \lambda \varphi - \lambda \sin(1 + \lambda) \varphi$$

и

$$\frac{x}{a} = (1 - \lambda) \cos \lambda \varphi + \lambda \cos(\lambda - 1) \varphi,$$

$$\frac{y}{a} = (1 - \lambda) \sin \lambda \varphi + \lambda \sin(\lambda - 1) \varphi,$$

где параметр  $\varphi$  — выраженная в радианах дуга, пробегаемая точкой касания по подвижной окружности. Показать, что в точках, где  $\varphi$  кратно  $2\pi$ , эпи- и гипоциклоиды имеют точки возврата, лежащие на неподвижной окружности, причем касательная направлена по радиусу этой окружности.

Начертить примерный ход эпициклоид при  $\lambda = \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$ . Полученная в последнем случае эпициклоида называется кардиоидой; записать ее уравнение в форме  $F(x, y) = 0$ .

Начертить ход гипоциклоид при  $\lambda = \frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ . Кривая, полученная в первом случае, называется астроидой.

Составить уравнение нормали в произвольной точке эпи- (гипо-) циклоиды и показать, что она проходит через соответствующее положение точки касания обеих окружностей.

2. Циклоидой называется кривая, описываемая какой-нибудь точкой окружности (радиус  $a$ ), катящейся без скольжения по неподвижной прямой (принимаемой за ось  $X$ ). Вывести уравнения циклоиды

$$\frac{x}{a} = \varphi - \sin \varphi, \quad \frac{y}{a} = 1 - \cos \varphi$$

(здесь  $\varphi$  — угол поворота катящейся окружности) и доказать, что при  $\varphi$ , кратных  $2\pi$ , циклоида имеет точки возврата на неподвижной прямой с касательными, перпендикулярными к этой прямой. Показать, что нормаль к циклоиде проходит через соответствующее положение точки касания окружности и неподвижной прямой.

#### § 8. Огибающая семейства кривых.

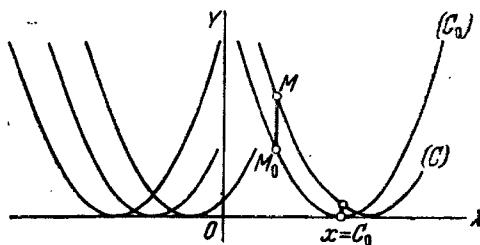
До сих пор мы рассматривали отдельную кривую, заданную уравнением  $F(x, y) = 0$ .

Во многих случаях приходится иметь дело с целым семейством кривых. Под однопараметрическим семейством кривых мы понимаем множество кривых, определяемое уравнением

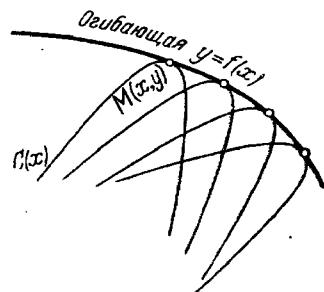
$$F(x, y, C) = 0, \quad (73)$$

которое называется уравнением семейства. Здесь  $C$  — некоторое переменное (параметр), имеющее определенную область изменения  $C_1 \leq C \leq C_2$ , в частности, может быть, меняющееся от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Уравнение (73) определяет множество кривых в том смысле, что всякий раз, когда  $C$  принимает определенное постоянное значение, уравнение (73) связывает только  $x$  и  $y$  и дает определенную кривую: множество таких кривых ( $C$ ), отвечающих всевозможным



Черт. 23.



Черт. 24.

значениям  $C$ , и называется однопараметрическим семейством кривых.

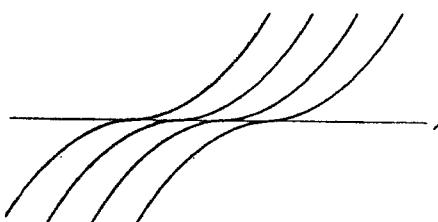
При изучении семейства в целом играет большую роль прежде всего понятие огибающей. А именно, во многих случаях удается

найти кривую  $\Gamma$ , которая в каждой своей точке касается некоторой кривой семейства. Таким образом, все кривые семейства (по крайней мере в некоторой области изменения параметра  $C$ ) подходят к кривой  $\Gamma$ , касаются ее и «возвращаются назад», т. е. продолжают свое течение, оставаясь по ту же сторону от  $\Gamma$  (черт. 23 и 24). Таким образом, кривая  $\Gamma$  «огибает» кривые семейства, разделяя плоскость на часть, занятую ими, и на часть, куда кривые семейства не заходят. Однако возможны и исключительные случаи (черт. 25), когда кривые семейства касаются  $\Gamma$ , «перегибаясь» через нее; тогда такого разделения не происходит.

На черт. 23 изображено семейство парабол

$$y - (x - C)^2 = 0, \quad (74)$$

полученных из параболы  $y = x^2$  ее параллельными сдвигами вдоль оси  $X$ . Параметр  $C$  имеет геометрический смысл величины сдвига. Огибающей служит, очевидно, ось  $X$ .



Черт. 25.

Тем же самым путем из кубической параболы  $y = x^3$  получается семейство

$$y - (x - C)^3 = 0, \quad (75)$$

изображенное на черт. 25. Огибающая — тоже ось  $X$ .

Переходим к теории вопроса. Ее удобно разбить на следующие пункты.

А) Мы назовем *огибающим отрезком* простой отрезок<sup>1)</sup>

$$y = f(x), \quad \text{где } x_1 \leq x \leq x_2, \quad (76)$$

для каждой точки  $M(x, y)$  которого можно указать определенную кривую семейства, имеющую с ним касание в этой точке (черт. 24). Указанная кривая семейства и отвечающее ей значение параметра  $C$  будут меняться по мере движения точки  $M(x, y)$  по отрезку  $y = f(x)$ , так что  $C$  можно считать функцией от  $x$ :

$$C = C(x), \quad x_1 \leq x \leq x_2.$$

При этом предполагается

1°. Точка  $M(x, y)$  всегда является обыкновенной точкой на указанной кривой семейства.

2°. Функция  $C(x)$  имеет непрерывную производную  $C'(x)$  (в соответствии с нашими обычными предположениями) и ни на каком участке не является константой.

Последнее требование имеет следующий смысл: на том участке, где  $C(x)$  имело бы постоянное значение, отрезок  $y = f(x)$  касался бы все время одной и той же кривой семейства, т. е. совпадал бы с ней. Таким образом, любая кривая семейства считалась бы огибающей на том основании, что она все время касается сама себя, что не представляло бы никакого геометрического интереса.

Мы ограничимся рассмотрением огибающих отрезков лишь в достаточно малых кусках, где  $C'(x)$  сохраняет постоянный знак,

$$C'(x) \neq 0. \quad (77)$$

Это означает, что  $C(x)$  меняется монотонно, не возвращаясь к прежним значениям, т. е. что, двигаясь по отрезку (76), мы касаемся все новых и новых кривых семейства.

Теперь выясним, каким условиям удовлетворяют точки огибающих отрезков. Запишем прежде всего, что через любую точку  $x, y = f(x)$  отрезка проходит кривая семейства с параметром  $C(x)$ :

$$F[x, f(x), C(x)] = 0. \quad (78)$$

Так как это имеет место при любом значении  $x$ ,  $x_1 \leq x \leq x_2$ , то (78) есть тождество относительно  $x$  и его можно почленно про-

<sup>1)</sup> Для определенности полагаем, что вдоль него именно  $y$  есть функция  $x$ , в противном случае меняем обозначения осей. Это же будет предполагаться в аналогичных случаях и в последующем.

дифференцировать по  $x$  (рассматривая левую часть как сложную функцию). Получим снова для каждой точки отрезка (76)

$$F_x + F_y f'(x) + F_C C'(x) = 0. \quad (79)$$

Запишем теперь для той же самой точки равенство угловых коэффициентов касательных, с одной стороны, к отрезку (76) — это будет  $f'(x)$ , и, с другой стороны, к кривой семейства с параметром  $C(x)$  — это будет  $-\frac{F_x}{F_y}$  [см. уравнение касательной (17)]. Итак,

$$f'(x) = -\frac{F_x}{F_y} \text{ или } F_x + F_y f'(x) = 0. \quad (80)$$

В уравнениях (79) и (80) речь идет об одной и той же точке  $x, y = f(x)$  на огибающем отрезке и об одной и той же кривой семейства с параметром  $C(x)$ , касающейся огибающего отрезка в этой точке, так что значения аргументов, а именно,  $x, y = f(x)$ ,  $C = C(x)$  под знаком  $F$ , одни и те же.

Сравнивая (79) и (80), замечаем, что

$$F_C [x, f(x), C(x)] C'(x) = 0,$$

откуда, в силу (77),

$$F_C [x, f(x), C(x)] = 0. \quad (81)$$

Итак, всякая точка  $x, y = f(x)$  на огибающем отрезке есть в то же время обыкновенная точка на кривой семейства с параметром  $C = C(x)$ , причем удовлетворяется условие (81).

Б) До сих пор мы рассматривали на кривых семейства лишь точки, заведомо обыкновенные, т. е. в которых  $F_x(x, y, C)$  и  $F_y(x, y, C)$  не обращались в нуль сразу, причем считали для определенности именно  $F_y(x, y, C) \neq 0$ .

Теперь рассмотрим геометрическое место всевозможных особых точек всевозможных кривых нашего семейства. Речь идет, следовательно, о точках  $(x, y)$ , которые являются особыми хотя бы для одной кривой семейства, т. е. для которых можно подобрать параметр  $C$  так, что  $F(x, y, C) = 0$  (кривая семейства проходит через точку) и, кроме того,  $F_x(x, y, C) = F_y(x, y, C) = 0$  (точка для этой кривой — особая<sup>1</sup>)).

Мы имеем здесь три уравнения между тремя величинами  $x, y, C$ . Они могут быть просто несовместны, т. е. кривые лишены особых точек. Например, для семейства парабол (74)  $F(x, y, C) = y - (x - C)^2 = 0$  уравнение  $F_y = 1 = 0$  невозможно.

<sup>1</sup>) В этом параграфе мы будем для краткости называть особой точкой всякую точку, где  $F_x = F_y = 0$ , хотя в исключительных случаях такая точка может оказаться и обыкновенной.

Они могут определить отдельные особые точки. Например, семейство концентрических окружностей с центром в начале:  $F(x, y, C) = x^2 + y^2 - C^2 = 0$ ; присоединяя  $F_x = 2x = 0, F_y = 2y = 0$ , получаем точку  $x = y = 0$  и значение  $C = 0$ . И действительно, значение  $C = 0$  определяет окружность радиуса 0, состоящую из единственной точки (начала), которая является, таким образом, изолированной особой точкой. Других особых точек нет.

Возможно, наконец, что существует целая кривая, состоящая из особых точек кривых семейства. Дадим точные определения. Назовем *отрезком особых точек* простой

отрезок

$$y = f(x), \text{ где } x_1 \leq x \leq x_2, \quad (82)$$

если можно указать такую функцию

$$C = C(x), \quad x_1 \leq x \leq x_2, \quad (83)$$

что при каждом значении  $x$  параметр  $C(x)$  определяет кривую семейства, имеющую соответствующую точку отрезка  $x, y = f(x)$  своей особой точкой.

Более наглядно: когда, меняя  $x$ , мы движемся по отрезку (82),  $C(x)$  определяет для каждой точки отрезка параметр той кривой семейства, которая эту точку имеет своей особой точкой. Предполагается, конечно, что  $C(x)$  имеет непрерывную производную  $C'(x)$ .

Снова ограничиваемся рассмотрением отрезков особых точек в достаточно малых кусках, где  $C'(x)$  сохраняет постоянный знак,

$$C'(x) \neq 0. \quad (84)$$

Смысл этого условия тот же, что и раньше: двигаясь по (82), мы проходим особые точки всех новых и новых кривых семейства, не возвращаясь к прежним значениям  $C$  (черт. 26).

Запишем, что через любую точку  $x, y = f(x)$  отрезка (82) проходит кривая с параметром  $C(x)$ :

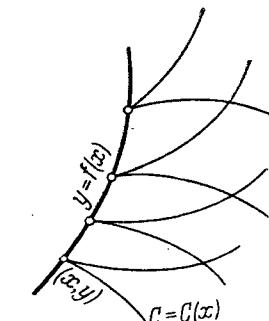
$$F [x, f(x), C(x)] = 0, \quad (85)$$

и что она имеет там особую точку:

$$F_x [x, f(x), C(x)] = F_y [x, f(x), C(x)] = 0. \quad (86)$$

Равенства (85) и (86), верные при любом  $x$ , представляют собой тождества. Дифференцируя (85) по  $x$  почленно, приходим снова к (79), а сравнивая с (86), снова получаем

$$F_C [x, f(x), C(x)] C'(x) = 0.$$



Черт. 26.

Наконец, используя (84), получим

$$F_C[x, f(x), C(x)] = 0. \quad (87)$$

Итак, всякая точка отрезка особых точек  $x, y = f(x)$  есть по определению особая точка кривой семейства с параметром  $C = C(x)$ , причем, как мы доказали, удовлетворяется условие (87).

В) Теперь естественно рассмотреть вообще геометрическое место таких точек  $(x, y)$ , что для каждой из них можно указать значение  $C$ , удовлетворяющее сразу двум уравнениям:

$$F(x, y, C) = 0, \quad F_C(x, y, C) = 0. \quad (88)$$

Это геометрическое место мы будем называть *дискриминантной кривой*.

Очевидно, что все огибающие отрезки принадлежат дискриминантной кривой; действительно, (78) и (81) показывают, что для всякой точки  $x, y = f(x)$  огибающего отрезка можно подобрать  $C$ , удовлетворяющее условиям (88).

То же самое для отрезков особых точек показывают уравнения (85) и (87), так что все отрезки особых точек тоже принадлежат дискриминантной кривой.

Займемся теперь ближе самой дискриминантной кривой. Мы имеем в (88) два уравнения с тремя переменными. Они могут оказаться несовместными, —например, во всех случаях, когда уравнение семейства дано в виде, разрешенном относительно  $C$ :

$$F(x, y) = C. \quad (89)$$

Действительно, в этом случае

$$F(x, y, C) \equiv F(x, y) - C, \quad F_C(x, y, C) \equiv -1,$$

и второе из равенств (88) невозможно. Отметим, кстати, что в семействе (89) кривые при различных значениях  $C$  не могут, очевидно, иметь общих точек.

Уравнения (88) могут также определять лишь отдельные точки, —например, если все кривые семейства проходят через две данные точки, других же общих точек попарно не имеют. Таково семейство окружностей:

$$F(x, y, C) \equiv (x - C)^2 + y^2 - (a^2 + C^2) = 0,$$

проходящих через точки  $(0, +a)$  и  $(0, -a)$ ,  $a$  фиксировано. Здесь

$$F_C = -2(x - C) - 2C = -2x;$$

приравнивая нулю, получим  $x = 0$ . Вставляя в само уравнение, приходим к  $y^2 - a^2 = 0$ , т. е.  $y = \pm a$ . Дискриминантная кривая выродилась в две точки.

Нас будет интересовать наиболее общий случай, когда уравнения (88) определяют целую кривую. Назовем *отрезком дискриминантной кривой*

*минимантной кривой* такой простой отрезок

$$y = f(x), \quad x_1 \leq x \leq x_2, \quad (90)$$

вдоль которого так указаны значения  $C$  в зависимости от  $x$ ,

$$C = C(x), \quad x_1 \leq x \leq x_2, \quad (91)$$

что уравнения (88) удовлетворяются тождественно:

$$F[x, f(x), C(x)] \equiv 0, \quad F_C[x, f(x), C(x)] \equiv 0. \quad (92)$$

Другими словами, отрезок дискриминантной кривой — это ее достаточно малый кусок, для которого уравнения (88) удается переписать в виде (90), (91), т. е. в виде, разрешенном относительно  $y$  и  $C$ .

Дифференцируя по  $x$  первое из тождеств (92), получим

$$F_x + F_y f'(x) + F_C C'(x) \equiv 0,$$

а учитывая второе из тождеств (92), приходим к тождеству

$$F_x + F_y f'(x) \equiv 0. \quad (93)$$

Допустим сначала, что точка  $x, y = f(x)$  отрезка (90) есть заведомо обыкновенная точка для кривой семейства с параметром  $C = C(x)$  [как показывает первое из тождеств (92), кривая с параметром  $C(x)$  во всяком случае проходит через точку  $x, y = f(x)$ ]. Тогда  $F_y \neq 0$ , так как в противном случае в силу (93) не только  $F_y$ , но и  $F_x$  обратилось бы в нуль.

Перепишем (93) в виде

$$f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}.$$

В левой части равенства стоит угловой коэффициент касательной к отрезку (90) в точке  $x, y = f(x)$ , а в правой — угловой коэффициент касательной в той же точке к кривой семейства с параметром  $C = C(x)$ . Следовательно, и сами касательные совпадают.

Итак, отрезок дискриминантной кривой (90) в каждой своей точке  $x, y = f(x)$  касается некоторой кривой семейства, параметр которой определяется уравнением (91), если только эта последняя кривая не имеет точку  $x, y = f(x)$  своей особой точкой.

Следовательно, отрезки дискриминантной кривой, свободные от особых точек кривых семейства, суть огибающие отрезки.

Г) Окончательно можно формулировать итог этого параграфа в виде следующего практического правила. Исследуя семейство кривых, мы прежде всего должны составить уравнения дискриминантной кривой:

$$F(x, y, C) = 0, \quad F_C(x, y, C) = 0. \quad (94)$$

Практически с этой парой уравнений придется обращаться по-различному в зависимости от конкретного случая. Возможно,,

что удастся все три переменных  $x, y, C$  выразить в функции одного параметра; или же удастся выразить  $C$  через  $x, y$  из одного уравнения; тогда, подставляя в другое полученную функцию  $C(x, y)$ , получим уравнение дискриминантной кривой непосредственно в виде  $\varphi(x, y) = 0$ .

Нужно выделить ту часть дискриминантной кривой, для которой  $x, y, C$ , кроме уравнений (94), удовлетворяют еще уравнениям

$$F_x(x, y, C) = F_y(x, y, C) = 0. \quad (95)$$

Так как мы знаем, что дискриминантная кривая содержит все отрезки особых точек кривых семейства, а для этих точек условия (95) необходимо соблюдаются, то в выделенную часть, наверное, попадут все отрезки особых точек. Далее, нужно рассмотреть остальную часть дискриминантной кривой, которая будет заключать все огибающие отрезки и, обратно, каждый отрезок которой, как только что было доказано, будет огибающим отрезком. На этом основании эту остальную часть дискриминантной кривой мы будем называть *огибающей*.

Пример. Уравнение семейства

$$F(x, y, C) = (y - C)^2 - (x - C)^3 = 0.$$

Составляем уравнение дискриминантной кривой, присоединяя уравнение

$$F_C = -2(y - C) + 3(x - C)^2 = 0.$$

Преобразуем эту пару уравнений к более удобному виду. Из второго уравнения получаем

$$y - C = \frac{3}{2}(x - C)^2. \quad (*)$$

Подставляя в первое, найдем

$$\frac{9}{4}(x - C)^4 - (x - C)^3 = 0,$$

или

$$\frac{9}{4}(x - C)^3 \left( x - C - \frac{4}{9} \right) = 0.$$

Здесь имеются две возможности:

1)  $x - C = 0$ ; пользуясь равенством (\*), запишем уравнение этой части дискриминантной кривой в виде, разрешенном относительно  $y$  и  $C$ :

$$y = x, \quad C = x.$$

2)  $x - C - \frac{4}{9} = 0$ ; тогда из (\*)  $y - C = \frac{8}{27}$ ; снова запишем уравнения в разрешенном относительно  $y$  и  $C$  виде:

$$C = x - \frac{4}{9}, \quad y = x - \frac{4}{27}.$$

Мы получили две ветви дискриминантной кривой. Составим условия (95):

$$F_x = -3(x - C)^2 = 0, \quad F_y = 2(y - C) = 0.$$

Проверяя их, видим, что для первой ветви они удовлетворяются, так что первая ветвь содержит все отрезки особых точек. Что же касается второй ветви, то для нее проверка дает отрицательный результат, следовательно, вторая ветвь есть огибающая. Рекомендуется разобрать этот пример на чертеже.

### S 9\*. Семейство кривых вблизи данной точки.

Пусть в уравнении (73)

$$F(x, y, C) = 0$$

параметр  $C$  имеет фиксированное значение  $C_0$ , т. е. из семейства (73) выбрана определенная кривая и  $x, y$  также фиксированы, т. е. на этой кривой выбрана определенная точка  $M_0(x_0, y_0)$ . Так как точка  $M_0(x_0, y_0)$  лежит на кривой  $(C_0)$ , то

$$F(x_0, y_0, C_0) = 0. \quad (96)$$

Кроме того, считая точку заведомо обыкновенной, предположим для определенности

$$F_y(x_0, y_0, C_0) \neq 0^1). \quad (97)$$

Весь этот параграф посвящен изучению семейства кривых вблизи такой точки и при значениях  $C$ , близких к  $C_0$ .

Сопоставляя условия (96) и (97), мы на основании теоремы существования неявной функции можем утверждать, что при значениях переменных  $x, y, C$ , близких к  $x_0, y_0, C_0$ , уравнение (73) однозначно разрешимо относительно  $y$  и может быть переписано в виде

$$y = \varphi(x, C), \quad (98)$$

причем

$$y_0 = \varphi(x_0, C_0).$$

Итак, уравнение семейства может быть переписано в виде (98), но лишь в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0)$  и лишь для кривых, достаточно близких по значению  $C$  к  $C_0$ .

Перейдем к другому значению  $C$ , близкому к  $C_0$ . Получим другую кривую семейства. Выясним, каково расстояние по ординате между данной точкой  $M_0$  на кривой  $(C_0)$  и кривой  $(C)$ .

Для точки  $M_0$  на кривой  $(C_0)$  мы имеем ординату  $y_0 = \varphi(x_0, C_0)$ , а для точки  $M$  на кривой  $(C)$  (при том же  $x = x_0$ , черт. 27)  $y = \varphi(x_0, C)$ . Расстояние между кривыми по ординате имеет вид

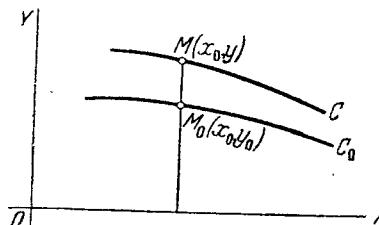
$$M_0M = y - y_0 = \varphi(x_0, C) - \varphi(x_0, C_0).$$

<sup>1)</sup> В противном случае мы поменяли бы обозначения осей координат.

Оценим степень малости этого расстояния между кривыми  $(C_0)$  и  $(C)$  сравнительно с приращением параметра  $C - C_0$ . Возьмем отношение

$$\frac{M_0 M}{C - C_0} = \frac{\varphi(x_0, C) - \varphi(x_0, C_0)}{C - C_0} \quad (99)$$

и заставим параметр  $C$  стремиться к значению  $C_0$ . Тогда кривая  $(C)$  неограниченно приближается к кривой  $(C_0)$ , точнее, ордината  $y = \varphi(x_0, C)$  стремится к  $y_0 = \varphi(x_0, C_0)$  и, следовательно, точка  $M$  стремится в точку  $M_0$  по вертикали ( $x_0, C_0$  предполагаются все время фиксированными). Отношение (99) стремится, очевидно, к пределу, равному частной производной  $\frac{\partial \varphi}{\partial C}$  при  $x = x_0, C = C_0$ :



Черт. 27.

Но  $\frac{\partial \varphi(x, C)}{\partial C}$  есть в сущности частная производная по  $C$  от  $y$ , где  $y$  — функция, неявно определяемая уравнением (73); по формуле дифференцирования неявной функции

$$\frac{\partial \varphi(x, C)}{\partial C} = -\frac{F_C(x, y, C)}{F_y(x, y, C)} \quad (100)$$

и, следовательно,

$$\lim_{C \rightarrow C_0} \frac{M_0 M}{C - C_0} = -\frac{F_C(x_0, y_0, C_0)}{F_y(x_0, y_0, C_0)}. \quad (101)$$

Разберем два возможных здесь случая.  
1-й случай:

$$F_C(x_0, y_0, C_0) \neq 0. \quad (102)$$

В этом случае точка  $(x_0, y_0)$  на кривой  $C_0$  есть, как мы будем говорить, точка общего положения в том смысле, что практически для произвольно взятой точки на произвольной кривой семейства мы должны ожидать соблюдения этого неравенства, и лишь в исключительных случаях имеет место равенство

$$F_C(x, y, C) = 0.$$

[Действительно, если бы это равенство имело место сплошь для всех точек на всех кривых семейства (или хотя бы внутри некоторой области на плоскости  $x, y$ ), то  $F(x, y, C)$  фактически не зависело бы от  $C$ , и кривые семейства (73) все (или по крайней мере в этой области) совпадали бы между собой, — случай, который практически мы устраиваем из рассмотрения.]

Итак, предположим, что имеет место (102), а значит, как видно из (101),

$$\lim_{C \rightarrow C_0} \frac{M_0 M}{C - C_0} \neq 0.$$

Это показывает, что расстояние  $M_0 M$  по вертикали между точкой  $M_0$  на кривой  $(C_0)$  и кривой  $(C)$  есть бесконечно малое одного порядка с приращением параметра  $C - C_0$  при переходе от кривой  $(C_0)$  к  $(C)$ .

Мы можем составить себе ясное представление о поведении семейства кривых, если ограничиться достаточно малой областью около точки  $x_0, y_0$  и значениями  $C$ , достаточно близкими к  $C_0$ . Тогда, как было уже показано, уравнение семейства можно переписать в виде (98)

$$y = \varphi(x, C),$$

причем

$$\left[ \frac{\partial \varphi(x, C)}{\partial C} \right]_{\substack{x=x_0 \\ C=C_0}} \neq 0,$$

как следует из (100) и (102). В силу непрерывности  $\frac{\partial \varphi(x, C)}{\partial C}$  в рассматриваемой области сохраняет постоянный знак, тот же, что она имеет при  $x = x_0, C = C_0$ . Будем считать для определенности

$$\frac{\partial \varphi(x, C)}{\partial C} > 0.$$

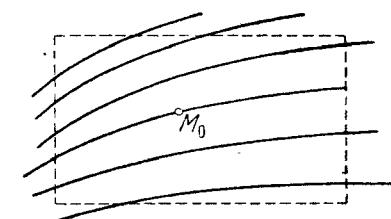
Тогда при фиксированном  $x$  и возрастающем  $C$  значение  $y$  в уравнении (98) монотонно растет, так что из двух кривых при разных значениях  $C = C_1$  и  $C = C_2$ ,  $C_2 > C_1$ , кривая  $(C_2)$  располагается существенно «выше» кривой  $(C_1)$  (т. е. при одинаковых  $x$  имеется большие ординаты) и, следовательно, не может пересекаться с нею. Кроме того, очевидно, что уравнение (98) при каждом фиксированном  $C$  дает нам кривые семейства в виде простых отрезков:  $y$  выражается явно функцией  $x$ .

Как мы только что выяснили, отрезки эти располагаются «слоисто» друг над другом, не пересекаясь. Такова картина строения семейства вблизи точки общего положения (черт. 28).

2-й случай:

$$F_C(x_0, y_0, C_0) = 0. \quad (103)$$

В этом случае точку  $M_0(x_0, y_0)$  мы будем называть *характеристической точкой* семейства. Итак, характеристической точкой семейства называется всякая точка  $x_0, y_0$ , являющаяся заведомо



Черт. 28.

обыкновенной точкой некоторой кривой ( $C_0$ ) семейства, если в этой кривой соблюдается условие (103). Следует подчеркнуть, что в 1-го и 2-го случаев различаются не по своему отношению к кривой ( $C_0$ ), на которой они лежат, — и те и другие обыкновенные точки на ( $C_0$ ), — а по своему отношению к семейству кривых. Сопоставляя (101) и (103), получаем:

$$\lim_{C \rightarrow C_0} \frac{M_0 M}{C - C_0} = 0,$$

т. е. расстояние  $M_0 M$  по вертикали между точкой  $M_0$  на кривой ( $C_0$ ) и кривой ( $C$ ) есть бесконечно малое высшего порядка сравнительно с приращением параметра  $C - C_0$ . Таким образом, на данной кривой ( $C_0$ ) характеристические точки выделяются из числа остальных тем, что вблизи этих точек кривые семейства ( $C$ ) особенно сгущаются около ( $C_0$ ); в то время как в точке общего положения расстояние между кривыми «по вертикали» — бесконечно малое того же порядка, что и разность параметров  $C - C_0$ , в характеристической точке это расстояние есть бесконечно малое высшего порядка.

Чтобы представить себе это наглядно, рассмотрим типический пример — семейство парабол (74):

$$y = (x - C)^2. \quad (104)$$

Фиксируем некоторое значение  $C = C_0$ , чем указывается одна из парабол ( $C_0$ ) с вершиной в  $x = C_0$ . Заставим теперь  $C$  стремиться к  $C_0$ , тогда парабола ( $C$ ) неограниченно приближается к ( $C_0$ ). Возьмем на ( $C_0$ ) фиксированную точку  $M_0$ ; тогда расстояние  $M_0 M$  между кривыми по вертикали, как легко подсчитать, будет бесконечно малое того же порядка, что и  $C - C_0$ , если  $M_0$  не попало в вершину параболы ( $C_0$ ). Если же  $M_0$  перенести в вершину ( $C_0$ ),  $x = C_0$ ,  $y = 0$ , то здесь расстояние по вертикали сравнительно с  $C - C_0$ . Это довольно ясно видно на черт. 23. Таким образом, вершины парабол, т. е. точки оси  $X$ , будут характеристическими точками семейства. Проверим это выкладкой. Пронизводная по  $C$  от левой части (104) равна  $2(x - C)$ , следовательно, обращается в нуль в вершине каждой параболы (где  $x = C$ ); для вершин парабол выполняется, таким образом, условие (103).

В этом параграфе мы изучали поведение семейства вблизи фиксированной точки на фиксированной кривой, причем играл большую роль порядок малости расстояния «по вертикали», т. е. по направлению, параллельному оси  $Y$ . Может показаться поэтому, что результаты исследования зависят не только от семейства кривых, но и от выбора системы прямоугольных координат. Однако это не так, потому что при преобразовании координат

значения функции  $F(x, y, C)$  остаются прежними (если оставаться в прежней точке и при прежних значениях  $C$ ), а следовательно,  $F_C(x, y, C)$  тоже сохраняет прежнее значение, и условия (102) и (103) не меняют своего вида. В результате наше разделение точек на *характеристические* и *общего положения* имеет один и тот же смысл в любой системе координат  $x, y$ .

Вследствие (96) и (103) характеристические точки принадлежат, очевидно, дискриминантной кривой (88); но, кроме того, они являются заведомо обыкновенными точками кривых семейства [по нашему предположению (97)], а следовательно, образуют огибающую.

В заключение докажем теорему, подчеркивающую роль характеристических точек как точек «сгущения» кривых семейства.

Если кривые ( $C_0$ ) и ( $C$ ) семейства пересекаются между собой и точка пересечения  $M$  при  $C$ , стремящемся к  $C_0$ , движется по ( $C_0$ ), стремясь к предельному положению  $M_0$ , то  $M_0$  (если она обыкновенная) есть характеристическая точка (черт. 29).

Так как точка  $M(x, y)$  лежит на обеих кривых  $F(x, y, C_0) = 0$ ,  $F(x, y, C) = 0$ , то

$$F(x, y, C) - F(x, y, C_0) = 0$$

или по теореме о конечном приращении

$$F_C(x, y, C_1) = 0, \quad (105)$$

где  $C_1$  заключено между  $C_0$  и  $C$ . Пусть теперь  $C \rightarrow C_0$ ; тогда, очевидно,  $C_1 \rightarrow C_0$  и, по предположению,  $x \rightarrow x_0$ ,  $y \rightarrow y_0$ , где  $x_0, y_0$  — координаты  $M_0$ . Переходя к пределу в (105), получим

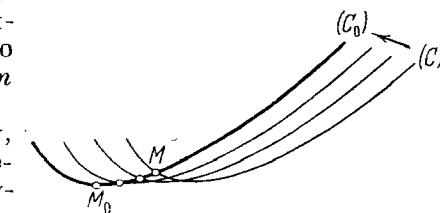
$$F_C(x_0, y_0, C_0) = 0,$$

т. е. для точки  $M(x_0, y_0)$  на кривой ( $C_0$ ) выполняется условие (103). Теорема доказана.

Практически в большинстве случаев имеет место и обратное, т. е. характеристические точки суть предельные положения точек пересечения при неограниченном сближении пересекающихся кривых. Однако не всегда: так, например, в семействе кубических парабол

$$y = (x - C)^3$$

совсем нет пересекающихся кривых, тем не менее, как легко проверить, на каждой параболе ( $C$ ) есть характеристическая точка  $x = C$ ,  $y = 0$  (см. черт. 25).



Черт. 29.

### § 10. Асимптоты.

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос об асимптотах. Суть дела заключается в том, что иногда уходящая в бесконечность ветвь кривой имеет весьма простое устройство: она вытягивается вдоль некоторой прямой, неограниченно к ней приближаясь.

Тогда, чтобы составить представление о форме кривой, бывает, естественно, очень важно суметь отыскать такие прямые (асимптоты).

Дадим теперь точные определения. Пусть рассматривается ветвь какой-нибудь кривой, заданная параметрически:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t_0 \leq t < T, \quad (106)$$

причем при  $t$ , стремящемся к  $T$ , точка кривой  $M(x, y)$  стремится в бесконечность, т. е. ее рас-

стояние от начала бесконечно возрастает:

$$\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \rightarrow \infty \text{ при } t \rightarrow T. \quad (107)$$

В частности,  $T$  может быть бесконечностью, т. е. область изменения  $t$  будет от  $t_0$  до бесконечности.

Мы назовем асимптотой кривой (106) такую прямую, что расстояние точки  $M$  на кривой от этой прямой стремится к нулю, когда точка  $M$  стремится по кривой в бесконечность.

Другими словами,

$$MN \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow T, \quad (108)$$

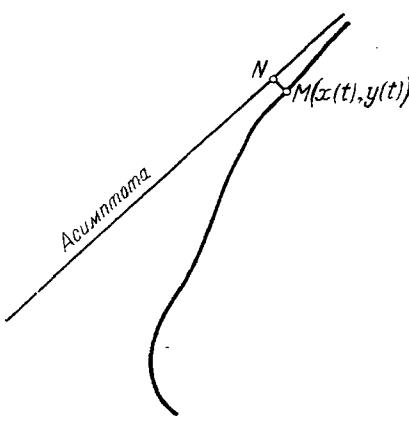
где  $N$ —основание перпендикуляра, опущенного из  $M$  на прямую (черт. 30).

Разумеется, далеко не для всякой кривой (106) и при соблюдении условия (107) асимптота существует (возьмем, например, логарифмическую спираль, которая раскручивается, неограниченно удаляясь от начала и описывая около него неограниченное число оборотов).

Поставим следующую задачу. Пусть дана прямая

$$Ax + By + C = 0. \quad (109)$$

Каковы необходимые и достаточные условия того, что эта прямая есть асимптота кривой (106)?



Черт. 30.

Возьмем прежде всего какую-нибудь точку  $M(x(t), y(t))$  на нашей кривой и вычислим ее расстояние  $MN$  от прямой (109) (черт. 30). Как известно из аналитической геометрии, для этого нужно левую часть (109) умножить на нормирующий множитель  $\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$  и вместо текущих координат подставить координаты точки  $M$ . Искомое расстояние  $MN$  (которое нас интересует лишь по абсолютному значению) получится в виде

$$MN = \frac{|Ax(t) + By(t) + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

По самому определению, для того чтобы прямая (109) была асимптотой, необходимо и достаточно, чтобы это расстояние стремилось к нулю при  $t \rightarrow T$ ; но так как знаменатель постоянный, то это требование равносильно следующему:

$$Ax(t) + By(t) + C \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow T. \quad (110)$$

Другими словами, левая часть уравнения прямой (109) при  $t \rightarrow T$  стремится к нулю, если в нее подставить координаты точки  $M$ , стремящейся по кривой в бесконечность. Таков необходимый и достаточный признак того, что (109) есть асимптота.

Теперь нетрудно решить и такую задачу: *как связаны с данной кривой (106) коэффициенты уравнения ее асимптоты (если таковая существует)?*

Допустим, что асимптота существует и не параллельна оси  $Y$ . Тогда ее уравнение можно взять в виде

$$y - kx - b = 0,$$

где  $k$  и  $b$ —некоторые постоянные. Согласно признаку (110)

$$y(t) - kx(t) - b \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow T. \quad (111)$$

Прежде всего замечаем, что при  $t \rightarrow T$  обязательно  $|x(t)| \rightarrow \infty$ . Действительно, так как расстояние  $MN$  стремится к нулю, то при  $M$ , стремящейся в бесконечность,  $N$  также стремится в бесконечность уже по асимптоте, т. е. по прямой, не параллельной оси  $Y$ . А это возможно лишь при бесконечном возрастании  $|x|$  для точки  $N$ , а следовательно, и для точки  $M$ .

Если разделить теперь на  $x(t)$  левую часть (111), то это выражение и подавно будет стремиться к нулю. Получим

$$\frac{y(t)}{x(t)} - k - \frac{b}{x(t)} \rightarrow 0;$$

но так как  $b$ —постоянное, то  $\frac{b}{x(t)}$  стремится к нулю, и значит,

$$\frac{y(t)}{x(t)} - k \rightarrow 0 \text{ или } \frac{y(t)}{x(t)} \rightarrow k. \quad (112)$$

Далее, (111) утверждает, что разность между переменным  $y(t) - kx(t)$  и постоянным  $b$  стремится к нулю, или

$$y(t) - kx(t) \xrightarrow[t \rightarrow T]{} b. \quad (113)$$

Итак, в случае существования асимптоты, не параллельной оси  $Y$ , ее угловой коэффициент  $k$  есть предел отношения  $\frac{y(t)}{x(t)}$ , а отрезок  $b$ , отсекаемый асимптотой на оси  $Y$ , есть предел выражения  $y(t) - kx(t)$ , в обоих случаях при  $t \rightarrow T$ , т. е. когда точка кривой  $M[x(t), y(t)]$  уходит в бесконечность. Отсюда сейчас же вытекает правило для практического отыскания асимптот (не параллельных оси  $Y$ ) для заданной кривой (106).

Прежде всего исследуем отношение  $\frac{y(t)}{x(t)}$  при  $t \rightarrow T$ . Если оно не имеет предела, то искомой асимптоты заведомо не существует. Если же это отношение имеет предел, то, обозначая его через  $k$ , исследуем выражение

$$y(t) - kx(t).$$

Если это выражение не имеет предела, то асимптоты не существует. Если же оно имеет предел (который обозначим через  $b$ ), то асимптота существует, и ею будет служить прямая

$$y - kx - b = 0. \quad (114)$$

В самом деле, согласно последнему допущению,

$$y(t) - kx(t) \xrightarrow[t \rightarrow T]{} b,$$

т. е. левая часть уравнения (114) стремится к нулю после подстановки  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , при  $t \rightarrow T$ , а это, согласно (110), доказывает, что (114) есть асимптота.

Мы оставили в стороне вопрос о том, как связано с данной кривой (106) уравнение асимптоты, если последняя параллельна оси  $Y$ . Но в этом случае уравнение асимптоты имеет вид

$$x - a = 0, \quad (115)$$

где  $a$  — постоянное. Согласно признаку (110)

$$x(t) - a \xrightarrow[t \rightarrow T]{} 0, \text{ или } x(t) \xrightarrow[t \rightarrow T]{} a. \quad (116)$$

Итак,  $a$  находится как предел  $x(t)$  при  $t \rightarrow T$ .

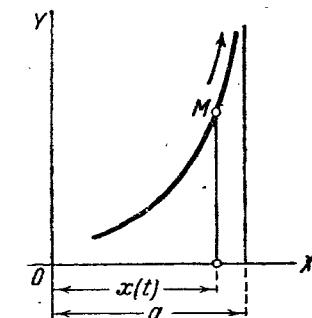
Отсюда вытекает очевидное практическое правило для отыскания асимптот, параллельных оси  $Y$  (черт. 31). Нужно исследовать

### § 11] АСИМПТОТА КАК ПРЕДЕЛЬНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ

$x(t)$  при  $t \rightarrow T$ . Если предел  $x(t)$  не существует, то такой асимптоты нет; если же он существует, то, обозначая этот предел через  $a$ , получаем асимптоту

$$x - a = 0.$$

При решении всех этих вопросов мы брали кривую в параметрическом задании (106). Если кривая дана уравнением  $y = y(x)$ ,  $x_0 \leq x < \infty$ <sup>1</sup>, то, присоединив сюда тождество  $x = x$ , мы вправе рассматривать эту пару равенств как частный случай (106), когда за параметр  $t$  принят  $x$ . Все выводы останутся верны. Угловой коэффициент  $k$  находится как предел отношения  $\frac{y(x)}{x}$  при  $x \rightarrow \infty$ , а свободный член  $b$  — как предел выражения  $y(x) - kx$  при  $x \rightarrow \infty$ . Случай асимптоты, параллельной оси  $Y$ , здесь возможен лишь в случае разрыва непрерывности функции  $y(x)$ , точнее, если  $y(x)$  стремится к бесконечности при стремлении  $x$  к некоторому значению  $a$  (черт. 31).



Черт. 31.

### § 11\*. АСИМПТОТА КАК ПРЕДЕЛЬНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ.

Во многих случаях к понятию асимптоты можно подойти с несколько иной точки зрения. А именно, имеет место такая теорема:

Если касательная к кривой (106) стремится к предельному положению, когда точка касания стремится по кривой в бесконечность, то это предельное положение есть асимптота. Все точки кривой (106) считаем заведомо обыкновенными, т. е.  $x'(t)$ ,  $y'(t)$  не обращаются в нуль одновременно.

В целях простоты выберем при доказательстве предельное положение касательной за ось  $X$ . Напишем уравнение (31) касательной в точке  $x(t)$ ,  $y(t)$ , разрешенное относительно  $Y$  (через  $X$ ,  $Y$  обозначаем текущие координаты):

$$Y = \frac{y'(t)}{x'(t)} X + \left[ y(t) - \frac{y'(t)}{x'(t)} x(t) \right]. \quad (117)$$

Так как касательная при  $t \rightarrow T$  стремится совпасть с осью  $X$ , то ее угловой коэффициент

$$k = \frac{y'(t)}{x'(t)} \quad (118)$$

<sup>1)</sup> Мы ограничиваемся, таким образом, случаем кривой, уходящей в бесконечность вправо. В случае  $x_0 \geq x > -\infty$  все будет вполне аналогично.

и свободный член уравнения (117)

$$y(t) - \frac{y'(t)}{x'(t)} x(t) \quad (119)$$

стремится к нулю. Следовательно, начиная с некоторого значения  $t = t_1$ , (118) остается ограниченным, и знаменатель в выражении (118) не может обращаться в нуль:  $x'(t) \neq 0$ . Пусть для определенности  $x'(t) > 0$ . Тогда функция  $x(t)$  растет монотонно и, более того, при  $t \rightarrow T$  стремится к бесконечности. В самом деле, если бы  $x(t)$  оставалась ограниченной, то в бесконечно малой разности (119) вычитаемое стремилось бы к нулю, а следовательно, стремилось бы к нулю и  $y(t)$ . Но ограниченность  $x(t)$  и стремление  $y(t)$  к нулю противоречат тому, что точка  $x(t), y(t)$  стремится в бесконечность.

Установив, что  $x(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow T$ , мы легко выясним поведение  $y(t)$ . Для этой цели, разделив бесконечно малую величину (119) на бесконечно большую  $x(t)$ , получаем бесконечно малую  $\frac{y(t)}{x(t)} - \frac{y'(t)}{x'(t)}$ . Так как  $\frac{y'}{x'} \rightarrow 0$ , то и  $\frac{y}{x} \rightarrow 0$ . Далее, представим  $y(t)$  в виде дроби

$$y(t) = \frac{\frac{y(t)}{x(t)}}{\frac{1}{x(t)}},$$

числитель и знаменатель которой при  $t \rightarrow T$  стремятся к нулю, являясь дифференцируемыми функциями. По правилу Лопиталья нужно исследовать отношение производных числителя и знаменателя, и если эта новая дробь при  $t \rightarrow T$  стремится к пределу, то прежняя дробь стремится к тому же пределу. Вычислим отношение производных:

$$\frac{\left[ \frac{y(t)}{x(t)} \right]'}{\left[ \frac{1}{x(t)} \right]'} = \frac{y'(t) x(t) - x'(t) y(t)}{-x'(t)}.$$

Это выражение совпадает с (119) и, следовательно, стремится к нулю при  $t \rightarrow T$ . Исходная дробь, представляющая  $y(t)$ , тоже стремится к нулю, а значит, ось  $X$  (за которую принято предельное положение касательной) есть асимптота нашей кривой.

Теорема доказана. Заметим, что обратная теорема неверна, т. е. асимптота может и не быть предельным положением касательной, так как это предельное положение может не существовать. Например, кривая  $y = \frac{1}{x} \sin x^2$ , очевидно, имеет асимптотой ось  $X$  (при  $x \rightarrow \infty$ ). Однако угловой коэффициент касательной к этой кривой  $y' = 2 \cos x^2 - \frac{1}{x^2} \sin x^2$  не стремится ни к какому пределу

при  $x \rightarrow \infty$ , и предельного положения касательной не существует. Суть дела в этом примере в том, что кривая стремится к асим-



Черт. 32.

птице, колеблясь около нее все более мелкими волнами, тем не менее с резкими колебаниями направления касательной (черт. 32).

### § 12. Асимптоты алгебраических кривых.

Развитые сейчас методы относились к случаю параметрического задания кривой. Укажем коротко метод отыскания асимптот для кривых вида  $F(x, y) = 0$  в частном случае алгебраической кривой. Левая часть представляет собой, следовательно, целый многочлен в переменных  $x, y$ . Перепишем уравнение в виде

$$F(x, y) = F_m(x, y) + F_{m-1}(x, y) + \dots + F_0 = 0, \quad (120)$$

где  $F_m(x, y)$  означает сумму членов  $m$ -й (старшей) степени,  $F_{m-1}(x, y)$  означает сумму членов  $m-1$ -й степени,  $\dots$ ,  $F_0$  — свободный член.

Учитывая однородность относительно  $x, y$  каждой суммы  $F_m, F_{m-1}, \dots$ , можно переписать (120) в виде

$$x^m F_m\left(1, \frac{y}{x}\right) + x^{m-1} F_{m-1}\left(1, \frac{y}{x}\right) + \dots + F_0 = 0,$$

или, деля на  $x^m$  обе части уравнения (точки оси  $Y$ , где  $x = 0$ , мы не будем рассматривать), получим

$$F_m\left(1, \frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x} F_{m-1}\left(1, \frac{y}{x}\right) + \dots + \frac{1}{x^m} F_0 = 0.$$

Для удобства введем обозначения  $\xi = \frac{1}{x}$ ,  $\eta = \frac{y}{x}$ ; тогда уравнение перепишется в виде

$$\varphi(\xi, \eta) = F_m(1, \eta) + \xi F_{m-1}(1, \eta) + \dots + \xi^m F_0 = 0. \quad (121)$$

Рассмотрим эту зависимость вблизи значений  $\xi = 0$ ,  $\eta = k^1$ . Для того чтобы при этих значениях зависимость имела место,

<sup>1)</sup> Этим значениям  $\xi, \eta$  никакие  $x, y$ , понятно, не соответствуют, но когда  $\xi \rightarrow 0$ , то  $x \rightarrow \infty$ . Здесь и заключается выгода введения этих новых переменных.

придется, очевидно, значение  $k$  взять равным одному из вещественных корней уравнения

$$F_m(1, \eta) = 0. \quad (122)$$

Ограничимся случаем, когда  $k$  — простой корень многочлена  $F_m(1, \eta)$ . Вычислим частные производные от  $\varphi$  по  $\xi$  и  $\eta$  и подставим значения  $\xi = 0, \eta = k$ :

$$\varphi_\xi(0, k) = F_{m-1}(1, k), \quad \varphi_\eta(0, k) = F'_m(1, k).$$

Здесь штрих означает дифференцирование по второму аргументу, причем производная отлична от 0, так как  $k$  — простой корень. По теореме существования неявной функции уравнение (121) вблизи значений  $\xi = 0, \eta = k$  разрешимо относительно  $\eta$ :

$$\eta = \eta(\xi), \text{ где } \eta(0) = k. \quad (123)$$

Производная функции  $\eta(\xi)$  при  $\xi = 0, \eta = k$  равна по определению

$$\eta'(0) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\eta(\xi) - k}{\xi},$$

а по правилу дифференцирования неявной функции

$$\eta'(0) = - \frac{\varphi_\xi(0, k)}{\varphi_\eta(0, k)} = - \frac{F_{m-1}(1, k)}{F'_m(1, k)}.$$

Следовательно,

$$\frac{\eta(\xi) - k}{\xi} \xrightarrow[\xi \rightarrow 0]{} - \frac{F_{m-1}(1, k)}{F'_m(1, k)},$$

или, возвращаясь к  $x$  и  $y$ :

$$y - kx \xrightarrow[x \rightarrow \infty]{} - \frac{F_{m-1}(1, k)}{F'_m(1, k)}.$$

Здесь под  $x$  и  $y$  подразумеваются текущие координаты той ветви кривой, для которой зависимость между  $\xi, \eta$  задана уравнением (123). Полученный результат показывает, что прямая

$$y - kx + \frac{F_{m-1}(1, k)}{F'_m(1, k)} = 0, \quad (124)$$

где  $k$  — простой вещественный корень уравнения (122), будет служить асимптотой для одной ветви кривой (120) [именно, для ветви (123)].

Легко убедиться, что этим путем отыскиваются все асимптоты (не параллельные оси  $Y$ ), если все вещественные корни многочлена  $F_m(1, \eta)$  — простые. Если же этого ограничения не ставить, то остальные асимптоты, отвечающие кратным корням  $k$ , существуют лишь в исключительных случаях, только если  $F_{m-1}(1, k)$  тоже равно нулю; они требуют более сложного исследования. Наконец,

чтобы не упустить асимптот, параллельных оси  $Y$ , можно повторить исследование, поменяв ролями координаты  $x, y$ ; тогда асимптоты, не параллельные оси  $X$ , будут определяться уравнением

$$x - ky + \frac{F_{m-1}(k, 1)}{F'_m(k, 1)} = 0, \quad (125)$$

причем здесь штрих означает дифференцирование по *первому* аргументу, а  $k$  есть корень уравнения

$$F_m(k, 1) = 0.$$

Уравнение (125) определяет асимптоту, параллельную оси  $Y$ , тогда и только тогда, если  $k = 0$ , т. е. если  $F_m(\xi, 1)$  имеет нулевой корень. В этом случае (125) принимает вид

$$x + \frac{F_{m-1}(0, 1)}{F'_m(0, 1)} = 0.$$

Случай кратного нулевого корня мы также оставляем в стороне.

#### Упражнения.

1. Найти асимптоты кривой

$$\begin{aligned} x &= 2t + 3 + \frac{1}{t-1}, \\ y &= -t + 2 + \frac{4}{t-1}. \end{aligned}$$

Вычертить ветви кривой, уходящие в бесконечность.

*Решение.* Прежде всего находим значения  $t$ , при которых кривая уходит в  $\infty$ ; это будут

- 1)  $t \rightarrow 1;$
- 2)  $t \rightarrow \pm\infty.$

1) Исследуем случай, когда  $t \rightarrow 1$ . Имеем  $k = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{y}{x}$  существует и равен 4.

Составим разность

$$y - kx = y - 4x = -9t - 10 \rightarrow -19.$$

Итак, асимптота существует и имеет уравнение

$$Y = 4x - 19.$$

Текущую ординату асимптоты обозначаем  $Y$  в отличие от текущей ординаты кривой  $y$ . Чтобы выяснить расположение кривой относительно асимптоты, составим разность

$$y - Y = y - 4x + 19 = -9(t-1) \quad \begin{cases} > 0 \text{ при } t < 1, \\ < 0 \text{ при } t > 1. \end{cases}$$

Итак, если  $t \rightarrow 1$ , причем  $t < 1$ , то кривая приближается к асимптоте сверху и уходит в бесконечность влево (как легко проверить,  $x \rightarrow -\infty$ ), а если  $t \rightarrow 1$ , причем  $t > 1$ , то кривая приближается к асимптоте снизу и уходит в бесконечность вправо ( $x \rightarrow +\infty$ ).

2) Исследуем случай, когда  $t \rightarrow \infty$ . Имеем  $k = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y}{x}$  существует и равен  $-\frac{1}{2}$ . Составим разность

$$y - kx = y + \frac{x}{2} = \frac{7}{2} + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{t-1} \rightarrow \frac{7}{2}.$$

Итак, асимптота существует и имеет уравнение

$$Y = -\frac{x}{2} + \frac{7}{2}.$$

Составим разность

$$y - Y = y + \frac{x}{2} - \frac{7}{2} = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{t-1} \begin{cases} > 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty, \\ < 0 \text{ при } t \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Итак, если  $t \rightarrow +\infty$ , то кривая приближается к асимптоте сверху и уходит в бесконечность вправо ( $x \rightarrow +\infty$ ), а если  $t \rightarrow -\infty$ , то кривая приближается к асимптоте снизу и уходит в бесконечность влево ( $x \rightarrow -\infty$ ).

Исследованная нами кривая представляет собою гиперболу (показать).  
2. Найти асимптоту гиперболической спирали, заданной в полярных координатах уравнением

$$r = \frac{a}{\varphi}, \quad 0 < \varphi < \infty.$$

Отв.  $y = a$ .

Указание. Перейти к параметрическому представлению в прямых угольных координатах  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , приняв  $\varphi$  за параметр.  
3. Найти асимптоты кривой 3-го порядка

$$y^3 - 4x^2y + 2x^2 + y^2 - 5x + y + 4 = 0.$$

Отв.  $y = 2x - \frac{3}{4}$ ,  $y = -2x - \frac{3}{4}$ ,  $y = \frac{1}{2}$ .

## ГЛАВА II.

### ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ И ЕГО ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕНЕНИЯ К ТЕОРИИ КРИВЫХ.

В этой главе мы должны ознакомиться с аппаратом, которым мы будем пользоваться во всем последующем изложении. Это — аппарат векторного анализа, точнее, векторного дифференциального исчисления. Основным его достоинством является соединение приемов дифференциального исчисления с геометрическостью понятия вектора.

#### § 13. Определение производной и техника дифференцирования.

Основным понятием у нас будет служить понятие вектор-функции скалярного (т. е. принимающего численные значения) переменного.

Мы скажем, что нам дана вектор-функция  $\mathbf{a}(t)$ , если каждому значению вещественного переменного  $t$  в некоторой области изменения  $t_1 \leq t \leq t_2$  отвечает вполне определенное значение вектора  $\mathbf{a}$ .

Под вектором здесь и в дальнейшем мы понимаем свободный (т. е. отложенный из какой угодно точки) вектор в пространстве; если речь идет о векторе, отложенном из данной точки, то это будет оговариваться особо.

Как и в случае обыкновенных функций, мы будем рассматривать в дальнейшем функции лишь непрерывные и дифференцируемые. Однако в применении к вектор-функциям эти понятия нуждаются в определении.

Определим прежде всего понятие предела для векторной переменной. Пусть аргумент  $t$  стремится к пределу  $t_0$ ; мы скажем, что значение вектор-функции  $\mathbf{a}(t)$  стремится при этом к пределу  $\mathbf{a}_0$  (где  $\mathbf{a}_0$  — некоторый постоянный вектор), если разность векторов

$$\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0$$

стремится к нулю по модулю.

Итак, когда мы пишем

$$\mathbf{a}(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} \mathbf{a}_0,$$

2) Исследуем случай, когда  $t \rightarrow \infty$ . Имеем  $k = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y}{x}$  существует и равен  $-\frac{1}{2}$ . Составим разность

$$y - kx = y + \frac{x}{2} = \frac{7}{2} + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{t-1} \rightarrow \frac{7}{2}.$$

Итак, асимптота существует и имеет уравнение

$$Y = -\frac{x}{2} + \frac{7}{2}.$$

Составим разность

$$y - Y = y + \frac{x}{2} - \frac{7}{2} = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{t-1} \begin{cases} > 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty, \\ < 0 \text{ при } t \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Итак, если  $t \rightarrow +\infty$ , то кривая приближается к асимптоте сверху и уходит в бесконечность вправо ( $x \rightarrow +\infty$ ), а если  $t \rightarrow -\infty$ , то кривая приближается к асимптоте снизу и уходит в бесконечность влево ( $x \rightarrow -\infty$ ).

Исследованная нами кривая представляет собою гиперболу (показать).  
2. Найти асимптоту гиперболической спирали, заданной в полярных координатах уравнением

$$r = \frac{a}{\varphi}, \quad 0 < \varphi < \infty.$$

Отв.  $y = a$ .

Указание. Перейти к параметрическому представлению в прямых координатах  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , приняв  $\varphi$  за параметр.  
3. Найти асимптоты кривой 3-го порядка

$$y^3 - 4x^2y + 2x^2 + y^2 - 5x + y + 4 = 0.$$

Отв.  $y = 2x - \frac{3}{4}$ ,  $y = -2x - \frac{3}{4}$ ,  $y = \frac{1}{2}$ .

## ГЛАВА II.

### ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ И ЕГО ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕНЕНИЯ К ТЕОРИИ КРИВЫХ.

В этой главе мы должны ознакомиться с аппаратом, которым мы будем пользоваться во всем последующем изложении. Это — аппарат векторного анализа, точнее, векторного дифференциального исчисления. Основным его достоинством является соединение приемов дифференциального исчисления с геометрическостью понятия вектора.

#### § 13. Определение производной и техника дифференцирования.

Основным понятием у нас будет служить понятие вектор-функции скалярного (т. е. принимающего численные значения) переменного.

Мы скажем, что нам дана вектор-функция  $\mathbf{a}(t)$ , если каждому значению вещественного переменного  $t$  в некоторой области изменения  $t_1 \leq t \leq t_2$  отвечает вполне определенное значение вектора  $\mathbf{a}$ .

Под вектором здесь и в дальнейшем мы понимаем свободный (т. е. отложенный из какой угодно точки) вектор в пространстве; если речь идет о векторе, отложенном из данной точки, то это будет оговариваться особо.

Как и в случае обыкновенных функций, мы будем рассматривать в дальнейшем функции лишь непрерывные и дифференцируемые. Однако в применении к вектор-функциям эти понятия нуждаются в определении.

Определим прежде всего понятие предела для векторной переменной. Пусть аргумент  $t$  стремится к пределу  $t_0$ ; мы скажем, что значение вектор-функции  $\mathbf{a}(t)$  стремится при этом к пределу  $\mathbf{a}_0$  (где  $\mathbf{a}_0$  — некоторый постоянный вектор), если разность векторов

$$\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0$$

стремится к нулю по модулю.

Итак, когда мы пишем

$$\mathbf{a}(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} \mathbf{a}_0,$$

то подразумеваем, что

$$|\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow t_0. \quad (126)$$

Под модулем  $|\mathbf{a}|$  какого-нибудь вектора  $\mathbf{a}$  мы понимаем длину отрезка, изображающего вектор, т. е. положительное число (или 0, если сам вектор  $\mathbf{a} = 0$ ). Поэтому наше определение векторного предела сводится к понятию о стремлении к нулю вещественной переменной, а это известно из анализа.

**Следствие.** Если  $\mathbf{a}(t) \rightarrow \mathbf{a}_0$ , то модуль  $\mathbf{a}(t)$  стремится к модулю  $\mathbf{a}_0$ .

Действительно, разность модулей  $|\mathbf{a}(t)| - |\mathbf{a}_0|$  двух векторов, взятая по модулю, никогда не превышает модуля разности  $|\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0|$  и в силу (126) должна в нашем случае стремиться к нулю. А это и значит, что  $|\mathbf{a}(t)| \rightarrow |\mathbf{a}_0|$ .

В частности,  $\mathbf{a}(t) \rightarrow 0$  равносильно с  $|\mathbf{a}(t)| \rightarrow 0$ .

Дадим теперь определение непрерывности вектор-функции в точке  $t = t_0$ . А именно, если при  $t$ , стремящемся любым способом к  $t_0$ ,  $\mathbf{a}(t)$  стремится к пределу  $\mathbf{a}(t_0)$ , то функция  $\mathbf{a}(t)$  называется непрерывной при  $t = t_0$ .

Определение непрерывности, пользуясь определением предела, можно записать формулой

$$|\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}(t_0)| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow t_0. \quad (126')$$

Теперь дадим определение дифференцируемости, также вполне аналогичное обычному.

Разделим приращение вектор-функции на приращение аргумента  $t - t_0$  (деление вектора на число):

$$\frac{\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}(t_0)}{t - t_0}, \quad (127)$$

и изучим полученный вектор при  $t$ , стремящемся к  $t_0$ . Если при  $t$ , стремящемся к  $t_0$  (любым способом), вектор (127) стремится к некоторому (одному и тому же) предельному вектору, то функция  $\mathbf{a}(t)$  называется дифференцируемой в точке  $t_0$ , и предельный вектор называется ее производной в этой точке.

Этот вектор — производную в точке  $t_0$  — мы будем обозначать через  $\mathbf{a}'(t_0)$ . Определение производной, вспоминая определение предела, можно, очевидно, записать формулой

$$\left| \frac{\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}(t_0)}{t - t_0} - \mathbf{a}'(t_0) \right| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow t_0. \quad (128)$$

Если производная существует при каждом значении  $t$ , то  $\mathbf{a}'(t)$  снова представляет вектор-функцию от  $t$ . Если функция  $\mathbf{a}'(t)$  в свою очередь непрерывна и дифференцируема, то ее производная  $\mathbf{a}''(t)$  называется второй производной и т. д.

В дальнейшем нам придется рассматривать вектор-функции не от одного, а от двух скалярных аргументов. В этом случае мы совершенно аналогично рассматриваем частные производные. Частная производная здесь, как и в обычном анализе, определяется как производная по одному аргументу при закрепленном значении другого.

Нам нужно теперь установить правила дифференцирования функций, получающихся из данных вектор-функций путем векторных операций. Но еще раньше для них нужно установить правила перехода к пределу<sup>1)</sup>.

Пусть  $\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t), \dots$  будут векторные функции, а  $m(t), \dots$  — скалярные функции одного и того же аргумента  $t$ , причем известно, что при  $t \rightarrow t_0$  значения этих функций стремятся к пределам:

$$\mathbf{a}(t) \rightarrow \mathbf{a}_0, \quad \mathbf{b}(t) \rightarrow \mathbf{b}_0, \dots, \quad m(t) \rightarrow m_0, \dots,$$

или, что то же самое,

$$|\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0| \rightarrow 0, \quad |\mathbf{b}(t) - \mathbf{b}_0| \rightarrow 0, \dots, \quad |m(t) - m_0| \rightarrow 0, \dots \quad (129)$$

Мы утверждаем, что тогда при  $t \rightarrow t_0$ :

1. Предел суммы двух вектор-функций существует и равен сумме пределов:

$$\mathbf{a}(t) + \mathbf{b}(t) \rightarrow \mathbf{a}_0 + \mathbf{b}_0. \quad (130)$$

Для доказательства нужно составить модуль разности:

$$\begin{aligned} &|\{\mathbf{a}(t) + \mathbf{b}(t)\} - \{\mathbf{a}_0 + \mathbf{b}_0\}| = \\ &= |\{\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0\} + \{\mathbf{b}(t) - \mathbf{b}_0\}| \leq |\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0| + |\mathbf{b}(t) - \mathbf{b}_0|. \end{aligned}$$

Неравенство, написанное нами, основано на том, что модуль суммы векторов не превышает суммы их модулей. В последней сумме каждое слагаемое стремится к нулю согласно (129), следовательно, и подавно (напомним, что речь идет о положительных величинах)

$$|\{\mathbf{a}(t) + \mathbf{b}(t)\} - (\mathbf{a}_0 + \mathbf{b}_0)| \rightarrow 0,$$

чем (130) доказано.

2. Предел произведения  $m(t) \mathbf{a}(t)$  (скалярной величины на вектор) существует и равен  $m_0 \mathbf{a}_0$ :

$$m(t) \mathbf{a}(t) \rightarrow m_0 \mathbf{a}_0. \quad (134)$$

Составим разность векторов

$$m(t) \mathbf{a}(t) - m_0 \mathbf{a}_0 = m(t) \{\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0\} + \{m(t) - m_0\} \mathbf{a}_0; \quad (131')$$

отсюда

$$|m(t) \mathbf{a}(t) - m_0 \mathbf{a}_0| \leq |m(t)| |\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0| + |m(t) - m_0| |\mathbf{a}_0|.$$

<sup>1)</sup> При первом чтении можно опустить доказательства последующих предложений (до конца параграфа).

Теперь всюду стоят скалярные (положительные) величины. В правой части в первом члене первый множитель стремится к  $|m(t_0)|$ , второй же — к нулю [согласно (129)]; во втором члене первый множитель стремится к нулю, второй постоянный; в результате правая часть стремится к нулю, а левая и подавно. Тем самым (131) доказано.

3. *Предел скалярного произведения  $\mathbf{a}(t)\mathbf{b}(t)$  существует и равен  $\mathbf{a}_0\mathbf{b}_0$ :*

$$\mathbf{a}(t)\mathbf{b}(t) \rightarrow \mathbf{a}_0\mathbf{b}_0. \quad (132)$$

Составим разность (здесь речь идет о скалярных величинах)

$$\mathbf{a}(t)\mathbf{b}(t) - \mathbf{a}_0\mathbf{b}_0 = \{\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0\}\mathbf{b}(t) + \{\mathbf{b}(t) - \mathbf{b}_0\}\mathbf{a}_0. \quad (132')$$

В справедливости этого тождества легко убедиться по свойствам скалярного произведения. Далее,

$$|\mathbf{a}(t)\mathbf{b}(t) - \mathbf{a}_0\mathbf{b}_0| \leq |\{\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0\}\mathbf{b}(t)| + |\{\mathbf{b}(t) - \mathbf{b}_0\}\mathbf{a}_0|, \quad (132'')$$

так как модуль суммы не превосходит суммы модулей. Теперь заметим, что так как скалярное произведение  $\mathbf{pq}$  каких-нибудь векторов  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  равно по определению  $|\mathbf{p}||\mathbf{q}|\cos(\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{q}})$ , то

$$|\mathbf{pq}| \leq |\mathbf{p}||\mathbf{q}|.$$

Следовательно, если один множитель  $\mathbf{p}$  стремится к нулю (что равносильно  $|\mathbf{p}| \rightarrow 0$ ), а другой множитель  $\mathbf{q}$  стремится к определенному пределу  $\mathbf{q}_0$  (что влечет за собой  $|\mathbf{q}| \rightarrow |\mathbf{q}_0|$ ), то правая часть неравенства стремится к нулю, а следовательно, и подавно

$$|\mathbf{pq}| \rightarrow 0.$$

Теперь ясно, что в правой части неравенства (132'') первое слагаемое

$$|\{\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0\}\mathbf{b}(t)| \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} 0,$$

так как  $|\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0| \rightarrow 0$ , а  $|\mathbf{b}(t)| \rightarrow |\mathbf{b}_0|$ . То же относится и ко второму слагаемому. Левая часть (132'') и подавно стремится к нулю, и (132) этим доказано.

4. *Предел векторного произведения  $[\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)]$  существует и равен  $[\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0]$ :*

$$[\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)] \rightarrow [\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0]. \quad (133)$$

Составим разность (речь идет снова о векторах):

$$[\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)] - [\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0] = [\{\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0\}, \mathbf{b}(t)] + [\mathbf{a}_0, \{\mathbf{b}(t) - \mathbf{b}_0\}]. \quad (133')$$

В справедливости этого тождества легко убедиться по свойствам векторного произведения (раскрывая скобки). Отсюда

$$[\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)] - [\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0] \leq |\{\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0\}, \mathbf{b}(t)| + |[\mathbf{a}_0, \{\mathbf{b}(t) - \mathbf{b}_0\}]|, \quad (133'')$$

так как модуль суммы векторов не превосходит суммы их модулей. Теперь заметим, что модуль векторного произведения  $[\mathbf{p}, \mathbf{q}]$  каких-нибудь двух векторов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  равен по определению  $|\mathbf{p}||\mathbf{q}|\sin\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{q}}$ , и, следовательно,

$$|[\mathbf{p}, \mathbf{q}]| \leq |\mathbf{p}||\mathbf{q}|.$$

Поэтому, если  $|\mathbf{p}| \rightarrow 0$ , а  $|\mathbf{q}|$  стремится к определенному пределу, то  $|[\mathbf{p}, \mathbf{q}]| \rightarrow 0$ . Применяя эти соображения к правой части (133''), убеждаемся, что она стремится к нулю, левая часть и подавно, и (133) доказано.

Переходим к *технике дифференцирования*. Пусть  $\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t), \dots$  — вектор-функции, а  $m(t), \dots$  — скалярные функции, те и другие одного и того же аргумента  $t$ , *непрерывные и дифференцируемые при  $t = t_0$* . Их значения при  $t = t_0$  обозначим через  $\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0, \dots; m_0, \dots$

Мы утверждаем, что в этом случае будут дифференцируемы при том же значении  $t = t_0$  и следующие функции:

1. Вектор-функция  $\mathbf{a}(t) + \mathbf{b}(t)$ , причем

$$\{\mathbf{a}(t) + \mathbf{b}(t)\}' = \mathbf{a}'(t) + \mathbf{b}'(t). \quad (134)$$

В самом деле, приращение этой функции при переходе от  $t_0$  к  $t$  будет

$$\{\mathbf{a}(t) + \mathbf{b}(t)\} - (\mathbf{a}_0 + \mathbf{b}_0).$$

После деления на  $t - t_0$  оно примет вид

$$\frac{\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0}{t - t_0} + \frac{\mathbf{b}(t) - \mathbf{b}_0}{t - t_0}.$$

При  $t \rightarrow t_0$  оба слагаемых стремятся к пределам, соответственно к  $\mathbf{a}'(t)$  и  $\mathbf{b}'(t)$ , следовательно, их сумма [согласно правилу (130)] стремится к пределу, а именно, к  $\mathbf{a}'(t_0) + \mathbf{b}'(t_0)$ . Тем самым доказана дифференцируемость функции  $\mathbf{a}(t) + \mathbf{b}(t)$  и формула (134) при значении  $t = t_0$ .

2. Вектор-функция  $m(t)\mathbf{a}(t)$ , причем

$$\{m(t)\mathbf{a}(t)\}' = m'(t)\mathbf{a}(t) + m(t)\mathbf{a}'(t). \quad (135)$$

Приращение вектор-функции  $m(t)\mathbf{a}(t)$  при переходе от  $t_0$  к  $t$  мы возьмем в виде (131') и разделим на  $t - t_0$ .

Получим

$$m(t) \frac{\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0}{t - t_0} + \frac{m(t) - m_0}{t - t_0} \mathbf{a}_0.$$

Заставим  $t$  стремиться к  $t_0$ ; тогда в первом члене множитель  $m(t)$  стремится к  $m_0$ , векторный множитель — к  $\mathbf{a}'(t_0)$ , следовательно, произведение по правилу (131) стремится к произведению пределов, т. е. к  $m_0 \mathbf{a}'(t_0)$ . Во втором члене первый множитель

стремится к  $m'(t_0)$ , второй — постоянный вектор; предел существует и равен  $m'(t_0)\mathbf{a}_0$ . Поскольку существуют пределы слагаемых, то существует и предел суммы, равный сумме пределов [правило (130)]:

$$m_0 \mathbf{a}'(t_0) + m'(t_0) \mathbf{a}_0.$$

Итак, показано, что к такому пределу стремится при  $t \rightarrow t_0$  приращение вектор-функции  $m(t)\mathbf{a}(t)$ , деленное на приращение аргумента  $t$ . Этим доказана дифференцируемость функции и справедливость формулы (135) при  $t = t_0$ .

3. Скалярная функция  $\mathbf{a}(t)\mathbf{b}(t)$ , причем

$$\{\mathbf{a}(t)\mathbf{b}(t)\}' = \mathbf{a}'(t)\mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t)\mathbf{b}'(t). \quad (136)$$

Берем приращение этой функции при переходе от  $t_0$  к  $t$  в виде (132') и делим на  $t - t_0$ . Получим

$$\frac{\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0}{t - t_0} \mathbf{b}(t) + \mathbf{a}_0 \frac{\mathbf{b}(t) - \mathbf{b}_0}{t - t_0}.$$

Мы имеем здесь сумму двух скалярных произведений, причем при  $t \rightarrow t_0$  множители в первом произведении стремятся соответственно к  $\mathbf{a}'(t_0)$  и  $\mathbf{b}_0$ , а во втором — к  $\mathbf{a}_0$  и  $\mathbf{b}'(t_0)$ .

Согласно правилу (132) при этом скалярные произведения также стремятся к пределам, именно к скалярным произведениям пределов. Поэтому предел написанного выражения существует и равен

$$\mathbf{a}'(t_0)\mathbf{b}_0 + \mathbf{a}_0\mathbf{b}'(t_0).$$

Таков предел отношения приращения функции  $\mathbf{a}(t)\mathbf{b}(t)$  к приращению аргумента при  $t \rightarrow t_0$ . Этим доказаны дифференцируемость функции и справедливость формулы (136) при  $t = t_0$ .

4. Вектор-функция  $[\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)]$ , причем

$$[\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)]' = [\mathbf{a}'(t), \mathbf{b}(t)] + [\mathbf{a}(t), \mathbf{b}'(t)]. \quad (137)$$

Берем приращение этой вектор-функции (при переходе от  $t_0$  к  $t$ ) в форме (133') и делим его на  $t - t_0$ . Получим

$$\left[ \frac{\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0}{t - t_0}, \mathbf{b}(t) \right] + \left[ \mathbf{a}_0, \frac{\mathbf{b}(t) - \mathbf{b}_0}{t - t_0} \right].$$

Мы имеем здесь сумму векторных произведений. В первом из них множители при  $t \rightarrow t_0$  стремятся соответственно к пределам  $\mathbf{a}'(t_0)$  и  $\mathbf{b}_0$ , во втором — к  $\mathbf{a}_0$  и  $\mathbf{b}'(t_0)$ . Так как по правилу (133) векторные произведения стремятся к векторным произведениям пределов, то предел написанного выражения существует и равен

$$[\mathbf{a}'(t_0), \mathbf{b}_0] + [\mathbf{a}_0, \mathbf{b}'(t_0)].$$

Этим доказана дифференцируемость функции  $[\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)]$  и справедливость формулы (137) при  $t = t_0$ .

Нужно обратить внимание на порядок множителей в формуле (137): если множитель  $a$  стоит на первом месте слева, то  $a$  и  $a'$  стоят на первом месте и в членах правой части. В случае векторного произведения это имеет значение.

Как мы видим, формулы дифференцирования и способы их вывода с формальной стороны почти дословно повторяют обыкновенное дифференциальное исчисление. В частности, для всех трех родов произведений повторяется в сущности одна и та же формула. Отметим, что если один из множителей постоянный, то, как и обычно, его производная равна нулю, и один из членов правой части исчезает. Получается правило вынесения постоянного множителя из-под знака дифференцирования.

Хотя здесь мы получили мало интересного по существу, зато у нас обоснован теперь ряд вычислительных правил, которыми мы будем широко пользоваться в дальнейшем. Мы ставим своей ближайшей задачей истолковать геометрически понятия вектор-функции и ее производной. Мы увидим, как эти понятия, введенные нами пока совершенно абстрактно и потому несколько сухо и невыразительно, приобретут отчетливый геометрический смысл и лягут в основу исследования сначала кривых, а затем и поверхностей в пространстве.

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь вектор-функции, имеющие при всех значениях аргумента непрерывные производные до того порядка, до какого в данном построении они нам требуются.

#### § 14. Истолкование вектор-функции как радиус-вектора кривой в параметрическом представлении.

Пусть нам задана некоторая вектор-функция одного аргумента  $t$  в определенной области изменения последнего:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad T_0 < t < T. \quad (138)$$

Фиксируем в пространстве некоторую точку  $O$  и будем при всех значениях  $t$  откладывать вектор  $\mathbf{r}(t)$  именно из этой точки. При каждом значении  $t$  мы получаем определенный вектор,  $\overline{OM} = \mathbf{r}(t)$ , начало которого в точке  $O$ , а конец  $M$  зависит от выбора значения  $t$ . При  $t$ , меняющемся в своей области изменения (от  $T_0$  до  $T$ ), точка  $M$  описывает в пространстве некоторое геометрическое место точек (черт. 33), которое мы будем называть параметрически заданной кривой. Само уравнение (138), выражающее радиус-вектор точки  $M$  как функцию скалярного аргумента, мы будем называть векторным параметрическим представлением кривой.

Нам нужно теперь установить связь с координатным заданием кривой.

Примем фиксированную нами точку  $O$  за начало прямоугольных декартовых координат в пространстве и обозначим через  $i, j, k$

единичные векторы, отложенные по положительным направлениям координатных осей. Тогда, как известно, любой вектор, в частности  $\mathbf{r}(t)$ , можно разложить по  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ , т. е. представить в виде их линейной комбинации с численными коэффициентами. Эти численные коэффициенты называются *координатами* вектора и, если вектор отложен из начала  $O$ , совпадают с прямоугольными декартовыми координатами конца этого вектора. Итак,

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}. \quad (139)$$

Координаты вектора  $\mathbf{r}(t)$  обозначены нами через  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ , так как они вместе с вектором  $\mathbf{r}$  зависят от аргумента  $t$ . Но координаты вектора  $\mathbf{r}$  совпадают с координатами точки  $M(t)$ , так что

$$\left. \begin{array}{l} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \\ T_0 \leq t \leq T. \end{array} \right\} \quad (140)$$

Итак, при изменении аргумента  $t$  координаты точки  $M(t)$  меняются как определенные функции  $t$ , причем точка  $M(t)$  описывает нашу кривую.

В результате мы перешли от векторного параметрического представления кривой (138) к ее координатному параметрическому представлению (140). При этом функции  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  дифференцируемы столько же раз, как и вектор-функция  $\mathbf{r}(t)$ . Действительно, умножая разложение (139) поочередно на  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  скалярно, получим

$$x(t) = \mathbf{r}(t)\mathbf{i}, \quad y(t) = \mathbf{r}(t)\mathbf{j}, \quad z(t) = \mathbf{r}(t)\mathbf{k}.$$

Применяя к правым частям правила дифференцирования § 13, убеждаемся в справедливости сказанного.

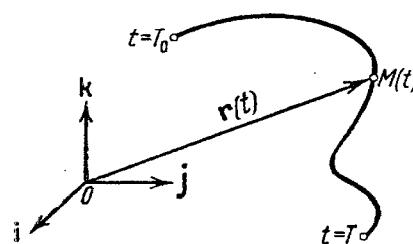
Обратно, если нам задано координатное параметрическое представление кривой (140), то мы построим вектор-функцию

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

и будем ее откладывать из начала  $O$ . Конец вектора  $\mathbf{r}(t)$  имеет координаты  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  и, следовательно, описывает нашу кривую.

Мы возвращаемся к заданию кривой вектор-функцией  $\mathbf{r}(t)$ , причем  $\mathbf{r}(t)$  будет дифференцируема (в силу правил, установленных в § 13) столько же раз, как и  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ .

Итак, задание вектор-функции (138), если ее откладывать из начала  $O$ , вполне равносильно заданию кривой системой уравнений (140).



Черт. 33.

## § 15] ДОСТАТОЧНЫЙ ПРИЗНАК ОБЫКНОВЕННОЙ ТОЧКИ

Параметрическое представление кривой можно истолковать наглядно, если понимать под параметром  $t$  время и точку  $M(t)$  считать движущейся с течением времени. Тогда вектор-функция  $\mathbf{r}(t)$  выражает изменение радиус-вектора точки  $M(t)$  с течением времени, а  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  выражают изменения ее координат.

### § 15. Достаточный признак обыкновенной точки.

Установив связь с координатами, займемся геометрической стороной дела. Назовем *простым отрезком* пространственной кривой геометрическое место точек, которое в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задается уравнениями

$$\left. \begin{array}{l} y = f(x), \\ z = g(x). \end{array} \right\} \quad (141)$$

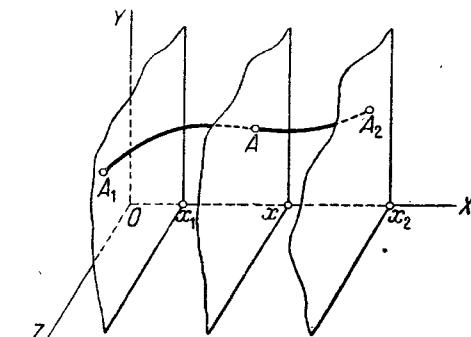
Здесь  $x$  меняется в определенном промежутке  $x_1 \leq x \leq x_2$ . Так как  $f$  и  $g$ , как всегда предполагается у нас, однозначные функции, то наглядно можно представлять дело так, что простой отрезок пространственной кривой  $A_1A_2$  получен из прямолинейного отрезка  $[x_1, x_2]$  путем смещения

каждой точки  $(x, 0, 0)$  этого отрезка по перпендикулярной к нему плоскости в положение  $A[x, f(x), g(x)]$  (черт. 34). При этом, так как  $f(x)$ ,  $g(x)$  — непрерывные и дифференцируемые функции, то эта деформация прямолинейного отрезка в криволинейный происходит «плавным» образом.

Теперь уясним себе устройство в малых кусках кривой (138), или, что то же самое, (140). Точку  $t = t_0$  на кривой будем называть *обыкновенной*, если при значениях  $t$ , достаточно близких к  $t_0$ , кривая представляет собой простой отрезок. Этим, собственно говоря, не устраивается возможность того, что при некотором удаленном от  $t_0$  значении  $t$  кривая вернется в ту же точку и получится точка самопересечения (особая). Но на это мы не будем обращать внимания, так как будем интересоваться кривой лишь при значениях  $t$ , достаточно близких к его значению в рассматриваемой точке.

Формулируем теперь достаточный признак обыкновенной точки: если в данной точке  $t = t_0$  производные

$$x'(t_0), \quad y'(t_0), \quad z'(t_0)$$



Черт. 34.

не обращаются в нуль все одновременно (т. е. хотя бы одна  $\neq 0$ ), то точка  $t = t_0$  — обыкновенная.

Пусть для определенности  $x'(t_0) \neq 0$ . Будем рассматривать первое из уравнений (140)

$$x - x(t) = 0$$

как связывающее переменное  $x$  (составляющее первый член) с переменным  $t$  [входящим через свою функцию  $x(t)$  во втором члене]. Это уравнение, очевидно, удовлетворяется при  $t = t_0$ ,  $x = x(t_0)$ , т. е. в данной точке на кривой. Кроме того, частная производная по  $t$  от его левой части, т. е.  $-x'(t)$ , отлична от нуля при  $t = t_0$ .

По теореме существования неявной функции наше уравнение вблизи значений  $t = t_0$ ,  $x = x(t_0)$  однозначно разрешимо относительно  $t$  и может быть переписано, следовательно, в виде  $t = t(x)$ .

Вставляя полученное выражение  $t$  через  $x$  в остальные два из уравнений (140), мы получим  $y$  и  $z$  однозначно выражеными функциями  $x$ . Мы пришли к уравнениям вида (141), т. е. получили при значениях  $t$ , близких к  $t_0$ , кривую в виде простого отрезка. Точка  $t_0$  действительно обыкновенная.

Доказанный признак можно теперь формулировать более геометрически. Продифференцируем по  $t$  почленно уравнение (139), пользуясь установленными в § 13 правилами ( $i, j, k$  — постоянные). Получим

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}.$$

Если в данной точке функции  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  обращаются в нуль одновременно, то  $\mathbf{r}'$ , очевидно, тоже равно нулю; обратно, если  $\mathbf{r}' = 0$ , то равны нулю и все его координаты  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ . Поэтому достаточный признак обыкновенной точки, который состоит как раз в отрицании такого положения вещей, может быть переформулирован так: если в данной точке  $\mathbf{r}'(t) \neq 0$ , то точка — обыкновенная.

Точки, где соблюдается этот признак, мы будем называть *заведомо обыкновенными*. В дальнейшем, за исключением тех случаев, когда оговорено противное, мы будем иметь в виду лишь заведомо обыкновенные точки. И действительно, точки, где  $\mathbf{r}'(t) = 0$ , являются на кривой исключительными, как правило же  $\mathbf{r}'(t) \neq 0$ . Если предположить, что на целом участке кривой  $\mathbf{r}'(t) = 0$ , то  $\mathbf{r}(t) = \text{const.}$ , и этот участок фактически вырождается в точку.

## § 16. Геометрический смысл дифференцирования вектор-функций.

Истолковав вектор-функцию (138) как радиус-вектор некоторой кривой в параметрическом представлении, можно весьма наглядно изобразить весь процесс дифференцирования этой функции. Мы исходим из некоторого значения  $t = t_0$ , ему отвечает значение функ-

ции  $\mathbf{r}(t_0)$ , которое, будучи отложено из начала  $O$ , концом указывает некоторую точку  $M_0$  на исследуемой кривой:

$$\mathbf{r}(t_0) = \overline{OM_0}$$

(черт. 35).

Переходим к некоторому другому значению  $t$ , которому таким же образом отвечают значение  $\mathbf{r}(t)$  и точка  $M$ :

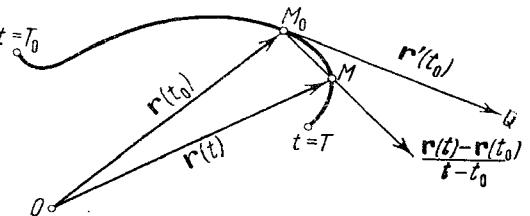
$$\mathbf{r}(t) = \overline{OM}$$

Составим разность этих двух значений вектор-функции:

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0) = \overline{OM} - \overline{OM_0} = \overline{M_0M}, \quad (142)$$

т. е. приращение вектор-функции есть вектор-хорда на кривой, соединяющий исходную точку  $M_0$  с новой точкой  $M$ . Разделим приращение  $\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)$  на приращение аргумента  $t - t_0$  и рассмотрим частное

$$\frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0}. \quad (143)$$



Черт. 35.

Так как производилось деление вектора на число, получается вновь вектор, направленный по той же прямой, что и числитель

$\overline{M_0M}$ , притом в ту же сторону, если знаменатель  $t - t_0 > 0$ , и в обратную, если  $t - t_0 < 0$ . Так или иначе, частное (143) направлено по секущей  $\overline{M_0M}$ . Заставим теперь  $t$  стремиться к  $t_0$ . Тогда, в силу предполагаемой непрерывности функции  $\mathbf{r}(t)$ , значение  $\mathbf{r}(t)$  стремится к  $\mathbf{r}(t_0)$  как к пределу, другими словами,

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)| \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} 0.$$

Записанная этим условием непрерывность функции  $\mathbf{r}(t)$  в точке  $t = t_0$  теперь легко истолковывается геометрически: она означает, согласно (142), что длина хорды  $\overline{M_0M}$  стремится к нулю при  $t \rightarrow t_0$ . Другими словами, когда значение параметра  $t$  стремится к  $t_0$ , отвечающая  $t$  точка  $M$  на кривой стремится в точку  $M_0$ , отвечающую  $t_0$ . Непрерывность вектор-функции истолковывается, таким образом, как непрерывность кривой.

В частном (143) числитель и знаменатель оба стремятся к нулю при  $t$ , стремящемся к  $t_0$ . Сам же вектор (143), в силу предполагаемой дифференцируемости вектор-функции, должен при этом стремиться к определенному вектор-пределу, который мы назвали

(§ 13) производной вектора  $\mathbf{r}(t)$ . Итак,

$$\frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0} \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} \mathbf{r}'(t_0), \quad (144)$$

где  $\mathbf{r}'(t_0) \neq 0$  по предположениям, сделанным в конце § 15.

Когда  $t$  стремится к  $t_0$ , а точка  $M$  стремится по кривой в точку  $M_0$ , секущая  $M_0M$ , вращаясь в пространстве около точки  $M_0$ , остается в каждый момент направленной по вектору (143); и поскольку последний стремится к предельному вектору  $\mathbf{r}'(t_0)$ , то секущая также стремится к предельному положению, а именно к прямой  $M_0Q$ , направленной по вектору  $\mathbf{r}'(t_0)$ .

Предельное положение  $M_0Q$  для секущей мы будем, как обычно, называть *касательной* к кривой в точке  $M_0$ .

Итак, производная  $\mathbf{r}'(t)$  от вектор-функции  $\mathbf{r}(t)$  направлена по касательной в точке  $t_0$  к кривой, которую  $\mathbf{r}(t)$  в нашем геометрическом истолковании определяет.

Таким образом, направление производной  $\mathbf{r}'(t)$  получило вполне ясное геометрическое истолкование. Модуль же  $\mathbf{r}'(t)$  такого истолкования не получил, и это не случайно. Вопрос этот связан со следующим важным обстоятельством, которое в усложненном виде встречается потом и в теории поверхностей и в теории многомерных пространств. А именно, нужно выяснить, какую роль играет параметр  $t$  для кривой, заданной посредством (138). Мы знаем, что значениям  $t$  в промежутке  $T_0 < t < T$  однозначно (и, если устраниТЬ из рассмотрения точки самопересечения, взаимно однозначно) отвечают точки кривой. Таким образом, параметр  $t$  в указанных пределах играет роль *координатной системы на кривой*; он нужен для того, чтобы своими значениями взаимно однозначно отмечать точки кривой. Но так как геометрически он ничем не был связан с кривой, то вполне возможно, сохранив ту же кривую, ввести на ней другую *параметризацию*. Для этого достаточно ввести новое переменное  $\tau$ , связанное с  $t$  функциональной зависимостью

$$t = t(\tau), \quad \tau_0 < \tau < \tau_1. \quad (145)$$

Мы будем предполагать при этом, что производная  $t'(\tau)$  все время положительна, так что  $t(\tau)$  — функция, монотонно возрастающая, и что когда  $\tau$  пробегает свою область изменения от  $\tau_0$  до  $\tau_1$ ,  $t$  растет от  $T_0$  до  $T$ . В этих предположениях функция  $t(\tau)$  допускает обращение, т. е. можно записать:

$$\tau = \tau(t), \quad T_0 < t < T, \quad (145')$$

и значения  $t$  от  $T_0$  до  $T$  находятся во взаимно однозначном соответствии со значениями  $\tau$  от  $\tau_0$  до  $\tau_1$ . Отсюда ясно, что те и другие одинаково годятся, чтобы отмечать точки исследуемой кривой,

и выбор параметризации на кривой зависит от нашего произвола. Запишем параметрическое представление кривой в новой параметризации; для этого достаточно в (138) вставить выражение  $t$  через  $\tau$ . Получим

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}\{\tau\}. \quad (146)$$

Очевидно, вид функциональной зависимости  $\mathbf{r}$  от  $\tau$  уже не тот, что от  $t$ , тем не менее кривая осталась прежней, так как при  $\tau$ , пробегающем значения от  $\tau_0$  до  $\tau_1$ ,  $t$  по прежнему пробегает значения от  $T_0$  до  $T$  и радиус-вектор  $OM = \mathbf{r}(t)$  описывает своим концом  $M$  прежнюю кривую.

Итак, на неизменной кривой, заданной вектор-функцией (138), можно произвольно менять параметризацию, отчего меняется вид функциональной зависимости (138).

В том обстоятельстве, что параметризация кривой строится по произволу и не имеет в общем случае геометрического смысла, лежит причина того, что модуль производной вектор-функции  $\mathbf{r}(t)$  по параметру не находит геометрического истолкования. Действительно, дифференцируя (146) по новому параметру  $\tau$  как функцию от функции, получим  $\mathbf{r}'(t)t'(\tau)$ . Мы видим, что производная радиус-вектора той же самой кривой, но по новому параметру, отличается от производной по старому параметру  $\mathbf{r}'(t)$  скалярным множителем  $t'(\tau) > 0$ . Это означает, что направление производной осталось прежним — и оно действительно не зависит от выбора параметра, так как всегда идет по касательной, — а модуль производной изменился и, следовательно, он зависит от произвола в выборе параметра и по отношению к самой кривой является величиной случайной.

Мы ограничились для простоты заменой параметра (145) при условии  $t'(\tau) > 0$ . Можно взять, конечно, и случай  $t'(\tau) < 0$ , т. е. когда переменные  $t$  и  $\tau$  изменяются в обратных направлениях. Тогда производная  $\mathbf{r}'$  при переходе к новому параметру меняет свое направление на обратное.

Всему сказанному можно дать наглядное истолкование, понимая под параметром  $t$  время. Прежде всего вектор (143) получает смысл вектора средней скорости за время от  $t_0$  до  $t$ , а его предельное значение  $\mathbf{r}'(t_0)$  — вектора мгновенной скорости в момент  $t_0$ . Далее, переход к новому параметру  $\tau$  будет означать, что точка  $M$  пробегает *прежнюю* траекторию, но иным образом с течением времени, например, раньше ее движение было ускоренным, а теперь будет замедленным, и т. п. Параметр  $\tau$  будет снова означать время, но при другом законе движения по прежней траектории.

Если закон движения по данной траектории изменился, то точка  $M$  будет проходить через прежние положения с другими скоростями, т. е. вектор скорости  $\mathbf{r}'(t)$  будет иметь другую величину (хотя и будет направлен по прежнему по касательной).

### § 17. Дифференциал вектор-функции.

Чтобы закончить геометрическое истолкование дифференцирования, рассмотрим еще *понятие о дифференциале вектор-функции*.

Вернемся к соотношению (144), где записана дифференцируемость вектор-функции  $\mathbf{r}(t)$ . По самому определению предела соотношение (144) утверждает, что вектор

$$\alpha = \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0} - \mathbf{r}'(t_0) \quad (147)$$

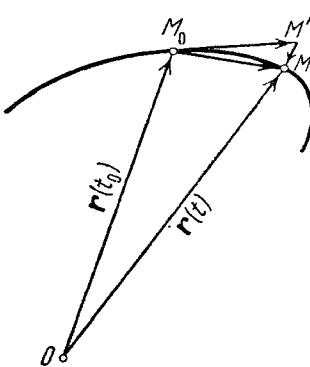
стремится к нулю при  $t$ , стремящемся к  $t_0$ :

$$\underset{t \rightarrow t_0}{\alpha \rightarrow 0}.$$

Перепишем (147), умножив обе его части на  $t - t_0$ . Получим

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}'(t_0)(t - t_0) + \alpha(t - t_0). \quad (147')$$

Формула (147') имеет интересный геометрический смысл (черт. 36). Прежде всего левая часть совпадает с вектором смещения  $\overline{M_0 M}$ ,



Черт. 36.

здесь вектор, модуль которого — бесконечно малое высшего порядка по сравнению с приращением аргумента  $t - t_0$ . Что же касается первого слагаемого, то так как  $\mathbf{r}'(t_0)$  остается постоянным, то  $\mathbf{r}'(t_0)(t - t_0)$  меняется пропорционально приращению аргумента  $t - t_0$ , сохранив постоянное направление по касательной.

Таким образом, вектор  $\overline{M_0 M}$ , выражający смещение из точки  $M_0$  в бесконечно близкую точку  $M$  по кривой, распадается на смещение  $\overline{M_0 M'}$  по касательной, пропорциональное приращению аргумента  $t - t_0$ , и на вектор с модулем, бесконечно малым высшего порядка сравнительно с  $t - t_0$ .

Смещение  $\overline{M_0 M'}$  мы будем называть главной линейной частью смещения  $\overline{M_0 M}$  [т. е. главной линейной частью приращения вектор-функции  $\mathbf{r}(t)$ ] или *дифференциалом* вектор-функции  $\mathbf{r}(t)$  в точке  $t = t_0$ :

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t_0) dt, \quad \text{где } dt = t - t_0. \quad (148)$$

Отсюда

$$\mathbf{r}'(t_0) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (148')$$

Как и обычно, дифференциал аргумента здесь совпадает с его приращением. Мы видим, что, введя понятие дифференциала вектор-функции, можно рассматривать ее производную как отношение дифференциалов.

Особенно наглядной становится формула (147'), если придать  $t$  физический смысл времени. Тогда (147') показывает, что если пренебречь бесконечно малыми высшего порядка, то в бесконечно малом промежутке времени вблизи момента  $t = t_0$  смещение точки  $\overline{M_0 M}$  можно заменить через  $\mathbf{r}'(t_0)(t - t_0)$ , т. е. считать движение прямолинейным (направленным по касательной) и равномерным (пропорциональным протекшему времени  $t - t_0$ ). Скорость этого равномерного и прямолинейного движения по величине и направлению задается, очевидно, вектором  $\mathbf{r}'(t_0)$ , т. е. совпадает с мгновенной скоростью криволинейного и неравномерного движения  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ .

### § 18. Две леммы.

Докажем теперь некоторые леммы, весьма существенные для дальнейшего.

**Лемма 1.** Если вектор-функция  $\mathbf{m}$  от скалярного аргумента  $t$  сохраняет постоянный модуль, то при каждом значении  $t$  ее производная ей перпендикулярна.

Так как квадрат модуля вектора равен скалярному квадрату самого вектора, то мы можем записать

$$|\mathbf{m}(t)|^2 = \mathbf{m}(t)^2 = \text{const.}$$

Дифференцируя по  $t$ , получим

$$2\mathbf{m}(t)\mathbf{m}'(t) = 0,$$

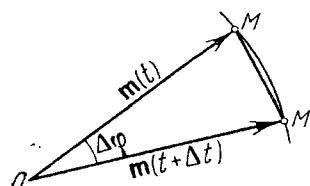
откуда и следует, что  $\mathbf{m}'(t)$  перпендикулярно к  $\mathbf{m}(t)$ .

Очень полезно наглядно представить себе геометрический смысл этой леммы. Если откладывать  $\mathbf{m}(t)$  из неизменной точки  $O$ , то вектор  $\mathbf{m}(t)$  будет меняться лишь по направлению, но не по длине, и конец его описывает кривую, лежащую на сфере с центром  $O$ . Как известно из предыдущего, производная  $\mathbf{m}'(t)$  будет при каждом значении  $t$  направлена по касательной к этой кри-

вой, следовательно, по касательной к сфере, и, значит, она будет перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания, т. е. к вектору  $\mathbf{m}(t)$ .

В частности, лемма имеет место для единичных векторов; это для нас и будет особенно важно в дальнейшем.

Введем понятие о скорости вращения вектор-функции  $\mathbf{m}(t)$  по отношению к ее аргументу  $t$ . Для этой скорости, которая будет иметь, вообще говоря, различные значения при разных значениях  $t$ , мы даем следующее определение. Дадим  $t$  приращение  $\Delta t$  и возьмем угол  $\Delta\varphi$ , образуемый векторами  $\mathbf{m}(t)$  и  $\mathbf{m}(t + \Delta t)$  (перенеся их для наглядности в общую точку приложения  $O$ )<sup>1)</sup>. Составим отношение  $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ , показывающее, какой угол поворота вектора  $\mathbf{m}$  приходится в среднем на единицу изменения аргумента  $t$  на участке  $t, t + \Delta t$ . Заставим теперь  $\Delta t$  стремиться к нулю. Тогда предел взятого по модулю отношения  $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$  называется скоростью вращения вектор-функции  $\mathbf{m}(t)$  по отношению к ее аргументу  $t$ .



Черт. 37.

Лемма 2. Скорость вращения единичной вектор-функции  $\mathbf{m}(t)$  равна модулю ее производной  $|\mathbf{m}'(t)|$ .

Опишем из точки  $O$  как из центра окружность единичного радиуса, проходящую через концы векторов  $\mathbf{m}(t)$  и  $\mathbf{m}(t + \Delta t)$ , т. е. точки  $M$  и  $M'$  (черт. 37). Очевидно, что угол между векторами численно равен длине дуги  $\widetilde{MM'}$ . Мы можем записать

$$\left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right| = \frac{\widetilde{MM'}}{|\Delta t|} = \frac{MM'}{|\Delta t|} \cdot \frac{\widetilde{MM'}}{MM'}.$$

Здесь  $MM'$  означает длину хорды  $MM'$ . Но очевидно, что

$$\mathbf{m}(t + \Delta t) - \mathbf{m}(t) = \overline{MM'},$$

так что длина хорды  $MM'$  равна модулю приращения вектора  $\mathbf{m}(t)$ :

$$MM' = |\overline{MM'}| = |\mathbf{m}(t + \Delta t) - \mathbf{m}(t)|.$$

Перепишем теперь выражение  $\left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right|$  в виде

$$\left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right| = \left| \frac{\mathbf{m}(t + \Delta t) - \mathbf{m}(t)}{\Delta t} \right| \cdot \frac{\widetilde{MM'}}{MM'}.$$

<sup>1)</sup> Угол  $\Delta\varphi$  не является приращением какой-то функции  $\varphi$ , как можно было бы подумать, судя по обозначению.

Заставим теперь  $\Delta t$  стремиться к нулю. Вектор, стоящий в вертикальных черточках, стремится, очевидно, к производной  $\mathbf{m}'(t)$ , а его модуль — к модулю  $|\mathbf{m}'(t)|$ . Отношение же дуги окружности  $\widetilde{MM'}$  к стягивающей ее хорде  $MM'$  стремится к единице, когда дуга стремится к нулю. Итак, мы получаем

$$\left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right| \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} |\mathbf{m}'(t)|, \text{ т. е. } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right| = |\mathbf{m}'(t)|.$$

Лемма 2 доказана.

Полученное равенство можно переписать также в виде

$$\left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right| = |\mathbf{m}'(t)| + \alpha,$$

где  $\alpha \rightarrow 0$  вместе с  $\Delta t$ . Умножая почленно на  $|\Delta t|$ , получим

$$|\Delta\varphi| = |\mathbf{m}'(t)| \Delta t + \alpha |\Delta t|.$$

Будем писать  $\Delta\varphi$  вместо  $|\Delta\varphi|$ , подразумевая, что  $\Delta\varphi$  берется всегда положительным. Тогда последнее равенство примет вид

$$\Delta\varphi = |d\mathbf{m}| + \dots, \quad (149)$$

так как  $\mathbf{m}'(t) \Delta t = \mathbf{m}'(t) dt = d\mathbf{m}$ . Многоточие в формуле (149) обозначает бесконечно малые высшего порядка.

Итак, главная линейная часть бесконечно малого угла поворота  $\Delta\varphi$  единичной вектор-функции  $\mathbf{m}(t)$  равна модулю дифференциала  $d\mathbf{m}$  этой функции.

### § 19. Ряд Тейлора для вектор-функции.

В дальнейших выкладках у нас будет играть большую роль разложение вектор-функции в ряд Тейлора. Вывод этого разложения не представляет собой чего-нибудь принципиально нового и просто использует соответствующее разложение для скалярных функций.

Вектор-функцию  $\mathbf{r}(t)$  всегда можно представить в виде

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad T_0 \leq t \leq T, \quad (150)$$

разложив ее по единичным взаимно ортогональным векторам  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ .

Разложим теперь в ряд Тейлора по степеням разности  $t - t_0$ , каждую из функций  $x(t), y(t), z(t)$ . Здесь  $t_0$  — произвольное фиксированное значение  $t$ . Во всех трех случаях разложение остановим на члене  $n$ -й степени, поместив далее остаточный член.

## Получим

$$x(t) = x(t_0) + x'(t_0) \frac{t - t_0}{1} + \\ + x''(t_0) \frac{(t - t_0)^2}{1 \cdot 2} + \dots + x^{(n)}(t_0) \frac{(t - t_0)^n}{n!} + x^{(n+1)}(t_1) \frac{(t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$y(t) = y(t_0) + y'(t_0) \frac{t - t_0}{1} + \\ + y''(t_0) \frac{(t - t_0)^2}{1 \cdot 2} + \dots + y^{(n)}(t_0) \frac{(t - t_0)^n}{n!} + y^{(n+1)}(t_2) \frac{(t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$z(t) = z(t_0) + z'(t_0) \frac{t - t_0}{1} + \\ + z''(t_0) \frac{(t - t_0)^2}{1 \cdot 2} + \dots + z^{(n)}(t_0) \frac{(t - t_0)^n}{n!} + z^{(n+1)}(t_3) \frac{(t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

В остаточных членах этих разложений под знаком  $n+1$ -й производной фигурируют некоторые промежуточные между  $t_0$  и  $t$  значения  $t_1, t_2, t_3$ , конечно, вообще говоря, различные между собой.

Умножим на вектор  $i$  обе части первого равенства, на  $j$  — обе части второго, на  $k$  — третьего. Складывая все три равенства и объединяя члены с одинаковыми степенями  $t = t_0$ , получим

Мы получили тем самым разложение в ряд Тейлора вектор-функции  $\mathbf{r}(t)$ . Действительно, в левой части стоит сама  $\mathbf{r}(t)$ , как видно из (150); в правой части в первой скобке стоит ее значение при  $t = t_0$ ,  $\mathbf{r}(t_0)$ , во второй скобке — значение ее производной при  $t = t_0$ ,  $\mathbf{r}'(t_0)$ , в третьей скобке — то же самое для второй производной  $\mathbf{r}''(t_0)$  и т. д.; в предпоследней скобке стоит  $\mathbf{r}^{(n)}(t_0)$ . В этом мы немедленно убеждаемся, дифференцируя равенство (150) один, два, три, ...,  $n$  раз по  $t$  почленно по известным нам из § 13 правилам и вставляя в результат значение  $t = t_0$ . Что же касается последней скобки, то здесь стоит вектор, который мы для краткости обозначим через  $\mathbf{Q}_r$ :

$$\mathbf{Q}_n = x^{(n+1)}(t_1) \mathbf{i} + y^{(n+1)}(t_2) \mathbf{j} + z^{(n+1)}(t_3) \mathbf{k}. \quad (154)$$

Так как, рассматривая  $x^{(n+1)}(t)$ ,  $y^{(n+1)}(t)$ ,  $z^{(n+1)}(t)$ , мы тем самым, по принятому нами соглашению, presupposeons непрерыв-

ность этих функций в промежутке  $T_0 \leq t \leq T$ , то в этом же промежутке они будут и ограничены при всех значениях  $t$ , оставаясь по абсолютной величине меньше некоторого постоянного. В частности, и коэффициенты в (151), т. е. координаты вектора  $\mathbf{Q}_n$ , будут ограничены при любых значениях  $t_1, t_2, t_3$ , а потому и модуль этого вектора остается во всех случаях ограниченным:

$$|\mathbf{Q}_n| < C_n, \quad (151')$$

где  $C_n$  — положительное постоянное, одно и то же при любых значениях  $t$  и  $t_0$  в промежутке  $T_0, T$ . Представить  $Q_n$  в виде значения  $\Gamma^{(n+1)}(t)$  при некотором промежуточном значении  $t$ , вообще говоря, нельзя. Но это не представляет какой-либо потери, так как существенной является лишь оценка (151').

Перепишиш теперь (150'), заменяя в нем скобки их указанными выше значениями. Получим

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{r}'(t_0) \frac{t - t_0}{1} + \\ + \mathbf{r}''(t_0) \frac{(t - t_0)^2}{1 \cdot 2} + \dots + \mathbf{r}^{(n)}(t_0) \frac{(t - t_0)^n}{n!} + \mathbf{Q}_n \frac{(t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (152)$$

Это и есть разложение в ряд Тейлора вектор-функции скалярного аргумента, вполне подобное обычному, если не считать более сложного вида векторного коэффициента  $Q_n$  в остаточном члене.

Возьмем, в частности, это разложение при  $n=1$ :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{r}'(t_0)(t - t_0) + \mathbf{Q}_1 \frac{(t - t_0)}{2}$$

или

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}'(t_0)(t - t_0) + \mathbf{Q}_1 \frac{(t - t_0)^2}{2}. \quad (152')$$

Мы видим, что (152') представляет уточнение формулы (147'); роль  $\alpha$  играет здесь  $\frac{1}{2} \mathbf{Q}_1(t - t_0)$ , где  $\mathbf{Q}_1$  ограничено по модулю.

Для вычисления длины дуги кривой, которым мы займемся в § 21, нам будет полезно оценить здесь разность длин хорды (черт. 36)

$$\overline{M_0 M} = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)$$

и соответствующего смещения по касательной (дифференциала)

$$\overline{M_0 M'} = \mathbf{r}'(t_0)(t - t_0) = d\mathbf{r}.$$

Сейчас мы берем значения  $t_0$  и  $t$  произвольно, не предполагая, что  $t$  обязательно стремится к  $t_0$ . Согласно (152') разность самих векторов имеет вид

$$\overline{M_0 M} - \overline{M_0 M'} = Q_1 \frac{(t - t_0)^2}{2} \quad \text{или} \quad \overline{M' M} = Q_1 \frac{(t - t_0)^2}{2}.$$

По элементарным свойствам треугольника  $M_0MM'$  взятая по модулю разность двух сторон всегда меньше или равна третьей стороне, т. е.

$$|M_0M - M_0M'| \leq MM'.$$

Здесь  $M_0M$ ,  $M_0M'$ ,  $MM'$  означают длины (модули) векторов  $\overrightarrow{M_0M}$ ,  $\overrightarrow{M_0M'}$ ,  $\overrightarrow{MM'}$ . Но так как

$$\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}_1(t - t_0)^2,$$

то, пользуясь ограниченностью  $\mathbf{Q}_1$  по модулю [см. (151')], получим

$$MM' = \frac{1}{2} |\mathbf{Q}_1| (t - t_0)^2 \leq \frac{1}{2} C_1 (t - t_0)^2$$

и, следовательно,

$$|M_0M - M_0M'| \leq \frac{1}{2} C_1 (t - t_0)^2, \quad (153)$$

где  $M_0M$  — любая хорда нашей кривой, соединяющая какую-то точку  $M_0(t_0)$  с какой-то точкой  $M(t)$ , а  $M_0M'$  — соответствующий отрезок, отложенный по касательной в точке  $M_0$  [т. е. длина вектор-дифференциала  $\mathbf{r}'(t_0)(t - t_0)$ ]. Это и есть нужная нам оценка. Существенно здесь то, что  $C_1$  имеет одно и то же значение при *любых* значениях  $t_0$ ,  $t$  в промежутке  $T_0$ ,  $T$ , т. е. одно и то же значение при *любом* выборе точек  $M_0$ ,  $M$  на рассматриваемой кривой  $\mathbf{r}(t)$ ,  $T_0 \leq t \leq T$ .

## § 20. Строение параметрически заданной кривой в окрестности произвольной точки.

Пусть кривая задана в параметрическом представлении

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t).$$

Если в данной точке  $\mathbf{r}'(t) \neq 0$ , то точка — обыкновенная, и кривая вблизи нее имеет вид простого отрезка. Вопрос же о том, какое строение имеет кривая в окрестности любой своей точки, остается до сих пор открытым. Мы займемся им в этом параграфе. Для наглядности будем сначала считать кривую плоской.

Сместимся из данной точки  $M_0(t_0)$  в бесконечно близкую точку  $M(t)$  (см. черт. 35). Вектор смещения  $\overrightarrow{M_0M}$  выражается как разность  $\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)$ . Вставляя вместо  $\mathbf{r}(t)$  его разложение (152), получим

$$\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r}'(t_0) \frac{t - t_0}{1} + \mathbf{r}''(t_0) \frac{(t - t_0)^2}{1 \cdot 2} + \dots$$

Здесь мы попрежнему имеем в виду разложение в *конечный* ряд Тейлора, хотя для краткости не высываем последних чле-

нов. В дальнейшем  $\mathbf{r}'(t_0)$ ,  $\mathbf{r}''(t_0)$ , ... будем обозначать для краткости через  $\mathbf{r}'_0$ ,  $\mathbf{r}''_0$ , ...

Так как точка  $M_0(t_0)$  взята на кривой произвольно, то может случиться, что  $\mathbf{r}'_0$  и даже еще некоторые производные радиус-вектора в этой точке обратятся в нуль.

Рассматривая общий случай, найдем первую по порядку производную радиус-вектора, отличную от нуля в точке  $M_0(t_0)$ . Пусть порядок этой производной будет  $p$ . Итак,

$$\mathbf{r}'_0^{(p)} \neq 0, \quad \mathbf{r}'_0 = \mathbf{r}''_0 = \dots = \mathbf{r}_0^{(p-1)} = 0.$$

Разложение  $\overrightarrow{M_0M}$  будет фактически начинаться с членов  $p$ -й степени и примет вид

$$\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r}_0^{(p)} \frac{(t - t_0)^p}{p!} + \mathbf{r}_0^{(p+1)} \frac{(t - t_0)^{p+1}}{(p+1)!} + \dots$$

**Теорема.** Кривая в точке  $M_0(t_0)$  имеет касательную, направленную по вектору  $\mathbf{r}_0^{(p)}$ .

**Доказательство.** Разделим вектор  $\overrightarrow{M_0M}$  на  $(t - t_0)^p$ ; из предыдущего разложения получим

$$\frac{\overrightarrow{M_0M}}{(t - t_0)^p} = \mathbf{r}_0^{(p)} \frac{1}{p!} + \mathbf{r}_0^{(p+1)} \frac{t - t_0}{(p+1)!} + \mathbf{r}_0^{(p+2)} \frac{(t - t_0)^2}{(p+2)!} + \dots$$

Вектор  $\overrightarrow{M_0M}$  (черт. 35) направлен по секущей  $M_0M$ ; следовательно, вектор  $\frac{\overrightarrow{M_0M}}{(t - t_0)^p}$ , полученный из  $\overrightarrow{M_0M}$  делением на число, также направлен по секущей.

Когда  $t \rightarrow t_0$ , а значит,  $t - t_0 \rightarrow 0$ , все члены правой части стремятся к нулю, кроме первого члена, который остается постоянным. Это означает, что

$$\frac{\overrightarrow{M_0M}}{(t - t_0)^p} \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} \frac{\mathbf{r}_0^{(p)}}{p!},$$

т. е. вектор  $\frac{\overrightarrow{M_0M}}{(t - t_0)^p}$  стремится к предельному значению, направленному по  $\mathbf{r}^{(p)}(t_0)$ .

Секущая  $M_0M$  направлена по вектору  $\overrightarrow{M_0M}$ , а значит, и по коллинеарному с ним вектору  $\frac{\overrightarrow{M_0M}}{(t - t_0)^p}$ , и должна стремиться вместе с последним к предельному положению, направленному по вектору  $\mathbf{r}_0^{(p)}$ . А так как предельное положение секущей по определению называется касательной, то теорема доказана.

Таким образом, мы одновременно установили и факт существования касательной и способ ее отыскания.

Отметим частный случай  $p=1$ . В этом случае точка — *заведомо* обыкновенная, а наша теорема дает ранее известный результат, а именно, что касательная существует и направлена по  $\mathbf{r}'_0$ .

Переходим к исследованию строения кривой вблизи произвольной ее точки  $M_0(t_0)$ . Мы уже отметили первую по порядку производную радиус-вектора, отличную от нуля, именно,  $r_0^{(p)}$ . Отметим теперь первую по порядку производную  $r_0^{(q)}$ , неколлинеарную с  $r_0^{(p)}$ . Разумеется,  $q > p$ , и большей частью можно ожидать, что  $q = p + 1$ , хотя это и не обязательно. Во всяком случае пусть в разложении  $\overline{M_0 M}$  в ряд Тейлора первый член, неколлинеарный с  $r_0^{(p)}$ , имеет вид  $r_0^{(q)} \frac{(t - t_0)^q}{q!}$ .

Выпишем его явно:

$$\begin{aligned}\overline{M_0 M} = r_0^{(p)} \frac{(t - t_0)^p}{p!} + \\ + \dots + r_0^{(q)} \frac{(t - t_0)^q}{q!} + \dots\end{aligned}$$

Черт. 38.

С другой стороны, вектор смещения  $\overline{M_0 M}$  всегда можно разложить по неколлинеарным векторам  $r_0^{(p)}$ ,  $r_0^{(q)}$  (черт. 38), с некоторыми коэффициентами  $a$  и  $b$ :

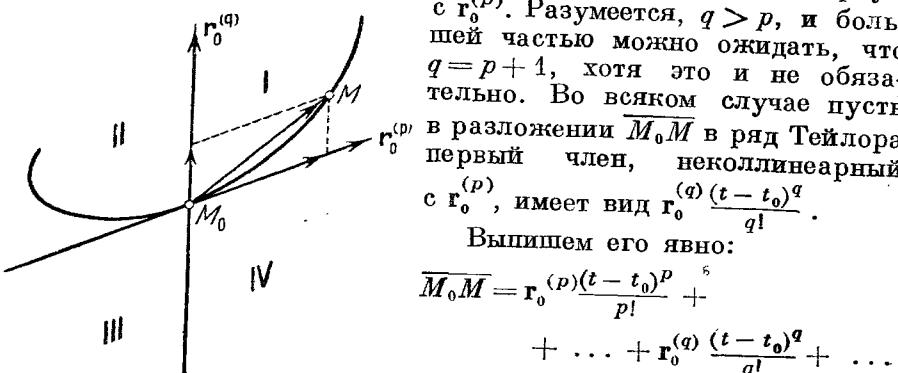
$$\overline{M_0 M} = ar_0^{(p)} + br_0^{(q)}.$$

При этом главная часть коэффициента  $a$  при  $t \rightarrow t_0$  будет, очевидно,  $\frac{(t - t_0)^p}{p!}$  (последующие члены ряда Тейлора высшего порядка малости), а главная часть коэффициента  $b$  будет  $\frac{(t - t_0)^q}{q!}$  (предыдущие члены ряда Тейлора коллинеарны с  $r_0^{(p)}$  и их составляющие по  $r_0^{(q)}$  равны нулю, а последующие члены — высшего порядка малости).

Знаки коэффициентов  $a$  и  $b$  будут совпадать со знаками их главных частей, т. е. при  $t - t_0 > 0$  оба будут положительными, а при  $t - t_0 < 0$  знак  $a$  будет положительным или отрицательным в зависимости от четности или нечетности показателя  $p$ , а знак  $b$  — в зависимости от четности или нечетности показателя  $q$ .

В результате возможны следующие 4 случая:

	Знак $a$ при $t - t_0 < 0$	Знак $b$ при $t - t_0 < 0$
1 <sup>o</sup> . $p$ неч., $q$ четн.	—	+
2 <sup>o</sup> . $p$ неч., $q$ неч.	—	—
3 <sup>o</sup> . $p$ четн., $q$ неч.	+	—
4 <sup>o</sup> . $p$ четн., $q$ четн.	+	+



## § 20] СТРОЕНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ЗАДАННОЙ КРИВОЙ

Каждому из этих случаев отвечает определенное строение кривой в окрестности точки  $M_0(t_0)$ .

Проведем через  $M_0$  две прямые в направлении векторов  $r_0^{(p)}$ ,  $r_0^{(q)}$ ; они разобьют плоскость на 4 части, которые мы называем, как I, II, III, IV «четверти» (черт. 38). Когда  $t \rightarrow t_0$ , причем  $t - t_0 > 0$ , то  $a$  и  $b$  оба положительны, и из разложения

$$\overline{M_0 M} = ar_0^{(p)} + br_0^{(q)}$$

видно, что точка  $M$  движется в I четверти. Таким образом, при  $t > t_0$  кривая подходит к  $M_0$  всегда из I четверти.

Когда же  $t \rightarrow t_0$ , причем  $t - t_0 < 0$ , то здесь, как видно из этого же разложения, нужно различать 4 возможных случая в зависимости от знаков  $a$ ,  $b$ :

- 1<sup>o</sup>. ( $a = -$ ,  $b = +$ ),  $M$  во II четверти;
- 2<sup>o</sup>. ( $a = -$ ,  $b = -$ ),  $M$  в III четверти;
- 3<sup>o</sup>. ( $a = +$ ,  $b = -$ ),  $M$  в IV четверти;
- 4<sup>o</sup>. ( $a = +$ ,  $b = +$ ),  $M$  в I четверти.

Итак, при  $t < t_0$  кривая подходит к  $M_0$  из II, III, IV или I четверти в зависимости от того, какой из случаев 1<sup>o</sup>, 2<sup>o</sup>, 3<sup>o</sup>, 4<sup>o</sup> имеет место в точке  $M_0$ .

При этом во всех случаях кривая, подходящая к  $M_0$ , имеет касательную в направлении вектора  $r_0^{(p)}$  (согласно вышесказанной теореме). Поэтому:

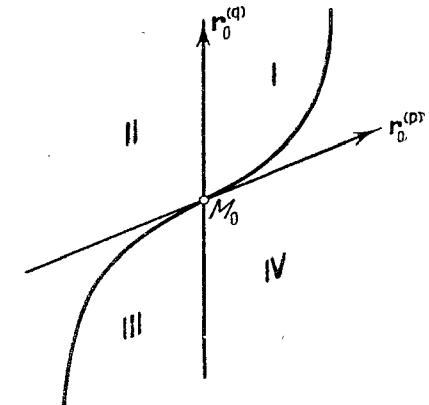
в случае 1<sup>o</sup>, когда кривая подходит из I и II четверти, она имеет строение чертежа 38,  $M_0$  — точка основного типа;

в случае 2<sup>o</sup>, когда кривая подходит из I и III четверти, она имеет строение чертежа 39;  $M_0$  — точка перегиба;

в случае 3<sup>o</sup>, когда кривая подходит из I и IV четверти, она имеет строение чертежа 40;  $M_0$  — точка возврата 1-го рода;

в случае 4<sup>o</sup>, когда кривая подходит из I и I четверти, она имеет строение чертежа 41;  $M_0$  — точка возврата 2-го рода.

В случаях 1<sup>o</sup>, 2<sup>o</sup> мы имеем, таким образом, обычные точки <sup>1)</sup>, в случаях 3<sup>o</sup>, 4<sup>o</sup> — особые.

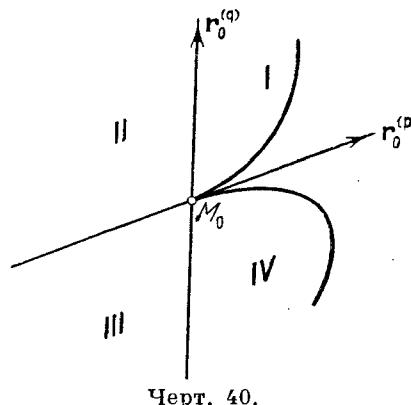


Черт. 39.

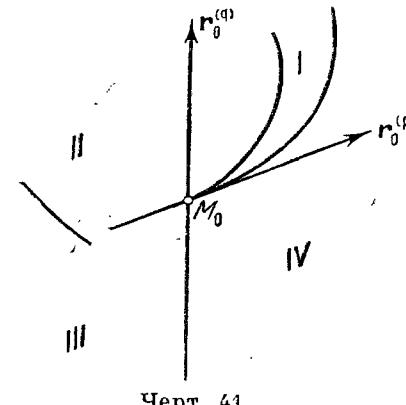
<sup>1)</sup> Однако при этом, переходя к уравнению  $y = f(x)$ , мы можем гарантировать во всех случаях существование лишь первой производной  $f'(x)$ .

Из этих результатов вытекает способ практического исследования данной точки  $M_0(t_0)$ .

А именно, нужно вычислить в данной точке последовательные производные  $r'_0$ ,  $r''_0$ , ... и отметить первую из них  $r_0^{(p)}$ , отличную от нуля, а затем первую после нее,  $r_0^{(q)}$ , с ней не коллинеарную. Числа  $p$ ,  $q$  и определяют характер точки. Расположение кривой вблизи данной точки связано с векторами  $r^{(p)}$ ,  $r^{(q)}$  так, как это указано на чертежах.



Черт. 40.



Черт. 41.

Полученные результаты верны и для пространственных кривых с той разницей, что кривая не будет лежать точно в плоскости векторов  $r^{(p)}$ ,  $r^{(q)}$ , а будет уклоняться от нее на величину, однако бесконечно малую высшего порядка сравнительно со смещениями в самой плоскости.

### § 24 Длина дуги как параметр.

Переходим к определению и вычислению длины дуги. Рассмотрим кривую

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad T_0 \leq t \leq T.$$

Вставим между крайними значениями  $T_0$  и  $T$  параметра  $t$  произвольно выбранные последовательные промежуточные значения

$$t_0, \quad t_1, \quad t_2, \dots, \quad t_n.$$

Мы считаем при этом, что  $t_0$  совпадает с  $T_0$ , а  $t_n$  с  $T$ . Кривая разобьется выбранными нами точками на  $n$  кусков (черт. 42). Возьмем какой-нибудь из них,  $M_i M_{i+1}$ , отвечающий переходу от  $t=t_i$  к  $t=t_{i+1}$ , построим хорду  $M_i M_{i+1}$  и соответствующий вектор-дифференциал

$$M_i M_i = \mathbf{r}'(t_i)(t_{i+1} - t_i),$$

направленный по касательной в точке  $M_i$ . Таким образом, построение черт. 36 повторено здесь для каждого перехода от  $t_i$  к  $t_{i+1}$ .

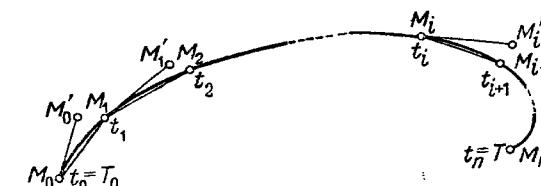
Составим сумму длин всех хорд  $M_i M_{i+1}$ , т. е. длину ломаной  $M_0 M_1 M_2 \dots M_n$ , вписанной в нашу кривую:

$$\sum_{i=0}^{n-1} M_i M_{i+1}. \quad (154)$$

С другой стороны, составим сумму длин всех соответствующих отрезков по касательным

$$\sum_{i=0}^{n-1} M_i M'_i = \sum_{i=0}^{n-1} |\mathbf{r}'(t_i)| (t_{i+1} - t_i). \quad (155)$$

Мы утверждаем, что разность между суммами (154) и (155) стремится к нулю, когда разбиение кривой бесконечно измель-



Черт. 42.

чается, т. е. когда берется такая последовательность разбиений, что  $\Delta$ , наибольшая из разностей  $t_{i+1} - t_i$  в данном разбиении, стремится к нулю:

$$\Delta \rightarrow 0, \quad \text{где } \Delta \geq t_{i+1} - t_i.$$

Действительно, составим эту разность:

$$\sum_{i=0}^{n-1} M_i M_{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} M_i M'_i = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i M_{i+1} - M_i M'_i).$$

Так как модуль суммы не превосходит суммы модулей слагаемых, то

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} M_i M_{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} M_i M'_i \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |M_i M_{i+1} - M_i M'_i|.$$

Пользуясь оценкой (153), усилим неравенство, увеличив правую часть:

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} M_i M_{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} M_i M'_i \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} C_1 (t_{i+1} - t_i)^2.$$

(Как мы знаем,  $C_1$  имеет одно и то же значение для всех хорд нашей кривой, в частности для всех хорд  $M_i M_{i+1}$ .)

Снова усилим неравенство, заменив в каждом слагаемом правой части один из множителей  $(t_{i+1} - t_i)$  наибольшим из значений этой разности  $\Delta$ . Получим

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^{n-1} M_i M_{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} M_i M'_i \right| &\leq \frac{1}{2} C_1 \Delta \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = \\ &= \frac{1}{2} C_1 \Delta (t_n - t_0) = \frac{1}{2} C_1 \Delta (T - T_0). \end{aligned}$$

Так как бесконечное измельчение разбиения означает стремление  $\Delta$  к нулю, остальные же множители — постоянные, то правая, а следовательно, и левая часть неравенства стремятся к нулю.

Наше утверждение доказано. Что же касается суммы (155), то ее можно рассматривать как интегральную сумму для скалярной положительной функции от  $t$ :

$$f(t) = |\mathbf{r}'(t)|,$$

построенную на промежутке изменения аргумента  $t$  от  $T_0 = t_0$  до  $T = t_n$ . Поэтому при бесконечном измельчении разбиения сумма (155) стремится как к пределу к интегралу

$$\int_{T_0}^T |\mathbf{r}'(t)| dt. \quad (156)$$

Следовательно, и сумма (154), отличаясь от суммы (155) на бесконечно малую, стремится к тому же самому пределу.

Итак, длина ломаной (154), вписанной в нашу кривую, стремится при бесконечном измельчении разбиения к пределу (156); этот предел называется длиной нашей кривой.

При доказательстве мы использовали существование непрерывной второй производной  $\mathbf{r}''(t)$ . Можно было бы ограничиться более слабыми предположениями, на чем мы не останавливаемся, так как раз навсегда предположили существование производных до любого нужного нам порядка.

Ранее уже говорилось о том, что выбор параметра  $t$  на данной кривой является в сущности произвольным. Это вносит некоторую

путаницу в изучение кривой в том смысле, что рассматриваемые величины отражают как геометрические свойства, присущие кривой самой по себе, так и произвол в выборе параметризации.

Можно устранить это усложнение, выбрав параметризацию, геометрически связанную с самой кривой, а именно выбрав за параметр длину дуги. Тогда при изучении кривой, заданной уравнением (138), сама параметризация и все связанные с ней величины геометрически вытекают из свойств самой кривой без какого-либо существенного произвола.

Пусть у нас дана кривая  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ , где  $t$  меняется в пределах от  $T_0$  до  $T$ . Фиксируем на кривой какую-нибудь точку  $M_0(t_0)$  в качестве начала отсчета (черт. 43).

Пусть теперь  $M(t)$  — любая точка на кривой; по формуле (156) длина участка кривой  $M_0 M$  от значения параметра  $t_0$  до значения  $t$  (обозначим ее через  $s$ ) выражается интегралом

$$s = \overline{M_0 M} = \int_{t_0}^t |\mathbf{r}'(t)| dt. \quad (157)$$

В выражении (156) верхний предел интеграла был больше нижнего, и длина кривой получалась как величина положительная. В формуле (157) мы будем брать значения  $t$  как большие  $t_0$ , так и меньшие  $t_0$ , в связи с чем длина дуги  $s$  будет получаться со знаком + в первом случае и — во втором случае. Итак,  $s$  выражена как функция верхнего предела  $t$ ,

$$s = s(t). \quad (158)$$

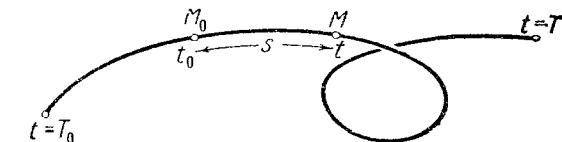
Дифференцируя выражение (157) по верхнему пределу  $t$  интеграла, получим

$$s'(t) = |\mathbf{r}'(t)|. \quad (158')$$

По предположению, сделанному в конце § 15,  $\mathbf{r}'(t) \neq 0$ , и следовательно,

$$|\mathbf{r}'(t)| > 0.$$

Производная  $s'(t)$  положительна все время, и  $s(t)$  — функция, монотонно возрастающая от значения  $s(T_0)$  (отрицательного) при  $t = T_0$  до значения  $s(T)$  (положительного) при  $t = T$  и проходящая через 0 при  $t = t_0$ . Такая функция допускает обращение,



Черт. 43.

т. е. уравнение (158) можно однозначно разрешить относительно  $t$ , выразив  $t$  функцией от  $s$ :

$$t = t(s), \quad s(T_0) \leq s \leq s(T).$$

Таким образом, не только каждой точке  $M(t)$  отвечает определенное значение  $s$ , но и каждому значению  $s$  в указанной области изменения однозначно отвечает точка  $M(t)$  на кривой. Мы можем принять  $s$  за новый параметр вдоль кривой, геометрически с ней вполне связанный. Несущественный произвол заключается лишь в выборе начала отсчета  $M_0$ , а также направления, в котором дуга возрастает.

Вставляя выражение  $t = t(s)$  в уравнение кривой, получим

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s)),$$

т. е. радиус-вектор выражен в функции параметра  $s$ . Теоретически мы обычно и будем считать, что уравнение кривой записано именно таким образом. Но практически переход к параметру  $s$  может быть в конкретных случаях нецелесообразным в силу технических трудностей в выкладках. Поэтому сохраняют свое значение многие вычислительные формулы, записанные для произвольной параметризации кривой.

В заключение укажем некоторые простые следствия. Умножив обе части (158') на  $dt$ , получим

$$s'(t) dt = |\mathbf{r}'(t)| dt.$$

Возьмем правую и левую части этого равенства по модулю; получим

$$|ds| = |\mathbf{dr}|. \quad (158'')$$

Таким образом, модуль дифференциала длины дуги равен модулю дифференциала радиус-вектора (все это при произвольной параметризации  $t$  вдоль кривой). Таким образом, геометрически дифференциал дуги  $|ds|$  изображается (см. черт. 36) длиной отрезка касательной  $M_0M'$ , так как этот отрезок, взятый как вектор, изображает  $d\mathbf{r}$ . Путь же  $M_0M$ , пройденный по кривой, дает не дифференциал, а соответствующее точное приращение функции  $s(t)$  при переходе от одной точки кривой к другой.

В частности, формула (158'') остается верной и при выборе дуги  $s$  в качестве параметра. Деля обе части на  $|ds|$ , получим

$$1 = \left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right|, \quad (158''')$$

т. е. производная радиус-вектора по параметру-дуге есть вектор единичный. Случайный характер модуля  $|\mathbf{r}'(t)|$ , о котором говорилось выше, теперь исчезает.

Наконец, представим полученные результаты в координатной форме, что имеет особенное значение при решении конкретных задач. Если кривая задана параметрически представлением (140), то можно выразить радиус-вектор в функции того же  $t$ :

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

Дифференцируя это равенство по  $t$ , получаем

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k},$$

а умножая на  $dt$ , находим

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}.$$

По известной формуле для модуля вектора (корень квадратный из суммы квадратов координат) получаем

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2},$$

$$|d\mathbf{r}| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Сравнивая последние равенства с (158') и (158''), мы видим, что

$$s'(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}, \quad |ds| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \quad (159)$$

Выражение (156) для длины кривой примет вид

$$\int_{T_0}^T \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt. \quad (159')$$

При фактическом вычислении длины дуги пользуются обычно формулой (159'). В частности, когда параметром служит абсцисса  $x$  ( $x_0 \leq x \leq x_1$ ), формула (159') принимает вид

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'(x)^2 + z'(x)^2} dx.$$

Рассмотрим, в частности, длину дуги в полярных координатах.

Рассмотрим в плоскости  $X, Y$  кривую, заданную в полярных координатах уравнением

$$r = r(\varphi).$$

Тогда, как мы знаем, можно перейти к параметрической записи уравнения, приняв  $\varphi$  за параметр [см. (34)]:

$$x = r(\varphi) \cos \varphi, \quad y = r(\varphi) \sin \varphi, \quad z = 0.$$

Последнее уравнение выражает, что кривая лежит в плоскости  $X, Y$ . Вычисляя производные по параметру:

$$\begin{aligned}x' &= r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi, \\y' &= r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi, \\z' &= 0,\end{aligned}$$

и беря сумму их квадратов, получим

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2$$

или после умножения на  $d\varphi^2$

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

Отсюда формулы (159) принимают вид

$$s'(\varphi) = \sqrt{r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2}, \quad ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}, \quad (160)$$

а длина дуги равна

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2} d\varphi.$$

#### Упражнение.

Вычислить длину дуги эпициклоиды, гипоциклоиды, циклоиды (см. упражнения на стр. 50) от начальной точки  $\varphi = 0$  до произвольной точки  $\varphi < 2\pi$ .

Отв.  $4a\lambda(1+\lambda)\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right)$ ,  $4a\lambda(1-\lambda)\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right)$ ,  $4a\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right)$ .

### § 22. Касание кривых.

При изучении кривых в бесконечно малом часто играет важную роль порядок близости между двумя кривыми, выходящими из одной точки. Так, допустим, что нужно составить себе представление о поведении кривой в бесконечно малом с определенной степенью точности. Тогда подбираем другую кривую, которая с этой степенью точности совпадает с первой. Если вторая кривая обладает хорошо известным строением (является, например, окружностью), то тем самым мы получаем представление и о ходе первой кривой (в бесконечно малой области).

Изучим взаимное расположение двух каких-нибудь кривых  $C_1$  и  $C_2$ , выходящих из общей точки  $M_0$ . На каждой из них примем за параметр длину дуги  $s$ , так что уравнения кривых будут

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(s), \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(s). \quad (161)$$

Примем для простоты точку  $M_0$  за начало отсчета дуги на обеих кривых, так что

$$\mathbf{r}_1(0) = \mathbf{r}_2(0) = \overline{OM}_0. \quad (161')$$

Во всем дальнейшем будем обозначать последовательные производные от какой-нибудь функции по параметру  $s$  через  $\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dots$

$\dots, \overset{(n)}{\mathbf{r}}, \dots$  в отличие от производных  $\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \dots, \overset{(n)}{\mathbf{r}}$ , той же самой функции, но по произвольному параметру  $t$  вдоль кривой<sup>1)</sup>.

В пределах этого параграфа нам понадобятся значения производных от  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  по  $s$  лишь в точке  $M_0$ ; мы будем их писать без указания аргумента, подразумевая, следовательно, аргумент  $s=0$ .

Изучим расхождение между кривыми  $C_1$  и  $C_2$ , которое обнаруживается, когда мы из общей точки  $M_0$  сместимся на одно и то же расстояние  $s$ , заданное с определенным знаком (вдоль каждой из кривых  $C_1$  и  $C_2$ ). Обозначим через  $M_1$  и  $M_2$  точки, куда мы таким образом приходим (черт. 44). Другими словами, мы берем на  $C_1$  и  $C_2$  соответственно точки  $M_1$  и  $M_2$ , отвечающие одному и тому же значению параметра  $s$ . Итак,

$$s = \overline{M_0 M_1} = \overline{M_0 M_2},$$

или, что то же,

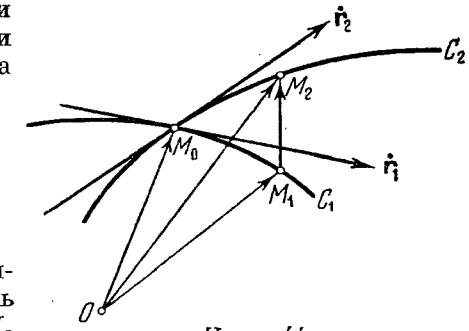
$$\overline{OM}_1 = \mathbf{r}_1(s), \quad \overline{OM}_2 = \mathbf{r}_2(s).$$

Расхождение между кривыми  $C_1$  и  $C_2$  естественно оценить в связи с расстоянием  $M_1 M_2$  между точками  $M_1$  и  $M_2$ . Чем выше будет порядок малости расстояния  $M_1 M_2$  относительно  $s$ , тем слабее расхождение кривых, тем теснее они сближены между собой.

Переходим теперь к выполнению этой оценки. Разложим  $\mathbf{r}_1(s)$  и  $\mathbf{r}_2(s)$  в ряд Тейлора по степеням  $s$ . Получим

$$\overline{OM}_1 = \mathbf{r}_1(s) = \mathbf{r}_1 + \dot{\mathbf{r}}_1 s + \ddot{\mathbf{r}}_1 \frac{s^2}{2} + \dots + \overset{(n)}{\mathbf{r}}_1 \frac{s^n}{n!} + \dots \quad (161'')$$

$$\overline{OM}_2 = \mathbf{r}_2(s) = \mathbf{r}_2 + \dot{\mathbf{r}}_2 s + \ddot{\mathbf{r}}_2 \frac{s^2}{2} + \dots + \overset{(n)}{\mathbf{r}}_2 \frac{s^n}{n!} + \dots$$



Черт. 44.

<sup>1)</sup> Производные по параметру  $s$ , имеющему в дифференциальной геометрии особое значение, мы обозначаем точками, подобно тому как в механике точками обозначаются производные по времени.

В некоторых руководствах по дифференциальной геометрии производные по параметру  $s$  обозначаются штрихами.

Здесь значения  $\dot{r}_1$  и  $\dot{r}_2$  и их производных взяты в точке  $M_0$ . Ряд Тейлора предполагается конечным, но остаточный член не выписан, так как для дальнейшего вполне достаточно знать, что этот член будет при  $s$ , стремящемся к нулю, бесконечно малым более высокого порядка, чем любой из не равных нулю предшествующих членов [см. (152)]; при  $t = t_0$ , стремящемся к нулю, это следует из ограниченности  $Q_n$  по модулю].

Вектор  $\overline{M_1 M_2}$  легко получить теперь как разность радиус-векторов:

$$\begin{aligned} \overline{M_1 M_2} &= \overline{OM_2} - \overline{OM_1} = (\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1) \frac{s}{1!} + \\ &+ (\ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1) \frac{s^2}{2!} + \dots + (\overset{(n)}{\mathbf{r}_2} - \overset{(n)}{\mathbf{r}_1}) \frac{s^n}{n!} + \dots \end{aligned} \quad (162)$$

При вычитании  $\dot{r}_1$  и  $\dot{r}_2$  взаимно уничтожаются в силу (161'). Задавим теперь  $s$  стремиться к нулю; тогда  $M_1$  и  $M_2$  будут точки  $C_1$  и  $C_2$ , отстоящие от  $M_0$  на одно и то же бесконечно малое расстояние  $s$  и стремящиеся, следовательно, в  $M_0$ , каждая по своей кривой. Чтобы оценить порядок малости  $\overline{M_1 M_2}$ , сравнительно с  $s$ , обратимся к разложению (162).

Теперь разберем различные возможные здесь случаи. Наиболее общим является тот, когда  $\dot{r}_1$  и  $\dot{r}_2$  неколлинеарны, другими словами, касательные к  $C_1$  и  $C_2$  в общей точке  $M_0$  не совпадают, образуя угол, отличный от нуля (черт. 44). Тогда разложение (162) начинается с члена

$$(\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1) s,$$

отличного от нуля и бесконечно малого одного порядка с  $s$ . Так как старший член определяет порядок малости и всего разложения, то  $\overline{M_1 M_2}$  будет бесконечно малым того же порядка, т. е. одного порядка с длинами дуг  $\overline{M_0 M_1} = \overline{M_0 M_2}$ . Это — случай *пересечения* кривых  $C_1$  и  $C_2$ . Он вполне тривиален, и мы больше на нем не останавливаемся.

Рассмотрим теперь другой возможный случай, когда  $\dot{r}_1$  и  $\dot{r}_2$  коллинеарны, другими словами, касательные к  $C_1$  и  $C_2$  в точке  $M_0$  совпадают. Мы говорим в этом случае, что  $C_1$  и  $C_2$  имеют *касание* в точке  $M_0$ . Так как, согласно (158''), векторы  $\dot{r}_1$  и  $\dot{r}_2$  — единичные, то они, будучи направлены по общей касательной, или совпадают между собой, или отличаются знаком:

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = -\dot{\mathbf{r}}_1. \quad (163)$$

Условимся этот последний случай исключить раз навсегда из рассмотрения. Если бы, действительно, такой случай представился, то мы изменили бы на одной кривой (например  $C_1$ ) направление отсчета на обратное, т. е. в качестве параметра ввели бы  $-s$  вместо  $s$ . Тогда, ввиду изменения знака у аргумента,  $\dot{r}_1$  меняет знак, и мы получаем

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{r}}_1. \quad (163')$$

Итак, направления отсчета на  $C_1$  и  $C_2$  всегда можно согласовать так, что будет иметь место (163'), а случай (163) устранился из рассмотрения. Это согласование мы будем предполагать в дальнейшем выполненным. Геометрический смысл его в том, что теперь при одинаковых значениях  $s$  мы будем смещаться по обеим кривым в одну и ту же сторону от точки  $M_0$ . А только при этом условии имеет смысл рассматривать расстояние  $\overline{M_1 M_2}$  и оценивать порядок его малости (при смещении в разные стороны этот порядок всегда 1-й независимо от степени близости кривых между собой).

Возвращаясь к разложению (162), видим, что в силу (163'), член первой степени пропал, и оно начинается с члена 2-го порядка малости относительно  $s$ :

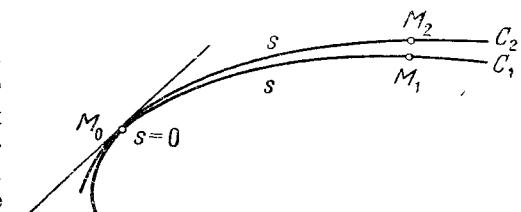
$$(\ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1) \frac{s^2}{2}.$$

А так как остальные члены разложения еще более высокого порядка, то в случае *касания* расстояние  $\overline{M_1 M_2}$  — бесконечно малое не ниже 2-го порядка относительно  $s$ . Этим существенно и отличается случай касания от случая пересечения.

Кривые  $C_1$  и  $C_2$ , касаясь друг друга, могут сближаться между собой в некоторых случаях особенно тесно (черт. 45). Точнее говоря, расстояние  $\overline{M_1 M_2}$ , которое большей частью оказывается бесконечно малым 2-го порядка относительно  $s$ , может иметь в некоторых случаях и более высокий порядок малости. Так, если кроме  $\dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{r}}_1$  в точке  $M_0$  имеет еще место  $\ddot{\mathbf{r}}_2 = \ddot{\mathbf{r}}_1$ , то разложение (162) содержит лишь бесконечно малые не ниже 3-го порядка.

Рассмотрим общий случай. В точке  $M_0$ , общей  $C_1$  и  $C_2$ , мы имеем, очевидно,  $\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{r}}_2$ ; пусть, кроме того,

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{r}}_2, \quad \ddot{\mathbf{r}}_1 = \ddot{\mathbf{r}}_2, \dots, \quad \overset{(n)}{\mathbf{r}_1} = \overset{(n)}{\mathbf{r}_2}, \quad (164)$$



Черт. 45.

где точки означают дифференцирование по дуге. Тогда в разложении (162) пропадают все члены до  $n$ -й степени включительно, так что *расхождение*  $M_1 M_2$  является бесконечно малым не ниже  $n+1$ -го порядка относительно смещения  $s$ . Тогда мы говорим, что кривые имеют в  $M_0$  *касание*  $n$ -го порядка. Как мы видим, смысл его заключается в том, что если рассматривать бесконечно малые 1-го, 2-го, ...,  $n$ -го порядка, но пренебрегать более высокими порядками малости, то расхождением  $M_1 M_2$  придется пренебречь, и кривые  $C_1$  и  $C_2$  станут в  $M_0$  в бесконечно малом неотличимыми друг от друга.

Если при этом  $M_1 M_2$  есть бесконечно малое *точно*  $n+1$ -го порядка (а не выше), то мы говорим, что налицо *касание точно*  $n$ -го порядка. Для касания точно  $n$ -го порядка к условиям (164) нужно добавить неравенство

$$\overset{(n+1)}{\mathbf{r}_1} \neq \overset{(n+1)}{\mathbf{r}_2}, \quad (164')$$

гарантирующее не обращение в нуль члена  $n+1$ -й степени относительно  $s$  в разложении (162).

Наиболее общим случаем касания является касание 1-го порядка, когда  $n=1$ , и условие (164) состоит только из одного первого равенства.

Подведем итоги. Кривые  $C_1$  и  $C_2$  могут иметь в общей точке  $M_0$  или *пересечение* (если  $\overset{\cdot}{\mathbf{r}}_1$  и  $\overset{\cdot}{\mathbf{r}}_2$  неколлинеарны), или *касание* (если  $\overset{\cdot}{\mathbf{r}}_1$  и  $\overset{\cdot}{\mathbf{r}}_2$  коллинеарны). Касание будет порядка  $n=1, 2, 3, \dots$  в зависимости от того, сколько последовательных производных от радиус-вектора по дуге  $\overset{\cdot}{\mathbf{r}}, \overset{\cdot\cdot}{\mathbf{r}}, \overset{\cdot\cdot\cdot}{\mathbf{r}}, \dots$  совпадет для обеих кривых в их общей точке.

Этим исчерпываются все могущие представиться здесь случаи (направления отсчета предполагаем согласованными).

Мы принимаем для простоты точку  $M_0$  за начало отсчета дуги  $s$ . Но очевидно, что если на  $C_1$  и  $C_2$  изменить начало отсчета произвольно, то это будет означать лишь добавление к параметру  $s$  некоторой постоянной. Значения производных по  $s$  не изменятся, и условия (164) сохранят свой вид.

Запишем теперь условия касания  $n$ -го порядка (164) в координатной форме. Совпадение векторов

$$\overset{\cdot}{\mathbf{r}}, \overset{\cdot\cdot}{\mathbf{r}}, \dots, \overset{(n)}{\mathbf{r}}$$

для обеих кривых в точке  $M_0$  равносильно совпадению соответствующих координат этих векторов. Но, разлагая для какой-нибудь кривой  $\mathbf{r}(s)$  по  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , получим

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k},$$

### § 23] ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ КАСАНИЯ КРИВЫХ 107

где  $x, y, z$  — текущие координаты по кривой, выраженные в функции параметра  $s$ . Дифференцируя последовательно по  $s$ , получим

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k},$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k},$$

...

$$\overset{(n)}{\mathbf{r}} = \overset{(n)}{x}\mathbf{i} + \overset{(n)}{y}\mathbf{j} + \overset{(n)}{z}\mathbf{k}.$$

Условия (164) примут следующий вид: в общей точке  $M_0$  производные по дуге от текущих координат

$$\overset{(n)}{x}, \overset{(n)}{y}, \overset{(n)}{z}; \overset{(n)}{\dot{x}}, \overset{(n)}{\dot{y}}, \overset{(n)}{\dot{z}}, \dots; \overset{(n)}{x}, \overset{(n)}{y}, \overset{(n)}{z} \quad (165)$$

должны иметь одинаковые значения для обеих кривых  $C_1$  и  $C_2$ .

### § 23\*. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ КАСАНИЯ КРИВЫХ.

Допустим, что уравнение какой-нибудь кривой представлено вблизи  $M_0$  в виде

$$y = f(x), \quad z = g(x),$$

что всегда возможно, так как мы рассматриваем только обыкновенные точки. Если вычислить последовательные производные от  $y$  и  $z$  по  $x$

$$f', f'', \dots, f^{(n)}, g', g'', \dots, g^{(n)} \quad (165')$$

(тоже кончая  $n$ -м порядком), то легко видеть, что их можно выразить через производные (165) от  $x, y, z$  по дуге  $s$ .

Действительно,

$$f' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y} ds}{\dot{x} ds} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \quad f'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{ds} \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\ddot{y} \dot{x} - \dot{y} \ddot{x}}{\dot{x}^3} \text{ и т. д.}$$

Мы производим, коротко говоря, замену аргумента  $x$  аргументом  $s$  и все производные до  $n$ -го порядка от  $y, z$  по  $x$  выражаем через производные тоже до  $n$ -го порядка тех же переменных  $y, z$  (и самого  $x$ ) по  $s$ <sup>1)</sup>.

Обратно, переходя от аргумента  $s$  к аргументу  $x$ , можно все производные (165) по  $s$  выразить через производные (165') по  $x$ .

<sup>1)</sup> См. Г. М. Фихтенгольц, т. I, гл. VI, § 4.

Для этого достаточно вспомнить, что

$$|ds| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

и, следовательно, если отсчитывать  $s$  в сторону возрастания  $x$ ,

$$ds = \sqrt{1 + j'^2 + g'^2} dx. \quad (166)$$

Отсюда легко вычислить производные до  $n$ -го порядка от  $s$  по  $x$  через производные (165').

По тем же правилам замены аргумента выражаем производные до  $n$ -го порядка от  $x, y, z$  по  $s$  через производные до  $n$ -го порядка от  $s, y, z$  по  $x$ .

В результате величины (165) выражаются через (165'), и обратно.

Следовательно, совпадение величин (165) в какой-нибудь точке для двух кривых  $C_1$  и  $C_2$  влечет за собой такое же совпадение и для величин (165'), и обратно.

Поэтому условия (164) эквивалентны таким: в общей точке кривых  $C_1$  и  $C_2$  производные вдоль них от  $y, z$  по  $x$  до  $n$ -го порядка включительно имеют общие значения.

Условия (164), а следовательно, и (165) исчерпывали при различных значениях  $n = 1, 2, 3, \dots$  все возможные случаи касания, предполагая, однако, соглашение направлений отсчета на кривых  $C_1$  и  $C_2$ .

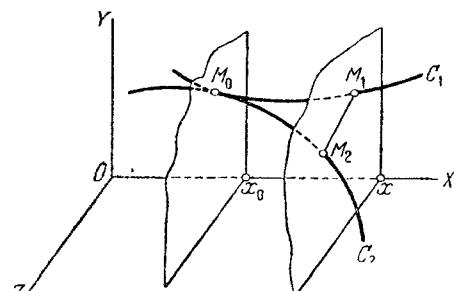
Отметим, что эта оговорка не нужна в последней нашей формулировке. Действительно, здесь берутся производные по  $x$ , и выбор направления отсчета вообще не нужен. Когда же мы сводим эту формулировку к (165), переходя к аргументу  $s$ , то направления отсчета на обеих кривых автоматически получаются согласованными, а именно, как видно из (166), в сторону возрастания  $x$ .

Итак, мы предполагаем, что уравнения кривых  $C_1$  и  $C_2$  имеют соответственно вид

$$y = f_1(x), \quad z = g_1(x)$$

и

$$y = f_2(x), \quad z = g_2(x).$$



Черт. 46.

Согласно нашей формулировке необходимый и достаточный признак касания  $n$ -го порядка в общей точке

$$M_0[x_0; y_0 = f_1(x_0) = f_2(x_0); z_0 = g_1(x_0) = g_2(x_0)]$$

заключается в совпадении производных в этой точке:

$$\left. \begin{aligned} f'_1 &= f'_2, \quad f''_1 = f''_2, \quad \dots, \quad f^{(n)}_1 = f^{(n)}_2, \\ g'_1 &= g'_2, \quad g''_1 = g''_2, \quad \dots, \quad g^{(n)}_1 = g^{(n)}_2. \end{aligned} \right\} \quad (166')$$

Здесь под знаком функций подразумевается аргумент  $x = x_0$ .

Дадим геометрическое истолкование этого признака. Переходим из общей точки  $M_0(x_0)$  в точки  $M_1$  и  $M_2$  на кривых  $C_1$  и  $C_2$ , отвечающие одному и тому же значению  $x$  (черт. 46). Оценим разность значений  $y$  для этих двух точек.

Разложим  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  в ряд Тейлора по степеням  $x - x_0$ :

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) &= y_0 + f'_1(x_0)(x - x_0) + f''_1(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{2} + \dots, \\ f_2(x) &= y_0 + f'_2(x_0)(x - x_0) + f''_2(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{2} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (167)$$

Беря разность  $f_2(x) - f_1(x)$ , мы замечаем, что в правой части пропадут в силу (166') все члены до  $n$ -й степени включительно. Разложение может начаться лишь с членов  $n+1$ -й степени, так что при  $x$ , стремящемся к  $x_0$ , разность значений  $y$  в точках  $M_1$  и  $M_2$  будет бесконечно малой выше чем  $n$ -го порядка относительно  $x - x_0$ .

То же относится и к разности значений  $z$  в точках  $M_1$  и  $M_2$ .

Итак, при смещении из общей точки  $M_0$  в бесконечно близкие точки  $M_1$  и  $M_2$  с общей абсциссой  $x$  мы имеем расхождение в значениях  $y$ , бесконечно малое сравнительно с  $x - x_0$ , по крайней мере  $n+1$ -го порядка; и то же самое для значений  $z$ .

Обратно, если это условие имеет место, то разности  $f_2(x) - f_1(x)$  и  $g_2(x) - g_1(x)$  не могут содержать членов ниже  $n+1$ -й степени относительно  $x - x_0$ , т. е. коэффициенты при таких членах должны быть равны нулю. А эти коэффициенты, как видно из (167), будут

$$\begin{aligned} f'_2 - f'_1, \quad f''_2 - f''_1, \quad \dots, \quad f^{(n)}_2 - f^{(n)}_1, \\ g'_2 - g'_1, \quad g''_2 - g''_1, \quad \dots, \quad g^{(n)}_2 - g^{(n)}_1, \end{aligned}$$

и их обращение в нуль приводит нас опять к (166'). Другими словами, только что формулированное условие равносильно условиям (166') и представляет собой их геометрическое истолкование.

Наконец, докажем еще одну теорему общего характера, относящуюся к условиям касания плоских кривых.

Пусть даны: кривая  $C_1$  параметрическим представлением

$$\begin{aligned}x &= x(t), \\y &= y(t)\end{aligned}$$

и кривая  $C_2$  уравнением между координатами

$$F(x, y) = 0. \quad (168)$$

Пусть они имеют общую точку  $M_0$ , отвечающую значению параметра  $t = t_0$  (черт. 47):

$$x_0 = x(t_0), \quad y_0 = y(t_0).$$

Запишем, что эта точка лежит и на  $C_2$ :

$$F(x_0, y_0) = 0. \quad (168')$$

Вставим текущие координаты  $x(t)$ ,  $y(t)$  кривой  $C_1$  в левую часть уравнения (168) (которое, конечно, не обязано удовлетворяться). Получим некоторую функцию от  $t$ , которую обозначим через  $\varphi$ :

$$\varphi(t) = F[x(t), y(t)];$$

при  $t = t_0$  эта функция, как видно из (168'), обращается в нуль:

$$\varphi(t_0) = 0.$$

Разложим  $\varphi(t)$  в ряд Тейлора по степеням  $t - t_0$ :

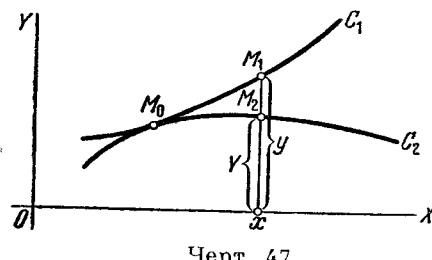
$$\varphi(t) = \varphi'(t_0)(t - t_0) + \varphi''(t_0) \frac{(t - t_0)^2}{2} + \dots + \varphi^{(n)}(t_0) \frac{(t - t_0)^n}{n!} + \dots$$

Если взять  $t$  переменным и стремящимся к  $t_0$ , то  $\varphi(t)$  будет бесконечно малым вместе с  $t - t_0$  и притом такого порядка малости, какова степень первого члена разложения, отличного от нуля. Рассмотрим общий случай. Пусть оказалось, что

$$\begin{aligned}\varphi'(t_0) &= \varphi''(t_0) = \dots = \\&= \varphi^{(n)}(t_0) = 0.\end{aligned} \quad (169)$$

Условия (169) вполне равносильны требованию, чтобы разложение  $\varphi(t)$  начиналось с членов  $n+1$ -й степени или выше, т. е. чтобы  $\varphi(t)$  было бесконечно малым порядка выше  $n$ -го относительно  $t - t_0$ .

Мы утверждаем, что выполнение этого требования необходимо и достаточно для касания кривых  $C_1$  и  $C_2$   $n$ -го порядка.



Черт. 47.

### § 23] ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ КАСАНИЯ КРИВЫХ 111

Переходим к доказательству нашего утверждения. Ограничиваюсь рассмотрением заведомо обыкновенных точек, будем считать для определенности, что для кривой  $C_1$

$$x'(t_0) \neq 0, \quad \text{т. е.} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x - x_0}{t - t_0} \neq 0, \quad (170)$$

и для кривой  $C_2$

$$F_y(x_0, y_0) \neq 0, \quad (170')$$

и что, следовательно, каждая из кривых  $C_1$  и  $C_2$  может быть при желании записана вблизи  $M_0$  заданием  $y$  как функции от  $x$ .

Возьмем на кривой  $C_1$  какую-нибудь точку  $M_1[x(t), y(t)]$  и на кривой  $C_2$  точку  $M_2$ , отвечающую тому же значению  $x$  (черт. 47). Координаты точки  $M_1$  обозначим через  $x, y$  [где  $x = x(t), y = y(t)$ ]; у точки  $M_2$  абсцисса та же, а ординату обозначим через  $Y$ . Тогда уравнение (168) удовлетворяется для точки  $M_2$ , и мы имеем

$$F(x, Y) = 0.$$

Выражение же функции  $\varphi(t)$  имеет, как мы помним, вид

$$\varphi(t) = F(x, y).$$

Чтобы оценить порядок малости  $\varphi(t)$ , удобно представить ее в виде разности

$$\varphi(t) = F(x, y) - F(x, Y),$$

что вполне законно, так как вычитаемое равно нулю. Применяем теорему о конечном приращении, рассматривая  $F$  как функцию второго аргумента при фиксированном первом. Получим

$$\varphi(t) = F_y(x, \eta)(y - Y), \quad (171)$$

где  $\eta$  — некоторое промежуточное между  $y$  и  $Y$  значение. Отсюда

$$\frac{\varphi(t)}{y - Y} = F_y(x, \eta). \quad (171')$$

Пусть теперь  $t$  стремится к  $t_0$ ; тогда точка  $M_1$  стремится в  $M_0$ , равно как и точка  $M_2$ , имеющая ту же абсциссу, что и  $M_1$ . Итак,

$$x(t) \rightarrow x_0, \quad y(t) \rightarrow y_0, \quad Y \rightarrow y_0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow t_0.$$

Тогда значение  $\eta$ , заключенное между  $y$  и  $Y$ , тоже стремится к  $y_0$ , и правая часть (171') стремится к пределу  $F_y(x_0, y_0)$ . Итак,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\varphi(t)}{y - Y} = F_y(x_0, y_0).$$

Но, согласно (170'), этот предел отличен от нуля, так что  $\varphi(t)$  и  $y - Y$  суть бесконечно малые одного порядка. К этому следует добавить, что, согласно (170),  $t - t_0$  и  $x - x_0$  тоже суть бесконечно малые одного порядка. Поэтому *порядок малости*  $\varphi(t)$  относительно  $t - t_0$  совпадает с порядком малости  $y - Y$  относительно  $x - x_0$ . Следовательно, если порядок малости  $\varphi(t)$  больше  $n$ , то порядок малости  $y - Y$  относительно  $x - x_0$  тоже больше  $n$ , а это, как было установлено на стр. 109, необходимо и достаточно, чтобы кривые имели касание  $n$ -го порядка (там нам приходилось налагать такое же ограничение на разность значений  $z$ ; теперь это излишне, так как мы находимся на плоскости  $XY$ , и  $z = 0$ ).

Наше утверждение доказано. Интересно отметить, что если порядок малости  $\varphi(t)$  и  $y - Y$  точно  $n+1$ -й (касание точно  $n$ -го порядка), то главная часть  $y - Y$  будет степени  $n+1$  относительно  $x - x_0$  и в случае четного  $n$  будет менять знак вместе с  $x - x_0$ , т. е. в зависимости от того, смещаемся ли мы из точки касания вправо или влево. Касающиеся кривые расположатся так, что вправо одна будет лежать «выше» второй, а влево—вторая «выше» первой. В случае же нечетного  $n$   $y - Y$  сохраняет постоянный знак, и по обе стороны точки касания одна кривая лежит «выше» другой.

**Доказанная теорема открывает путь к решению такой задачи:**  
**Задача.** Даны кривая

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (172)$$

и семейство кривых от  $n$  параметров

$$F(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0. \quad (173)$$

Всякий раз, когда мы даем параметрам  $C_1, C_2, \dots, C_n$  какие-нибудь постоянные значения, уравнение (173) определяет некоторую кривую. Совокупность всевозможных таких кривых мы и называем  $n$ -параметрическим семейством.

Требуется среди кривых семейства (173) найти такую, которая имела бы с данной кривой (172) в данной ее точке  $t = t_0$  касание и притом наивысшего возможного порядка.

Смысл задачи заключается в том, что, решив ее, мы найдем кривую семейства, которая с наилучшей возможной точностью воспроизводит данную кривую (172) в ее бесконечно малом куске около точки  $t = t_0$ . Следует пояснить, что обычно кривая (172) берется произвольной, кривые же семейства (173)—сравнительно простого строения, так что мы остаемся в выигрыше, связывая с кривой (172) более простой геометрический образ.

Решение задачи очевидно. Возьмем кривую семейства (173) пока с неопределенными параметрами  $C_1, \dots, C_n$  и обозначим через  $\varphi(t, C_1, C_2, \dots, C_n)$  результат подстановки текущих координат

### § 23] ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ КАСАНИЯ КРИВЫХ 143

кривой (172) в левую часть уравнения этой кривой семейства:

$$\varphi(t, C_1, C_2, \dots, C_n) = F[x(t), y(t), C_1, C_2, \dots, C_n].$$

Прежде всего нужно потребовать, чтобы при  $t = t_0$  эта функция обращалась в нуль, т. е. чтобы точка на кривой (172)  $x_0 = x(t_0)$ ,  $y_0 = y(t_0)$  лежала и на выбранной нами кривой семейства:

$$\varphi(t_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0. \quad (174)$$

Далее, если мы хотим обеспечить в этой точке наилучший порядок касания кривой (172) и выбранной нами кривой семейства, нужно потребовать [согласно (169)] обращения в нуль в этой точке последовательных производных от  $\varphi(t, C_1, C_2, \dots, C_n)$  по  $t$  в возможно большем количестве:

$$\left. \begin{aligned} \varphi'(t_0, C_1, C_2, \dots, C_n) &= 0, \\ \varphi''(t_0, C_1, C_2, \dots, C_n) &= 0, \\ \varphi'''(t_0, C_1, C_2, \dots, C_n) &= 0, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (175)$$

Требования (174) и (175) представляют собой уравнения, связывающие неопределенные параметры  $C_1, \dots, C_n$ . Мы продолжим систему уравнений (175) так далеко, пока она остается совместной относительно  $C_1, \dots, C_n$ . В общем виде нельзя дать точного ответа о допустимом числе уравнений (175), но можно ожидать, что так как неизвестных  $n$ , то всего в (174) и (175) можно дать  $n$  уравнений, т. е. в уравнениях (175) остановиться на  $n-1$ -го производной. Это гарантирует касание  $n-1$ -го порядка.

Решая систему уравнений (174), (175) относительно  $C_1, \dots, C_n$ , находим кривую семейства (173), имеющую с кривой (172) в ее точке  $t = t_0$  касание наивысшего возможного порядка. Вообще говоря, нужно ожидать, как мы видели, что это касание будет  $n-1$ -го порядка, если число параметров семейства равно  $n$ .

#### Упражнения.

1. Семейство (173) представляет собой семейство всевозможных прямых (не параллельных оси  $Y$ )

$$y = C_1 x + C_2.$$

Найти прямую, имеющую касание 1-го порядка с кривой (172) в точке  $t = t_0$  (где  $x'(t_0) \neq 0$ ).

Отв. Касательная  $y - y_0 = \frac{y'_0}{x'_0} (x - x_0)$ .

При этом, если  $x'_0 y''_0 - y'_0 x''_0 \neq 0$ , то касание точно 1-го порядка, если же  $x'_0 y''_0 - y'_0 x''_0 = 0$  (а значит,  $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 0$ ), и мы имеем точку расщепления, см. § 2), то касание 2-го или еще более высокого порядка.

2. Семейство (173) представляет собой семейство всевозможных окружностей

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = C_3^2.$$

Найти окружность, имеющую касание 2-го порядка с кривой (172) в точке  $t = t_0$  (такая окружность называется *соприкасающейся*).

*Отв.*

$$C_1 = x_0 - y'_0 \frac{x'_0{}^2 + y'_0{}^2}{x'_0 y''_0 - y'_0 x''_0},$$

$$C_2 = y_0 + x'_0 \frac{x'_0{}^2 + y'_0{}^2}{x'_0 y''_0 - y'_0 x''_0},$$

$$C_3 = \frac{(x'_0{}^2 + y'_0{}^2)^{\frac{1}{2}}}{|x'_0 y''_0 - y'_0 x''_0|}.$$

Если  $x'_0 y''_0 - y'_0 x''_0 = 0$  (точка распрямления), то искомой окружности не существует.

## ГЛАВА III.

### ТЕОРИЯ КРИВИЗНЫ ПЛОСКИХ КРИВЫХ.

Мы подготовили в предыдущей главе аппарат дифференцирования вектор-функций и установили ряд общих понятий теории кривых. Теперь мы можем перейти к более детальному изучению геометрии кривых. Мы начнем с геометрии плоских кривых. Конечно, ее можно было бы получить как частный случай из геометрии кривых в пространстве, но при таком подходе легко могли бы ускользнуть многие своеобразные ее стороны. Чтобы выявить их в достаточной полноте, мы займемся в этой главе только плоскими кривыми. В следующей же главе мы перенесем наши результаты в обобщенном и расширенном виде на пространственные кривые.

Как видно из названия главы, речь будет идти о геометрических построениях, связанных с кривизной плоской кривой. И это вполне естественно, так как кривизна, степень искривленности кривой, является важнейшей геометрической характеристикой ее поведения в данной точке. Мы увидим, как это понятие различными нитями связывается с геометрией кривой.

#### § 24. Соприкасающаяся окружность.

Простейший образ, связанный с данной точкой произвольной кривой, — это ее касательная в данной точке. Касательная имеет с кривой касание 1-го порядка (§ 20), так как первая производная радиус-вектора по дуге  $g$  в точке касания будет общей для кривой и для ее касательной, как и вообще для любых двух касающихся друг друга кривых (так как  $g$  есть единичный вектор, направленный по касательной).

Таким образом, касательная воспроизводит ход кривой вблизи точки касания с точностью 1-го порядка, т. е. если пренебречь бесконечно малыми 2-го порядка и выше.

Мы хотим теперь наглядно воспроизвести ход кривой вблизи данной точки с точностью 2-го порядка, т. е. пренебрегая лишь бесконечно малыми 3-го порядка и выше. При помощи

Найти окружность, имеющую касание 2-го порядка с кривой (172) в точке  $t = t_0$  (такая окружность называется *соприкасающейся*).

*Отв.*

$$C_1 = x_0 - y'_0 \frac{x'_0^2 + y'_0^2}{x'_0 y''_0 - y'_0 x''_0},$$

$$C_2 = y_0 + x'_0 \frac{x'_0^2 + y'_0^2}{x'_0 y''_0 - y'_0 x''_0},$$

$$C_3 = \frac{(x'_0^2 + y'_0^2)^{\frac{3}{2}}}{|x'_0 y''_0 - y'_0 x''_0|}.$$

Если  $x'_0 y''_0 - y'_0 x''_0 = 0$  (точка распрямления), то искомой окружности не существует.

## ГЛАВА III.

### ТЕОРИЯ КРИВИЗНЫ ПЛОСКИХ КРИВЫХ.

Мы подготовили в предыдущей главе аппарат дифференцирования вектор-функций и установили ряд общих понятий теории кривых. Теперь мы можем перейти к более детальному изучению геометрии кривых. Мы начнем с геометрии плоских кривых. Конечно, ее можно было бы получить как частный случай из геометрии кривых в пространстве, но при таком подходе легко могли бы ускользнуть многие своеобразные ее стороны. Чтобы выявить их в достаточной полноте, мы займемся в этой главе только плоскими кривыми. В следующей же главе мы перенесем наши результаты в обобщенном и расширенном виде на пространственные кривые.

Как видно из названия главы, речь будет идти о геометрических построениях, связанных с кривизной плоской кривой. И это вполне естественно, так как кривизна, степень искривленности кривой, является важнейшей геометрической характеристикой ее поведения в данной точке. Мы увидим, как это понятие различными нитями связывается с геометрией кривой.

#### § 24. Соприкасающаяся окружность.

Простейший образ, связанный с данной точкой произвольной кривой, — это ее касательная в данной точке. Касательная имеет с кривой касание 1-го порядка (§ 20), так как первая производная радиус-вектора по дуге  $t$  в точке касания будет общей для кривой и для ее касательной, как и вообще для любых двух касающихся друг друга кривых (так как  $\dot{r}$  есть единичный вектор, направленный по касательной).

Таким образом, касательная воспроизводит ход кривой вблизи точки касания с точностью 1-го порядка, т. е. если пренебречь бесконечно малыми 2-го порядка и выше.

Мы хотим теперь наглядно воспроизвести ход кривой вблизи данной точки с точностью 2-го порядка, т. е. пренебрегая лишь бесконечно малыми 3-го порядка и выше. При помощи

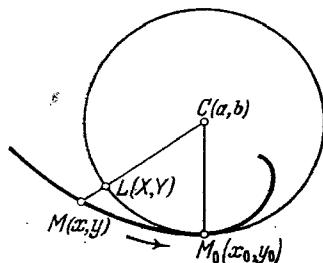
прямой линии этого сделать не удастся (за исключением случаев, когда данная точка на кривой — точка распрямления). Мы обратимся к другой элементарной кривой — к окружности и постараемся подобрать ее таким образом, чтобы она вблизи данной точки кривой уклонялась от кривой лишь на бесконечно малые (не ниже) 3-го порядка.

Итак, мы ставим себе следующую задачу.

*Найти окружность, имеющую с данной кривой в данной ее точке касание 2-го порядка.* Такая окружность называется *соприкасающейся окружностью* в данной точке кривой.

Мы будем предполагать, что данная кривая определена параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned}x &= x(t), \\y &= y(t).\end{aligned}$$



Черт. 48.

Пусть на кривой дана какая-нибудь точка  $M_0(t_0)$ . Мы будем обозначать  $x(t_0)$ ,  $x'(t_0)$ ,  $x''(t_0)$ , ... через  $x_0$ ,  $x'_0$ ,  $x''_0$ , ... и т. д. Уравнение искомой окружности напишем в виде

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Константы  $a$ ,  $b$ ,  $R$  — пока неопределенные.

Потребуем, прежде всего, чтобы наша окружность проходила через точку  $M_0$ , т. е. чтобы  $x_0$ ,  $y_0$  удовлетворяли уравнению окружности. Получим

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = R^2. \quad (176)$$

Это первое из уравнений, связывающих неизвестные константы. Далее, смещааясь из точки  $M_0(t_0)$  в бесконечно близкую точку  $M(t)$  по кривой, оценим уклонение кривой от окружности следующим образом. Проведем прямую  $MC$ , где  $C(a, b)$  — центр окружности (черт. 48), и отметим точку  $L$  в пересечении этой прямой с окружностью. Уклонение кривой от окружности будет выражаться отрезком

$$LM = CM - CL.$$

Нам нужно так подобрать окружность, чтобы уклонение  $LM$  при  $t \rightarrow t_0$  было бесконечно малым (не ниже) 3-го порядка относительно  $t - t_0$  (касание 2-го порядка).

Но разность отрезков  $CM - CL$  будет бесконечно малой того же порядка, как и разность их квадратов  $CM^2 - CL^2$ . В самом деле, отношение этих двух бесконечно малых стремится к конеч-

ному пределу, отличному от нуля:

$$\frac{CM^2 - CL^2}{CM - CL} = CM + CL \rightarrow 2R,$$

так как

$$CM \rightarrow CM_0 (= R), \text{ а } CL = R.$$

Следовательно, вместо того, чтобы добиваться 3-го порядка малости для уклонения  $LM$ , мы можем добиваться этого же самого для разности квадратов  $CM^2 - CL^2$ , что будет проще в отношении выкладок. Так как

$$CL = R, \quad CM = \sqrt{(x(t) - a)^2 + (y(t) - b)^2},$$

то

$$CM^2 - CL^2 = [x(t) - a]^2 + [y(t) - b]^2 - R^2.$$

Полученную функцию от  $t$  кратко обозначим через  $\varphi(t)$ :

$$\varphi(t) = [x(t) - a]^2 + [y(t) - b]^2 - R^2. \quad (177)$$

Разложим  $\varphi(t)$  в ряд Тейлора по степеням  $t - t_0$ :

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \varphi(t_0) + \varphi'(t_0) \frac{t - t_0}{1} + \varphi''(t_0) \frac{(t - t_0)^2}{2!} + \\&\quad + \varphi'''(t_0) \frac{(t - t_0)^3}{3!} + \dots\end{aligned} \quad (177')$$

Для того чтобы  $\varphi(t)$  при  $t \rightarrow t_0$  была бесконечно малой 3-го порядка, необходимо и достаточно, чтобы это разложение начиналось с членов (не ниже) 3-й степени, т. е. чтобы

$$\varphi(t_0) = \varphi'(t_0) = \varphi''(t_0) = 0.$$

Дифференцируя по  $t$  развернутое выражение функции (177), получим

$$\left. \begin{aligned}\varphi(t_0) &= (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - R^2 = 0, \\ \varphi'(t_0) &= 2\{x'_0(x_0 - a) + y'_0(y_0 - b)\} = 0, \\ \varphi''(t_0) &= 2\{x''_0(x_0 - a) + y''_0(y_0 - b) + x'^2_0 + y'^2_0\} = 0.\end{aligned}\right\} \quad (178)$$

Первое из этих уравнений уже встречалось нам в виде (176). Разрешим два последних уравнения относительно  $x_0 - a$ ,  $y_0 - b$  (как систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными) и изменим знаки у полученных выражений. Мы приходим к следующему результату:

$$\left. \begin{aligned}a - x_0 &= y'_0 \frac{x_0^2 + y_0^2}{x'_0 y'_0 - y''_0 x'_0}, \\ b - y_0 &= x'_0 \frac{x'_0^2 + y'_0^2}{y''_0 x'_0 - x''_0 y'_0}.\end{aligned}\right\} \quad (179)$$

и совершенно аналогично

Мы предполагаем при этом, что

$$x'_0y'_0 - y'_0x'_0 \neq 0. \quad (179')$$

В результате по формулам (179) определяется центр соприкасающейся окружности  $C(a, b)$ , а из первого уравнения (178) — ее радиус  $R$ .

Формулы (179) совершенно симметричны относительно координатных осей; нужно только иметь в виду, что именно поэтому знаменатели у них отличаются знаком.

*Центр соприкасающейся окружности называется центром кривизны кривой в данной точке  $t = t_0$ .* Как мы видим, его координаты выражаются через координаты  $x_0, y_0$  данной точки кривой  $x(t), y(t)$  и через их первые и вторые производные по параметру (тоже в данной точке). Каждой точке кривой отвечают своя соприкасающаяся окружность и свой центр кривизны.

Теперь по первому из уравнений (178) легко найти  $R^2$ :

$$\begin{aligned} R^2 &= (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = \\ &= y_0'^2 \left( \frac{x_0'^2 + y_0'^2}{x_0''y_0' - y_0''x_0'} \right)^2 + x_0'^2 \left( \frac{x_0'^2 + y_0'^2}{y_0''x_0' - x_0''y_0'} \right)^2 = \frac{(x_0'^2 + y_0'^2)^3}{(x_0''y_0' - y_0''x_0')^2}. \end{aligned}$$

Отсюда, извлекая квадратный корень, получим, считая  $R$  всегда положительным,

$$R = \frac{\sqrt{(x_0'^2 + y_0'^2)^3}}{|x_0''y_0' - y_0''x_0'|}. \quad (180)$$

Вычисленный нами таким образом радиус соприкасающейся окружности называется радиусом кривизны кривой в данной точке  $t = t_0$ .

Мы видим, что в каждой точке кривой  $x(t), y(t)$  при условии (179') существует и единственным образом определяется окружность, имеющая с кривой в этой точке касание 2-го порядка (соприкасающаяся).

Особо рассмотрим те точки, где знаменатель выражений (179) и (180) обращается в нуль:

$$x'_0y'_0 - y'_0x'_0 = 0, \quad (180')$$

и где радиус кривизны обращается в бесконечность. Здесь, строго говоря, соприкасающейся окружности не существует.

Разберемся в геометрической картине этого случая. Так как

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \frac{y'}{x'} = \frac{y''x' - y'x''}{x'^3},$$

то в данной точке, в силу (180'),  $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ , и это будет точка расправления (§ 2). Следовательно, в этой точке касательная имеет с кривой касание не 1-го порядка, как обычно, а 2-го, и заменяет в этом смысле соприкасающуюся окружность. Можно считать, что

здесь мы имеем предельный случай соприкасающейся окружности — случай бесконечно большого радиуса, когда окружность превращается в прямую (касательную). Особенно наглядным это становится, если двигаться по кривой  $x(t), y(t)$ , стремясь в точку  $t_0$ , где соблюдается условие (180'). Тогда радиус соприкасающейся окружности неограниченно растет, окружность распрямляется, стремясь к касательной в точке  $t_0$  как к своему предельному положению.

Имеет смысл переписать еще формулы (179) и (180) в том частном случае, когда уравнение кривой имеет вид

$$y = y(x),$$

т. е. роль параметра  $t$  играет абсцисса  $x$ . Тогда

$$x' = 1, \quad x'' = 0$$

(штрих означает дифференцирование по  $x$ ), и (179), (180) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} a - x_0 &= -y_0' \frac{1 + y_0'^2}{y_0''}, \\ b - y_0 &= \frac{1 + y_0'^2}{y_0''}, \\ R &= \frac{(1 + y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y_0''|}. \end{aligned} \right\} \quad (181)$$

В формулах (179), (180), (181) мы больше не будем писать нуль при  $x$  и  $y$ , так как точка была произвольно фиксирована на кривой и полученные формулы справедливы для любой точки. Сделаем еще замечание относительно черт. 48. Так как разложение (177') начинается, вообще говоря, с членов 3-й степени, то при  $t \rightarrow t_0$   $\varphi(t)$  имеет знак своей главной части  $\varphi'''(t_0) \frac{(t-t_0)^3}{3!}$  и, значит, меняет знак при переходе от  $t < t_0$  к  $t > t_0$ . Следовательно, уклонение кривой от соприкасающейся окружности меняет знак при переходе через точку касания  $M_0$ . Тем самым кривая в точке касания, вообще говоря, переходит с одной стороны своей соприкасающейся окружности на другую.

Замечание. В этом параграфе мы оценивали уклонение кривой от окружности несколько иначе, чем в общей теории касания кривых. Однако геометрически почти очевидно, что результат от этого не меняется.

Несколько позже это будет показано и совершенно строго (§ 41). Что же касается того, что за бесконечно малое 1-го порядка мы принимаем приращение параметра  $t - t_0$  вместо

приращения дуги  $s - s_0$ , то это ничего не меняет. Действительно,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s - s_0}{t - t_0} = s'(t_0) = |\mathbf{r}'(t_0)| \neq 0,$$

а следовательно,  $s - s_0$  и  $t - t_0$  — бесконечно малые одного порядка [как и всегда, мы предполагаем  $\mathbf{r}'(t_0) \neq 0$ ].

### Примеры и упражнения.

1. *Центр кривизны в полярных координатах.* Пусть уравнение кривой имеет вид (33) и оси  $X, Y$  выбраны как на черт. 13, т. е. ось  $X$  проходит через рассматриваемую точку  $M$  на кривой. Если угол  $\varphi$  отсчитывается от оси  $OX$ , принятой за полярную ось, то имеет место параметрическое представление (34). Дифференцируем по  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} x' &= r' \cos \varphi - r \sin \varphi, & x'' &= r'' \cos \varphi - 2r' \sin \varphi - r \cos \varphi, \\ y' &= r' \sin \varphi + r \cos \varphi, & y'' &= r'' \sin \varphi + 2r' \cos \varphi - r \sin \varphi. \end{aligned}$$

Так как в точке  $M$  мы имеем  $\varphi = 0$ , то

$$\begin{aligned} x' &= r', & x'' &= r'' - r, \\ y' &= r, & y'' &= 2r'. \end{aligned}$$

Находим координаты центра кривизны  $C$  по (179):

$$\begin{aligned} a &= r \frac{r^2 + r'^2}{r''r - r^2 - 2r'^2} + r = r \frac{r''r - r'^2}{r''r - r^2 - 2r'^2}, \\ b &= r' \frac{r^2 + r'^2}{r^2 + 2r'^2 - r''r} \end{aligned}$$

(так как в точке  $M$   $x = r$ ,  $y = 0$ ). Отсюда легко вычислить радиус кривизны  $R$ :

$$R = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{|r^2 + 2r'^2 - r''r|}.$$

Центр кривизны  $C$  будет расположен где-то на нормали  $MC$  (см. черт. 13). Найдем отношение, в котором он делит отрезок  $NM$ :

$$\frac{NC}{CM} = \frac{x_C - x_N}{x_M - x_C} = \frac{a - 0}{r - a} = \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2} = \left( \operatorname{arctg} \frac{r'}{r} \right)'.$$

Сравнивая с (35), мы получаем

$$\frac{NC}{CM} = \frac{d\mu}{d\varphi}.$$

Формулы для  $R$  и  $\frac{NC}{CM}$  остаются, очевидно, верными, если выбрать полярную ось как угодно, а не обязательно проходящей через исследуемую точку  $M$  (ср. § 5).

2. *Синус-спираль.* Так называются кривые, для всех точек которых отношение  $\frac{NC}{CM}$  остается постоянным. Запишем это условие:

$$\frac{NC}{CM} = \lambda = \text{const}, \quad \text{т. е. } \frac{d\mu}{d\varphi} = \lambda.$$

Отсюда  $\mu = \lambda\varphi + \mu_0$ .

Следовательно, синус-спирали можно характеризовать и тем, что вдоль них  $\mu$  есть линейная функция  $\varphi$ , т. е. угол наклона касательной к неподвижной полярной оси (этот угол равен  $\varphi + \mu$ ) получает приращения, пропорциональные приращениям полярного угла  $\varphi$  (с коэффициентом пропорциональности  $1 + \lambda$ ).

Найдем уравнения синус-спиралей в конечном виде в случае  $\lambda \neq 0$ . Поворотом полярной оси можно добиться обращения  $\mu_0$  в  $\frac{\pi}{2}$ , так что

$$\mu = \lambda\varphi + \frac{\pi}{2}.$$

Пользуясь формулой (35), получаем

$$r \frac{d\varphi}{dr} = \operatorname{tg} \left( \lambda\varphi + \frac{\pi}{2} \right), \quad \text{т. е. } \frac{dr}{r} = - \frac{\sin \lambda\varphi}{\cos \lambda\varphi} d\varphi.$$

Интегрируем почленно:

$$\ln r = \frac{1}{\lambda} \ln |\cos \lambda\varphi| + C, \quad \text{т. е. } r = r_0 (\cos \lambda\varphi)^{\frac{1}{\lambda}},$$

где

$$r_0 = e^C.$$

Составить себе представление о форме главной ветви синус-спиралей, т. е. той ее части, для которой

$$-\frac{\pi}{2\lambda} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2\lambda},$$

и, следовательно,  $\cos \lambda\varphi \geqslant 0$ .

Остальные части синус-спиралей по форме повторяют главную ветвь.

Доказать следующие результаты:

В случае  $\lambda > 0$  главная ветвь начинается в полюсе, где касается направления  $\varphi = -\frac{\pi}{2\lambda}$ , максимально удаляется от полюса на расстояние  $r_0$  при  $\varphi = 0$  и снова возвращается в полюс при  $\varphi = \frac{\pi}{2\lambda}$ , касаясь этого направления.

В случае  $\lambda < 0$  главная ветвь при  $\varphi = -\frac{\pi}{2\lambda}$  и  $\varphi = \frac{\pi}{2\lambda}$  уходит в бесконечность; наибольее приближается к полюсу при  $\varphi = 0$ , когда  $r = r_0$ .

Показать, что в случаях

$$\lambda = 1, \frac{1}{2}, 2, -1, -\frac{1}{2}, -2$$

мы получаем соответственно окружность, кардиоиду (см. упражнения в конце § 7), лемнискату (одну ветвь, см. черт. 15, б), прямую линию, параболу, равнобочную гиперболу (одну ветвь).

Выяснить расположение полюса и полярной оси относительно каждой из этих линий, формулировать для каждой из них теорему о том, что  $\frac{NC}{CM} = \lambda$ , и выяснить соответственно расположение центра кривизны  $C$  относительно отрезка  $MN$ .

В случае  $\lambda=0$  основное соотношение дает  $\frac{d\mu}{d\varphi}=0$ ; показать, что синус-спираль в этом случае тождественна с логарифмической спиралью. Центр кривизны  $C$  попадает в точку  $N$ .

3. Кривые Рибокура. Так называются кривые, центр кривизны которых  $C$  делит в постоянном отношении  $\lambda$  отрезок нормали  $NM$  от оси  $X$  до точки касания (черт. 7).

Пусть кривая задана уравнением  $y=f(x)>0$ . Тогда, пользуясь формулами (181), получим

$$\frac{NC}{CM} = \frac{y_N - y_C}{y_C - y_M} = \frac{0 - b}{b - y_M} = \frac{-y - \frac{1+y'^2}{y''}}{\frac{1+y'^2}{y''}} = -\frac{yy''}{1+y'^2} - 1,$$

откуда

$$-\frac{yy''}{1+y'^2} = 1 + \lambda, \quad \text{т. е.} \quad -\frac{y'y''}{1+y'^2} = (1+\lambda) \frac{y'}{y}.$$

Интегрируем почленно (считая  $1+\lambda \neq 0$ ):

$$-\frac{1}{2} \ln(1+y'^2) = (1+\lambda) \ln y + C_1,$$

т. е.

$$1+y'^2 = (Cy)^{-2(1+\lambda)}, \quad \text{где} \quad C = e^{\frac{C_1}{1+\lambda}} > 0.$$

Отыскание кривой Рибокура в копечном виде сводится, таким образом, к квадратурам, именно,

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{(Cy)^{-2(1+\lambda)} - 1}}.$$

В случае  $1+\lambda < 0$  ордината меняется от наименьшего возможного значения  $y = \frac{1}{C}$  до  $+\infty$ , в случае  $1+\lambda > 0$  — от нуля до наибольшего значения  $y = \frac{1}{C}$ , причем  $x$  монотонно растет в обоих случаях (если в знаменателе брать корень со знаком +). Получаем главную ветвь кривой Рибокура.

Выполнить интегрирование в частных случаях

$$\lambda = 0, -2, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$$

и показать, что кривая будет представлять соответственно окружность, цепную линию ( $y = \frac{1}{2C} [e^{xC} + e^{-xC}]$ ), циклоиду (см. упражнения в конце § 7), параболу.

Выяснить расположение этих кривых относительно оси  $X$  и расположение центра кривизны  $C$  относительно отрезка  $MN$  в каждом случае.

### § 25. Построение соприкасающейся окружности предельным переходом.

Пусть в данной точке  $M_0$  кривой

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t) \end{aligned}$$

требуется построить соприкасающуюся окружность. Выберем произвольно еще две точки на нашей кривой,  $M_1$  и  $M_2$ , и проведем через  $M_0, M_1, M_2$  окружность (черт. 49).

Пусть точки  $M_0, M_1, M_2$  отвечают значениям параметра  $t = t_0, t_1, t_2$ . Центр окружности обозначим  $C(a, b)$ . Разумеется, он, вообще говоря, не совпадает с центром кривизны. Мы докажем следующее.

*Окружность, проведенная через точки кривой  $M_0, M_1, M_2$ , стремится совпасть с соприкасающейся окружностью в точке  $M_0$ , когда точки  $M_1$  и  $M_2$  движутся по кривой, стремясь совпасть с неподвижной точкой  $M_0$ .*

Это, разумеется, верно при условии, что соприкасающаяся окружность в точке  $M_0$  существует, т. е. что

$$y_0''x_0' - x_0''y_0' \neq 0. \quad (182)$$

Переходим к доказательству. Пусть  $M$  — произвольная точка на кривой, отвечающая произвольному значению  $t$ .

Считая сначала точки  $M_1$  и  $M_2$  неподвижными и нашу окружность неизменной, составим снова функцию  $\varphi(t)$  согласно формуле (177). Так как точки  $M_0, M_1, M_2$  лежат в пересечении кривой с окружностью, то в этих точках  $M$  и  $L$  совпадают,  $CM = CL$ , а следовательно, обращается в нуль и функция  $\varphi(t)$ :

$$\varphi(t_0) = \varphi(t_1) = \varphi(t_2) = 0.$$

Будем считать для определенности, что  $t_0 < t_1 < t_2$ . Применим теорему Ролля для промежутка  $t_0, t_1$  и  $t_1, t_2$ , получим

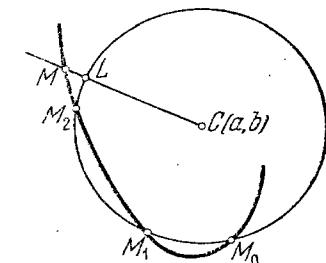
$$\varphi'(t_3) = \varphi'(t_4) = 0,$$

где

$$t_0 < t_3 < t_1, \quad t_1 < t_4 < t_2.$$

Снова применяем теорему Ролля для функции  $\varphi'(t)$  в промежутке  $t_3, t_4$ . Получим

$$\varphi''(t_5) = 0, \quad \text{где} \quad t_3 < t_5 < t_4.$$



Черт. 49.

Из полученных соотношений используем следующие:

$$\varphi(t_0) = 0, \quad \varphi'(t_3) = 0, \quad \varphi''(t_3) = 0.$$

Напишем их в развернутом виде:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(t_0) &= (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - R^2 = 0, \\ \varphi'(t_3) &= 2\{x'_3(x_3 - a) + y'_3(y_3 - b)\} = 0, \\ \varphi''(t_3) &= 2\{x''_3(x_3 - a) + y''_3(y_3 - b) + x'^2_3 + y'^2_3\} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (183)$$

Эти уравнения очень похожи на уравнения (178). Но в уравнениях (178) все координаты  $x, y$  и их производные были взяты в точке  $t = t_0$ , теперь же во втором уравнении они берутся для точки  $t = t_3$ , а в третьем уравнении — для  $t = t_3$ . Последние два уравнения (183) мы будем рассматривать как систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными  $a, b$  (координаты центра нашей окружности).

Заставим теперь  $t_1$  и  $t_2$  стремиться к  $t_0$ ; точки  $M_1$  и  $M_2$ , следовательно, бегут по кривой, стремясь в точку  $M_0$ .

Вместе с  $t_1$  и  $t_2$  стремятся к  $t_0$  и заключенные между  $t_3$  и  $t_5$  значения  $t_3$  и  $t_5$ . При этом, очевидно, коэффициенты уравнений (183) в пределе превращаются в коэффициенты соответствующих уравнений (178).

Мы предполагаем, что условие (182) соблюдается. Тогда при  $t_3$  и  $t_5$ , достаточно приблизившихся к  $t_0$ , будет соблюдаться и условие

$$y''_3 x'_3 - x''_3 y'_3 \neq 0.$$

Это значит, что последние два уравнения (183) относительно неизвестных  $a, b$  образуют систему с детерминантом, отличным от нуля.

Представим себе, что мы явно выразили  $a, b$  из этих уравнений через их коэффициенты, а затем перешли к пределу. В пределе коэффициенты уравнений (183) превратятся в соответствующие коэффициенты уравнений (178), а следовательно  $a$  и  $b$ , найденные из (183), превратятся в пределе в  $a$ , и  $b$ , найденные из (178) (т. е. координаты центра кривизны).

Итак, центр окружности, проведенной через  $M_0, M_1, M_2$  при  $M_1 \rightarrow M_0, M_2 \rightarrow M_0$ , стремится совпасть с центром кривизны. При этом окружность все время проходит через неподвижную точку  $M_0$ , и следовательно, стремится совпасть с окружностью, тоже проходящей через  $M_0$  и имеющей центр в центре кривизны. А такая окружность, очевидно, тождественна с соприкасающейся. Этим наше утверждение доказано.

### § 26. Кривизна.

В этом параграфе мы займемся понятием кривизны плоской кривой. К этому понятию естественнее всего можно подойти, поставив себе целью дать численную оценку степени искривленности кривой в данной точке. Действительно, как видно на-глаз, различные кривые или одна и та же кривая в разных точках могут быть искривлены в большей или меньшей степени. Так, прямая линия совсем не имеет искривления, окружность большого радиуса имеет слабое искривление, а по мере уменьшения радиуса ее искривлениерастет. На черт. 50 искривленность кривой увеличивается при движении по ней слева направо. Все это, конечно, — только наглядные соображения. Чтобы подойти к точному определению, заметим, что чем сильнее искривление кривой, тем быстрее меняет свое направление касательная к ней при переходе от точки к точке; так, прямая, являющаяся сама своей касательной, все время сохраняет постоянное направление. Поэтому за меру искривленности кривой в среднем на данном участке  $MM'$  можно принять угол поворота касательной, приходящийся в среднем на единицу пути, пройденного точкой касания. Другими словами, нужно угол  $\Delta\alpha$ , образованный касательными в точках  $M$  и  $M'$  (черт. 50), разделить на  $\Delta s$  — длину дуги  $MM'$ . Полученное частное

$$k_{cp} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}, \quad (184)$$

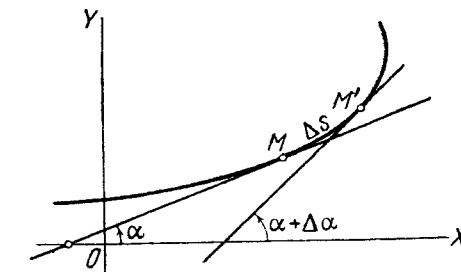
взятое по модулю, называется *средней кривизной* дуги  $MM'$ .

Отсюда же нетрудно перейти к понятию *кривизны в данной точке*  $M$ . Заставим точку  $M'$  стремиться по кривой в  $M$ . Тогда предел, к которому стремится средняя кривизна дуги  $MM'$ , называется *кривизной кривой в точке*  $M$ . Мы будем обозначать кривизну через  $k$ .

Итак,

$$k = \lim_{M' \rightarrow M} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right|. \quad (185)$$

Формулированное здесь определение кривизны законно, так как мы сейчас увидим, что предел, о котором идет речь, существует и является вполне определенным (при обычных наших



Черт. 50.

предположениях). Предел берем по модулю, считая кривизну  $k$  величиной всегда положительной или в крайнем случае нулем.

Пусть кривая задана параметрическим представлением  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ .

Займемся вычислением кривизны кривой в произвольной точке. Каждому значению  $t$  отвечают некоторая точка  $M(t)$  на кривой, касательная в этой точке, и угол  $\alpha(t)$ , образуемый касательной с положительным направлением оси  $X$ . Так как мы ограничиваемся заведомо обыкновенными точками, то  $x'(t)$ ,  $y'(t)$  не обращаются одновременно в нуль. Для определенности ограничимся *простым* отрезком кривой, где  $x' \neq 0$ ; тогда касательная не параллельна оси  $Y$ , и ее угловой коэффициент равен

$$\operatorname{tg} \alpha(t) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \quad \text{откуда} \quad \alpha(t) = \arctg \frac{y'(t)}{x'(t)}. \quad (186)$$

Угол  $\alpha$  задан здесь как функция  $t$  (хотя и неоднозначная; но мы выберем одну из ветвей  $\arctg$ , какую безразлично, так как нам важна не сама функция  $\alpha(t)$ , а ее приращения, а они будут всегда одни и те же).

С другой стороны, длина дуги  $s$ , отсчитываемая от некоторой начальной точки до точки  $M(t)$  по кривой, есть также функция от  $t$ :

$$s = s(t).$$

Перейдем из точки  $M(t)$  в некоторую другую точку  $M'(t + \Delta t)$ , давая параметру  $t$  приращение  $\Delta t$ . Тогда функция  $\alpha(t)$  примет новое значение  $\alpha(t + \Delta t)$ .

Очевидно,  $\alpha(t + \Delta t)$  и  $\alpha(t)$  суть углы, образуемые с положительным направлением оси  $X$  направлениями касательных соответственно в точках  $M'$  и  $M$ . Поэтому разность этих углов

$$\alpha(t + \Delta t) - \alpha(t)$$

есть угол поворота касательной при переходе из  $M$  в  $M'$ .

С другой стороны,  $s(t + \Delta t)$  и  $s(t)$  суть длины дуг, отсчитанных от некоторой начальной точки соответственно до точек  $M'$  и  $M$ . Разность этих дуг

$$s(t + \Delta t) - s(t)$$

выражает длину дуги от  $M$  до  $M'$ .

Поэтому средняя кривизна кривой на отрезке  $MM'$  выражается отношением

$$k_{\text{ср}} = \left| \frac{\alpha(t + \Delta t) - \alpha(t)}{s(t + \Delta t) - s(t)} \right|.$$

Рассмотрим поведение этой величины при  $\Delta t$ , стремящемся к нулю, т. е. при стремлении точки  $M'$  в  $M$  по кривой.

Если переписать предыдущее выражение в виде

$$k_{\text{ср}} = \left| \frac{\frac{\alpha(t + \Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t}}{\frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}} \right|,$$

то ясно, что при  $\Delta t \rightarrow 0$  числитель и знаменатель стремятся к пределам, а именно к производным  $\alpha'(t)$  и  $s'(t)$ , следовательно, предел этого выражения (т. е. кривизна в точке) существует и выражается так:

$$k = \left| \frac{\alpha'(t)}{s'(t)} \right|. \quad (187)$$

Остается закончить вычисление. Находим  $\alpha'(t)$ , дифферентируя (186):

$$\alpha'(t) = \frac{\frac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2}}{1 + \left( \frac{y'(t)}{x'(t)} \right)^2} = \frac{y''x' - x''y'}{x'^2 + y'^2}.$$

Что же касается  $s'(t)$ , то пользуемся формулой (159), учитывая, конечно, что у нас  $z \equiv 0$ :

$$s'(t) = \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

Вставляя в (187), получаем окончательно

$$k = \frac{|y''x' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (188)$$

Мы вывели эту формулу в допущении, что вблизи рассматриваемой точки  $M$   $x'(t) \neq 0$ . Но ввиду ее полной симметрии относительно  $x$ ,  $y$  она будет иметь тот же вид и при допущении  $y'(t) \neq 0$ , т. е. она имеет место в любой заведомо обыкновенной точке.

Сравнивая полученное выражение кривизны  $k$  с формулой (180) для радиуса кривизны, мы приходим к важному соотношению

$$k = \frac{1}{R}. \quad (189)$$

*Кривизна и радиус кривизны — величины взаимно обратные.*

Это соотношение, выведенное вычислением, интересно пояснить геометрически. Заметим прежде всего, что для *окружности* вычислить кривизну особенно просто. В этом случае (черт. 51) угол между касательными в точках  $M$  и  $M'$  равен центральному углу  $\Delta\alpha$  между радиусами  $OM$  и  $OM'$ , проведенными в точки касания.

Соответствующая длина дуги  $MM' = \Delta s$  равна центральному

углу  $\Delta\alpha$ , умноженному на радиус окружности  $R$ , так что  $\Delta s = R\Delta\alpha$  и, следовательно,  $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{1}{R}$ .

Средняя кривизна любой дуги окружности равна обратной величине радиуса окружности. Ясно отсюда, что кривизна в любой точке окружности также равна  $\frac{1}{R}$  и остается, таким образом, постоянной от точки к точке.

Установив это, заметим, что из самого определения кривизны  $k$  (теперь уже для любой кривой) видно, что для ее вычисления достаточно знать производные текущих координат  $x, y$  по дуге  $s$  лишь 1-го и 2-го порядков (одно дифференцирование при вычислении  $\alpha$  и еще одно при отыскании  $\lim \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ ). Но так как кривая имеет соприкасающейся окружностью касание 2-го порядка, то значения этих производных у них будут общими, а значит, будет общим и значение кривизны. Итак, кривизна произвольной кривой в каждой ее точке равна кривизне соприкасающейся окружности, а значит, обратной величине радиуса этой окружности (радиуса кривизны). Мы вновь пришли к соотношению (189).

Добавим еще, что теперь признак точек расправления (180')

$$x''y' - y''x' = 0$$

можно, пользуясь формулой (188), переписать в виде

$$k = 0. \quad (190)$$

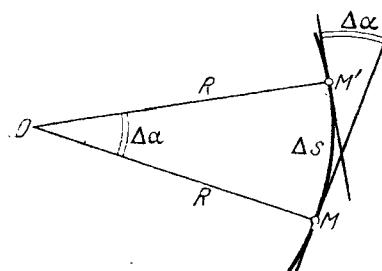
В частности, к точкам с кривизной нуль принадлежат все те точки перегиба, в которых кривизна вообще существует (не обращается в бесконечность).

### § 27. Векторы $t$ , $n$ .

С плоской кривой в каждой ее точке  $M$  можно естественным образом связать нечто вроде местной прямоугольной системы координат. А именно, роль начала координат  $O$  будет играть сама точка  $M$ , а роль осей  $X$  и  $Y$  — касательная и нормаль в этой точке. В таком случае роль ортов  $i$  и  $j$  примут на себя единичные векторы, направленные соответственно по касательной и по нормали. Эти векторы мы будем обозначать  $t$  и  $n$  (черт. 52).

Пусть кривая отнесена к дуге, как к параметру:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s). \quad (191)$$



Черт. 51.

чт, обратной величине радиуса этой окружности (радиуса кривизны). Мы вновь пришли к соотношению (189).

Мы знаем, что производная  $\dot{\mathbf{r}}$  радиус-вектора по дуге есть единичный касательный вектор [см. (158")]. Поэтому можно положить

$$\mathbf{t} = \dot{\mathbf{r}}. \quad (192)$$

По 1-й лемме § 18 производная единичного вектора ему ортогональна; следовательно,  $\dot{\mathbf{t}} \perp \mathbf{t}$ , и вектор  $\dot{\mathbf{t}}$  направлен по нормали.

Но, дифференцируя (192) по  $s$ , получим

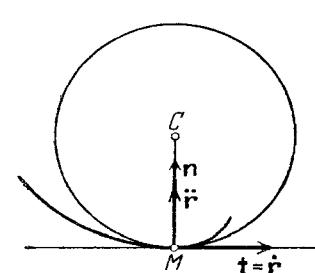
$$\ddot{\mathbf{t}} = \ddot{\mathbf{r}}, \quad (193)$$

так что  $\ddot{\mathbf{r}}$  тоже направлен по нормали.

Условимся направлять вектор  $\mathbf{n}$  всегда в сторону вектора  $\ddot{\mathbf{r}}$  (черт. 53).

Точки, где  $\ddot{\mathbf{r}} = 0$ , мы оставляем в стороне (как мы вскоре увидим, это будут точки расправления). Заметим, что если направление отсчета дуги  $s$  на кривой заменить на обратное (т. е. изменить знак у  $s$ ), то  $\ddot{\mathbf{r}} (= \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2})$  умножается на  $-1$  (так как  $d\mathbf{r}$  не меняется, а  $ds$  меняет

Черт. 52.



Черт. 52.

знак); что же касается  $\ddot{\mathbf{r}} (= \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2})$ , то

этот вектор не меняется (так как  $d\mathbf{r}$  и  $s$  одновременно меняют знаки на обратные). Следовательно, не меняется и направленный по нему единичный вектор  $\mathbf{n}$ .

Поэтому вектор  $\mathbf{n}$  будет вполне определенным, а вектор  $\mathbf{t}$  будет менять свое направление на обратное вместе с направлением отсчета дуги  $s$ .

Покажем теперь, что центр кривизны  $C$  всегда лежит на нормали в сторону вектора  $\mathbf{n}$  (черт. 53). Будем рассматривать кривую в прямоугольных координатах  $x, y$ , приняв за начало какую-нибудь ее точку  $M$ , за оси — касательную и нормаль и за орты  $i, j$  — векторы  $t, n$  в точке  $M$ . Запишем уравнение кривой (191) в развернутом виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j}.$$

Дифференцируя, получим

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}, \\ \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j}.\end{aligned}$$

В точке  $M$  вектор  $\dot{\mathbf{r}}$  (т. е.  $t$ ) совпадает с  $\mathbf{i}$ , и из первого равенства следует

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = 0;$$

кроме того,  $\dot{\mathbf{r}}$  совпадает с  $\mathbf{j}$  и, следовательно,  $\ddot{\mathbf{r}}$  коллинеарен с  $\mathbf{j}$  и направлен с ним в одну сторону, так что второе равенство даст

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} > 0.$$

Найдем теперь координаты  $a, b$  центра кривизны  $C$  по формулам (179), учитывая, что в точке  $M$  координаты  $x, y$  равны в нашем случае нулю, а производные их по параметру (причем параметром служит дуга) удовлетворяют только что полученным соотношениям. Формулы (179) примут вид

$$a = 0, \quad b = \frac{1}{\ddot{y}}.$$

Так как  $\ddot{y} > 0$ , то и  $b > 0$ , и центр кривизны  $C$  расположен на положительной полуоси  $Y$ , т. е. на нормали в сторону вектора  $\mathbf{n}$ .

Отсюда вытекает, что вектор  $\overline{MC}$  отличается от единичного вектора  $\mathbf{n}$  положительным численным множителем, равным длине вектора  $\overline{MC}$ , т. е. радиусу кривизны  $R$ :

$$\overline{MC} = R\mathbf{n}. \quad (194)$$

Вместе с центром кривизны  $C$  и вся соприкасающаяся окружность расположена от касательной в сторону вектора  $\mathbf{n}$ . А так как кривая вблизи точки  $M$  уклоняется от соприкасающейся окружности лишь на бесконечно малые 3-го порядка, то и кривая (вблизи точки  $M$ ) расположена в сторону вектора  $\mathbf{n}$  от касательной (см. черт. 53).

### § 28. Формулы Френе.

При изменении параметра  $s$  точка  $M$  движется по кривой, и вместе с ней будут меняться как функции от  $s$  векторы  $\mathbf{t}$  и  $\mathbf{n}$ :

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(s), \quad \mathbf{n} = \mathbf{n}(s).$$

Выясним теперь, какой вид будут иметь производные векторов  $\mathbf{t}$  и  $\mathbf{n}$  по дуге  $s$ .

Применим к вектор-функции  $\mathbf{t}(s)$  2-ю лемму § 18. На основании ее скорость вращения единичной вектор-функции  $\mathbf{t}(s)$  совпадает с модулем ее производной:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right| = |\dot{\mathbf{t}}|. \quad (195)$$

Здесь  $\Delta \alpha$  — угол поворота вектора  $\mathbf{t}$  (т. е. угол поворота касательной), отвечающий приращению дуги  $\Delta s$ . Но левая часть равенства, согласно (185), представляет собой кривизну  $k$  нашей кривой. Отсюда окончательно

$$|\dot{\mathbf{t}}| = k. \quad (196)$$

Вектор  $\dot{\mathbf{t}}$  направлен по нормали (§ 27), причем единичный вектор нормали  $\mathbf{n}$  мы условились направлять в ту же сторону. Поэтому  $\dot{\mathbf{t}}$  отличается от единичного вектора  $\mathbf{n}$  положительным численным множителем, равным, очевидно, длине вектора  $\dot{\mathbf{t}}$ , т. е. кривизне  $k$ . Итак,

$$\dot{\mathbf{t}} = kn. \quad (197)$$

Заметим, что признак точек расправления (190)

$$k = 0$$

может быть, согласно (196), переписан в виде

$$\dot{\mathbf{t}} = 0, \quad \text{т. е. } \ddot{\mathbf{r}} = 0. \quad (198)$$

Таким образом, устранные нами из рассмотрения точки, где  $\ddot{\mathbf{r}} = 0$ , оказались действительно точками расправления.

Переходим далее к производной  $\dot{\mathbf{n}}$  единичного вектора  $\mathbf{n}$ . Она по 1-й лемме § 18 направлена перпендикулярно к  $\mathbf{n}$ , а так как  $\mathbf{n}$  направлено по нормали, то  $\dot{\mathbf{n}}$  направлено по касательной и поэтому может отличаться от вектора  $\mathbf{t}$  только численным множителем:

$$\dot{\mathbf{n}} = \alpha \mathbf{t},$$

где  $\alpha$  — пока неопределенный множитель. Его нетрудно определить, записав, что скалярное произведение  $\mathbf{t}$  и  $\mathbf{n}$ , в силу их перпендикулярности, равно нулю:

$$\mathbf{t}\mathbf{n} = 0,$$

и продифференцировав это равенство по  $s$ . Получим

$$\mathbf{t}\dot{\mathbf{n}} + \dot{\mathbf{t}}\mathbf{n} = 0.$$

Вставляя сюда  $k\mathbf{n}$  вместо  $\mathbf{t}$  и  $a\mathbf{t}$  вместо  $\mathbf{n}$  и учитывая, что  $\mathbf{t}\mathbf{t} = \mathbf{n}\mathbf{n} = 1$ ,

получим  $k + a = 0$ , откуда  $a = -k$ .

Выражение для  $\mathbf{n}$  принимает окончательный вид

$$\mathbf{n} = -kt. \quad (199)$$

Формулы (197) и (199) называются *формулами Френе* (для *плоской кривой*). Как мы увидим, они будут играть большую роль, особенно в теории пространственных кривых, где они примут несколько усложненную форму.

Уясним себе *геометрический смысл этих формул*. Они выражают прежде всего производные векторов  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$  через сами эти векторы и через кривизну  $k$  в данной точке. Умножая (197) и (199) почленно на  $ds$ , мы получим слева дифференциалы

$$d\mathbf{t} = k\mathbf{n} ds, \quad d\mathbf{n} = -kt ds. \quad (200)$$

Таковы главные части приращений вектор-функций  $\mathbf{t}(s)$  и  $\mathbf{n}(s)$  при переходе от значения аргумента  $s$  к бесконечно близкому значению  $s + ds$ . Но геометрически фигура, образованная единичными взаимно ортогональными векторами  $\mathbf{t}$  и  $\mathbf{n}$ , может только повернуться как твердое тело (если не обращать внимания на точку приложения этих векторов). И действительно, легко показать, что формулы Френе с точностью 1-го порядка выражают поворот векторов  $\mathbf{t}$  и  $\mathbf{n}$  при переходе по кривой из точки  $M(s)$  в бесконечно близкую точку  $M'(s + ds)$  на бесконечно малый угол, именно на  $kds$  (считая положительным направление вращения от  $\mathbf{t}$  к  $\mathbf{n}$ ) (см. черт. 52).

В самом деле, если повернуть векторы  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$  на угол  $kds$ , то их новые значения выражаются через старые, очевидно, таким образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} + \Delta\mathbf{t} &= \cos(kds)\mathbf{t} + \sin(kds)\mathbf{n}, \\ \mathbf{n} + \Delta\mathbf{n} &= -\sin(kds)\mathbf{t} + \cos(kds)\mathbf{n}. \end{aligned}$$

Но так как мы ведем рассмотрение с точностью 1-го порядка, т. е. пренебрегаем бесконечно малым 2-го и высшего порядков, то  $\cos(kds)$  можно заменить через 1, а  $\sin(kds)$  через  $kds$ . Получим

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{t} &= kds\mathbf{n}, \\ \Delta\mathbf{n} &= -kds\mathbf{t}. \end{aligned}$$

Конечно, сохраняя лишь бесконечно малые 1-го порядка, мы получили здесь не точные приращения  $\Delta\mathbf{t}$  и  $\Delta\mathbf{n}$ , а только их главные части, т. е. дифференциалы. Мы вернулись, таким образом, к формулам (200).

Итак, (200) действительно выражают нам с точностью 1-го порядка поворот  $\mathbf{t}$  и  $\mathbf{n}$  на угол  $kds$ ; заметим, что этот угол пропорционален пути  $ds$ , пройденному по кривой от  $M$  до  $M'$ , а коэффициентом пропорциональности служит кривизна  $k$  в точке  $M$ . Последнее естественно согласуется с самим определением кривизны.

### § 29. Эволюта.

Формулы Френе дают нам удобное орудие для того, чтобы следить за изменением  $\mathbf{t}$  и  $\mathbf{n}$  вдоль кривой. Мы воспользуемся ими, чтобы изучить кривую, описываемую центром кривизны  $C$ , когда точка  $M$  описывает данную кривую.

*Геометрическое место центров кривизны для всевозможных точек данной кривой называется ее эволютой.*

Уравнение эволюты для кривой, заданной уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

у нас в сущности уже написано. А именно, достаточно переписать формулы (179), выражающие координаты  $a$ ,  $b$  центра кривизны  $C$ , для любой точки  $x(t)$ ,  $y(t)$  данной кривой:

$$\left. \begin{aligned} a &= x(t) + y'(t) \frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{x''(t)y'(t) - y''(t)x'(t)}, \\ b &= y(t) + x'(t) \frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}. \end{aligned} \right\} \quad (201)$$

Уравнения (201) представляют собой параметрические уравнения эволюты данной кривой, так как выражают координаты центра кривизны как функции того же параметра  $t$ , к которому отнесена данная кривая. При изменении  $t$  точка  $M(x, y)$  описывает исходную кривую, а точка  $C(a, b)$  — ее эволюту, причем при каждом данном значении  $t$  точка  $C$  является центром кривизны исходной кривой в точке  $M$ .

При практическом отыскании эволюты обычно пользуются формулами (201) или их частным случаем, когда кривая задана уравнением  $y = f(x)$ . Но при исследовании общих свойств эволюты, к которому мы сейчас переходим, гораздо более уместно пользоваться векторной записью. А именно, предполагая, что исходная кривая задана уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s),$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор  $\overline{OM}$  переменной точки  $M$  на кривой, мы нашли выражение (194) для вектора  $\overline{MC}$ , соединяющего точку  $M$  с ее центром кривизны  $C$  (см. черт. 53):

$$\overline{MC} = R\mathbf{n}.$$

Следовательно, радиус-вектор центра кривизны  $C$ , который мы будем обозначать через  $\mathbf{p}$ , можно выразить так:

$$\mathbf{p} = \overline{OC} = \overline{OM} + \overline{MC} = \mathbf{r}(s) + R(s) \mathbf{n}(s).$$

Мы пишем здесь  $R(s)$  и  $\mathbf{n}(s)$ , чтобы подчеркнуть функциональную зависимость этих величин от параметра  $s$ , но в дальнейшем мы будем писать короче:

$$\mathbf{p}(s) = \mathbf{r} + R \mathbf{n}. \quad (202)$$

Уравнение (202) можно рассматривать при переменном  $s$  как параметрическое представление эволюты, радиус-вектор которой  $\mathbf{p}$  выражен в функции параметра  $s$ . Следует помнить, однако, что вдоль эволюты параметр  $s$  уже не будет играть роли длины дуги.

Вычислим прежде всего дифференциал радиус-вектора эволюты  $\mathbf{p}$ . Получаем

$$d\mathbf{p} = d\mathbf{r} + dR \mathbf{n} + R d\mathbf{n}.$$

Но, с одной стороны,

$$d\mathbf{r} = \mathbf{t} ds = \mathbf{t} ds;$$

с другой стороны, пользуясь второй из формул (200), запишем

$$R d\mathbf{n} = -R k \mathbf{t} ds = -\mathbf{t} ds,$$

так как  $Rk = 1$ .

Таким образом, в выражении для  $d\mathbf{p}$  первый и третий члены взаимно уничтожаются, и мы получаем

$$d\mathbf{p} = dR \mathbf{n}. \quad (203)$$

Из этой основной формулы мы выведем важные геометрические свойства эволюты.

Нам известно, что при каждом значении  $s$  радиус-вектор  $\mathbf{r}(s)$  определяет некоторую точку  $M$  на исходной кривой, а  $\mathbf{p}(s)$  — соответствующий центр кривизны (точку эволюты)  $C$ , лежащий на нормали к исходной кривой. Дифференциал  $d\mathbf{p}$  радиус-вектора эволюты направлен (как и для любой кривой) по касательной к эволюте в точке  $C$ . Но, с другой стороны, (203) показывает, что  $d\mathbf{p}$  только скалярным множителем  $dR$  отличается от вектора  $\mathbf{n}$ , т. е. направлен параллельно нормали  $MC$ . Следовательно, касательная к эволюте в точке  $C$  направлена параллельно нормали  $MC$  и тем самым с нею совпадает.

Итак, нормали исходной кривой совпадают с касательными к эволюте в соответствующих точках.

Чтобы вывести другое замечательное свойство эволюты, мы ограничимся таким участком исходной кривой, на котором радиус кривизны  $R$  меняется монотонно. Будем пробегать этот участок на

исходной кривой, а также соответствующий ему участок на эволюте в сторону возрастания  $R$ . (На черт. 54 рассмотрим участок от  $M$  до  $M_1$  и от  $C$  до  $C_1$ .)

Возьмем обе части равенства (203) по модулю; учитывая, что  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, получим

$$|d\mathbf{p}| = |dR|.$$

Мы знаем [см. (158")], что модуль дифференциала радиус-вектора и модуль дифференциала дуги вдоль любой кривой совпадают. Обозначая через  $d\sigma$  дифференциал дуги вдоль эволюты, предыдущее равенство можно переписать так:

$$|d\sigma| = |dR|.$$

Условимся на соответствующем участке эволюты (на чертеже от  $C$  до  $C_1$ ) отсчитывать длину дуги  $\sigma$  в сторону возрастания  $R$ . Тогда  $R$  и  $\sigma$  растут одновременно,  $d\sigma$  и  $dR$  имеют одинаковые знаки, так что предыдущее равенство влечет за собой

$$d\sigma = dR.$$

Интегрируя почленно, получим

$$\sigma = R + \text{const.}$$

Это означает, что приращения  $\sigma$  всегда равны соответствующим приращениям  $R$ . Пусть на черт. 54 мы перешли из точки  $M$  в точку  $M_1$  и на эволюте — соответственно из  $C$  в  $C_1$ . Тогда приращение, полученное  $\sigma$ , равно, очевидно, длине дуги эволюты  $\overline{CC_1}$ , так что можно записать

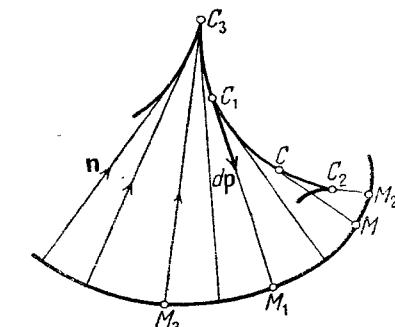
$$\overline{CC_1} = R_1 - R. \quad (204)$$

Здесь  $R_1$  — радиус кривизны в точке  $M_1$ , а  $R$  — в точке  $M$ .

Таким образом, при монотонном изменении  $R$  на данном участке его приращение равно пути, пройденному центром кривизны по эволюте. Любопытно отметить, что если переписать (204) в виде

$$R_1 = \overline{CC_1} + R,$$

то это означает равенство длин прямолинейного отрезка  $C_1 M_1$  и комбинированной линии  $C_1 C M$ . Таким образом, радиус кривизны



Черт. 54.

$R_1 = C_1 M_1$  получился как бы распрямлением линии  $C_1 CM$  путем «сматывания» ее криволинейной части  $\widetilde{C}_1 C$  с эволюты.

Мы имеем теперь достаточно ясное представление о том, что происходит на участках монотонного изменения радиуса кривизны  $R(s)$ . Нужно выяснить еще, как ведет себя эволюта в точках, где радиус кривизны исходной кривой переходит от возрастания к убыванию или от убывания к возрастанию, т. е. достигает максимума или минимума. В этих точках производная  $\dot{R}(s)$  необходимо обращается в нуль, следовательно,  $dR$  также равно нулю и, как показывает (203),

$$dp = 0, \text{ а значит, } \frac{dp}{ds} = p = 0.$$

Вообще говоря, при этом

$$\ddot{p} \neq 0, \quad \ddot{p} \neq \ddot{p},$$

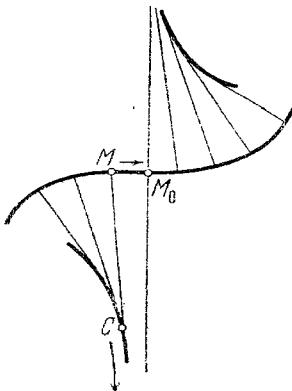
так что эволюта имеет точку возврата 1-го рода ( $p = 2, q = 3$ ; § 20).

Более детальное исследование показало бы, что в точках экстремума радиуса кривизны  $R$  эволюта всегда имеет точку возврата 1-го рода ( $p$  — четное,  $q = p + 1$  — нечетное, однако не обязательно  $p = 2, q = 3$ ).

На черт. 54 в точке  $M_2$  кривая достигает максимального искривления,  $R$  достигает, следовательно, минимума  $M_2 C_2$ , и центр кривизны  $C$ , описывая эволюту, в положении  $C_2$  наиболее приближается к исходной кривой. Эволюта образует заострение (точка возврата), обращенное к исходной кривой. Напротив, в точке  $M_3$ , где  $R$  достигает максимума, заострение эволюты обращено в обратную сторону от исходной кривой.

Теперь нам нужно хотя бы бегло уяснить себе поведение эволюты вблизи точки расправления ( $k = 0$ ) на исходной кривой.

Прежде всего самой этой точке не отвечает никакая точка на эволюте, так как  $R$  обращается в бесконечность. Когда же мы приближаемся по исходной кривой к точке расправления с той или другой стороны, то  $R = \frac{1}{k}$  бесконечно возрастает, и центр кривизны  $C$  стремится по эволюте в бесконечность. Итак, по обе стороны точки расправления  $M_0$  эволюта образует уходящие в бесконечность ветви. Можно было бы показать, что нормаль в самой точке  $M_0$  служит асимптотой для каждой из этих ветвей (черт. 55).



Черт. 55.

В случае, когда точка расправления есть точка перегиба, ветви волюты уходят в бесконечность в разные стороны своей общей асимптоты (так изображено на чертеже). Но возможны и другие случаи обращения кривизны в нуль (именно, когда касание кривой со своей касательной имеет нечетный порядок выше первого), тогда обе ветви удаляются в одну и ту же сторону.

### Другое определение эволюты.

Мы уже знаем, что эволюта в каждой своей точке  $C$  касается нормали к исходной кривой в соответствующей точке  $M$  и, следовательно, принадлежит к огибающей семейства нормалей исходной кривой. Покажем, что эволюта в точности совпадает с этой огибающей. Предполагая кривую заданной уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

запишем уравнение ее нормали

$$[X - x(t)] x'(t) + [Y - y(t)] y'(t) = 0, \quad (205)$$

где  $X, Y$  — текущие координаты.

При переменном  $t$  это уравнение определяет семейство всех нормалей к нашей кривой, причем  $t$  играет роль параметра семейства. Как мы знаем (§ 8), чтобы найти огибающую, нужно к уравнению семейства (205) присоединить еще одно, полученное дифференцированием его по параметру семейства  $t$ . Получим

$$[X - x(t)] x''(t) + [Y - y(t)] y''(t) - x'(t)^2 - y'(t)^2 = 0. \quad (205')$$

Решая эти уравнения относительно  $X, Y$ , мы получим координаты точки огибающей, выраженные в функции параметра  $t$ , т. е. параметрическое представление огибающей (особых точек на нормалях, как на прямых, не существует, и дискриминантная кривая совпадает с огибающей).

Но легко заметить, что уравнения (205), (205') (относительно  $X, Y$ ) вполне эквивалентны двум последним уравнениям (178) (относительно  $a, b$ ), так что текущие координаты  $X, Y$  по огибающей нормалей в точности совпадают с текущими координатами  $a, b$  эволюты.

Итак, эволюту можно определить, как огибающую семейства нормалей исходной кривой.

### Упражнения.

1. Показать, что эволюта трактисы (см. § 3, пример 4) есть цепная линия

$$y = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right).$$

2. Показать, что эволюта циклоиды есть та же циклоида, но параллельно смещенная; найти составляющие этого смещения по осям  $X$  и  $Y$  и относительное расположение кривых.

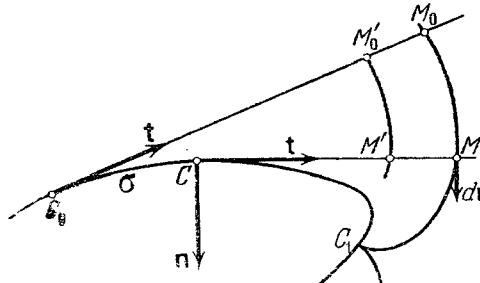
3. Показать, что для гипоциклоид (см. упражнения в конце § 7) эволюта есть кривая, подобная исходной кривой и получаемая из нее поворотом около начала  $O$  на угол  $\lambda\pi$  с последующим растяжением в постоянном отношении  $\frac{1}{1-2\lambda}$  по всем лучам, выходящим из начала  $O$ . Показать, что для эпициклоид имеет место то же самое, только вместо растяжения будет сжатие в отношении  $\frac{1}{1+2\lambda}$ .

### § 30. Эвольвента.

Пусть дана какая-нибудь кривая, определяемая уравнением

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\sigma),$$

где  $\mathbf{p}$  — радиус-вектор, а  $\sigma$  — длина дуги вдоль этой кривой, отсчитываемая от какой-нибудь начальной точки  $C_0$  ( $\sigma = 0$ ). На касательной в каждой точке выбираем положительное направление



Черт. 56.

на кривой, мы строим в ней касательную, а на этой последней точку  $M$ , откладывая отрезок

$$CM = C_0M_0 - \overline{C_0C}. \quad (206)$$

Отрезок  $CM$  укорочен по сравнению с  $C_0M_0$  на путь  $\overline{C_0C}$ , пройденный по кривой от начальной точки  $C_0$  до нашей точки  $C$ , т. е. на значение  $\sigma$  в точке  $C$ . Итак,

$$CM = \sigma_0 - \sigma. \quad (206')$$

Мы, таким образом, как бы навертываем гибкий, но нерастяжимый отрезок  $C_0M_0$  на кривую так, что навернутая часть  $\overline{C_0C}$  и остающаяся прямолинейной часть  $CM$  в сумме равны по длине  $C_0M_0$ .

Кривая, описываемая точкой  $M$ , когда  $C$  пробегает данную кривую, называется эвольвентой этой кривой.

Нетрудно записать параметрическое представление эвольвенты. Радиус-вектор точки  $M$ , который мы будем обозначать через  $\mathbf{r}$ , очевидно, выражается так:

$$\mathbf{r} = \overline{OM} = \overline{OC} + \overline{CM} = \mathbf{p}(\sigma) + \overline{CM}.$$

Что же касается вектора  $\overline{CM}$ , то он равен единичному касательному вектору  $\mathbf{t}$ , умноженному на длину отрезка  $CM$  с соответствующим знаком, т. е. на  $\sigma_0 - \sigma$ :

$$\overline{CM} = (\sigma_0 - \sigma) \mathbf{t}.$$

Отсюда

$$\mathbf{r} = \mathbf{p}(\sigma) + (\sigma_0 - \sigma) \mathbf{t}(\sigma). \quad (207)$$

Таково уравнение эвольвенты, отнесенное к параметру  $\sigma$ , т. е. к длине дуги на исходной кривой. Так как начальный отрезок  $\sigma_0$  выбирается произвольно и точку  $M_0$  на начальной касательной можно взять где угодно, то эвольвенты (207) образуют целое семейство с параметром  $\sigma_0$ . Наглядно себе это можно представить так, что гибкая, но нерастяжимая нить  $C_0M_0$  внатянутом состоянии постепенно навертывается на исходную кривую. Тогда каждая точка, отмеченная на этой нити, описывает одну из эвольвент исходной кривой.

Докажем основное свойство эвольвенты, именно, что касательная к исходной кривой в каждой точке  $C$  является нормалью к эвольвенте в соответствующей ее точке  $M$ . Действительно, дифференцируя (207), получим

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{p} - d\sigma \mathbf{t} + (\sigma_0 - \sigma) d\mathbf{t}.$$

Так как вектор  $\mathbf{t}$  есть сокращенное обозначение производной  $\frac{d\mathbf{p}}{d\sigma}$ , то первые два слагаемых в правой части взаимно уничтожаются. Что же касается  $d\mathbf{t}$ , то, согласно первой формуле Френе (197),

$$\frac{d\mathbf{t}}{d\sigma} = \dot{\mathbf{t}} = k\mathbf{n}.$$

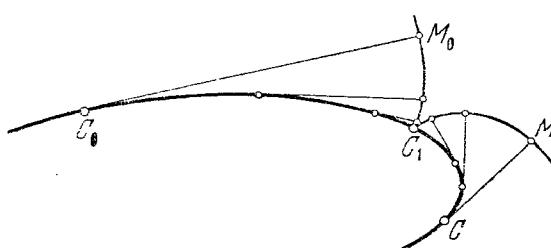
Следовательно,

$$d\mathbf{r} = (\sigma_0 - \sigma) k\mathbf{n} d\sigma. \quad (208)$$

Здесь  $k$  — кривизна,  $\mathbf{n}$  — единичная нормаль для исходной кривой. Как и для всякой кривой,  $d\mathbf{r}$ , дифференциал радиус-вектора эвольвенты, направлен по касательной к эвольвенте и в то же время, отличаясь от  $\mathbf{n}$  только скалярным множителем, параллелен  $\mathbf{n}$ . Следовательно, касательная к эвольвенте в точке  $M$  параллельна нормали в соответствующей точке  $C$  исходной кривой.

Отсюда следует, что нормаль к эвольвенте в точке  $M$  параллельна касательной к исходной кривой в точке  $C$ , а так как обе прямые проходят через точку  $M$ , то они совпадают между собой. Итак,  $CM$  служит не только касательной в  $C$ , но и нормалью в  $M$ .

Таким образом, каждая эвольвента исходной кривой пересекает под прямым углом все ее касательные (или, как говорят, эвольвенты являются ортогональными траекториями семейства касательных). При этом отрезок касательной  $MM'$  между двумя различными эвольвентами сохраняет постоянную длину (черт. 56).



Черт. 56.

Действительно, если для данной эвольвенты начальный отрезок на касательной  $C_0M_0 = \sigma_0$ , а для другой эвольвенты он будет  $C_0M'_0 = \sigma'_0$ , то на касательной в произвольной точке  $C(\sigma)$  нам придется отложить соответственно отрезки  $CM = \sigma_0 - \sigma$  отрезок касательной

и  $CM' = \sigma'_0 - \sigma$  [согласно (206')]. Тогда между этими двумя эвольвентами равен

$$MM' = CM' - CM = \sigma'_0 - \sigma_0,$$

т. е. сохраняет постоянную длину от точки к точке (напомним, что на касательных у нас установлено положительное направление и длины отрезков берутся со знаками).

Выясним еще, что происходит с эвольвентой в точке  $\sigma = \sigma_0$ , т. е. в точке  $C_1$ , где отрезок  $CM$  обращается в нуль и точка эвольвенты попадает на исходную кривую. В этой точке, как видно из (208),

$$d\mathbf{r} = 0 \text{ или } \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} = 0.$$

При этом, вообще говоря,

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{d\sigma^2} \neq 0, \quad \frac{d^3\mathbf{r}}{d\sigma^3} \neq \frac{d^2\mathbf{r}}{d\sigma^2},$$

так что эвольвента имеет точку возврата 1-го рода ( $p=2, q=3$ ; § 20). При более детальном исследовании нетрудно обнаружить, что точка возврата 1-го рода имеет место всегда, если только на исходной кривой мы не попадаем в точку раскрытия.

Это легко себе представить и наглядно, если учесть, что отрезок  $CM$ , проходя через нуль, меняет знак на обратный и начинает расти, откладываясь в обратном направлении (черт. 57).

Нетрудно, наконец, установить связь между понятиями эволюты и эвольвенты. Действительно, если мы построим для данной кривой эвольвенту, то нормали к эвольвенте, как мы выяснили, являются касательными к исходной кривой. Исходная кривая будет, таким образом, огибающей нормалей, т. е. эволютой по отношению к своей эвольвенте.

Обратно, если для данной кривой построена эволюта, то, разбивая данную кривую на участки монотонного изменения  $R$  и применяя свойство эволюты (204) (черт. 54), можем записать

$$CM = C_1M_1 - \bar{C}_1\bar{C}.$$

Считая точку  $C_1$  фиксированной на эволюте, а  $C$  — переменной, мы видим, что исходная кривая, описываемая точкой  $M$ , является эвольвентой для своей эволюты (согласно определению эвольвенты).

### § 31. Натуральное уравнение кривой.

Задавая кривую ее уравнением, мы пользуемся той или иной координатной системой. Таким образом, в записи уравнения отражается не только геометрическая форма кривой, но и выбор координатной системы; между тем этот выбор является фактом произвольным и в принципе никак не связан с самой кривой.

Возникает вопрос, нельзя ли характеризовать кривую уравнением, вид которого не связан с выбором координатной системы и отражает только геометрическую форму самой кривой. Как мы увидим, такое уравнение можно построить; оно будет называться *натуральным уравнением кривой*.

Предварительно уточним некоторые понятия. В этом параграфе под *кривой* мы будем понимать плоскую кривую, допускающую параметрическое представление

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad T_0 \leq t \leq T,$$

причем на кривой указано определенное направление в качестве положительного (кривая ориентирована). Как мы знаем (§ 21), в этом случае вдоль нашей кривой можно перейти к дуге  $s$  в качестве параметра:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j}, \quad S_0 \leq s \leq S.$$

Условимся при этом отсчитывать  $s$  в положительном направлении, связанном с данной кривой. Произвольной остается только начальная точка отсчета.

Обозначим через  $\alpha(s)$  угол, образованный единичным касательным вектором

$$\mathbf{t}(s) = \dot{\mathbf{r}}(s) = \dot{x}(s)\mathbf{i} + \dot{y}(s)\mathbf{j}$$

с положительным направлением оси  $X$  (черт. 58). Начальное значение  $\alpha(s)$  при  $s=0$  можно выбрать, очевидно, с произволом до слагаемого, кратного  $2\pi$ , в остальных точках  $\alpha(s)$  определяется однозначно, исходя из непрерывности его изменения;  $\alpha$  может меняться при этом в неограниченных пределах.

Так как  $\mathbf{t}(s)$  — вектор единичный, то его проекции на оси (его координаты) будут соответственно  $\cos \alpha$  и  $\sin \alpha$ . В то же время

$$\mathbf{t}(s) = \dot{\mathbf{r}}(s) = \dot{x}(s)\mathbf{i} + \dot{y}(s)\mathbf{j},$$

а значит,

$$\dot{x}(s) = \cos \alpha, \quad \dot{y}(s) = \sin \alpha. \quad (209)$$

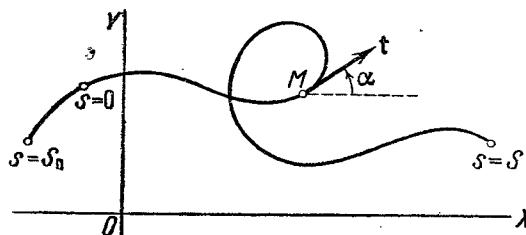
Учитывая, что сейчас роль параметра  $t$  играет у нас длина дуги  $s$  и, следовательно, производная  $s'(t)$  обращается в единицу, мы можем переписать формулу (187) для кривизны в виде

$$k = \dot{\alpha}(s). \quad (210)$$

Здесь мы сознательно опустили в правой части знак модуля. Мы условимся приписывать в этом параграфе (и только в нем) кривизну  $k$  знака  $\pm$  согласно формуле (210). Очевидно,

если  $k$  знак не всегда  $+$ , а  $\pm$  согласно формуле (210). Очевидно, этот знак будет  $+$ , если в данной точке  $\dot{\alpha} > 0$ , т. е. если  $\alpha$  растет вместе с  $s$ , и  $-$ , если  $\dot{\alpha} < 0$ , т. е. если  $\alpha$  убывает при возрастании  $s$ . Так как сейчас у нас кривая ориентирована, то направление возрастания  $s$  твердо установлено и соглашение о знаке  $k$  имеет однозначный смысл.

Дополнительные соглашения об ориентации кривой и о знаке  $k$  понадобились нам для большей общности теорем, которые мы собираемся доказать. Без этих соглашений нам пришлось бы ограничиться кусками кривой, где  $k$  не обращается в нуль.



Черт. 58.

Основную роль будет играть у нас уравнение (210), выражающее кривизну  $k$  как функцию дуги  $s$  вдоль кривой. Перепишем его в более отвлеченной форме:

$$| k = f(s), \quad S_0 \leq s \leq S. \quad (211)$$

Это уравнение называется *натуральным уравнением кривой*.

**Теорема.** Если две кривые  $C$  и  $C'$  отличаются только положением на плоскости, то их натуральные уравнения одинаковы (после согласования начальных точек отсчета дуги).

Когда мы говорим: отличаются только «положением на плоскости», то подразумеваем, что одна кривая может быть совмещена с другой, включая и совпадение ориентаций, путем вращения на некоторый угол  $\varphi$  и параллельного перенесения в плоскости (т. е. двигаясь в плоскости как твердое тело). Мы ограничимся этими наглядными кинематическими определениями, имея в виду, что никакого труда не составило бы записать и их точный математический смысл. Действительно, обычные формулы преобразования прямоугольных декартовых координат:

$$x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi + x_0,$$

$$y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi + y_0,$$

если истолковать  $x, y$  как координаты произвольной точки  $M$  на плоскости, а  $x', y'$  — как координаты некоторой другой точки  $M'$  в той же самой координатной системе, — определяют преобразование каждой точки  $M$  плоскости в соответствующую ей точку  $M'$ . Это преобразование и есть поворот плоскости как твердого тела на угол  $\varphi$  около начала координат с последующим параллельным перенесением на  $x_0$  параллельно оси  $X$  и на  $y_0$  — параллельно оси  $Y$ .

Переходя к доказательству теоремы, заметим, что между кривыми  $C$  и  $C'$  можно установить взаимно однозначное соответствие, сопоставляя попарно те точки на  $C$  и на  $C'$ , которые совпадут между собой после совмещения кривых. Выберем на кривых  $C$  и  $C'$  (черт. 59) за начальные точки отсчета дуги соответствующие друг другу точки  $M_0$  и  $M'_0$ . Тогда в соответствующих точках  $M$  и  $M'$  на обеих кривых всегда будут одинаковые значения  $s$ . Действительно, дуга  $M_0M$  после совмещения кривых и их ориентаций займет положение  $M'_0M'$ , а так как во время движения кривой  $C$  как твердого тела длина дуги  $M_0M$  не меняется, то

$$\widetilde{M_0M} = \widetilde{M'_0M'},$$

и следовательно, значение параметра  $s$  в  $M$  и  $M'$  одно и то же. В частности, если в начальной и конечной точках кривой  $C$  значения  $s$  будут  $S_0$  и  $S$ , то в тех же пределах меняется  $s$  и на  $C'$ .

Далее, в точках  $M$  и  $M'$  углы наклона касательных отличаются на постоянную. Действительно, при повороте кривой  $C$  на некоторый угол  $\varphi$  все касательные  $t$  к ней повернутся на этот же угол, параллельное же перенесение на направлениях касательных никак не отразится. Поэтому значения угла  $\alpha$  в точках  $M'$  и  $M$  (т. е. при одинаковых значениях  $s$ ) отличаются на  $\varphi$ , и вид функции  $\alpha(s)$  для кривой  $C'$  сравнительно с кривой  $C$  отличается добавлением постоянной  $\varphi$ . Но это значит, что после дифференцирования по  $s$  эта разница исчезает, и вид функции

$\dot{\alpha}(s)$  будет один и тот же для обеих кривых. Другими словами,

формула (210) определит нам кривизну  $k$  в обоих случаях как одну и ту же функцию от  $s$  (и при  $s$ , меняющемся в тех же пределах). Этим теорема доказана.

Более интересной является

Обратная теорема. Если две кривые  $C$  и  $C'$  имеют одно и то же натуральное уравнение

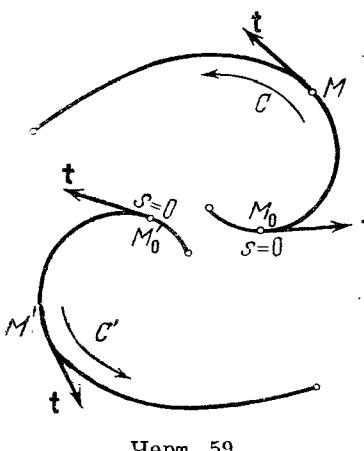
$$k = f(s), \quad S_0 \leq s \leq S, \quad (212)$$

то они отличаются только положением на плоскости.

Отметим на кривых  $C$  и  $C'$  точки отсчета  $M_0$  и  $M'_0$  (черт. 59). Перенесем параллельно кривую  $C$ , смешав все ее точки на один и тот же вектор, равный  $M_0M'_0$ , т. е. с таким расчетом, чтобы точка  $M_0$  попала в  $M'_0$ . После этого повернем кривую  $C$  около точки  $M_0$  так, чтобы единичный касательный вектор  $t$  к кривой  $C$  в этой точке совпал с таким же вектором к кривой  $C'$ . В результате путем движения кривой  $C$  в плоскости мы добились совмещения точки  $M_0$  и вектора  $t$  в ней с точкой  $M'_0$  и вектором  $t$  в ней. Мы докажем, что теперь кривая  $C$  целиком совпадет с  $C'$ ; тем самым будет доказана наша теорема. Говоря теперь о кривой  $C$ , мы будем иметь в виду ее *после перемещения*. В силу предыдущей теоремы натуральное уравнение кривой  $C$  осталось при этом без изменения и попрежнему имеет вид (212), общий для  $C$  и  $C'$ .

Так как при  $s=0$  мы попадаем на обеих кривых  $C$  и  $C'$  в одну и ту же точку  $M_0 \equiv M'_0$  с одним и тем же вектором  $t$ , то и угол наклона этого вектора к оси  $X$  можно считать одинаковым для обеих кривых:

$$\alpha = \alpha_0 \text{ при } s=0. \quad (213)$$



Черт. 59.

Далее, выпишем формулу (210)

$$\dot{\alpha}(s) = k.$$

Учитывая, что на обеих кривых  $k$  выражается одной и той же функцией дуги (212), можно записать сразу для обеих

$$\dot{\alpha}(s) = f(s).$$

Интегрируя по  $s$  в пределах от 0 до  $s$ , получим

$$\alpha(s) - \alpha(0) = \int_0^s f(s) ds.$$

Так как  $\alpha(0)$  обозначено через  $\alpha_0$ , то окончательно

$$\alpha(s) = \int_0^s f(s) ds + \alpha_0.$$

Это показывает, что вид функции  $\alpha(s)$  один и тот же для обеих кривых.

Запишем теперь формулы (209)

$$\dot{x}(s) = \cos \alpha(s), \quad \dot{y}(s) = \sin \alpha(s).$$

Интегрируя почленно по  $s$  в пределах от 0 до  $s$ , получим

$$x(s) - x(0) = \int_0^s \cos \alpha(s) ds, \quad y(s) - y(0) = \int_0^s \sin \alpha(s) ds.$$

Очевидно,  $x(0)$ ,  $y(0)$  суть значения  $x$ ,  $y$  при  $s=0$ , т. е. суть координаты начальной точки отсчета  $M_0$  в случае кривой  $C$  и  $M'_0$  в случае кривой  $C'$ . Но точки  $M_0$  и  $M'_0$  совпадают, и следовательно, значения  $x(0)$ ,  $y(0)$  для обеих кривых будут один и те же. Тем самым и вид функциональной зависимости  $x(s)$ ,  $y(s)$  один и тот же для обеих кривых  $C$  и  $C'$ .

Эти кривые имеют одно и то же параметрическое представление и, следовательно, совпадают. Теорема доказана.

Две доказанные теоремы могут быть объединены в одной формулировке: для того чтобы две кривые имели одну и ту же геометрическую форму, отличающуюся лишь положением на плоскости, необходимо<sup>1)</sup> и достаточно, чтобы они имели одно и то же натуральное уравнение (212).

Таким образом, натуральное уравнение вполне характеризует кривую с точки зрения ее геометрической формы. При этом выбор координатной системы на плоскости никак не отражается на виде

<sup>1)</sup> После согласования начальных точек отсчета.

натурального уравнения, так как последнее связывает величины  $s$  и  $k$ , которые зависят только от самой кривой, но не от координатной системы на плоскости.

К полученным результатам нужно сделать еще существенное добавление.

Пусть совершенно произвольно задана непрерывная функция  $f(s)$  в области изменения аргумента  $S_0 \leq s \leq S$ . В этом случае всегда можно построить кривую, для которой натуральное уравнение будет иметь вид

$$k = f(s), \quad S_0 \leq s \leq S.$$

Для доказательства выберем произвольно некоторую точку  $M_0(x_0, y_0)$  на плоскости и некоторый угол  $\alpha_0$ . Построим функцию  $\alpha(s)$ :

$$\alpha(s) = \int_0^s f(s) ds + \alpha_0, \quad (214)$$

и затем функции

$$x(s) = \int_0^s \cos \alpha(s) ds + x_0, \quad y(s) = \int_0^s \sin \alpha(s) ds + y_0. \quad (214')$$

Построим теперь кривую, определяемую параметрическим представлением

$$x = x(s), \quad y = y(s)$$

с ориентацией в сторону возрастания параметра  $s$ . Покажем, что она будет как раз искомой кривой (выписывая эти уравнения, мы еще не знаем заранее, будет ли параметр  $s$  длиной дуги вдоль нашей кривой). Продифференцируем (214'):

$$\begin{cases} dx = \cos \alpha(s) ds, \\ dy = \sin \alpha(s) ds. \end{cases} \quad (215)$$

Отсюда

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = ds,$$

т. е.  $ds$  действительно есть дифференциал дуги, и параметр  $s$  играет роль длины дуги вдоль построенной кривой.

Перепишем (215) в виде

$$\dot{x} = \frac{dx}{ds} = \cos \alpha(s), \quad \dot{y} = \frac{dy}{ds} = \sin \alpha(s)$$

и выпишем затем выражение вектора  $t$  для построенной кривой:

$$t = \dot{r} = \dot{x}i + \dot{y}j = \cos \alpha(s)i + \sin \alpha(s)j.$$

Эта формула показывает, что единичный вектор  $t$  наклонен к оси  $X$  под углом  $\alpha(s)$ . Вычислим, наконец, для построенной кривой кривизну  $k$  по формуле (210):

$$k = \dot{\alpha}(s).$$

Но так как  $\alpha(s)$  введено у нас согласно (214), то это значит, что  $k = f(s)$ .

Мы доказали, что построенная кривая обладает наперед заданным натуральным уравнением.

Конечно, такая кривая будет не единственной. Как следует из предыдущих теорем, таким же натуральным уравнением будут обладать те и только те кривые, которые получаются из данной путем ее движений по плоскости. В нашем построении это обстоятельство сказались в произвольном выборе точки  $M_0$  и угла  $\alpha_0$ .

В заключение заметим, что зеркально симметрические кривые (черт. 60) не переводятся одна в другую движением в плоскости (для этого требуется вращение в пространстве), так что они будут обладать разными натуральными уравнениями. Возьмем на этих кривых соответственные начальные точки отсчета и соответственные ориентации; чем тогда будут различаться их натуральные уравнения? Нетрудно подсчитать, что в соответственных точках значения угла  $\alpha$  для обеих кривых отличаются знаком, если не обращать внимания на постоянное слагаемое. В таком случае значения  $k = \dot{\alpha}$  также отличаются знаком, и если для одной кривой натуральное уравнение будет

$$k = f(s),$$

то для другой оно примет вид

$$k = -f(s).$$

#### Упражнения.

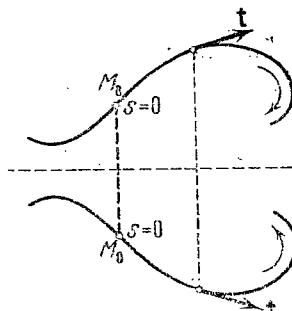
1. Показать, что натуральное уравнение цепной линии

$$y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$$

есть

$$aR = a^2 + s^2,$$

где  $R$  – радиус кривизны (дуга  $s$  отсчитывается от точки  $x = 0$ ).



Черт. 60.

2. Найти кривую, натуральное уравнение которой

$$\mu^2 R^2 + \nu^2 s^2 = 1,$$

где  $\mu \neq \nu$  — постоянные  $> 0$ ;  $s$  меняется от  $-\frac{1}{\nu}$  до  $+\frac{1}{\nu}$ .

Выразим кривизну:

$$k = \frac{\mu}{\sqrt{1 - \nu^2 s^2}}.$$

Ищем угол наклона  $\alpha$ :

$$\alpha = \int k ds = \int \frac{\mu ds}{\sqrt{1 - \nu^2 s^2}} = \frac{\mu}{\nu} \arcsin \nu s.$$

Отсюда

$$s = \frac{1}{\nu} \sin \frac{\alpha \nu}{\mu}, \quad ds = \frac{1}{\mu} \cos \frac{\alpha \nu}{\mu} \cdot d\alpha.$$

Примем  $\alpha$  за параметр вдоль искомой кривой.

Так как

$$dx = \cos \alpha \cdot ds = \frac{1}{\mu} \cos \frac{\alpha \nu}{\mu} \cos \alpha \cdot d\alpha = \frac{1}{2\mu} \left( \cos \left( 1 + \frac{\nu}{\mu} \right) \alpha + \cos \left( 1 - \frac{\nu}{\mu} \right) \alpha \right) d\alpha,$$

$$dy = \sin \alpha \cdot ds = \frac{1}{\mu} \cos \frac{\alpha \nu}{\mu} \sin \alpha \cdot d\alpha = \frac{1}{2\mu} \left( \sin \left( 1 + \frac{\nu}{\mu} \right) \alpha + \sin \left( 1 - \frac{\nu}{\mu} \right) \alpha \right) d\alpha,$$

то

$$x = \int \cos \alpha \cdot ds = \frac{\sin \left( 1 + \frac{\nu}{\mu} \right) \alpha}{2(\mu + \nu)} + \frac{\sin \left( 1 - \frac{\nu}{\mu} \right) \alpha}{2(\mu - \nu)},$$

$$y = \int \sin \alpha \cdot ds = -\frac{\cos \left( 1 + \frac{\nu}{\mu} \right) \alpha}{2(\mu + \nu)} - \frac{\cos \left( 1 - \frac{\nu}{\mu} \right) \alpha}{2(\mu - \nu)}.$$

Во всех квадратурах мы откладываем произвольную постоянную, так как нам важно получить хоть одну кривую (остальные отличаются от нее лишь положением на плоскости).

Повернув кривую около начала на угол  $\frac{\pi}{2} - \frac{\mu}{\nu}$  и введя в качестве параметра  $\varphi = 2 \frac{\nu}{\mu} \alpha + \pi$ , мы замечаем, что полученная кривая есть либо гипоциклоида, либо эпциклоида (ср. упражнения в конце § 7). Выяснить, при каких условиях, наложенных на  $\mu$ ,  $\nu$ , имеет место первое, при каких условиях второе, и выразить в каждом случае  $\alpha$  и  $\lambda$  через  $\mu$  и  $\nu$ .

3. Найти кривую с натуральным уравнением

$$R^2 + s^2 = a^2, \quad a = \text{const.}$$

Показать, что это — циклоида.

4. Найти кривую с натуральным уравнением

$$R^2 = as.$$

Показать, что это — эволвента окружности.

## ГЛАВА IV.

### ТЕОРИЯ КРИВИЗНЫ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ.

#### § 32. Касательные; нормали.

Как было уже оговорено в начале § 15, мы рассматриваем кривые

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (216)$$

лишь в их заведомо обыкновенных точках, т. е. при условии

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k} \neq 0, \quad (216')$$

или, записывая параметрическое представление (216) в координатной форме

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad (217)$$

мы ограничиваемся точками, где

$$x'(t), \quad y'(t), \quad z'(t)$$

не обращаются одновременно в нуль.

Истолковывая дифференцирование вектор-функции  $\mathbf{r}(t)$ , представляющей текущий радиус-вектор кривой в зависимости от параметра  $t$ , мы обнаружили, что производная  $\mathbf{r}'(t)$  направлена по касательной в соответствующей точке кривой  $M(t)$ .

Воспользуемся этим результатом прежде всего для записи уравнения касательной. Касательную в данной точке кривой  $M(t)$  мы можем рассматривать как прямую, проходящую через эту точку

$$M[x(t), y(t), z(t)]$$

по направлению вектора

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}.$$

Как известно из аналитической геометрии, уравнение такой прямой (в форме пропорций) имеет вид

$$\frac{X - x(t)}{x'(t)} = \frac{Y - y(t)}{y'(t)} = \frac{Z - z(t)}{z'(t)}, \quad (218)$$

где  $X, Y, Z$  — текущие координаты.

2. Найти кривую, натуральное уравнение которой

$$\mu^2 R^2 + \nu^2 s^2 = 1,$$

где  $\mu \neq \nu$  — постоянные  $> 0$ ;  $s$  меняется от  $-\frac{1}{\nu}$  до  $+\frac{1}{\nu}$ .

Выразим кривизну:

$$k = \frac{\mu}{\sqrt{1 - \nu^2 s^2}}.$$

Ищем угол наклона  $\alpha$ :

$$\alpha = \int k ds = \int \frac{\mu ds}{\sqrt{1 - \nu^2 s^2}} = \frac{\mu}{\nu} \arcsin \nu s.$$

Отсюда

$$s = \frac{1}{\nu} \sin \frac{\alpha \nu}{\mu}, \quad ds = \frac{1}{\mu} \cos \frac{\alpha \nu}{\mu} \cdot d\alpha.$$

Примем  $\alpha$  за параметр вдоль искомой кривой.

Так как

$$dx = \cos \alpha ds = \frac{1}{\mu} \cos \frac{\alpha \nu}{\mu} \cos \alpha dx = \frac{1}{2\mu} \left( \cos \left( 1 + \frac{\nu}{\mu} \right) \alpha + \cos \left( 1 - \frac{\nu}{\mu} \right) \alpha \right) dx,$$

$$dy = \sin \alpha ds = \frac{1}{\mu} \cos \frac{\alpha \nu}{\mu} \sin \alpha dx = \frac{1}{2\mu} \left( \sin \left( 1 + \frac{\nu}{\mu} \right) \alpha + \sin \left( 1 - \frac{\nu}{\mu} \right) \alpha \right) dx,$$

то

$$x = \int \cos \alpha ds = \frac{\sin \left( 1 + \frac{\nu}{\mu} \right) \alpha}{2(\mu + \nu)} + \frac{\sin \left( 1 - \frac{\nu}{\mu} \right) \alpha}{2(\mu - \nu)},$$

$$y = \int \sin \alpha ds = -\frac{\cos \left( 1 + \frac{\nu}{\mu} \right) \alpha}{2(\mu + \nu)} - \frac{\cos \left( 1 - \frac{\nu}{\mu} \right) \alpha}{2(\mu - \nu)}.$$

Во всех квадратурах мы откидываем произвольную постоянную, так как нам важно получить хоть одну кривую (остальные отличаются от нее лишь положением на плоскости).

Повернув кривую около начала на угол  $\frac{\pi}{2} - \frac{\mu}{\nu}$  и введя в качестве параметра  $\varphi = 2 \frac{\nu}{\mu} \alpha + \pi$ , мы замечаем, что полученная кривая есть либо гипоциклоида, либо эпциклоида (ср. упражнения в конце § 7). Выяснить, при каких условиях, наложенных на  $\mu$ ,  $\nu$ , имеет место первое, при каких условиях второе, и выразить в каждом случае  $\alpha$  и  $\lambda$  через  $\mu$  и  $\nu$ .

3. Найти кривую с натуральным уравнением

$$R^2 + s^2 = a^2, \quad a = \text{const.}$$

Показать, что это — циклоида.

4. Найти кривую с натуральным уравнением

$$R^2 = as.$$

Показать, что это — эволвента окружности.

## ГЛАВА IV.

### ТЕОРИЯ КРИВИЗНЫ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ.

#### § 32. Касательные; нормали.

Как было уже оговорено в начале § 15, мы рассматриваем кривые

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (216)$$

лишь в их заведомо обыкновенных точках, т. е. при условии

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k} \neq 0, \quad (216')$$

или, записывая параметрическое представление (216) в координатной форме

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad (217)$$

мы ограничиваемся точками, где

$$x'(t), \quad y'(t), \quad z'(t)$$

не обращаются одновременно в нуль.

Истолковывая дифференцирование вектор-функции  $\mathbf{r}(t)$ , представляющей текущий радиус-вектор кривой в зависимости от параметра  $t$ , мы обнаружили, что производная  $\mathbf{r}'(t)$  направлена по касательной в соответствующей точке кривой  $M(t)$ .

Воспользуемся этим результатом прежде всего для записи уравнения касательной. Касательную в данной точке кривой  $M(t)$  мы можем рассматривать как прямую, проходящую через эту точку

$$M[x(t), y(t), z(t)]$$

по направлению вектора

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}.$$

Как известно из аналитической геометрии, уравнение такой прямой (в форме пропорций) имеет вид

$$\frac{X - x(t)}{x'(t)} = \frac{Y - y(t)}{y'(t)} = \frac{Z - z(t)}{z'(t)}, \quad (218)$$

где  $X, Y, Z$  — текущие координаты.

Нормалью к пространственной кривой называется перпендикуляр, восставленный к касательной в точке касания. Конечно, в данной точке кривой будет бесчисленное множество нормалей. Все они перпендикулярны к касательной в этой точке и заполняют, следовательно, целую плоскость, перпендикулярную к касательной.

Плоскость, проходящая через точку касания перпендикулярно к касательной, называется нормальной плоскостью (черт. 61).

Заметим, что плоская кривая, если ее рассматривать вмешенной в пространство, также обладает бесчисленным множеством нормалей. Мы рассматривали в предыдущем лишь одну нормаль плоской кривой потому, что ограничивались нормально, лежащей в плоскости самой кривой.

Нетрудно составить уравнение нормальной плоскости как плоскости, проходящей через точку кривой

$$M[x(t), y(t), z(t)]$$

перпендикулярно к касательному вектору

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}.$$

Из аналитической геометрии известно, что уравнение такой плоскости имеет вид

$$x'(t)[X - x(t)] + y'(t)[Y - y(t)] + z'(t)[Z - z(t)] = 0. \quad (219)$$

Мы получили уравнение нормальной плоскости.

#### Касательная плоскость к поверхности.

Рассмотрим поверхность, заданную уравнением между текущими координатами, т. е. геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

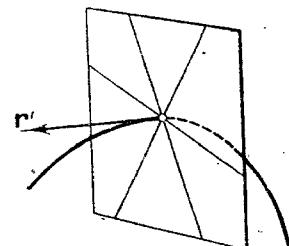
$$F(x, y, z) = 0. \quad (220)$$

Проведем на этой поверхности какую-нибудь кривую (217). Тогда при любом значении  $t$  точка  $M[x(t), y(t), z(t)]$  кривой лежит на поверхности, так что уравнение (220) после подстановки  $x(t), y(t), z(t)$  должно обращаться в тождество

$$F[x(t), y(t), z(t)] \equiv 0. \quad (220')$$

Продифференцируем это тождество по  $t$ . Получим

$$F_x x'(t) + F_y y'(t) + F_z z'(t) \equiv 0 \quad (220'')$$



Черт. 61.

в каждой точке кривой на поверхности. В левой части  $x', y', z'$  зависят от выбора кривой на поверхности и представляют собой координаты касательного к кривой вектора  $\mathbf{r}'(t)$ . Что же касается  $F_x, F_y, F_z$ , то они зависят только от выбора точки  $x, y, z$  на поверхности. Составим вектор

$$\nabla F(x, y, z) = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}, \quad (221)$$

имеющий в каждой точке поверхности вполне определенное значение;  $\nabla F$  — его краткое обозначение. [Собственно говоря, вектор  $\nabla F$ , определяемый формулой (221), существует в каждой точке всей пространственной области, в которой задана дифференцируемая функция точки  $F(x, y, z)$ . Вектор  $\nabla F$  (читается «набла  $F$ ») называется градиентом функции  $F$ , или, как часто говорят, скалярного поля  $F(x, y, z)$ . Понятие градиента принадлежит к числу основных понятий векторного анализа в специальном смысле этого слова и имеет важные физико-механические применения.]

Всматриваясь в левую часть (220''), мы замечаем, что она представляет собой скалярное произведение векторов (221) и (216'), т. е. вектор-градиента в данной точке поверхности и касательного вектора к кривой, проходящей по поверхности, в той же точке. Мы можем переписать (220'') в виде

$$\nabla F(x, y, z) \mathbf{r}'(t) = 0. \quad (222)$$

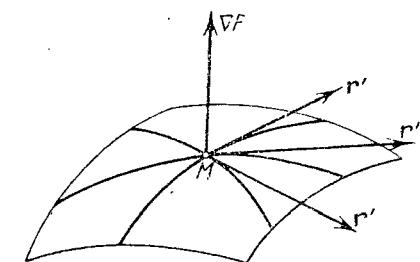
Мы ограничимся рассмотрением на поверхности только тех точек, где вектор  $\nabla F$  не исчезает:

$$\nabla F(x, y, z) \neq 0, \quad (223)$$

или, что то же самое, где  $F_x, F_y, F_z$  не равны одновременно нулю. Смысъ этого ограничения мы выясним немного позже.

В таком случае формулу (222) можно истолковать геометрически так.

Будем через данную точку  $M(x, y, z)$  поверхности проводить все возможные кривые по поверхности и брать к ним в этой точке касательные векторы  $\mathbf{r}'(t)$ . Тогда (222) показывает, что все эти векторы будут перпендикулярны к вектору  $\nabla F(x, y, z)$ , вполне определенному в данной точке  $M(x, y, z)$ , и расположатся все в одной плоскости, проходящей через  $M$  перпендикулярно к  $\nabla F$  (черт. 62).



Черт. 62.

Итак, касательные в данной точке поверхности  $M$  (в которой  $\nabla F \neq 0$ ) к всевозможным кривым, проходящим по поверхности, располагаются в одной плоскости, перпендикулярной к  $\nabla F$ . Эта плоскость называется касательной плоскостью к поверхности в точке  $M$ .

Нетрудно составить уравнение касательной плоскости как плоскости, проходящей через данную точку  $M(x, y, z)$  перпендикулярно к данному вектору (221). Уравнение будет иметь вид

$$F_x(x, y, z)(X - x) + F_y(x, y, z)(Y - y) + F_z(x, y, z)(Z - z) = 0, \quad (224)$$

где  $X, Y, Z$  — текущие координаты.

Нормалью к поверхности называется перпендикуляр к касательной плоскости в точке касания (черт. 62). Очевидно, в каждой точке  $M$  нормаль будет единственной. Ее уравнение легко составить как уравнение прямой, проходящей через данную точку  $M(x, y, z)$  в направлении вектора  $\nabla F$ . Уравнение такой прямой будет иметь вид

$$\frac{X - x}{F_x(x, y, z)} = \frac{Y - y}{F_y(x, y, z)} = \frac{Z - z}{F_z(x, y, z)}. \quad (224')$$

Выясним теперь смысл условия (223). Допустим для определенности, что в данной точке именно  $F_z \neq 0$ . Тогда по теореме существования неявной функции уравнение поверхности (220) однозначно разрешимо вблизи данной точки относительно  $z$  и может быть переписано в виде

$$z = f(x, y). \quad (225)$$

Если в какой-нибудь системе координат  $x, y, z$  уравнение поверхности вблизи данной точки может быть написано в виде, разрешенном относительно одной координаты, то мы будем называть эту точку *обыкновенной* точкой поверхности.

Геометрически же уравнение (225) означает, как известно, что каждой точке  $P(x, y, 0)$  в некоторой области  $D$  на плоскости  $XY$  отвечает одна и только одна точка поверхности  $M(x, y, z)$ , получаемая путем смещения точки  $(x, y, 0)$  параллельно оси  $Z$  на отрезок  $f(x, y)$ . Наглядно мы можем, следовательно, представлять себе соответствующий кусок поверхности как кусок плоскости  $D$ , деформированный путем плавного смещения его точек в направлении, перпендикулярном к плоскости (черт. 63).

Такой кусок поверхности мы будем называть *простым куском поверхности*.

Смещение является «плавным» в том смысле, что величина смещения  $f(x, y)$  предполагается непрерывной и дифференцируемой функцией точки  $P(x, y, 0)$  в области  $D$ .

Итак, обыкновенная точка поверхности характеризуется тем, что достаточно малая ее окрестность в пространстве (например, шар с центром в данной точке) вырезает простой кусок поверхности.

Точки поверхности (220), в которых выполняется условие (223) (и которые, как показано выше, обязательно будут обыкновенными) мы будем называть *заведомо обыкновенными*.

Если условие (223) не соблюдено, то точка может оказаться *особой* с совсем другими свойствами. Так, для поверхности

$$F(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

в точке  $x = y = z = 0$  обращаются в нуль все частные производные  $F_x, F_y, F_z$ . И действительно, эта точка служит вершиной конуса, вблизи которой, как бы ни уменьшать окрестность, уравнение конуса нельзя записать в виде (225), а сам конус нельзя представить в виде простого куска поверхности (см. черт. 63). Аналогично обстоит дело и в точках самопересечения поверхности.

Наша теорема о существовании касательной плоскости, в которой расположатся касательные ко всем кривым на поверхности, в таких точках тоже неверна.

Касательная и нормальная плоскость к кривой, полученной пересечением двух поверхностей.

Рассмотрим две какие-нибудь поверхности

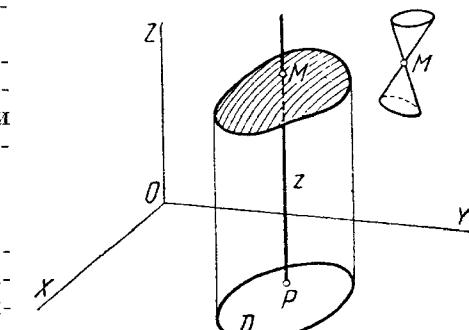
$$F^{(1)}(x, y, z) = 0, \quad F^{(2)}(x, y, z) = 0. \quad (226)$$

Геометрическое место точек, общих обеим поверхностям, мы будем называть кривой их пересечения. Покажем, что это действительно кривая в том смысле, что вблизи любой своей точки, за исключением, может быть, некоторых особых, наше геометрическое место представляет собой простой отрезок (см. § 15).

Возьмем какую-нибудь точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  на кривой; ее координаты удовлетворяют по определению обоим уравнениям:

$$F^{(1)}(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad F^{(2)}(x_0, y_0, z_0) = 0. \quad (227)$$

Построим в точке  $M_0$  векторы  $\nabla F^{(1)}$  и  $\nabla F^{(2)}$ .



Черт. 63.

Мы предположим, что эти векторы не коллинеарны друг другу<sup>1)</sup>, так что касательные плоскости к обеим поверхностим в точке  $M_0$  не совпадают между собой:

$$\nabla F^{(1)} \neq \nabla F^{(2)}. \quad (228)$$

Это условие, которое практически обычно выполняется, за исключением отдельных точек кривой, как раз и гарантирует нам обычновенный характер точки  $M_0$  на кривой, т. е. строение кривой вблизи точки в виде простого отрезка. В самом деле, перепишем условие (228) в координатной форме. Для параллельности векторов необходима и достаточна пропорциональность их соответствующих координат; поэтому условие непараллельности векторов  $\nabla F^{(1)}$  и  $\nabla F^{(2)}$  можно записать так:  $F_x^{(1)}, F_y^{(1)}, F_z^{(1)}$  и  $F_x^{(2)}, F_y^{(2)}, F_z^{(2)}$  не пропорциональны между собой, или, что то же, хотя бы один из трех детерминантов 2-го порядка, выделенных из соответствующей матрицы, отличен от нуля. Пусть для определенности

$$\begin{vmatrix} F_y^{(1)} & F_z^{(1)} \\ F_y^{(2)} & F_z^{(2)} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (228')$$

Итак, значения  $x_0, y_0, z_0$  удовлетворяют уравнениям (226); кроме того, якобиан левых частей (226) по переменным  $y$  и  $z$  отличен от нуля в точке  $M_0$ , т. е. при значениях переменных  $x_0, y_0, z_0$ .

По теореме существования неявных функций<sup>2)</sup> в этом случае уравнения (226) вблизи значений  $x = x_0, y = y_0, z = z_0$  однозначно разрешимы относительно переменных  $y$  и  $z$  и могут быть, следовательно, переписаны в виде

$$y = y(x), \quad z = z(x). \quad (229)$$

А это и показывает, что вблизи точки  $M_0$  кривая представляет собой простой отрезок.

Поскольку в этом случае кривая имеет в  $M_0$  обычновенную точку, применимы все наши предыдущие результаты. Прежде всего, раз кривая лежит на обеих поверхностях, касательная к ней в точке  $M_0$  расположится на касательных плоскостях, взятых к той и другой поверхности в той же точке  $M_0$  (по определению касательной плоскости). Следовательно, касательная к кривой в  $M_0$ , являясь пересечением обеих касательных плоскостей, будет перпендикулярна к обоим нормальным векторам

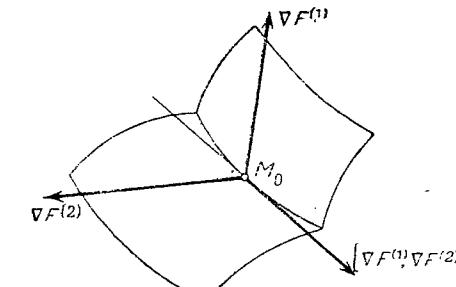
<sup>1)</sup> Тем самым ни один из них не обращается в нуль, так как вектор, равный внулю, можно считать коллинеарным любому другому.

<sup>2)</sup> Г. М. Фихтенгольц, т. I, гл. VI, § 2.

$\nabla F^{(1)}$  и  $\nabla F^{(2)}$  (черт. 64). Отсюда ясно, что векторное произведение

$$[\nabla F^{(1)}, \nabla F^{(2)}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ F_x^{(1)} & F_y^{(1)} & F_z^{(1)} \\ F_x^{(2)} & F_y^{(2)} & F_z^{(2)} \end{vmatrix} \quad (230)$$

направлено параллельно касательной к кривой пересечения.



Черт. 64.

Теперь легко написать и уравнение этой касательной как прямой, проходящей через данную точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  параллельно вектору (230):

$$\frac{X - x_0}{\begin{vmatrix} F_y^{(1)} & F_z^{(1)} \\ F_y^{(2)} & F_z^{(2)} \end{vmatrix}} = \frac{Y - y_0}{\begin{vmatrix} F_z^{(1)} & F_x^{(1)} \\ F_z^{(2)} & F_x^{(2)} \end{vmatrix}} = \frac{Z - z_0}{\begin{vmatrix} F_x^{(1)} & F_y^{(1)} \\ F_x^{(2)} & F_y^{(2)} \end{vmatrix}}. \quad (231)$$

Так же просто составляется и уравнение нормальной плоскости к кривой пересечения как плоскости, проходящей через данную точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  перпендикулярно к вектору (230):

$$(X - x_0) \begin{vmatrix} F_y^{(1)} & F_z^{(1)} \\ F_y^{(2)} & F_z^{(2)} \end{vmatrix} + (Y - y_0) \begin{vmatrix} F_z^{(1)} & F_x^{(1)} \\ F_z^{(2)} & F_x^{(2)} \end{vmatrix} + (Z - z_0) \begin{vmatrix} F_x^{(1)} & F_y^{(1)} \\ F_x^{(2)} & F_y^{(2)} \end{vmatrix} = 0 \quad (232).$$

или

$$\begin{vmatrix} X - x_0 & Y - y_0 & Z - z_0 \\ F_x^{(1)} & F_y^{(1)} & F_z^{(1)} \\ F_x^{(2)} & F_y^{(2)} & F_z^{(2)} \end{vmatrix} = 0. \quad (232')$$

В заключение можно пояснить на простых примерах, почему условие (228) гарантирует обычновенный характер точки на кри-

вой пересечения и почему несоблюдение этого условия, т. е. совпадение касательных плоскостей к обеим поверхностям в данной точке, может привести к особому характеру этой точки.

Представим себе прежде всего две сферы, касающиеся друг друга в некоторой точке  $M_0$ . В этой точке касательные плоскости к обеим сферам совпадают, так что условие (228) не соблюдено, и действительно, линия пересечения состоит из одной только точки  $M_0$ , которая является на ней, таким образом, изолированной особой точкой.

Такое положение невозможно, конечно, в тех случаях, когда касательные плоскости к сферам встречаются в точке пересечения под углом, отличным от нуля.

Далее, возьмем пересечение гиперболического параболоида

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$$

с плоскостью  $z=0$ . Если взять в качестве точки  $M_0$  начало координат, лежащее на обеих поверхностях, то касательные плоскости к обеим поверхностям совпадут (для плоскости  $z=0$  касательной плоскостью служит, разумеется, она сама). И действительно, линия пересечения обеих поверхностей, т. е. пара прямых

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0$$

на плоскости  $XY$ , имеет в начале координат особую точку (самопересечение).

### § 33\*. Касание кривой с поверхностью.

Пусть через данную точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  (черт. 65) проходят кривая  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$ ,  $z=z(t)$  (при  $t=t_0$ ) и поверхность  $F(x, y, z)=0$ .

Как обычно, предполагаем, что в точке  $M_0$  соблюдаются условия

$$\nabla F = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \neq 0$$

(для определенности пусть  $F_z \neq 0$ ) и

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t) \mathbf{i} + y'(t) \mathbf{j} + z'(t) \mathbf{k} \neq 0.$$

Нас интересует вопрос об оценке близости между кривой и поверхностью в бесконечно малой области около точки  $M_0$ . Мы подойдем к этой оценке следующим путем. Возьмем на кривой какую-нибудь точку  $M[x(t), y(t), z(t)]$  и проведем через нее параллель оси  $Z$  до пересечения с поверхностью в точке, которую обозначим через  $M'$ . Ограничивааясь достаточно малой окрестностью точки  $M_0$ , можно утверждать, что это пересечение

произойдет и при этом в единственной точке. Действительно, так как в точке  $M_0$  мы имеем  $F_z \neq 0$ , уравнение поверхности вблизи нее может быть приведено к виду

$$z = f(x, y)$$

и после подстановки  $x(t)$ ,  $y(t)$  определяет нам точку на поверхности с координатами  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $Z$ , где

$$Z = f[x(t), y(t)].$$

Эта точка поверхности и есть искомая точка  $M'$ , так как она имеет значения  $x, y$ , общие с  $M$ , и лежит с нею, следовательно, на одной параллели оси  $Z$ . Отрезок  $M'M = z(t) - Z$ , естественно, будет измерять расстояние «по вертикали» между кривой в точке  $M$  и поверхностью.

Пусть теперь  $t$  стремится к  $t_0$ ; тогда точка  $M$  стремится в  $M_0$ , равно как и  $M'$ , так что отрезок  $M'M$  стремится к нулю. Изучим теперь порядок малости отрезка  $M'M$  по отношению к  $t - t_0$ .

Для этого очень удобным приемом является составление функции

$$\varphi(t) = F[x(t), y(t), z(t)], \quad (233)$$

полученной подстановкой в левую часть уравнения поверхности текущих координат кривой. Так как кривая не лежит на поверхности, то  $\varphi(t)$ , вообще говоря, отлична от нуля; при  $t = t_0$  мы имеем точку, общую кривой и поверхности, и следовательно, уравнение поверхности в ней удовлетворяется:

$$\varphi(t_0) = 0.$$

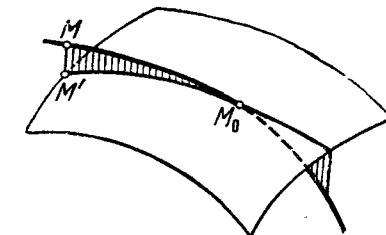
При  $t$ , стремящемся к  $t_0$ ,  $\varphi(t)$  стремится, следовательно, к нулю. Покажем, что  $\varphi(t)$  будет при этом бесконечно малым одного порядка с отрезком  $M'M$ .

Запишем, что точка  $M'[x(t), y(t), Z]$  удовлетворяет своими координатами уравнению поверхности

$$0 = F[x(t), y(t), Z].$$

Вычтем это равенство почленно из (233) и применим в правой части теорему о конечном приращении, рассматривая  $F$  как функцию третьего аргумента при закрепленных двух первых. Получим

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= F[x(t), y(t), z(t)] - F[x(t), y(t), Z] = \\ &= F_z[x(t), y(t), \zeta][z(t) - Z], \end{aligned}$$



Черт. 65.

где  $\zeta$  — некоторое промежуточное значение между  $z(t)$  и  $Z$ . Но при  $t$ , стремящемся к  $t_0$ , точки  $M$  и  $M'$  стремятся в  $M_0$  и, следовательно,  $z$  и  $Z$  вместе с заключенным между ними значением  $\zeta$  стремятся к  $z_0$ . Очевидно также, что

$$x(t) \rightarrow x_0, \quad y(t) \rightarrow y_0.$$

Поэтому из предыдущего равенства следует, что при  $t \rightarrow t_0$

$$\frac{\varphi(t)}{z(t)-Z} = F_z[x(t), y(t), \zeta] \rightarrow F_z(x_0, y_0, z_0).$$

Итак, отношение бесконечно малых  $z(t) - Z$  и  $\varphi(t)$  стремится к пределу и при этом отличному от нуля (по предположениям, сделанным в начале этого параграфа). Мы видим, что  $z(t) - Z$  и  $\varphi(t)$  — бесконечно малые одного порядка.

Наиболее тривиальная возможность здесь та, когда они будут первого порядка относительно  $t - t_0$ ; в наглядном представлении это будет *пересечение* кривой и поверхности под некоторым углом. Этот случай мы оставляем в стороне и займемся случаями, когда  $\varphi(t)$  [и, следовательно, отрезок  $M'M$ , равный  $z(t) - Z$ ] будет бесконечно малым *порядка выше первого относительно*  $t - t_0$ . Тогда мы скажем, что кривая *касается* поверхности в точке  $M_0$ . Мы говорим, что *касание n-го порядка*, если порядок бесконечно малого  $M'M$  будет выше  $n$ , и что *касание точно n-го порядка* (а не выше), если порядок  $M'M$  точно  $n+1$  (а не выше).

Нам нужно выяснить прежде всего *инвариантный характер этих определений*. Дело в том, что мы оценивали расстояние  $M'M$  кривой от поверхности «по вертикали», т. е. в направлении оси  $Z$ . Мы могли бы переименовать координатные оси, или, более обще, произвести любой поворот координатных осей в пространстве и повторить все построение для новой оси  $Z$ , выбранной произвольно (исключая только те положения, для которых  $F_z = 0$  в точке  $M_0$ , т. е. когда ось  $Z$  параллельна касательной плоскости в  $M_0$ ). Возникает вопрос, сохранил ли наше определение касания  $n$ -го порядка один и тот же геометрический смысл при любом выборе координатной системы?

Но, преобразуя координатную систему, мы подставляем в уравнение поверхности

$$F(x, y, z) = 0$$

выражение старых координат через новые, оставляя без изменения сами численные значения  $F$  в каждой точке пространства; следовательно, и значение  $F$  в каждой точке  $M(t)$  на кривой остается прежним, т. е. значения  $\varphi(t)$  [см. (233)] при каждом данном  $t$  остаются те же. Отсюда следует, что порядок бесконечно малого  $\varphi(t)$  при  $t \rightarrow t_0$  остается без изменения при переходе к другой координатной системе.

Добавим сюда, что условие  $r'(t) \neq 0$ , т. е.

$$\frac{r - r_0}{t - t_0} \rightarrow r'(t) \neq 0,$$

показывает, что  $t - t_0$  есть бесконечно малое одного порядка с модулем вектора  $r - r_0$ , т. е. с длиной хорды  $M_0M$ . Так как эта длина не зависит от выбора параметризации на кривой, то порядок  $t - t_0$  один и тот же при всех допустимых параметризациях.

Итак, при любом выборе координатной системы  $x, y, z$  и параметризации  $t$  на кривой (с соблюдением, конечно, условий, указанных в начале этого параграфа) порядок бесконечно малых  $t - t_0$  и  $\varphi(t)$  остается без изменения. Следовательно, порядок  $\varphi(t)$  (или, что то же, порядок  $M'M$ ) относительно  $t - t_0$  зависит только от самой поверхности и кривой, но не зависит от выбора координатной системы в пространстве и параметризации на кривой. Наши определения имеют, следовательно, инвариантный геометрический смысл.

Наконец, следует указать практическую запись условия касания  $n$ -го порядка. Разложим функцию  $\varphi(t)$  в ряд Тейлора по степеням  $t - t_0$ . Так как касание  $n$ -го порядка означает, что  $\varphi(t)$  есть бесконечно малое выше  $n$ -го порядка относительно  $t - t_0$ , то в разложении должны исчезнуть все члены до  $n$ -й степени включительно. Запишем условия этого, приравнив нулю коэффициенты при  $t - t_0$  в степенях  $\leq n$ :

$$\varphi(t_0) = \varphi'(t_0) = \varphi''(t_0) = \dots = \varphi^{(n)}(t_0) = 0. \quad (234)$$

Очевидно, эти условия и достаточны, так как при их наличии разложение может начаться не ниже чем с  $n+1$ -й степени  $t - t_0$ .

Первое из этих условий

$$\varphi(t) = 0$$

выражает, что при  $t = t_0$  точка кривой попадает на поверхность. Второе из них, пользуясь выражением (233) для  $\varphi(t)$ , можно переписать в виде

$$\varphi'(t_0) = F_x x'(t_0) + F_y y'(t_0) + F_z z'(t_0) = 0$$

или

$$\nabla F \cdot r'(t_0) = 0.$$

Эта формула показывает, что *касательный вектор к кривой в точке  $M_0$  перпендикулярен к  $\nabla F$  в той же точке и лежит, следовательно, в касательной плоскости к поверхности*. В этом и состоит, можно считать, касание 1-го порядка. Присоединяя последующие условия, мы получаем более тесную близость кривой и поверхности — касания 2-го, 3-го и т. д. порядков.

### § 34. Точки распрямления.

При дальнейшем изучении пространственной кривой

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

мы присоединим к обычному нашему предположению, что

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k} \neq 0,$$

т. е. что все ее точки заведомо обыкновенные, еще предположение, что

$$\mathbf{r}''(t) \text{ и } \mathbf{r}'(t) \text{ не коллинеарны.} \quad (235)$$

Этим самым мы устранием из рассмотрения точки, где

$$\mathbf{r}'' \parallel \mathbf{r}'. \quad (236)$$

Ниже будет выяснено, что в случае (236) касание кривой с ее касательной будет по крайней мере 2-го порядка. Такие точки мы будем называть *точками распрямления*. Заметим, что если условие (236) выполняется вдоль всей кривой, которая, таким образом, вся состоит из точек распрямления, то кривая вырождается в прямую линию. Действительно, параллельность векторов  $\mathbf{r}''$  и  $\mathbf{r}'$  можно записать как пропорциональность их координат:

$$\frac{x''(t)}{x'(t)} = \frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{z''(t)}{z'(t)}.$$

Умножая это равенство на  $dt$ :

$$\frac{dx'}{x'} = \frac{dy'}{y'} = \frac{dz'}{z'}$$

и интегрируя почленно, получим

$$\ln x' + \ln a = \ln y' + \ln b = \ln z' + \ln c,$$

где  $\ln a$ ,  $\ln b$ ,  $\ln c$  — постоянные интегрирования. Потенцируя, приходим к равенству

$$ax' = by' = cz'.$$

Интегрируя еще раз и обозначая новые постоянные интегрирования через  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , получаем

$$ax + A = by + B = cz + C,$$

т. е. уравнение прямой в пространстве.

Итак, кривая, отличная от прямой, не может состоять целиком из точек распрямления; если вообще эти точки на ней существуют, то встречаются лишь при отдельных значениях  $t$  и отличаются особым характером поведения кривой вблизи них, почему мы и устранием их из общей теории.

Изучим теперь поведение  $\mathbf{r}'$  и  $\mathbf{r}''$  при переходе к другому параметру, например  $\tau$ , вдоль той же кривой. Мы можем тогда выразить старый параметр  $t$  как функцию от нового  $\tau$ :

$$t = t(\tau).$$

Тем самым радиус-вектор  $\mathbf{r}(t)$  можно рассматривать как функцию от функции  $\tau$  и дифференцировать по  $\tau$ . Получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} &= \mathbf{r}'(t) \frac{dt}{d\tau}, \\ \frac{d^2\mathbf{r}}{d\tau^2} &= \mathbf{r}''(t) \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 + \mathbf{r}'(t) \frac{d^2t}{d\tau^2}. \end{aligned} \right\} \quad (237)$$

Таким образом, первая и вторая производные по новому параметру  $\tau$  выражаются через  $\mathbf{r}'$  и  $\mathbf{r}''$  линейными комбинациями со скалярными коэффициентами и, следовательно, параллельны их плоскости (компланарны с  $\mathbf{r}'$  и  $\mathbf{r}''$ ).

Конечно, верно и обратное, т. е. что  $\mathbf{r}'$  и  $\mathbf{r}''$  компланарны с  $\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}$ ,  $\frac{d^2\mathbf{r}}{d\tau^2}$ , так что вообще плоскость, определяемая в точке  $M(t)$  векторами  $\mathbf{r}'(t)$ ,  $\mathbf{r}''(t)$  (черт. 66), не зависит от выбора параметризации на кривой. Если допустить на минуту, что наше условие (235) нарушено, так что в данной точке  $\mathbf{r}'(t)$ ,  $\mathbf{r}''(t)$  коллинеарны, то из формул (237) мы сейчас же получаем, что  $\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}$ ,  $\frac{d^2\mathbf{r}}{d\tau^2}$  коллинеарны с ними, а значит, и между собой.

Таким образом, если условие (235) нарушено при одном выборе параметризации, то оно будет нарушено и при любом другом выборе. Следовательно, если условие (235) имеет место при одном выборе параметризации, то оно имеет место и при любом другом ее выборе.

В частности, если за параметр принята дуга  $s$ , то  $\mathbf{r}$  — единичный вектор, и его производная  $\mathbf{r}'$  ему ортогональна (лемма 1 § 18), так что условие (235) соблюдается всегда, за исключением случая обращения  $\mathbf{r}'$  в нуль. Итак, условие (235) принимает вид

$$\mathbf{r}'' \neq 0. \quad (235')$$

Из рассмотрения устраниены, следовательно, точки, где

$$\mathbf{r}'' = 0. \quad (236')$$

Теперь видно, что это—действительно точки расправления, так как в них кривая со своей касательной имеет не только общее значение  $\dot{r}$  (единичный касательный вектор), но и общее значение  $\ddot{r} = 0$  ( $\dot{r}$  вдоль прямой линии всегда равно нулю, так как вектор  $\dot{r}$ —постоянный). А в этом случае кривая со своей касательной имеет касание 2-го порядка (§ 22).

### § 35. Соприкасающаяся плоскость.

Пусть кривая задана параметрическим уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t).$$

Наша задача состоит в том, чтобы для любой точки  $M(t)$  этой кривой (при ограничениях § 34) подобрать проходящую через нее плоскость, наилучшим образом «пригнанную» к кривой вблизи точки  $M(t)$ , с наименьшим «зазором» между ними. Мы сейчас сформулируем точную постановку задачи.

Сначала проведем через  $M(t)$  произвольную плоскость; зададим ее единичным вектором  $\mathbf{m}$ , ей ортогональным (черт. 67).

Дадим параметру  $t$  приращение  $\Delta t$ , вследствие чего мы сдвинемся по кривой из точки  $M$  в точку  $M'$ .

Оценим расстояние точки  $M'$  от плоскости по перпендикуляру  $PM'$ .

При  $\Delta t \rightarrow 0$  точка  $M'$  бежит по кривой в точку  $M$ , и расстояние  $PM'$ , очевидно, стремится к нулю.

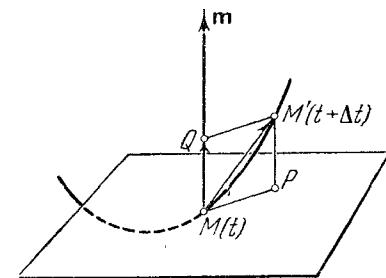
При этом бесконечно малое расстояние  $PM'$  может иметь различный порядок малости относительно  $\Delta t$ . Чем выше этот порядок, тем теснее «пригнана» наша плоскость к кривой вблизи точки  $M$ .

Мы будем говорить, что в точке  $M$  кривая имеет с плоскостью касание  $n$ -го порядка, если  $PM'$  есть бесконечно малое не ниже  $n+1$ -го порядка относительно  $\Delta t$ , и касание точно  $n$ -го порядка, если  $PM'$  точно  $n+1$ -го порядка относительно  $\Delta t$ .

Заметим, что наше обычное предположение,  $\dot{r}'(t) \neq 0$ , пользуясь формулой (158'), можно переписать в виде

$$s'(t) = |\dot{r}'(t)| \neq 0, \text{ т. е. } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \neq 0. \quad (238)$$

Последнее соотношение показывает, что  $\Delta t$  имеет тот же порядок малости, что и  $\Delta s = \overline{MM'}$ .



Черт. 67.

Следовательно, можно считать, что (в нашем определении порядка касания) порядок бесконечно малого  $PM'$  распределяется по отношению к дуге  $\Delta s$  и, значит, имеет смысл, инвариантный относительно выбора параметризации  $t$  на кривой.

Точная формулировка нашей задачи принимает вид: *найти плоскость, проходящую через точку  $M$  с наивысшим возможным порядком касания с кривой в точке  $M$ .*

Для решения этой задачи заметим, что вектор смещения  $\overline{MM'}$  представляет собой приращение  $\dot{r}(t + \Delta t) - \dot{r}(t)$  радиус-вектора  $r(t)$  при переходе из точки  $M$  в точку  $M'$ . Запишем это, разложив приращение радиус-вектора в ряд Тейлора:

$$\overline{MM'} = \dot{r}(t + \Delta t) - \dot{r}(t) = \dot{r}'(t) \cdot \frac{\Delta t}{1} + \dot{r}''(t) \cdot \frac{\Delta t^2}{2!} + \dots$$

С другой стороны, расстояние  $PM'$  представляет собой проекцию вектора  $\overline{MM'}$  на перпендикуляр к плоскости, проведенный через точку  $M'$  (так как угол  $MPM'$ , очевидно, прямой) или, что все равно, на направление вектора  $\mathbf{m}$ , тоже перпендикулярного к плоскости. Но проекция любого вектора на направление единичного вектора выражается их скалярным произведением; следовательно,

$$PM' = \mathbf{m} \cdot \overline{MM'} = \mathbf{m} \cdot \dot{r}'(t) \frac{\Delta t}{1} + \mathbf{m} \cdot \dot{r}''(t) \cdot \frac{\Delta t^2}{2!} + \dots \quad (239)$$

Мы подставили вместо  $\overline{MM'}$  его разложение в ряд Тейлора.

Конечно, расстояние  $PM'$  по этой формуле получается с определенным знаком, который, впрочем, сейчас для нас не важен.

Разберем возможные здесь случаи.

1°.  $\mathbf{m} \cdot \dot{r}'(t) \neq 0$ .

Разложение (239) начинается с бесконечно малых 1-го порядка, и  $PM'$  есть бесконечно малое 1-го порядка. Мы имеем случай касания 0-го порядка, т. е. по существу пересечение кривой с плоскостью. Действительно, касательная к кривой, направленная по вектору  $\dot{r}'$ , не перпендикулярна к вектору  $\mathbf{m}$  ( $\mathbf{m} \cdot \dot{r}' \neq 0$ ) и, следовательно, не лежит в плоскости, а пробивает ее под некоторым углом.

2°.  $\mathbf{m} \cdot \dot{r}'(t) = 0$ .

Разложение (239) начинается с бесконечно малых (не ниже) 2-го порядка;  $PM'$  есть бесконечно малое (не ниже) 2-го порядка, и мы имеем случай касания 1-го порядка. Геометрически условие 2° означает, что касательная к кривой перпендикулярна к вектору  $\mathbf{m}$ , а следовательно, лежит в нашей плоскости.

Таким образом, касание 1-го порядка с данной кривой в данной точке  $M$  имеют те и только те плоскости, которые проходят через касательную в точке  $M$ .

Такие плоскости мы будем называть *касательными* к кривой.

В полученном пучке касательных плоскостей не все плоскости будут равнозначны в смысле близости к нашей кривой. А именно, если  $m\mathbf{r}'' \neq 0$ , то разложение (239) начинается с бесконечно малого *точно* 2-го порядка, и касание будет *точно* 1-го порядка; если же  $m\mathbf{r}'' = 0$ , то разложение (239) начинается с бесконечно малых (не ниже) 3-го порядка, и касание будет 2-го порядка. В этом последнем случае плоскость должна, следовательно, удовлетворять двум условиям:

$$\begin{aligned} 3^{\circ}. \quad m\mathbf{r}'(t) &= 0, \\ m\mathbf{r}''(t) &= 0. \end{aligned} \quad (240)$$

Такая плоскость существует и притом только одна: это будет плоскость, проведенная через точку  $M$  и через отложенные из  $M$  векторы  $\mathbf{r}'$ ,  $\mathbf{r}''$  (черт. 68; напомним, что  $\mathbf{r}'$  и  $\mathbf{r}''$  предполагаются неколлинеарными).

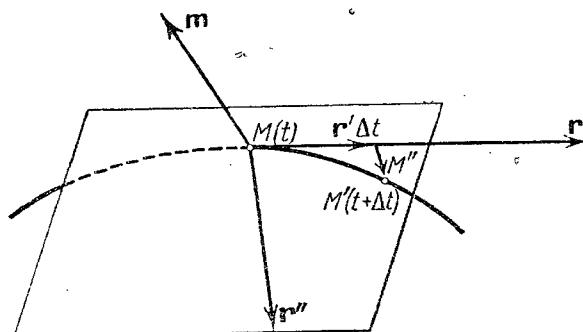
Действительно, условия (240) соблюдаются в том и только в том случае, когда  $\mathbf{r}'$  и  $\mathbf{r}''$  ортогональны вектору  $m$ , т. е. лежат в рассматриваемой плоскости.

*Плоскость, имеющая с кривой в данной ее точке  $M$  касание 2-го порядка, называется соприкасающейся плоскостью.*

Как нами только что доказано, *кривая в каждой своей точке имеет одну и только одну* (предполагая  $\mathbf{r}' \neq \mathbf{r}''$ ), *соприкасающуюся плоскость*. Эта плоскость проходит через векторы  $\mathbf{r}'$ ,  $\mathbf{r}''$ , отложенные из точки касания.

Любопытно, что отсюда следует, что плоскость векторов  $\mathbf{r}'$ ,  $\mathbf{r}''$ , совпадающая с соприкасающейся плоскостью, не зависит от выбора параметра  $t$  вдоль кривой. Этот результат был только что получен нами другим путем, из формул (237).

Роль соприкасающейся плоскости заключается в том, что среди всех плоскостей, проходящих через данную точку кривой  $M(t)$ , она единственная так тесно прилежана к кривой, что при смещении из точки  $M(t)$  по кривой уклонение от нее будет бесконечно малым 3-го порядка (не ниже) относительно приращения параметра  $t$ . Другими словами, если пренебречь бесконечно малыми 3-го порядка и выше, то всякую пространственную кривую в бес-



Черт. 68.

конечно малом около данной точки  $M(t)$  можно считать плоской, а именно расположенной в соприкасающейся плоскости в этой точке.

Это обстоятельство можно подтвердить и другим, очень наглядным путем. Переайдем из данной точки  $M(t)$  в бесконечно близкую точку  $M'(t + \Delta t)$  (черт. 68). Разложим радиус-вектор точки  $M'$  в ряд Тейлора, взяв остаточный член после члена 2-й степени:

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}'(t)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{r}''(t)(\Delta t)^2 + \mathbf{Q}_2 \frac{(\Delta t)^3}{6}.$$

Вектор смещения из точки  $M$  в точку  $M'$  равен

$$\overline{MM'} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{r}''(t)(\Delta t)^2 + \frac{1}{6}\mathbf{Q}_2(\Delta t)^3.$$

Таким образом, если взять прежде всего член первого порядка  $\mathbf{r}'\Delta t$ , смещение происходит по касательной, а значит, и в соприкасающейся плоскости. Затем, если добавить член второго порядка  $\frac{1}{2}\mathbf{r}''(\Delta t)^2$ , мы смеемся по направлению вектора  $\mathbf{r}''$ , т. е. уклонившись от касательной, но еще в соприкасающейся плоскости, и попадаем в некоторую точку  $M''$ . И только добавление остаточного члена выводит нас из соприкасающейся плоскости, переводя из  $M''$  в точку  $M'$  на кривой. Но так как остаточный член при  $\Delta t$ , стремящемся к нулю, будет бесконечно малым 3-го порядка (не ниже), то, если учитывать лишь бесконечно малые 1-го и 2-го порядков, допуская ошибку 3-го порядка, можно сказать, что вблизи  $M(t)$  кривая лежит в своей соприкасающейся плоскости<sup>1)</sup>.

Очевидно, что для плоской кривой соприкасающейся плоскостью служит во всех точках плоскость, в которой кривая расположена.

Добавим, что *соприкасающуюся плоскость в точке  $M$  можно построить как предельное положение плоскости, проходящей через три бесконечно близкие точки  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  на кривой, когда эти точки стремятся к  $M$ .* Доказательство мы здесь не приводим.

### § 36. Сопровождающий трехгранник.

С соприкасающейся плоскостью связан ряд других геометрических построений. Прежде всего из бесчисленного множества нормалей в данной точке пространственной кривой, которые нам

<sup>1)</sup> Отметим, что в исключенном нами случае (236) оба первых члена правой части направлены по касательной, и лишь остаточный член уводит нас в сторону от нее. Таким образом, уклонение кривой от касательной не ниже 3-го порядка малости, касание между ними 2-го порядка, т. е. мы действительно имеем точку расправления. Соприкасающаяся плоскость становится неопределенной, так как любая касательная плоскость является в этом случае и соприкасающейся.

казались ранее равнозначными по своим свойствам, теперь выделяются две особенные.

*Нормаль в данной точке, лежащую в соприкасающейся плоскости, мы будем называть главной нормалью, а нормаль, перпендикулярную к соприкасающейся плоскости,—бинормалью (черт. 69).*

Соприкасающаяся плоскость берется, разумеется, в той же точке кривой, где строятся нормали. Очевидно, касательная, главная нормаль и бинормаль, выходящие из одной и той же точки кривой, образуют между собой прямые углы.

Таким образом, с каждой точкой  $M$  на кривой естественным образом можно связать прямоугольную систему координат, начало которой совпадает с самой точкой  $M$ , а оси—с касательной, главной нормалью и бинормалью в точке  $M$ .

Роль координатных плоскостей будут играть:

соприкасающаяся плоскость (проходит через касательную и главную нормаль);

нормальная плоскость (проходит через главную нормаль и бинормаль);

спрямляющая плоскость—так мы будем называть плоскость, проходящую через бинормаль и касательную. Смысл этого названия выяснится позже.

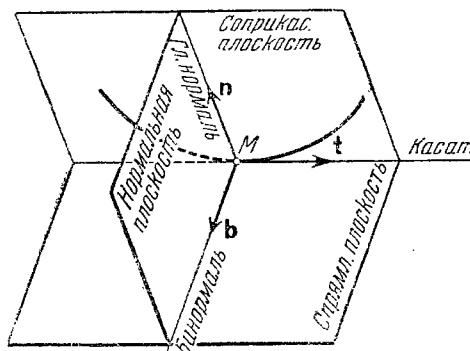
Совокупность трех построенных нами прямоугольных координатных осей и трех координатных плоскостей называется *сопровождающим трехгранником кривой в точке  $M$* . Сопровождающий трехгранник строится в каждой точке кривой (где  $\mathbf{r}'' \neq \mathbf{r}'$ ) и меняется от точки к точке.

Найдем теперь уравнения элементов сопровождающего трехгранника. Уравнения касательной и уравнение нормальной плоскости получены уже в § 32.

Составим *уравнение соприкасающейся плоскости*. Так как векторы  $\mathbf{r}'$  и  $\mathbf{r}''$  лежат в соприкасающейся плоскости, то их векторное произведение

$$[\mathbf{r}', \mathbf{r}''] = (y'z'' - z'y'')\mathbf{i} + (z'x'' - x'z'')\mathbf{j} + (x'y'' - y'x'')\mathbf{k}, \quad (241)$$

отличное от нуля в силу (235), будет к ней перпендикулярно. Рассматривая соприкасающуюся плоскость как плоскость, проходящую через данную точку  $M(x, y, z)$  на кривой перпенди-



Черт. 69.

кулярно к вектору (241), мы можем записать ее уравнение в виде

$$(X - x)(y'z'' - z'y'') + (Y - y)(z'x'' - x'z'') + (Z - z)(x'y'' - y'x'') = 0, \quad (242)$$

или

$$^*(\mathbf{R} - \mathbf{r})[\mathbf{r}', \mathbf{r}''] = 0,$$

где  $X, Y, Z$ —текущие координаты,  $\mathbf{R}$ —скользящий радиус-вектор соприкасающейся плоскости. Левую часть (242) можно переписать более сжато в виде определителя 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0 \quad (242')$$

или

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') = 0.$$

В этих формулах  $x, x', x''$  и т. д. взяты при аргументе  $t$ , фиксированном на определенном значении, соответственно выбранной точке на кривой.

Составим теперь уравнения главной нормали и бинормали. Начнем с бинормали, так как вектор, перпендикулярный к соприкасающейся плоскости и, следовательно, направленный по бинормали, у нас уже построен. Это—вектор  $[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']$  [см. (241)]. В таком случае уравнение бинормали легко построить как уравнение прямой, проходящей через данную точку  $M(x, y, z)$  на кривой и параллельной вектору  $[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']$  в этой точке. Уравнение это (в форме пропорций) запишется по общим правилам так:

$$\frac{X - x}{y'z'' - z'y''} = \frac{Y - y}{z'x'' - x'z''} = \frac{Z - z}{x'y'' - y'x''}. \quad (243)$$

Чтобы найти теперь направление главной нормали, составим векторное произведение перпендикулярных к ней векторов, а именно,  $\mathbf{r}'$  и  $[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']$ . Это векторное произведение будет, очевидно, параллельно главной нормали. Вычислим его как двойное векторное произведение:

$$[\mathbf{r}', [\mathbf{r}', \mathbf{r}'']] = \mathbf{r}'(\mathbf{r}'\mathbf{r}'') - \mathbf{r}''(\mathbf{r}'\mathbf{r}').$$

Не представляет труда вычислить координаты этого вектора

$$x'(\mathbf{r}'\mathbf{r}'') - x''(\mathbf{r}'\mathbf{r}'), \quad y'(\mathbf{r}'\mathbf{r}'') - y''(\mathbf{r}'\mathbf{r}'), \quad z'(\mathbf{r}'\mathbf{r}'') - z''(\mathbf{r}'\mathbf{r}')$$

и записать уравнение главной нормали как прямой, проходящей через точку  $M(x, y, z)$  кривой параллельно этому вектору.

Точно так же легко можно написать уравнение спрямляющей плоскости как плоскости, проходящей через точку  $M$  перпендикулярно к направляющему вектору главной нормали.

На осях трехгранника мы условимся откладывать в определенную сторону единичные векторы—орты нашей координатной системы—и их направления будем считать положительными направлениями на осях. Для этих ортов мы введем постоянные обозначения:

- $t$ —орт по касательной,
- $n$ —орт по главной нормали,
- $b$ —орт по бинормали.

Чтобы установить направление векторов  $t$ ,  $n$ ,  $b$ , будем предполагать, что кривая отнесена к дуге как к параметру

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s).$$

Тогда  $\dot{\mathbf{r}}$  есть единичный вектор, направленный по касательной. Его мы и примем за вектор  $t$ :

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{t}. \quad (244)$$

Дифференцируя это равенство по  $s$  почленно и учитывая, что производная единичного вектора  $t$  ему ортогональна (по 1-й лемме § 18), получим

$$\ddot{\mathbf{t}} = \ddot{\mathbf{r}} \perp \mathbf{t}.$$

Таким образом,  $\ddot{\mathbf{r}}$  направлен по некоторой нормали к кривой; а так как вторая производная радиус-вектора по любому параметру (в том числе и по дуге) всегда лежит в соприкасающейся плоскости, то  $\ddot{\mathbf{r}}$  направлен по главной нормали. При этом  $\ddot{\mathbf{r}} \neq 0$  в силу условия (235').

Мы условимся единичный вектор по главной нормали  $n$  откладывать в направлении вектора  $\ddot{\mathbf{r}}$ .

Наконец, единичный вектор по бинормали  $b$  мы направим так, чтобы поворот на прямой угол от  $t$  к  $n$  происходил против часовой стрелки, если смотреть с конца  $b$ . Другими словами, векторы  $t$ ,  $n$ ,  $b$  должны представлять собой правую тройку. Так как, кроме того, это векторы единичные и взаимно ортогональные, то для них (совершенно так же, как для ортов  $i$ ,  $j$ ,  $k$ ) имеют место равенства

$$[t, n] = b, \quad [n, b] = t, \quad [b, t] = n. \quad (245)$$

Если направление отсчета дуги  $s$  мы изменим на обратное, то, рассуждая совершенно так же, как и для плоской кривой

(§ 27), получим, что  $t$  меняет направление на обратное, а  $n$  не меняется. Что же касается  $b$ , то из первой формулы (245) видно, что он меняет направление на обратное. Итак,

$$\left. \begin{aligned} t &\rightarrow -t, \\ n &\rightarrow n, \\ b &\rightarrow -b. \end{aligned} \right\} \quad (246)$$

В §§ 34—36 мы проводили изучение пространственной кривой в бесконечно малом с точностью уже не 1-го (как при построении касательной), а 2-го порядка. С этим связано появление в рассмотрении не только первой, но и второй производной радиус-вектора  $\mathbf{r}(t)$ , построение соприкасающейся плоскости и т. д.<sup>1)</sup>.

### § 37. Две леммы об окружности.

Рассмотрим (черт. 70) единичный вектор в плоскости  $XY$ , направленный под углом  $\varphi$  к оси  $X$ . Такой вектор мы будем обозначать через  $e(\varphi)$ . Очевидно, его проекции (координаты) по осям  $X$ ,  $Y$  будут соответственно  $\cos \varphi$ ,  $\sin \varphi$ , так что его разложение имеет вид

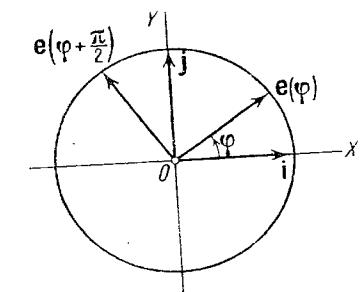
$$e(\varphi) = i \cos \varphi + j \sin \varphi.$$

Меняя  $\varphi$ , мы можем рассматривать  $e(\varphi)$  (который будет при этом вращаться) как вектор-функцию от  $\varphi$ . Если  $e(\varphi)$  откладывать из начала  $O$ , то конец его описывает окружность радиуса единицы.

Вычислим производную  $e(\varphi)$  по  $\varphi$ . Получим

$$e'(\varphi) = -i \sin \varphi + j \cos \varphi = i \cos \left( \varphi + \frac{\pi}{2} \right) + j \sin \left( \varphi + \frac{\pi}{2} \right).$$

Как мы видим, получается вновь единичный вектор, но направ-



Черт. 70.

<sup>1)</sup> Результаты этого параграфа неприменимы, конечно, к точкам распрямления. Соприкасающаяся плоскость, главная нормаль и бинормаль в том смысле, как мы их определили, в точке распрямления становятся неопределенными. Впрочем, как можно показать, для них существуют предельные положения, когда, двигаясь по кривой, мы стремимся в точку распрямления. Эти предельные положения можно принять за соприкасающуюся плоскость, главную нормаль и бинормаль в точке распрямления. Нужно иметь в виду, что положительное направление на главной нормали может скачком измениться на противоположное при переходе через точку распрямления.

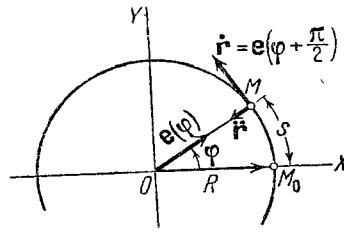
вленный к оси  $X$  под углом  $\varphi + \frac{\pi}{2}$ . Итак,

$$\dot{e}'(\varphi) = e\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right). \quad (247)$$

Таким образом, нами доказана

**Лемма 1.** Производная вращающегося на плоскости единичного вектора  $e$  по углу его поворота  $\varphi$  равна этому вектору, повернутому (в плоскости вращения) на угол  $+\frac{\pi}{2}$ .

Заметим, что перпендикулярность  $\dot{e}'(\varphi)$  к  $e(\varphi)$  ясна также и из того, что  $\dot{e}'(\varphi)$  должен быть касательным вектором к окружности, описываемой концом радиус-вектора  $e(\varphi)$ .



Черт. 71.

Возьмем теперь окружность произвольного радиуса  $R$ , примем ее центр  $O$  за начало координат, а ее плоскость — за плоскость  $XY$  (черт. 71). Отнесем ее к длине дуги  $s$  как к параметру, причем дугу  $s$  будем откладывать от точки  $M_0$ , где окружность встречается с положительным направлением оси  $X$ .

Тогда значение  $s$  для любой точки  $M$  равно, очевидно, полярному углу этой точки, умноженному на радиус  $R$ :

$$s = R\varphi; \varphi = \frac{s}{R}.$$

Радиус-вектор  $r = \overline{OM}$  точки  $M$  равен единичному вектору  $e(\varphi)$  в направлении  $\overrightarrow{OM}$ , умноженному на длину  $OM$ , т. е.  $R$ :

$$r = R e\left(\frac{s}{R}\right). \quad (248)$$

Это уравнение мы можем рассматривать как параметрическое представление нашей окружности в векторной форме; параметром служит дуга  $s$ .

Дифференцируя радиус-вектор по  $s$ , получим

$$\dot{r} = R \dot{e}\left(\frac{s}{R}\right) \frac{1}{R},$$

где  $\dot{e}'\left(\frac{s}{R}\right)$  означает производную по углу  $\varphi = \frac{s}{R}$ , а  $\frac{1}{R}$  есть производная  $\varphi$  по  $s$ . Пользуясь формулой (247), получаем окончательно

$$\dot{r} = e\left(\frac{s}{R} + \frac{\pi}{2}\right).$$

Как и следовало ожидать, производная от радиус-вектора по дуге оказалась единичным вектором, направленным под углом  $\varphi + \frac{\pi}{2}$ , т. е. по касательной к окружности в точке  $M$  (черт. 71).

Еще раз дифференцируем по  $s$ ; получим

$$\ddot{r} = e'\left(\frac{s}{R} + \frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{R}.$$

Снова штрих означает дифференцирование по углу  $\frac{s}{R} + \frac{\pi}{2}$ . Пользуемся формулой (247) еще раз; тогда можно написать

$$\ddot{r} = e\left(\frac{s}{R} + \pi\right) \frac{1}{R}.$$

Так как добавление  $\pi$  к углу  $\varphi$  означает поворот вектора на  $180^\circ$ , то  $e\left(\frac{s}{R} + \pi\right) = -e\left(\frac{s}{R}\right)$  и, следовательно,

$$\ddot{r} = -\frac{1}{R} e\left(\frac{s}{R}\right). \quad (249)$$

Вектор  $\overline{MO}$ , ведущий из произвольной точки окружности в ее центр, получается из радиус-вектора  $r = \overline{OM}$  умножением на  $-1$ , так что, в силу (248),

$$\overline{MO} = -R e\left(\frac{s}{R}\right). \quad (250)$$

Сравнивая формулы (249) и (250) и учитывая, что вектор  $e$  — единичный, мы приходим ко второй лемме.

**Лемма 2.** Векторы  $\overline{MO}$  и  $\ddot{r}$  одинаковы по направлению и взаимно обратны по модулю (т. е. произведение их модулей равно 1).

Заметим, что если два вектора  $a$  и  $b$  одинаковы по направлению и взаимно обратны по модулю, то они выражаются один через другой равносильными формулами

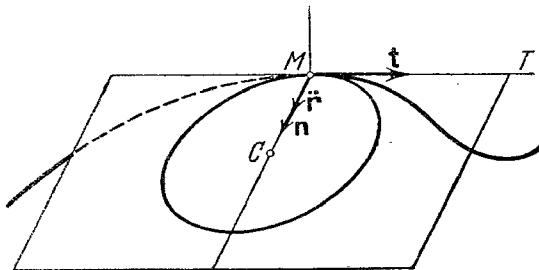
$$b = \frac{a}{a^2}, a = \frac{b}{b^2}. \quad (251)$$

Действительно, когда мы, например, вектор  $a$  делим на его скалярный квадрат  $a^2$ , т. е. на квадрат его модуля  $|a|^2$ , то его направление не меняется, а его модуль  $|a|$  после деления превращается в  $\frac{1}{|a|}$ .

Лемма 2 остается справедливой и в том случае, когда радиус-вектор  $r$  откладывается из произвольного начала, а не из центра окружности. Действительно, при сдвиге начала к  $r$  добавляется постоянный вектор, и следовательно, производные  $\dot{r}, \ddot{r}, \dots$  не меняются.

### § 38. Соприкасающаяся окружность.

Займемся теперь построением соприкасающейся окружности к пространственной кривой. *Соприкасающейся окружностью в данной точке  $M$  пространственной кривой мы называем окружность, имеющую с кривой в этой точке касание 2-го порядка.* Как известно из § 22, необходимым<sup>1)</sup> и достаточным условием касания 2-го порядка является совпадение для обеих кривых значений  $\dot{r}$  и  $\ddot{r}$  в точке касания. Итак, для искомой окружности значения  $\dot{r}_{окр}$  и  $\ddot{r}_{окр}$  в точке  $M$  должны быть те же, что и известные нам  $\dot{r}$  и  $\ddot{r}$  для данной кривой.



Черт. 72.

направлению и обратным по модулю с вектором  $\ddot{r}$  и может быть записан согласно (251):

$$\overline{MC} = \frac{\ddot{r}}{|\ddot{r}|}. \quad (252)$$

Собственно говоря, здесь имеется в виду вектор  $\ddot{r}$  для окружности, но он в случае соприкасающейся окружности совпадает в точке касания с вектором  $\ddot{r}$  для кривой. При этом  $\ddot{r} \neq 0$  по условию (235). Таким образом, центр соприкасающейся окружности  $C$  (черт. 72), —если она существует,—однозначно определяется вектором (252). Так как  $\overline{MC}$  имеет то же направление, что и  $\ddot{r}$ , а  $\ddot{r}$  всегда направлен по главной нормали в положительную сторону (в сторону вектора  $n$ ), то  $C$  лежит на главной нормали в положительную сторону от точки  $M$ . Так как  $\overline{MC}$  и  $\ddot{r}$  — векторы, обратные по модулю, то

$$MC = \frac{1}{|\ddot{r}|}. \quad (253)$$

<sup>1)</sup> После согласования направлений отсчета  $s$ , которое мы будем здесь предполагать.

или

$$R = \frac{1}{|\ddot{r}|}, \quad (254)$$

где  $R$  — радиус соприкасающейся окружности.

Итак, соприкасающаяся окружность должна иметь центр  $C$  на главной нормали, проходить через точку  $M$  и иметь в ней общую с кривой касательную (вектор  $\dot{r}$  общий). Тем самым главная нормаль нашей кривой  $MC$  и ее касательная  $MT$  должны лежать в плоскости окружности, а значит, плоскость окружности должна совпадать с соприкасающейся плоскостью кривой.

Итак, соприкасающаяся окружность,—если она существует,—определяется единственным образом, а именно так:

В положительную сторону главной нормали кривой откладывается отрезок  $MC$ , определяемый по формуле (253), и из точки  $C$ , как из центра, описывается в соприкасающейся плоскости окружности радиусом  $MC$ .

В формуле (253)  $\ddot{r}$  вычисляется, конечно, для кривой в точке  $M$ . Остается показать, что построенная таким образом окружность действительно будет соприкасающейся. Из построения видно, что окружность будет иметь в точке  $M$  общую с кривой касательную  $MT$ . Следовательно, единичный касательный вектор  $\dot{r}$  в точке  $M$  тоже можно считать общим для кривой и для окружности.

Далее, из построения точки  $C$  видно, что вектор  $\overline{MC}$  будет направлен по вектору  $\ddot{r}$ , вычисленному в точке  $M$  для кривой, так как оба вектора направлены в положительную сторону главной нормали. Модули же этих векторов—взаимно обратные величины, как видно из формулы (253). Если теперь вычислить  $\dot{r}$  в точке  $M$  для построенной нами окружности, то по лемме 2 § 37 этот вектор тоже одинаково направлен с вектором  $\overline{MC}$  и имеет модуль, обратный модулю  $\overline{MC}$ . Следовательно,  $\dot{r}$  имеет в точке  $M$  одно и то же значение и для кривой и для окружности. Совпадение значений  $\dot{r}$  уже было установлено. Построенная нами окружность—действительно соприкасающаяся.

Центр  $C$  соприкасающейся окружности называется *центром кривизны*, а ее радиус  $R$ —*радиусом кривизны* пространственной кривой в данной точке  $M$ .

Роль соприкасающейся окружности заключается в том, что вблизи точки  $M$  она представляет нашу кривую с ошибкой бесконечно малой лишь 3-го порядка (не ниже), принимая за бесконечно малое 1-го порядка путь, пройденный из точки касания по кривой (см. определение порядка касания кривых, § 22). Таким

образом, если в § 35 мы узнали, что в бесконечно малом, пренебрежимо бесконечно малыми 3-го порядка, пространственную кривую можно считать плоской (лежащей в своей соприкасающейся плоскости), то теперь мы знаем дополнительно, что в этих условиях ее можно считать дугой окружности (именно соприкасающейся окружности). В связи с этим понятно, почему получилось, что соприкасающаяся окружность лежит в соприкасающейся плоскости<sup>1)</sup>.

Заметим, что соприкасающаяся окружность в точке  $M$  на кривой может быть построена и другим путем, именно как предельное положение окружности, проведенной через три точки  $M_1, M_2, M_3$  на кривой, когда эти точки стремятся в точку  $M$ . Доказательство этой теоремы мы оставляем в стороне.

В случае точки распрямления ( $\dot{r} = 0$ ) соприкасающаяся окружность вырождается в прямую (касательную). Точнее, окружности, имеющей с кривой касание 2-го порядка, в точке распрямления не существует, зато касательная там имеет с кривой касание 2-го порядка.

### § 39. Кривизна пространственной кривой.

Введем теперь понятие кривизны в данной точке пространственной кривой. Вдоль пространственной кривой

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$$

в каждой точке определяется единичный касательный вектор

$$\mathbf{t} = \dot{\mathbf{r}}(s)$$

как функция дуги  $s$ .

*Скорость вращения вектора  $\mathbf{t}$  (или, что то же, скорость вращения касательной) в данной точке кривой по отношению к пути  $s$ , проходимому по кривой, мы называем кривизной  $k$  в данной точке.*

<sup>1)</sup> Понятно также, что, пользуясь при изучении пространственной кривой в бесконечно малом лишь первой и второй производными радиус-вектора  $\mathbf{r}$  и  $\dot{\mathbf{r}}$ , мы повторяем в сущности построения теории плоских кривых. Действительно, раз мы рассматриваем в данной точке только  $\mathbf{r}$  и  $\dot{\mathbf{r}}$ , то мы знаем в разложении вектор-функции  $\mathbf{r}$  в ряд Тейлора вблизи данной точки лишь члены 1-й и 2-й степени. Но, пренебрегая в бесконечно малом членами 3-й степени и выше, мы можем считать кривую расположенной в ее соприкасающейся плоскости, и нам приходится повторять построения теории плоских кривых, заменив только плоскость кривой ее соприкасающейся плоскостью в данной точке. Существенные особенности пространственных кривых скажутся позже, когда мы привлечем в рассмотрение  $\ddot{\mathbf{r}}$ , т. е. повысим точность исследования до 3-го порядка.

Другими словами,

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right|, \quad (255)$$

где  $\Delta s$  — путь, пройденный по кривой, исходя из данной точки, а  $\Delta \varphi$  — угол соответствующего поворота касательной  $\mathbf{t}$ . Но по лемме 2 § 18

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right| = |\dot{\mathbf{t}}(s)|$$

и, следовательно,

$$k = |\dot{\mathbf{t}}|. \quad (255')$$

А так как  $\mathbf{t} = \dot{\mathbf{r}}$ , то

$$k = |\ddot{\mathbf{r}}|. \quad (255'')$$

Мы замечаем, во-первых, что вообще  $k \geq 0$ , причем условие (236'), характеризующее точки распрямления, может быть переписано в виде

$$k = 0. \quad (256)$$

Уже полученный в начале § 34 результат о линии, сплошь состоящей из точек распрямления, можно теперь доказать снова в виде теоремы:

*Для того чтобы линия была прямой, необходимо и достаточно, чтобы ее кривизна во всех точках была равна нулю.*

Необходимость очевидна, так как вдоль прямой вектор  $\mathbf{t}$  остается постоянным, сохраняя направление по прямой и длину единицы. В таком случае  $\dot{\mathbf{t}} = 0$ , и формула (255') приводит к обращению кривизны  $k$  в нуль.

Достаточность. Если  $k = 0$ , то (255') показывает, что  $\dot{\mathbf{t}} = 0$ , а значит  $\mathbf{t}$  сохраняет постоянное значение. Интегрируя равенство

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{t}$$

или

$$d\mathbf{r} = \mathbf{t} ds,$$

где  $\mathbf{t}$  остается постоянным, получим

$$\mathbf{r} = \mathbf{t}s + \mathbf{r}_0.$$

Здесь  $\mathbf{r}_0$  — постоянный вектор интегрирования. Очевидно, что при переменном  $s$  конец вектора  $\mathbf{r}$  описывает прямую.

Далее, оставляя, как обычно, в стороне точки распрямления, сопоставим (255') и (254). Получим

$$k = \frac{1}{R}, \quad (257)$$

т. е. кривизна и радиус кривизны суть взаимно обратные величины. Эта теорема обобщает на пространство соответствующий результат (§ 26) для плоской кривой. Данное там пояснение смысла соотношения (257) применимо и для пространственных кривых.

#### § 40. Формулы Френе. Кручение.

Основной смысл формул Френе состоит в том, чтобы характеризовать вращение сопровождающего трехгранника  $t, n, b$  при движении точки касания вдоль пространственной кривой. Действительно, так как  $t, n, b$  — единичные взаимно ортогональные векторы, то при бесконечно малом смещении точки касания вдоль кривой эта тройка может лишь повернуться как твердое

тело (на изменение точки приложения мы внимания не обращаем) (черт. 73). Мы займемся сначала аналитическим выражением этой идеи; к кинематическому же истолкованию вернемся позже.

Считая кривую отнесенной к параметру  $s$

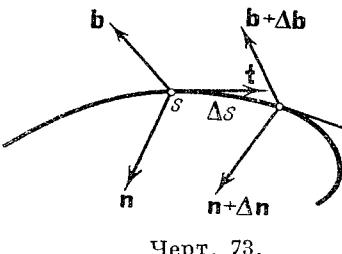
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s),$$

причем кривизна  $k$  нигде не обращается в нуль, мы, очевидно, можем и векторы сопровождающего трехгранника считать однозначно определенными функциями  $s$ :

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(s), \quad \mathbf{n} = \mathbf{n}(s), \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}(s).$$

Аналитическое содержание формул Френе будет заключаться в разложении производных от векторов  $t, n, b$  по дуге  $s$ , т. е.  $\dot{t}, \dot{n}, \dot{b}$ , по самим этим векторам.

Легче всего выразить производную  $\dot{t}$ . Мы знаем, что вектор  $\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}(s)$  направлен в каждой точке по главной нормали в положительном направлении, другими словами, в направлении вектора  $n$ . Что же касается его модуля, то он равен кривизне, как показывает (255'). Следовательно, вектор  $\dot{t}$ , как и всякий вектор, равен



Черт. 73.

своему модулю, умноженному на единичный вектор в том же направлении:

$$\dot{t} = kn. \quad (258)$$

Это и есть *первая формула Френе*. Вектор  $kn$  называется вектором кривизны кривой.

Займемся теперь дифференцированием вектора  $b(s)$ . Запишем определение вектора  $\dot{b}(s)$ :

$$\dot{b} = [\dot{t}, n],$$

и продифференцируем это равенство почленно по  $s$ . Получим

$$\dot{b} = [\dot{t}, n] + [t, \dot{n}].$$

В правой части первый член обращается в нуль, так как первый множитель векторного произведения  $\dot{t}$  коллинеарен второму,  $n$ , как показывает (258). Итак,

$$\dot{b} = [t, \dot{n}].$$

Так как  $n$  — вектор единичный, то его производная  $\dot{n}$  перпендикулярна к нему; кроме того, вектор  $t$  также к нему перпендикулярен. Следовательно, векторное произведение  $t$  на  $\dot{n}$ , перпендикулярное к обоим этим векторам, будет направлено параллельно  $n$  и будет отличаться от  $n$  только некоторым скалярным коэффициентом. Этот коэффициент, взятый с обратным знаком, мы обозначим через  $\times$ . Тогда векторное произведение  $[t, \dot{n}]$  равно  $-\times n$ , и мы можем записать

$$\dot{b} = -\times n. \quad (259)$$

Это есть *третья формула Френе* (вторую еще предстоит вывести). Коэффициент  $\times$  в каждой точке определяется, очевидно, единственным образом, включая и знак (в отличие от коэффициента  $k$ , который по самому определению кривизны всегда положителен).

Значение коэффициента  $\times$  в данной точке кривой мы будем называть *кручением кривой в этой точке*. Геометрический смысл кручения мы выясним несколько позже.

Используем формулы (245):

$$\mathbf{b} = [\mathbf{t}, \mathbf{n}], \quad (260)$$

$$\mathbf{t} = [\mathbf{n}, \mathbf{b}], \quad (260')$$

$$\mathbf{n} = [\mathbf{b}, \mathbf{t}]. \quad (260'')$$

Продифференцируем по  $s$  последнее равенство; получим

$$\dot{n} = [\dot{b}, t] + [b, \dot{t}].$$

Подставим сюда выражения  $\dot{b}$  и  $\dot{t}$  из (259) и (258). Получим

$$\dot{n} = [-\kappa n, t] + [b, kn].$$

Пользуясь формулами (260) и (260'), векторные произведения  $[n, t]$  и  $[b, n]$  можно заменить через  $-b$  и  $-t$ , и выражение для  $\dot{n}$  принимает окончательную форму

$$\dot{n} = \kappa b - kt. \quad (261)$$

Мы получили *вторую формулу Френе*. Сделаем сводку всех формул Френе:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{t} = kn, \\ \dot{n} = \kappa b - kt, \\ \dot{b} = -\kappa n. \end{array} \right\} \quad (262)$$

Производные  $\dot{t}$ ,  $\dot{n}$ ,  $\dot{b}$  по длине дуги  $s$  в данной точке разложены, как мы видим, по самим  $t$ ,  $n$ ,  $b$  с коэффициентами  $\pm k$ ,  $\pm \kappa$ . Интересно отметить, что если в каждом разложении на первом месте член с  $t$ , потом с  $n$ , потом с  $b$ , то матрица коэффициентов разложений (262) примет вид

$$\begin{vmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \kappa \\ 0 & -\kappa & 0 \end{vmatrix}. \quad (262')$$

Чтобы уяснить кинематический смысл формул Френе, представим себе, что векторы трехгранника  $t(s)$ ,  $n(s)$ ,  $b(s)$  откладываются из фиксированной точки  $O$ , так что, когда мы движемся по кривой, меняя аргумент  $s$ , трехгранник вращается как твердое тело около  $O$ .

Так как каждому значению  $s$  отвечает определенное положение трехгранника, то можно, перейдя в область кинематики, условно истолковать  $s$  как время. Тогда, как мы сейчас увидим, при каждом значении  $s$  («в каждый момент времени») для трехгранника можно указать определенный вектор мгновенной угловой скорости. Это значит, что точки трехгранника в этот момент обладают такими скоростями, как если бы он вращался около оси, направленной по некоторому вектору  $\omega$  с угловой скоростью  $|\omega|$  и притом в направлении против часовой стрелки.

если смотреть вдоль оси с конца вектора  $\omega$  к его началу (черт. 74).

Возьмем сначала какой-нибудь *произвольно выбранный* вектор  $\omega$  и заставим трехгранник вращаться около оси, направленной по вектору  $\omega$ , с угловой скоростью  $|\omega|$ , т. е. так, чтобы угол поворота был пропорционален приращению «времени»  $s$  с коэффициентом пропорциональности  $|\omega|$ . Направление вращения пусть согласовано с направлением  $\omega$ , как указано выше.

Вычислим скорость движения точки  $T$ , лежащей в конце вектора  $t$ . Так как для  $T$  вектор  $t$  служит радиус-вектором, то, считая  $s$  временем, мы должны принять за вектор скорости производную  $\dot{t}$ . С другой стороны, считая, что трехгранник вращается около оси  $\omega$ , мы видим, что  $T$  движется по окружности радиуса  $PT$

$$PT = \sin(\omega, t),$$

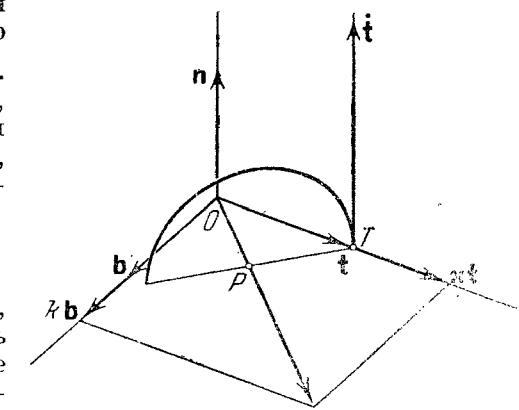
где  $PT$  — перпендикуляр, опущенный из  $T$  на ось вращения. Считая, кроме того, что угловая скорость вращения есть  $|\omega|$ , мы получаем для линейной скорости движения  $T$  произведение радиуса окружности на угловую скорость

$$|\omega| \cdot \sin(\omega, t).$$

В самом деле, угловая скорость выражает угол поворота за единицу времени; значит, умноженная на радиус окружности, она дает путь, пройденный точкой  $T$  по окружности за единицу времени.

Что же касается линейной скорости движения  $T$ , то она направлена по касательной к окружности и перпендикулярна, следовательно, к радиусу окружности  $PT$  и к оси вращения  $\omega$  (черт. 74).

В итоге скорость движения  $T$  как вектор направлена перпендикулярно к плоскости векторов  $t$ ,  $\omega$  и имеет модуль, равный произведению модулей этих векторов  $1 \cdot |\omega|$  на синус угла между ними. Итак, эта скорость есть векторное произведение  $\omega$  на  $t$ ; нетрудно убедиться, что множители нужно брать именно в этом порядке, чтобы получить нужное направление скорости. Со-



Черт. 74.

поставляя оба выражения, полученные для скорости движения конца вектора  $t$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{t} &= [\omega, t] \\ \text{и совершенно аналогично} \\ \dot{n} &= [\omega, n], \\ \dot{b} &= [\omega, b]. \end{aligned} \right\} \quad (263)$$

Разложим вектор угловой скорости  $\omega$  по векторам  $t$ ,  $n$ ,  $b$ , обозначая коэффициенты разложения через  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ :

$$\omega = \alpha t + \beta n + \gamma b.$$

Вставим это разложение  $\omega$  в предшествующие формулы; пользуясь равенствами (260), (260') и (260''), получаем

$$\begin{aligned} \dot{t} &= 0 - \beta b + \gamma n, \\ \dot{n} &= \alpha b + 0 - \gamma t, \\ \dot{b} &= -\alpha n + \beta t + 0. \end{aligned}$$

До сих пор вектор  $\omega$  был выбран произвольно. Постараемся теперь выбрать его так, чтобы скорости движения концов  $t$ ,  $n$ ,  $b$  при вращении, определяемом вектором  $\omega$ , совпадали с теми скоростями, которые концы векторов  $t$ ,  $n$ ,  $b$  имеют фактически согласно формулам Френе. Для этого необходимо и достаточно, чтобы только что выписанные формулы совпадали с формулами Френе (262), т. е. чтобы выполнялись равенства

$$\alpha = \kappa, \quad \beta = 0, \quad \gamma = k$$

и, следовательно,

$$\omega = \kappa t + kb. \quad (264)$$

Итак, найден такой вектор угловой скорости  $\omega$ , именно, заданный формулой (264), что определяемое им вращение трехгранника сообщает концам векторов  $t$ ,  $n$ ,  $b$  те же линейные скорости по отношению к  $s$ , которыми они обладают в данный момент фактически.

Теперь кинематический смысл формул Френе ясен. Они показывают нам, что при каждом данном значении  $s$  сопровождающий трехгранник вращается как твердое тело с вектором мгновенной угловой скорости (264), причем скорость берется по отношению к проходящему по кривой пути  $s$  (который играет, таким образом, роль времени).

Вектор угловой скорости  $\omega$  лежит, как мы видим, в плоскости  $t$ ,  $b$  и разлагается лишь на два составляющих  $\kappa t$  и  $kb$ , так что вращение трехгранника в данный момент слагается, можно сказать, из двух вращений.

Одно вращение отвечает слагаемому  $kb$ . Оно происходит по определению вектора мгновенной угловой скорости около оси, направленной по  $kb$ , и с угловой скоростью, равной  $|kb|$ , т. е. *около бинормали и с угловой скоростью  $k$* .

Направление этого вращения будет всегда от  $t$  к  $n$ , так как  $k > 0$  и  $kb$  направлено в сторону  $b$ , следовательно, с конца  $kb$  вращение от  $t$  к  $n$  как раз представляется идущим против часовой стрелки (мы везде пользуемся правой системой координат и правым векторным произведением).

Другое вращение отвечает слагаемому  $\kappa t$ . Оно происходит около оси, направленной по  $\kappa t$ , и с угловой скоростью, равной  $|\kappa t|$ , т. е. *около касательной и с угловой скоростью  $\kappa$* .

Что же касается направления этого вращения, то оно зависит от знака  $\kappa$ . В случае  $\kappa > 0$  вектор  $\kappa t$  направлен в сторону  $t$  и вращение происходит от  $n$  к  $b$ , так как именно такое вращение представляется идущим против часовой стрелки, если смотреть с конца  $t$ . В случае  $\kappa < 0$  вектор  $\kappa t$  направлен в обратную сторону, и вращение происходит от  $b$  к  $n$ .

На это обстоятельство следует обратить внимание, так как оно характеризует геометрический смысл *знака кручения  $\kappa$* .

Необходимо пояснить, что говоря о направлении вращения трехгранника, мы предполагаем, что по кривой мы движемся в *сторону возрастания  $s$* . Действительно, мы исходили из кинематического истолкования, где  $s$  играет роль времени и, следовательно, в своем изменении считается *возрастающим*.

Теперь интересно проследить, что происходит, когда мы направление отсчета дуги  $s$  изменим на обратное. Тогда при возрастании  $s$  мы будем двигаться в обратную сторону и, следовательно, вращение трехгранника будет происходить в *обратном направлении*. Но так как при этом обратном отсчете дуги  $s$  в сопровождающем трехграннике  $t$  и  $b$  изменят направление на обратное, а  $n$  останется прежним [см. (246)], то вращение от  $t$  к  $n$  и вращение от  $n$  к  $b$  будут теперь иметь направления, *тоже обратные прежним*. Поэтому, если раньше вращение трехгранника около касательной имело направление, совпадающее с направлением вращения от  $n$  к  $b$ , т. е. если  $\kappa$  было  $> 0$ , то и теперь, при обратном отсчете дуги  $s$ , будет в точности то же самое. Это же относится, конечно, и к случаю  $\kappa < 0$ . Следовательно, *не только модуль (что очевидно), но и знак кручения  $\kappa$  не зависит от выбора направления отсчета дуги кривой*. Кручение  $\kappa$  характеризует геометрические свойства самой кривой в данной точке независимо от направления отсчета дуги на ней.

Это легко проверить и непосредственно из третьей формулы Френе. Действительно, при изменении направления отсчета дуги на обратное левая часть формулы (259) не меняется, так как  $b$  и  $s$

одновременно меняют знак на обратный; а так как  $\mathbf{n}$  тоже не меняется, то и коэффициент  $x$  остается прежним.

Нам нужно, наконец, остановиться на геометрическом смысле кручения  $x$ . Оно, собственно, уже получило у нас истолкование, включая и знак, как угловая скорость вращения трехгранника вокруг касательной.

Этому истолкованию в части, касающейся модуля  $x$ , можно придать более простой вид.

Берем по модулю обе части третьей формулы Френе:

$$|\dot{\mathbf{b}}| = |-\mathbf{x}\mathbf{n}| = |x|, \text{ так как } |\mathbf{n}| = 1.$$

Применяя лемму 2 § 18 к вектор-функции  $\mathbf{b}(s)$ , получим

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right| = |\dot{\mathbf{b}}| \text{ и, значит, } \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right| = |x|.$$

Здесь  $\Delta \varphi$  означает угол между двумя бинормалами, отстоящими вдоль кривой на расстоянии  $\Delta s$ . Предел отношения  $\frac{\Delta \varphi}{\Delta s}$ , когда вторая бинормаль стремится к совпадению с первой, мы называем *скоростью вращения бинормали в соответствующей точке по отношению к пути, проходимому по кривой*. Мы видим, что эта скорость равна модулю кручения  $|x|$  в той же точке. Таково геометрическое истолкование модуля кручения. Но так как бинормали перпендикулярны к соприкасающимся плоскостям, то угол между бинормальными в двух точках кривой равен углу между соприкасающимися плоскостями в тех же точках. Следовательно, повторяя те же рассуждения, можно сказать, что  $|x|$  есть в то же время *скорость вращения соприкасающейся плоскости по отношению к пути  $s$ , проходимому по кривой*.

В заключение докажем теорему, хорошо выясняющую роль кручения пространственной кривой.

Очевидно прежде всего, что, так как для *плоской кривой* соприкасающаяся плоскость во всех точках одна и та же, именно плоскость самой кривой, то бинормали все параллельны друг другу, а векторы  $\mathbf{b}$  во всех точках равны между собой. Отсюда скорость вращения бинормали равна нулю, и следовательно,

$$x = 0.$$

Это можно видеть и прямо из третьей формулы Френе

$$\dot{\mathbf{b}} = -\mathbf{x}\mathbf{n}.$$

Действительно, производная от постоянного  $\mathbf{b}$  равна нулю, а так как  $\mathbf{n}$  заведомо отлично от нуля, то обращается в нуль кручение  $x$ .

#### § 41] ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КРИВИЗНЫ И КРУЧЕНИЯ 183

Итак, если кривая — плоская, то кручение  $x$  во всех точках равно нулю. Несколько менее очевидна обратная теорема, которую мы сейчас докажем:

*Если кручение  $x$  во всех точках равно нулю, то кривая — плоская.*

Поскольку кручение  $x$  равно нулю, третья формула Френе показывает, что  $\dot{\mathbf{b}} = 0$ . Так как производная вектор-функции  $\mathbf{b}(s)$  тождественно равна нулю, то и производные всех ее координат тоже нули, следовательно, эти координаты и сама вектор-функция остаются постоянными:

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_0.$$

Итак, все бинормали параллельны между собой (черт. 75). Но касательная в любой точке перпендикулярна к бинормали, следовательно, все касательные нашей кривой перпендикулярны к постоянному  $\mathbf{b}_0$ . Запишем это:

$$\mathbf{t}\mathbf{b}_0 = 0 \text{ или } \mathbf{r}\mathbf{b}_0 = 0.$$

Умножая обе части последнего равенства на  $ds$ , получим

$$d\mathbf{t}\mathbf{b}_0 = 0 \text{ или } d(\mathbf{r}\mathbf{b}_0) = 0.$$

Следовательно,

$$\mathbf{r}\mathbf{b}_0 = D,$$

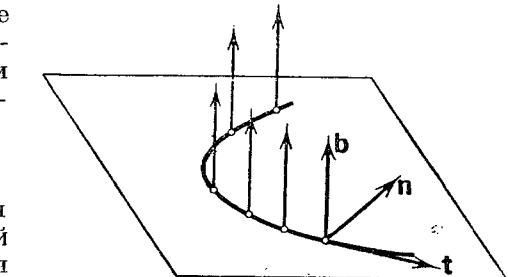
где  $D$  — постоянная. Обозначим через  $A, B, C$  координаты  $\mathbf{b}_0$ , через  $x, y, z$  — координаты  $\mathbf{r}$ , т. е. текущие координаты по кривой. Тогда

$$\mathbf{r}\mathbf{b}_0 = Ax + By + Cz = D.$$

Текущие координаты по кривой удовлетворяют уравнению некоторой плоскости, на которой и расположится, следовательно, наша кривая.

#### § 41. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КРИВИЗНЫ И КРУЧЕНИЯ.

В предыдущем параграфе мы впервые перешли к рассмотрению кривой вблизи данной точки с точностью 3-го порядка, т. е. учитывая бесконечно малые 1-го, 2-го и 3-го порядков. Действительно, если для построения трехгранника  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  и кривизны  $k$  нам было достаточно знать в данной точке лишь первую и вторую



Черт. 75.

производные  $\dot{\mathbf{r}}$  и  $\ddot{\mathbf{r}}$  радиус-вектора  $\mathbf{r}$  по дуге  $s$ , то в формулах Френе при дифференцировании  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b}$  по  $\dot{s}$  (и, следовательно, в выражении для  $\chi$ ) должна появиться и третья производная  $\ddot{\mathbf{r}}$ . Но знать  $\mathbf{r}$ ,  $\dot{\mathbf{r}}$ ,  $\ddot{\mathbf{r}}$  в данной точке кривой  $s = s_0$  — все равно, что знать разложение  $\mathbf{r}(s)$  в ряд Тейлора по степеням  $s - s_0$  до членов третьей степени включительно, т. е. рассматривать кривую вблизи данной точки  $s_0$  с точностью 3-го порядка.

Сейчас мы фактически покажем зависимость между  $\dot{\mathbf{r}}$ ,  $\ddot{\mathbf{r}}$ ,  $\ddot{\mathbf{r}}$ , с одной стороны, и  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $k$ ,  $\chi$  — с другой. Эти зависимости одновременно будут служить и вычислительными формулами, позволяющими находить все рассмотренные нами величины, исходя из последовательных производных  $\dot{\mathbf{r}}$ ,  $\ddot{\mathbf{r}}$ ,  $\ddot{\mathbf{r}}$  радиус-вектора  $\mathbf{r}$  кривой по дуге  $s$ .

Прежде всего  $\mathbf{t}$  по определению совпадает с первой производной  $\mathbf{r}$ :

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{t}. \quad (265)$$

Дифференцируем по  $s$  и пользуемся первой формулой (262):

$$\ddot{\mathbf{r}} = k\mathbf{n}. \quad (266)$$

Еще раз дифференцируем по  $s$  и пользуемся второй формулой (262):

$$\dddot{\mathbf{r}} = \dot{k}\mathbf{n} + k\dot{\mathbf{n}} = \dot{k}\mathbf{n} + k(x\mathbf{b} - kt).$$

Окончательно

$$\ddot{\mathbf{r}} = -k^2\mathbf{t} + \dot{k}\mathbf{n} + kx\mathbf{b}. \quad (267)$$

Теперь выразим обратно  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $k$ ,  $\chi$  через  $\dot{\mathbf{r}}$ ,  $\ddot{\mathbf{r}}$ ,  $\ddot{\mathbf{r}}$ . Беря обе части (266) по модулю и учитывая, что  $|\mathbf{n}| = 1$ , приходим к уже известной формуле

$$k = |\ddot{\mathbf{r}}|. \quad (268)$$

Вставляя это выражение  $k$  в (266), получаем формулу

$$\mathbf{n} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}}{|\ddot{\mathbf{r}}|}. \quad (269)$$

Перемножая векторно равенства (265) и (266) почленно, получим

$$[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}] = k\mathbf{b}, \quad (270)$$

так как  $[\mathbf{t}, \mathbf{n}] = \mathbf{b}$ . Отсюда, пользуясь равенством (268), легко выразить  $\mathbf{b}$ :

$$\mathbf{b} = \frac{[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]}{|\ddot{\mathbf{r}}|}. \quad (270')$$

Перемножим скалярно равенства (267) и (270) почленно. Получим (учитывая, что  $\mathbf{t}\mathbf{b} = 0$ ,  $\mathbf{n}\mathbf{b} = 0$ ,  $\mathbf{b}^2 = 1$ )

$$(\dot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}}) = k^2\chi, \quad (271)$$

где в левой части стоит смешанное произведение. Отсюда легко выразить  $\chi$ , учитывая, что  $k^2 = |\ddot{\mathbf{r}}|^2 = \ddot{\mathbf{r}}^2$ . Получим

$$\chi = \frac{(\dot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}})}{\ddot{\mathbf{r}}^2}. \quad (271')$$

Практически задание вектор-функции  $\mathbf{r}(s)$  означает обычно задание ее координат (текущих координат по кривой) в функции параметра  $s$  вдоль кривой:

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}.$$

Поэтому имеет смысл выразить предыдущие формулы через текущие координаты и их производные. Дифференцируя почленно, мы получаем

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}, \\ \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}, \\ \ddot{\mathbf{r}} &= x\ddot{\mathbf{i}} + y\ddot{\mathbf{j}} + z\ddot{\mathbf{k}}. \end{aligned}$$

Формулу (268) можно теперь переписать (пользуясь известным выражением для модуля вектора через координаты) в виде

$$k = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (272)$$

Формула (271'), если переписать смешанное произведение в виде определителя, примет вид

$$\chi = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ x & y & z \end{vmatrix}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (273)$$

Перепишем также выражения для  $t$ ,  $n$ ,  $b$ :

$$\left. \begin{aligned} t &= \dot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \dddot{z}\mathbf{k}, \\ n &= \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \mathbf{i} + \frac{\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \mathbf{j} + \frac{\dddot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \mathbf{k}, \\ b &= \frac{\begin{vmatrix} \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \mathbf{i} + \frac{\begin{vmatrix} \dot{z} & \dot{x} \\ \ddot{z} & \ddot{x} \end{vmatrix}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \mathbf{j} + \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \mathbf{k}. \end{aligned} \right\} \quad (274)$$

Заметим, что так как  $t$ ,  $n$ ,  $b$ —единичные векторы, то их координаты (коэффициенты этих разложений) совпадают с их направляющими косинусами. Поэтому матрица коэффициентов в разложениях (274) есть матрица направляющих косинусов для трех взаимно ортогональных направлений: по касательной, главной нормали и бинормали в данной точке кривой. Эта матрица будет, таким образом, ортогональной.

Все выписанные сейчас формулы относятся к случаю, когда радиус-вектор  $\mathbf{r}$  задан в функции параметра  $s$ . Теоретически это всегда возможно сделать, но практически часто бывает довольно утомительным вычислять  $t$ ,  $n$ ,  $b$ ,  $k$ ,  $x$  по этим формулам, если предварительно приходится переходить от задания кривой в произвольном параметре:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad (275)$$

к параметру  $s$ .

Поэтому мы покажем, как вычисляются кривизна и кручение, исходя непосредственно из уравнения (275). Изучим предварительно, как меняются некоторые выражения, составленные из производных от радиус-вектора по параметру, когда мы переходим к новому параметру.

Итак, пусть старый параметр  $t$  задан как функция нового параметра  $\tau$ . Тогда радиус-вектор  $\mathbf{r}(t)$  можно рассматривать как функцию от функции  $\tau$ . Вычисляем по соответствующим правилам производные от  $\mathbf{r}$  по  $\tau$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} &= \mathbf{r}' \frac{dt}{d\tau}, \\ \frac{d^2\mathbf{r}}{d\tau^2} &= \mathbf{r}'' \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 + \mathbf{r}' \frac{d^2t}{d\tau^2}, \\ \frac{d^3\mathbf{r}}{d\tau^3} &= \mathbf{r}''' \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^3 + 3\mathbf{r}'' \frac{dt}{d\tau} \cdot \frac{d^2t}{d\tau^2} + \mathbf{r}' \frac{d^3t}{d\tau^3}. \end{aligned}$$

Штрихами обозначаем дифференцирование по старому параметру  $t$ .

Перемножим векторно первые два равенства почленно. Получим

$$\left[ \frac{d\mathbf{r}}{d\tau}, \frac{d^2\mathbf{r}}{d\tau^2} \right] = [\mathbf{r}', \mathbf{r}''] \cdot \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^3, \quad (276)$$

так как в правой части векторы, коллинеарные  $\mathbf{r}'$ , дают в векторном произведении между собой нуль.

Перемножим теперь скалярно равенство (276) и предшествующее ему равенство почленно. Получим, учитывая, что перемножение векторного произведения на третий вектор скалярно дает смешанное произведение:

$$\left( \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \frac{d^2\mathbf{r}}{d\tau^2} \frac{d^3\mathbf{r}}{d\tau^3} \right) = (\mathbf{r}' \mathbf{r}'' \mathbf{r}''') \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^6. \quad (277)$$

Остальные члены правой части исчезнут, так как  $[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']$  перпендикулярно к  $\mathbf{r}'''$  и  $\mathbf{r}'$  и в скалярном произведении с ними дает нуль.

Интересно, что равенства (276) и (277) можно переписать в виде, симметричном относительно обоих параметров  $t$  и  $\tau$ .

В самом деле, умножим обе части (276) на  $d\tau^3$ , а обе части (277) на  $d\tau^6$ . Получим

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\mathbf{r}}{d\tau}, \frac{d^2\mathbf{r}}{d\tau^2} \right] d\tau^3 &= [\mathbf{r}', \mathbf{r}''] dt^3, \\ \left( \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \frac{d^2\mathbf{r}}{d\tau^2} \frac{d^3\mathbf{r}}{d\tau^3} \right) d\tau^6 &= (\mathbf{r}' \mathbf{r}'' \mathbf{r}''') dt^6. \end{aligned}$$

Эти равенства показывают, что бесконечно малый 3-го порядка вектор

$$[\mathbf{r}', \mathbf{r}''] dt^3$$

и бесконечно малый 6-го порядка скаляр

$$(\mathbf{r}' \mathbf{r}'' \mathbf{r}''') dt^6$$

инвариантны при переходе к любой другой параметризации.

Возвращаясь к формулам (276) и (277), примем, в частности, за новый параметр  $\tau$  длину дуги  $s$  вдоль кривой; параметризацию  $t$  оставим произвольной. Формулы примут вид

$$\begin{aligned} [\mathbf{r}', \mathbf{r}''] &= [\mathbf{r}', \mathbf{r}''] \left( \frac{dt}{ds} \right)^3, \\ (\mathbf{r}' \mathbf{r}'' \mathbf{r}''') &= (\mathbf{r}' \mathbf{r}'' \mathbf{r}''') \left( \frac{dt}{ds} \right)^6. \end{aligned}$$

Сравнивая их с формулами (270) и (271), мы получаем

$$k\mathbf{b} = [\mathbf{r}', \mathbf{r}''] \left( \frac{dt}{ds} \right)^3, \quad (278)$$

$$k^2\mathbf{z} = (\mathbf{r}' \mathbf{r}'' \mathbf{r}''') \left( \frac{dt}{ds} \right)^6. \quad (278')$$

Но, как известно,

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'| . \quad (279)$$

Поэтому, если взять обе части формулы (278) по модулю, получится

$$k = \frac{|[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']|}{|\mathbf{r}'|^3} . \quad (280)$$

Вставляя полученное для  $k$  выражение в (278'), мы получим

$$\frac{|[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']|^2}{|\mathbf{r}'|^6} z = (\mathbf{r}' \mathbf{r}'' \mathbf{r}''') \frac{1}{|\mathbf{r}'|^6},$$

откуда

$$z = \frac{(\mathbf{r}' \mathbf{r}'' \mathbf{r}''')}{|[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']|^2} . \quad (281)$$

Здесь в знаменателе мы заменили квадрат модуля скалярным квадратом самого вектора. Формулы (280) и (281) приведены уже к окончательному виду и служат для вычисления кривизны и кручения в случае, когда кривая задана уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

при любом выборе параметра  $t$  вдоль кривой. Перепишем в заключение эти формулы в координатной форме.

Выпишем производные радиус-вектора по параметру  $t$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}, \\ \mathbf{r}'' &= x''\mathbf{i} + y''\mathbf{j} + z''\mathbf{k}, \\ \mathbf{r}''' &= x'''\mathbf{i} + y'''\mathbf{j} + z'''\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Отсюда по известным формулам векторной алгебры вычисляем

$$[\mathbf{r}', \mathbf{r}''] = (y'z'' - z'y'')\mathbf{i} + (z'x'' - x'z'')\mathbf{j} + (x'y'' - y'x'')\mathbf{k},$$

$$(\mathbf{r}' \mathbf{r}'' \mathbf{r}''') = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

Вставляя полученные выражения в (280) и (281), получаем эти формулы в координатной форме:

$$\left. \begin{aligned} k &= \sqrt{\frac{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}}, \\ &\quad \left. \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} \right. \end{aligned} \right\} \quad (282)$$

$$z = \frac{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2}{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2} .$$

### § 41] ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КРИВИЗНЫ И КРУЧЕНИЯ 189

Замечательно, что последняя формула выражает кручение  $\kappa$  через производные текущих координат по параметру *рациональным образом*, и, следовательно, со вполне определенным знаком. Напротив, выражение для  $k$  содержит квадратные корни, так что, помимо формулы, нужна словесная оговорка, что неопределенность в знаке мы условились устранять, боясь всегда знак +.

Чтобы установить связь с предыдущим, отметим, что если кривая лежит в плоскости  $XY$  и, следовательно,  $z \equiv 0$ , то выражение для  $k$  сильно упрощается и, как легко проверить, сводится к тому, которое мы имели в теории плоских кривых.

Найдем еще центр кривизны  $C$ , вернее вектор  $\overline{MC}$ , ведущий в центр кривизны из данной точки  $M$  на кривой. Рассмотрим сначала двойное векторное произведение  $[[\mathbf{r}', \mathbf{r}''] \mathbf{r}']$ . Нетрудно заметить, что оно всегда направлено в положительную сторону главной нормали. Впрочем, это выяснится из дальнейших выкладок.

Составим почленное векторное произведение равенства (276) и равенства

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}' \frac{dt}{ds} .$$

Получим

$$\left[ \left[ \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right] \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right] = [[\mathbf{r}', \mathbf{r}''] \mathbf{r}'] \left( \frac{dt}{ds} \right)^4 .$$

Отсюда следует, между прочим, что бесконечно малый 4-го порядка вектор

$$[[\mathbf{r}', \mathbf{r}''] \mathbf{r}'] dt^4$$

инвариантен при переходе к любой другой параметризации.

Примем за новый параметр  $\tau$  дугу  $s$ . Тогда равенство примет вид

$$[[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}] \dot{\mathbf{r}}] = [[\mathbf{r}', \mathbf{r}''] \mathbf{r}'] \left( \frac{dt}{ds} \right)^4 .$$

В силу (270) и (265) левая часть равна  $k [\mathbf{n}, \mathbf{t}]$ , т. е.  $k n$ , и мы получаем [пользуясь (279)]

$$kn = \frac{[[\mathbf{r}', \mathbf{r}''] \mathbf{r}']}{|\mathbf{r}'|^4} . \quad (283)$$

Вектор  $\overline{MC}$  равен, очевидно,  $Rn$ , (см. черт. 72), так как он направлен по единичному вектору  $n$  и имеет модуль, равный радиусу кривизны  $R$ . Итак,

$$\overline{MC} = Rn = \frac{1}{k} n . \quad (283')$$

Разделим равенство (283) почленно на равенство (280), возведенное почленно в квадрат. В левой части получим  $\frac{n}{k}$ , т. е.  $\overline{MC}$ :

$$\overline{MC} = \frac{[[\mathbf{r}', \mathbf{r}''] \mathbf{r}'] \mathbf{r}'}{[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']^2} , \quad (283'')$$

В правой части мы заменили квадраты модулей скалярными квадратами самих векторов.

Найденное выражение  $\overline{MC}$  в координатной записи выглядит довольно сложно. Мы не будем его выписывать в общем виде и ограничимся случаем *плоской кривой* (на плоскости  $XY$ ). Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j}; \quad \mathbf{r}'^2 = x'^2 + y'^2; \quad \mathbf{r}'' = x''\mathbf{i} + y''\mathbf{j}; \\ [\mathbf{r}', \mathbf{r}''] &= (y''x' - x''y')\mathbf{k}; \quad [\mathbf{r}', \mathbf{r}'']^2 = (y''x' - x''y')^2; \\ [[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']] \mathbf{r}' &= (y''x' - x''y')(-y'\mathbf{i} + x'\mathbf{j}). \end{aligned}$$

Теперь (283'') примет вид

$$\overline{MC} = \frac{-y'\mathbf{i} + x'\mathbf{j}}{y''x' - x''y'}(x'^2 + y'^2).$$

Коэффициенты при  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$ , т. е. проекции вектора  $\overline{MC}$  на оси  $X$ ,  $Y$ , дают нам приращения координат  $a - x$ ,  $b - y$  при переходе из точки  $M$  на кривой в центр кривизны  $C$ .

Нетрудно проверить, что выражения для  $a - x$ ,  $b - y$  получаются те же, что и в формулах (179). Это показывает, что в § 24 мы только по внешности видоизменили понятие о касании 2-го порядка между кривой и окружностью (см. § 24, замечание): по существу результат получился тот же, как и в случае обычного определения (которым мы пользуемся сейчас в теории пространственных кривых).

Приимеры.

Применим предшествующую теорию к простейшему случаю неплоской кривой — *винтовой линии*. Так называется линия, описываемая точкой  $M$ , которая движется по какойнибудь образующей прямого круглого цилиндра, вращающегося в то же время около своей оси так, что путь, проходимый точкой  $M$  по образующей, все время пропорционален углу поворота цилиндра.

Пусть уравнение цилиндра

$$x^2 + y^2 = a^2$$

и пусть  $\lambda$  — коэффициент пропорциональности между углом  $\varphi$  поворота цилиндра и путем, пройденным точкой  $M$  по образующей. Показать, что если принять за начальное положение точки  $M$  точку  $M_0(a, 0, 0)$ , то положение точки  $M$  в зависимости от угла  $\varphi$  будет определяться координатами

$$x = a \cos \varphi, \quad y = a \sin \varphi, \quad z = \lambda \varphi.$$

Мы получили параметрическое представление винтовой линии; перепишем его в векторной форме:

$$\mathbf{r} = a\mathbf{e}(\varphi) + \lambda\varphi\mathbf{k},$$

где

$$\mathbf{e}(\varphi) = \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi.$$

Винтовая линия бесконечное число раз обвивается вокруг «вертикально поставленного» цилиндра, поднимаясь с каждым витком на высоту  $2\pi\lambda$  (см. ниже черт. 78).

Вычислим вектор, направленный по касательной, дифференцируя  $\mathbf{r}$  по  $\varphi$ :

$$\mathbf{r}' = a\mathbf{e}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \lambda\mathbf{k},$$

§ 41] ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КРИВИЗНЫ И КРУЧЕНИЯ 191  
так как

$$\mathbf{e}'(\varphi) = \mathbf{e}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Отсюда

$$ds = |\mathbf{r}'| d\varphi = \sqrt{a^2 + \lambda^2} d\varphi.$$

Следовательно,  $s = \varphi \sqrt{a^2 + \lambda^2}$ , если  $s$  отсчитывать от той же начальной точки  $M_0$  и в сторону возрастания  $\varphi$ .

Вычислим вектор  $\mathbf{t}$ :

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} \mathbf{e}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\lambda}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} \mathbf{k}.$$

Очевидно,

$$\cos(\widehat{\mathbf{t}, \mathbf{k}}) = \mathbf{t} \cdot \mathbf{k} = \frac{\lambda}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}}.$$

Итак, *касательная к винтовой линии направлена под постоянным углом к оси цилиндра* (т. е. к оси  $z$ ).

Дифференцируем  $\mathbf{r}'$  по  $\varphi$ :

$$\mathbf{r}'' = -a\mathbf{e}(\varphi).$$

Легко проверить, что  $\mathbf{r}'' \perp \mathbf{r}'$ , т. е.  $\mathbf{r}''$  идет по нормали; но так как  $\mathbf{r}''$  всегда лежит в соприкасающейся плоскости, то эта нормаль будет *глазной*. Все главные нормали винтовой линии *пересекают ось цилиндра и примыкают под прямым углом*. В самом деле, если к радиус-вектору  $\mathbf{r}$  добавить  $\mathbf{r}''$ , то мы получаем  $\lambda\varphi\mathbf{k}$ , т. е., смещаясь из точки  $M$  на вектор  $\mathbf{r}''$  по главной нормали, мы попадаем на ось  $Z$ : очевидно также, что  $\mathbf{r}'' \perp \mathbf{k}$ .

Вычислим  $\frac{dt}{ds}$ :

$$\frac{dt}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{ds} = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} \mathbf{e}(\varphi) \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} = \frac{a}{a^2 + \lambda^2} (-\mathbf{e}(\varphi)).$$

Сравнивая с первой формулой Френе, убеждаемся, что в нашем случае

$$\mathbf{k} = \frac{a}{a^2 + \lambda^2}, \quad \mathbf{n} = -\mathbf{e}(\varphi).$$

Очевидно

$$\mathbf{b} = [\mathbf{t}, \mathbf{n}] = -\frac{\lambda}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} \mathbf{e}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{a}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} \mathbf{k}.$$

Дифференцируя по  $s$ , получим

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{d\mathbf{b}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\lambda}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} \mathbf{e}(\varphi) \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} = \left(-\frac{\lambda}{a^2 + \lambda^2}\right)(-\mathbf{e}(\varphi)).$$

Сравнивая с третьей формулой Френе, получаем

$$\mathbf{x} = \frac{\lambda}{a^2 + \lambda^2}.$$

Таким образом,  $k$  и  $x$  для винтовой линии — *постоянные*. Знак  $x$  будет таким же, как и знак  $\lambda$ .

Найдем, наконец, мгновенную угловую скорость  $\omega$ :

$$\omega = \dot{x}\mathbf{t} + k\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}} \mathbf{k}.$$

Оказывается что  $\omega$  — тоже постоянная, так что трехгранник Френе вращается все время около оси, параллельной оси  $Z$ , с постоянной угловой скоростью  $\frac{1}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}}$ .

### § 42. Строение кривой вблизи обыкновенной точки.

Мы будем предполагать, что в изучаемой точке  $M$

$$k > 0, \quad x \neq 0.$$

Первое условие устраниет случай точки распрямления. Второе условие, с которым нам не приходилось еще сталкиваться, устраивает, сверх того, случай точки, где  $x=0$ , т. е. где скорость вращения соприкасающейся плоскости по отношению к пути, проходимому по кривой, обращается в нуль и соприкасающаяся плоскость в этом смысле будет стационарной. Как мы знаем, если  $x=0$  во всех точках кривой, то кривая — плоская. Но и для существенно пространственной кривой возможны отдельные точки, где удовлетворяется уравнение  $x=0$ . Вблизи таких точек «уплощения» поведение кривой носит особенный характер, почему мы и ограничиваемся лишь наиболее типическим случаем  $x \neq 0$ .

Предполагаем, что уравнение кривой задано в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s).$$

Пусть точка  $M$  отвечает данному значению  $s$ ; перейдем в бесконечно близкую точку  $M'$ , давая  $s$  приращение  $\Delta s$ . Тогда радиус-вектор точки  $M'$  будет  $\mathbf{r}(s + \Delta s)$ , так что

$$\overline{OM} = \mathbf{r}(s), \quad \overline{OM'} = \mathbf{r}(s + \Delta s)$$

и, следовательно,

$$\overline{MM'} = \overline{OM'} - \overline{OM} = \mathbf{r}(s + \Delta s) - \mathbf{r}(s).$$

Разлагая приращение вектор-функции  $\mathbf{r}(s)$  в ряд Тейлора по степеням  $\Delta s$ , мы получим вектор смещения  $\overline{MM'}$  в виде

$$\overline{MM'} = \dot{\mathbf{r}} \cdot s + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{r}} (\Delta s)^2 + \frac{1}{6} \dddot{\mathbf{r}} (\Delta s)^3 + \dots$$

Многоточием обозначен остаточный член, бесконечно малый ниже 4-го порядка. Им мы будем пренебрегать, так как в этом параграфе изучается строение кривой с точностью 3-го порядка.

Пользуясь формулами (265), (266), (267), мы можем переписать выражение для  $\overline{MM'}$  так:

$$\overline{MM'} = \mathbf{t} \Delta s + \frac{1}{2} k \mathbf{n} (\Delta s)^2 + \frac{1}{6} (-k^2 \mathbf{t} + k \mathbf{n} + k x \mathbf{b}) (\Delta s)^3 + \dots$$

Правая часть равенства разложена по векторам  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ ; соберем коэффициенты при этих векторах. Получим:

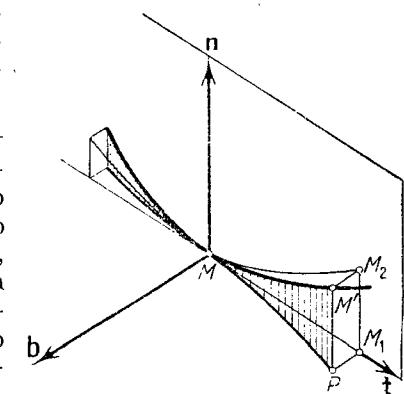
$$\begin{aligned} \overline{MM'} = & \mathbf{t} \{ \Delta s + \dots \} + \mathbf{n} \left\{ \frac{1}{2} k (\Delta s)^2 + \dots \right\} + \\ & + \mathbf{b} \left\{ \frac{1}{6} k x (\Delta s)^3 + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (284)$$

В фигурных скобках при  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  выписаны главные части соответствующих коэффициентов, точками же обозначены бесконечно малые более высоких порядков.

Формула (284) даст нам ясное представление о поведении кривой вблизи данной точки (черт. 76). Прежде всего вектор  $\overline{MM'}$  разложен по  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ , другими словами, смещение из данной точки  $M$  в бесконечно близкую точку  $M'$  осуществляется последовательными смещениями:  $\overline{MM_1}$  — по касательной,  $\overline{M_1 M_2}$  — параллельно главной нормали и, наконец,  $\overline{M_2 M'}$  — параллельно бинормали. Мы видим, что коэффициент при  $\mathbf{t}$  есть бесконечно малое 1-го порядка относительно  $\Delta s$ , коэффициент при  $\mathbf{n}$  — 2-го порядка и при  $\mathbf{b}$  — 3-го порядка. Это показывает, что в основном — на бесконечно малое 1-го порядка — смещение происходит по касательной:

$$\overline{MM_1} = \mathbf{t} (\Delta s + \dots). \quad (285)$$

Черт. 76.



Далее, смещение по главной нормали будет бесконечно малым уже 2-го порядка:

$$\overline{M_1 M_2} = \mathbf{n} \left( \frac{1}{2} k (\Delta s)^2 + \dots \right). \quad (286)$$

Учитывая лишь эти смещения, мы остаемся еще в соприкасающейся плоскости, т. е. в плоскости векторов  $\mathbf{t}, \mathbf{n}$ . Наконец, смещение по бинормали, впервые выведяющее нас из соприкасающейся плоскости, будет уже только 3-го порядка:

$$\overline{M_2 M'} = \mathbf{b} \left( \frac{1}{6} k x (\Delta s)^3 + \dots \right). \quad (287)$$

Таким образом, касательная, главная, нормаль и бинормаль в данной точке кривой отчетливо различаются между собой по рядком малости смещений по их направлениям при движении из данной точки по кривой.

Изучим теперь эти смещения более детально. Как показывает (285), при изменении знака у  $\Delta s$  смещение  $\overline{MM_1}$  меняет направление на обратное (поскольку это происходит с его главной частью  $\Delta s t$ ). Таким образом, при  $\Delta s > 0$  мы смещаемся по направлению касательной в одну сторону (именно в сторону  $t$ ), а при  $\Delta s < 0$  — в другую сторону (в сторону  $-t$ ). В результате кривая вблизи данной точки расположена по обе стороны нормальной плоскости (плоскости  $n, b$ ) и пересекает ее в данной точке.

Далее, (286) показывает, что при любом  $\Delta s$  коэффициент при  $n$  остается положительным (у нас  $k > 0$ ), так что, смещаемся ли мы по кривой в ту или другую сторону из точки  $M$ , смещение, параллельное главной нормали, всегда направлено по вектору  $n$ , т. е. в положительном направлении главной нормали. Поэтому кривая в обе стороны от точки  $M$  расположена по одну сторону плоскости векторов  $t, b$ , уклоняясь от нее в направлении  $n$ . Уклонение это в своей главной части  $\frac{1}{2} k (\Delta s)^2$  пропорционально квадрату пройденного пути по кривой с коэффициентом пропорциональности  $\frac{1}{2} k$ . Это еще раз поясняет геометрическое значение кривизны  $k$ .

Наконец, главная часть (287) содержит  $(\Delta s)^3$  и потому меняет знак вместе с  $\Delta s$ . Одновременно с этим меняет знак и все смещение  $\overline{M_2 M'}$ , так что по одну сторону точки  $M$  кривая уклоняется от соприкасающейся плоскости  $t, n$  в направлении  $b$ , а по другой стороне — в направлении  $-b$ . Следовательно, в точке  $M$  кривая переходит с одной стороны соприкасающейся плоскости на другую. Здесь нам придется различать два случая в зависимости от знака  $\kappa$ .

Пусть  $\kappa > 0$ . Так как  $k > 0$ , то, если  $\Delta s > 0$ , коэффициент при  $b$  в (287) будет положительным, и смещение  $\overline{M_2 M'}$  направлено в сторону  $b$ ; если  $\Delta s < 0$ , то коэффициент отрицателен, и смещение  $\overline{M_2 M'}$  происходит в сторону  $-b$ .

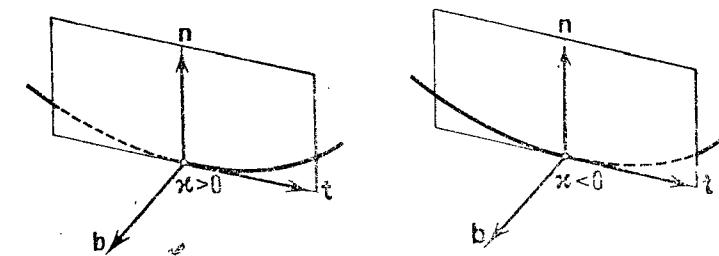
Сопоставляя все эти данные, мы видим, что при  $\Delta s > 0$  смещение по касательной происходит в сторону  $t$ , по главной нормали в сторону  $n$ , по бинормали в сторону  $b$ ; а при  $\Delta s < 0$  соответственно в сторону  $-t$ ,  $n$ ,  $-b$ . Мы получаем ход кривой, начертенной на левом черт. 77.

Пусть теперь  $\kappa < 0$ . Очевидно, этот случай будет отличаться от предыдущего только тем, что теперь при  $\Delta s > 0$  смещение по

бинормали происходит в сторону  $-b$ , а при  $\Delta s < 0$  в сторону  $b$ . Ход кривой нанесен на правом черт. 77.

Нужно отчетливо уяснить себе, что поведение кривой в этих двух случаях существенно различно, и никаким непрерывным движением в пространстве нельзя заставить правую кривую принять положение левой или наоборот. Зато при зеркальном отображении правый и левый случаи меняются местами; это совершенно очевидно, если брать зеркальное отображение относительно плоскости  $t, n$ .

Можно формулировать наглядное правило, чтобы отличать кривые положительного и отрицательного кручений. Допустим,



Черт. 77.

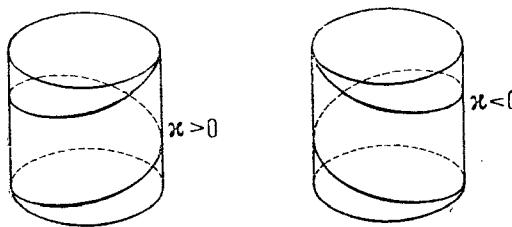
что мы смотрим с какой-нибудь стороны соприкасающейся плоскости в данной точке, заставляя подвижную точку пробегать кривую в таком направлении, чтобы описываемый ею путь казался закругляющимся против часовой стрелки (именно таковы направления на кривых, указанные векторами  $t$  на черт. 77). Если при этом подвижная точка переходит с задней стороны соприкасающейся плоскости на переднюю, то  $\kappa > 0$  (левый чертеж), если же с передней стороны на заднюю, то  $\kappa < 0$ , (правый чертеж).

Может показаться, что картина изменится, если « зайти с другой стороны» соприкасающейся плоскости, но это не так. Хотя передняя и задняя стороны соприкасающейся плоскости поменяются при этом местами, но обратным придется взять и направление движения подвижной точки, чтобы с новой точки зрения оно представлялось закругляющимся против часовой стрелки. Поэтому, если раньше подвижная точка переходила с задней стороны на переднюю, то то же самое будет представляться и с новой точки зрения.

Следовательно, формулированный выше признак положительного кручения связан только с формой самой кривой и не зависит от выбора точки зрения. То же самое относится, конечно, и к отрицательному кручению.

Полезно проиллюстрировать различие между случаями  $x > 0$  и  $x < 0$  примером правой и левой винтовых нарезок на цилиндре (черт. 78).

Для уяснения хода пространственной кривой вблизи данной точки  $M$  имеет значение вид ее проекций на плоскости соприкасающегося трехгранника.



Черт. 78.

бинармали. Действительно, из построения видно, что проекцией  $M'$  будет  $M_2$ , а вектор смещения из  $M$  в  $M_2$  имеет вид

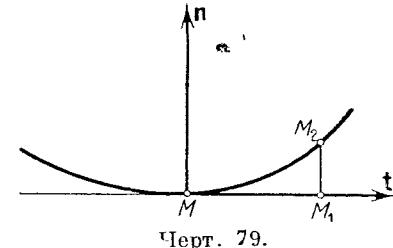
$$\overline{MM}_2 = \overline{MM}_1 + \overline{M}_1 M_2 = \mathbf{t} \{ (\Delta s) + \dots \} + \mathbf{n} \left\{ \frac{1}{2} k (\Delta s)^2 + \dots \right\}. \quad (288)$$

Точка  $M_2$  описывает плоскую кривую (проекцию в соприкасающейся плоскости), причем смещение по  $\mathbf{t}$  будет бесконечно малым 1-го порядка, а перпендикулярно к  $\mathbf{t}$  — 2-го порядка (всегда направлено в сторону  $\mathbf{n}$ ) (черт. 79).

Отсюда видно, что прямая  $MM_1$  имеет в точке  $M$  касание 1-го порядка с полученной кривой и что последняя расположится по одну сторону своей касательной  $MM_1$ . Итак, проекция на соприкасающуюся плоскость вблизи точки  $M$  имеет наиболее типический вид плоской кривой вблизи ее обыкновенной точки. Нетрудно было бы показать, что кривизна  $k$  в точке  $M$  имеет общее значение для исходной кривой и ее проекции на соприкасающуюся плоскость.

Спроектируем теперь исходную кривую на плоскость  $\mathbf{t}, \mathbf{b}$ . Проектируя  $M'$  на эту плоскость (см. черт. 76), мы попадаем в некоторую точку  $P$ , которая и описывает нам исковую кривую. Очевидно, что вектор смещения из  $M$  в  $P$  имеет теперь вид

$$\begin{aligned} \overline{MP} &= \overline{MM}_1 + \overline{M}_1 P = \overline{MM}_1 + \overline{M}_2 M' = \\ &= \mathbf{t} (\Delta s + \dots) + \mathbf{b} \left( \frac{1}{6} k x (\Delta s)^3 + \dots \right). \end{aligned} \quad (289)$$

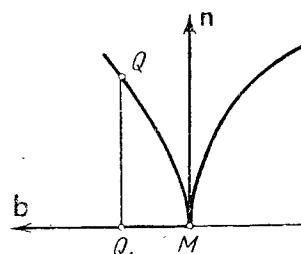


Черт. 79.

Другими словами, из разложения (284) достаточно выкинуть член, направленный по главной нормали. Смещение  $\overline{MP}$  будет бесконечно малым 1-го порядка в направлении, параллельном  $\mathbf{t}$ , и бесконечно малым третьего порядка перпендикулярно к  $\mathbf{t}$  (т. е. параллельно  $\mathbf{b}$ ). Это означает, что прямая  $MM_1$  в точке  $M$  имеет касание второго порядка с полученной кривой, и последняя расположена по обе стороны своей касательной  $MM_1$  (коэффициент при  $\mathbf{b}$  меняет знак вместе с  $\Delta s$ ).

Итак, проекция на спрямляющую плоскость  $\mathbf{t}, \mathbf{b}$  имеет в  $M$  точку перегиба (черт. 80).

Наиболее интересный результат получается при проектировании исходной кривой на нормальную плоскость  $\mathbf{n}, \mathbf{b}$ . Пусть проекцией  $M'$  на эту плоскость будет точка  $Q$ , которая и описывает исковую кривую. Аналогично предыдущему смещение  $\overline{MQ}$  получается из смещения  $\overline{MM}'$  выкидыванием из (284) слагаемого, параллельного  $\mathbf{t}$ :



Черт. 80.

$$\begin{aligned} \overline{MQ} &= \mathbf{n} \left( \frac{1}{2} k (\Delta s)^2 + \dots \right) + \\ &+ \mathbf{b} \left( \frac{1}{6} k x (\Delta s)^3 + \dots \right). \end{aligned} \quad (290)$$

Действительно, в этом случае  $\overline{MQ}$  лежит в нормальной плоскости  $\mathbf{n}, \mathbf{b}$ , причем

$$\overline{MM}' - \overline{MQ} = \mathbf{t} (\Delta s + \dots)$$

или

$$\overline{QM}' = \mathbf{t} (\Delta s + \dots),$$

откуда видно, что  $\overline{QM}'$  перпендикулярен к  $\mathbf{n}, \mathbf{b}$ , т. е.  $Q$  есть проекция  $M'$ .

Мы видим, что смещение  $\overline{MQ}$  имеет в направлении  $\mathbf{n}$  составляющую бесконечно малую второго порядка, всегда направленную в сторону  $\mathbf{n}$  [ $k > 0, (\Delta s)^2 > 0$ ], так что проекция лежит по одну сторону бинармали  $MQ_1$  (черт. 81). В перпендикулярном же к  $\mathbf{n}$  направлении смещение будет бесконечно малым третьего порядка относительно  $\Delta s$ ; оно меняет знак вместе с  $\Delta s$ , и проекция

расположится по обе стороны нормали  $\mathbf{n}$ . Так как смещение в сторону от  $\mathbf{n}$  будет бесконечно малым высшего порядка [порядок  $(\Delta s)^3$ ] сравнительно со смещением по  $\mathbf{n}$  [порядок  $(\Delta s)^2$ ], то кривая по обе стороны главной нормали прижимается к ней, имея ее своей касательной в точке  $M$  для обеих ветвей.

Итак, проекция на нормальную плоскость имеет в  $M$  точку возврата 1-го рода (черт. 81). При изучении перечисленных трех проекций мы непосредственно рассматривали их строение в бесконечно малом вблизи  $M$  и заключали отсюда о характере этих кривых в точке  $M$ . Разумеется, те же заключения можно было бы сделать на основании ранее выведенных формальных признаков.

### § 43\*. Соприкасающаяся сфера.

Задача, которой мы будем заниматься в этом параграфе, носит более специальный характер, чем предыдущие, и приводит нас к сравнительно тонким построениям, связанным с пространственной кривой в данной ее точке. Пусть кривая задана уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}.$$

Возьмем произвольную сферу в пространстве

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - R_s^2 = 0, \quad (291)$$

где постоянные  $a, b, c, R_s$  — пока неопределенные.

Поставим себе задачей из всевозможных сфер подобрать такую, которая в данной точке пространственной кривой имеет с ней касание по возможности наивысшего порядка. По известным нам правилам (§ 33) мы должны в левую часть уравнения сферы подставить текущие координаты нашей кривой, составив, таким образом, функцию

$$\varphi(s) = [x(s) - a]^2 + [y(s) - b]^2 + [z(s) - c]^2 - R_s^2. \quad (292)$$

Затем мы должны так подобрать постоянные  $a, b, c, R_s$ , чтобы в данной точке кривой обеспечить обращение в нуль  $\varphi(s)$  и ее последовательных производных до высшего по возможности порядка [см. условие (234)]. Так как неопределенных постоянных, которые мы должны подобрать, у нас всего четыре, то мы можем расчитывать удовлетворить четырем уравнениям

$$\varphi(s) = \varphi'(s) = \varphi''(s) = \varphi'''(s) = 0, \quad (293)$$

после чего в данной точке кривой обеспечивается касание 3-го порядка со сферой (291).

*Сфера, имеющая с кривой в данной ее точке касание 3-го порядка, называется соприкасающейся сферой в этой точке.*

Сейчас мы займемся отысканием этой сферы. Обозначим через  $S$  центр пока произвольно выбранной сферы (291) и через  $\mathbf{r}_s$  — его

радиус-вектор. Так как координаты центра  $S$ , как видно из уравнения (291), обозначены нами  $a, b, c$ , то, очевидно,

$$\mathbf{r}_s = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}.$$

Пусть  $M$  — пока произвольная точка на кривой с радиус-вектором

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}.$$

Отсюда вектор, соединяющий точку  $M$  с  $S$ , выражается в виде

$$\overline{MS} = \mathbf{r}_s - \mathbf{r}(s) = [a - x(s)]\mathbf{i} + [b - y(s)]\mathbf{j} + [c - z(s)]\mathbf{k}. \quad (294)$$

Возводя каждую часть равенства в скалярный квадрат, получим:

$$\overline{MS}^2 = [\mathbf{r}_s - \mathbf{r}(s)]^2 = [a - x(s)]^2 + [b - y(s)]^2 + [c - z(s)]^2. \quad (294')$$

Мы можем теперь переписать выражение (292) в виде

$$\varphi(s) = [\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}_s]^2 - R_s^2, \quad (295)$$

где  $\mathbf{r}_s$  — радиус-вектор центра  $S$  некоторой сферы, а  $R_s$  — ее радиус, тот и другой постоянные, пока неопределенны. Что же касается  $\mathbf{r}(s)$ , то это — текущий радиус-вектор по кривой, выраженный в функции параметра  $s$  (длины дуги). В дальнейшем аргумент  $s$  при  $\mathbf{r}$  и его производных мы подразумеваем, но не пишем.

Дифференцируем (295) по  $s$ , заменяя  $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}$  через  $t, k\mathbf{n}, k\mathbf{x}\mathbf{b} - kt$ :

$$\varphi'(s) = 2\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) = 2t(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s),$$

$$\varphi''(s) = 2\dot{\mathbf{r}} + 2t\dot{\mathbf{r}} = 2k\mathbf{n}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) + 2t^2 = 2[k\mathbf{n}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) + 1],$$

$$\varphi'''(s) = 2\{k\mathbf{n}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) + k\dot{\mathbf{n}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) + k\mathbf{n}\dot{\mathbf{r}}\} = 2(k\mathbf{n} + k\mathbf{x}\mathbf{b} - k^2t)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s).$$

Фиксируем теперь значение  $s$  и, следовательно, точку  $M$  на кривой с радиус-вектором  $\mathbf{r}$  выберем вполне определенной. Потребуем, далее, чтобы постоянные  $a, b, c, R_s$  (или, что то же,  $\mathbf{r}_s$  и  $R_s$ ) удовлетворяли условиям (293). Эти условия можно теперь записать в виде

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_s)^2 - R_s^2 &= 0, \\ t(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) &= 0, \\ k\mathbf{n}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) + 1 &= 0, \\ (k\mathbf{n} + k\mathbf{x}\mathbf{b} - k^2t)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (296)$$

Что касается первого уравнения, то оно служит для отыскания радиуса сферы  $R_s$ , после того как центр ее  $S$  найден. Оно показывает, что так как соприкасающаяся сфера в точке  $M$  должна пройти через точку  $M$ , то радиус сферы  $R_s$  нужно брать равным

расстоянию  $MS$ . Именно это и записано в первом уравнении (296), так как  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s)^2 = \overline{MS}^2$ .

Что же касается остальных трех уравнений, то они служат для определения  $\mathbf{r}_s$ , который находится из них однозначно (предполагая, что в точке  $M$  кривизна  $k > 0$  и кручение  $\chi \neq 0$ ).

Разложим вектор  $\overline{MS}$ , соединяющий точку  $M$  с центром сферы  $S$ , по векторам  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$ , взятым в точке  $M$ :

$$\overline{MS} = \mathbf{r}_s - \mathbf{r} = \alpha \mathbf{t} + \beta \mathbf{n} + \gamma \mathbf{b},$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — пока неизвестные коэффициенты разложения. Их отыскание, как мы видим, вполне равносильно отысканию вектора  $\overline{MS}$  и тем самым центра сферы  $S$ .

Второе из равенств (296) показывает, что вектор  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_s$  ортогонален к  $\mathbf{t}$ , лежит, следовательно, в нормальной плоскости в точке  $M$  и разлагается по векторам  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b}$ . Коэффициент  $\alpha$  равен нулю. Мы можем написать

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_s = -\beta \mathbf{n} - \gamma \mathbf{b}.$$

Вставляя это выражение в третье из равенств (296) и учитывая, что  $\mathbf{b}\mathbf{n} = 0$ ,  $\mathbf{n}^2 = 1$ , получим

$$-k\beta + 1 = 0 \quad \text{или} \quad \beta = \frac{1}{k} = R,$$

где  $R$  — радиус кривизны в точке  $M$ . Следовательно,

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_s = -R\mathbf{n} - \gamma \mathbf{b}.$$

Остается найти  $\gamma$ . Вставляем последнее выражение в четвертое уравнение (296) и, учитывая, что попарные скалярные произведения  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$  суть нули, а скалярные квадраты — единицы, получаем

$$-R\dot{k} - \gamma k\chi = 0 \quad \text{или} \quad \gamma = -\frac{R\dot{k}}{k\chi} = -\frac{R^2 \left( \frac{1}{R} \right)'}{\chi} = \frac{\dot{R}}{\chi}.$$

Окончательно

$$\overline{MS} = \mathbf{r}_s - \mathbf{r} = R\mathbf{n} + \frac{\dot{R}}{\chi} \mathbf{b}. \quad (297)$$

Итак, вектор  $\overline{MS}$ , а вместе с ним и центр сферы  $S$  однозначно определены. Из первого равенства (296) легко найти теперь квадрат радиуса сферы:

$$R_s^2 = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_s)^2 = \left( R\mathbf{n} + \frac{\dot{R}}{\chi} \mathbf{b} \right)^2 = R^2 + \frac{\dot{R}^2}{\chi^2}. \quad (298)$$

Так как условия касания 3-го порядка (296) удовлетворены, то формулы (297) и (298) определяют центр  $S$  и радиус  $R_s$  соприкасающейся сферы в точке  $M$ . Наша задача решена.

Как видим, чтобы попасть из точки  $M$  в центр  $S$ , нужно сместиться сначала на вектор  $R\mathbf{n}$ . Мы попадаем в результате [см. (283')] в центр кривизны  $C$  на главной нормали (черт. 82).

После этого нужно еще сместиться на вектор  $\frac{\dot{R}}{\chi} \mathbf{b}$ , параллельный бинормали, после чего мы попадаем в  $S$ . Центр соприкасающейся сферы  $S$  лежит, таким образом, на прямой  $CS$ , проведенной через центр кривизны параллельно бинормали. Эта прямая называется осью кривизны кривой в точке  $M$ . Очевидно, что окружность, по которой соприкасающаяся плоскость пересекается с соприкасающейся сферой, имеет центр в  $C$  (так как  $C$  — основание перпендикуляра  $CS$ , опущенного из  $S$  на соприкасающуюся плоскость). Эта окружность, следовательно, — соприкасающаяся окружность в точке  $M$ .

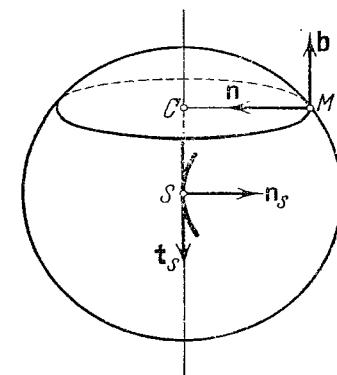
Заметим, что при обращении  $\chi$  в нуль в данной точке центр сферы удаляется в бесконечность в направлении бинормали, что соответствует вырождению соприкасающейся сферы в соприкасающуюся плоскость. И действительно, в этом случае соприкасающаяся плоскость имеет с кривой в данной точке касание не только 2-го (как обычно), но и 3-го порядка.

Изучим теперь кривую, описываемую точкой  $S$ , когда  $M$  движется по исходной кривой. Исходная кривая отнесена к параметру  $s$  и, следовательно, вдоль нее  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $R$ ,  $\chi$  выражаются как функции  $s$ . Поэтому, если переписать (297) в виде

$$\mathbf{r}_s = \mathbf{r} + R\mathbf{n} + \frac{\dot{R}}{\chi} \mathbf{b}, \quad (299)$$

то  $\mathbf{r}_s$  выражается в функции  $s$ , и (299) можно рассматривать как параметрическое представление кривой, описываемой  $S$ . Конечно, для нее параметр  $s$  уже не играет роли дуги. Возьмем производную от  $\mathbf{r}_s$  по  $s$ . Получим

$$\dot{\mathbf{r}}_s = \dot{\mathbf{r}} + \dot{R}\mathbf{n} + R\dot{\mathbf{n}} + \left( \frac{\ddot{R}}{\chi} \right) \mathbf{b} + \frac{\dot{R}}{\chi} \dot{\mathbf{b}}.$$



Черт. 82.

Заменяя  $t$  через  $t$  и пользуясь формулами Френе, можно записать

$$\dot{r}_s = t + \dot{R}n + R(xb - kt) + \left(\frac{\dot{R}}{z}\right) \cdot b + \frac{\dot{R}}{z}(-xn).$$

Так как  $Rk = 1$ , то члены, содержащие  $t$ , исчезают; взаимно уничтожаются и члены с  $n$ . Получаем

$$\dot{r}_s = \left( \dot{R}x + \left(\frac{\dot{R}}{z}\right) \cdot b \right) b. \quad (300)$$

Интересно в связи с этой формулой исследовать *частный случай*, когда исходная кривая — *сферическая*, т. е. способна целиком уместиться на поверхности некоторой сферы. Тогда эта сфера будет, очевидно, соприкасающейся сферой во всех точках кривой, так что соприкасающаяся сфера при движении точки  $M$  по исходной кривой остается без изменения. Поскольку точка  $S$ , следовательно, неподвижна и ее радиус-вектор  $r_s$  — постоянный, левая часть (300) обращается в нуль, и мы получаем

$$Rx + \left(\frac{\dot{R}}{z}\right) \cdot b = 0. \quad (301)$$

Таково дифференциальное уравнение, связывающее вдоль исходной кривой функции дуги  $R(s)$  и  $x(s)$  с их производными по  $s$ , если эта кривая — сферическая.

Покажем, что условие (301) не только необходимо, но и достаточно для того, чтобы кривая была сферической. Действительно, если оно выполнено, то из (300) следует, что

$$\dot{r}_s = 0 \text{ и, значит, } r_s = \text{const.},$$

т. е. центр соприкасающейся сферы один и тот же для всех точек  $M$  на кривой. Может показаться, что радиус  $R_s$  соприкасающейся сферы может тем не менее меняться от точки к точке. Однако это не так. Вычислим производную по  $s$  от  $R_s^2$ , пользуясь формулой (298). Получим

$$\frac{d}{ds}(R_s^2) = 2R\dot{R} + 2\frac{\dot{R}}{z}\left(\frac{\dot{R}}{z}\right) \cdot b = \frac{2\dot{R}}{z} \left[ Rx + \left(\frac{\dot{R}}{z}\right) \cdot b \right].$$

Из (301) следует теперь, что

$$\frac{d}{ds}(R_s^2) = 0 \text{ и, значит, } R_s^2 = \text{const.}$$

Следовательно, и центр и радиус соприкасающейся сферы остаются без изменения при движении точки  $M$  по данной кривой, и точка  $M$  движется по поверхности неизменной сферы. Исходная кривая — сферическая.

Итак, для того чтобы данная кривая была сферической, необходимо и достаточно, чтобы функции  $R(s)$  и  $x(s)$ , выражающие радиус кривизны и кручение в зависимости от длины дуги вдоль кривой, были связаны дифференциальным уравнением (301).

Если оставить случай (301) в стороне, кривая, описываемая центром  $S$ , не вырождается в точку и связана интересными зависимостями с исходной кривой.

Прежде всего (300) показывает, что вектор  $\dot{r}_s$ , указывающий направление касательной к кривой, описываемой  $S$ , параллелен вектору  $b$ , т. е. бинормали в точке  $S$  к кривой, описываемой центром  $S$ , будет служить осью кривизны  $CS$ , проходящая через  $S$  параллельно  $b$  (черт. 82).

Обозначим через  $t_s$  единичный касательный вектор к кривой, описываемой  $S$ . Как мы видим, он параллелен  $b$ , а так как векторы эти единичные, то

$$t_s = \pm b.$$

Обозначим через  $s_s$  длину дуги вдоль кривой, описываемой точкой  $S$ . Направление отсчета ее выберем так, чтобы вектор  $t_s$  имел то же направление, что и  $-b$ , так что можно считать

$$t_s = -b. \quad (302)$$

Дифференцируем обе части этого равенства:

$$dt_s = -db \text{ или } \frac{dt_s}{ds_s} ds_s = -\frac{db}{ds} ds.$$

Применяем для каждой из кривых формулы Френе, обозначая через  $k_s$  и  $z_s$  кривизну и кручение геометрического места центров  $S$ . Получим

$$k_s n_s ds_s = xn ds. \quad (302')$$

Так как  $n$  и  $n_s$  отличаются только скалярными множителями, то эти единичные векторы параллельны и, следовательно,

$$n_s = \pm n. \quad (303)$$

Таким образом, главные нормали обеих кривых параллельны между собой.

Перемножив векторно левые части (302) и (303) между собой и правые между собой, получим

$$[t_s, n_s] = \mp [b, n]$$

или

$$b_s = \pm t \quad (304)$$

— бинормаль в точке  $S$  параллельна касательной в  $M$ .

Дифференцируем обе части равенства (304):

$$ds_s = \pm dt \text{ или } \frac{d\mathbf{b}_s}{ds_s} ds_s = \pm \frac{dt}{ds} ds.$$

Применяя формулы Френе, получим

$$-z_s \mathbf{n}_s ds_s = \pm k \mathbf{n} ds. \quad (304')$$

Мы замечаем, что (304') отличается от (302') в левой части лишь множителем  $-\frac{z_s}{k_s}$ , а в правой части — множителем  $\pm \frac{k}{z}$ .

Отсюда следует, что эти множители равны, т. е. что

$$\frac{z_s}{k_s} = \mp \frac{k}{z}. \quad (305)$$

Такова зависимость, существующая между отношениями кривизны к кручению для той и другой кривой.

Знаки  $\pm$ , входящие в предыдущие формулы, существенны, так как возможен как тот, так и другой случай в зависимости от выбора исходной кривой.

#### § 44. Натуральные уравнения.

Как и в случае плоской кривой, естественно поставить следующий вопрос: нельзя ли характеризовать геометрическую форму пространственной кривой уравнениями, вид которых не зависел бы от выбора системы координат в пространстве и был бы связан только с самой кривой?

Рассмотрим кривую, отнесенную к длине дуги, как к параметру:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s), \quad S_0 \leq s \leq S,$$

причем точки расширения отсутствуют,  $k \neq 0$ .

Тогда вдоль кривой кривизна  $k$  и кручение  $z$  также являются определенными функциями  $s$ :

$$\left. \begin{aligned} k &= k(s) > 0, \\ z &= z(s). \end{aligned} \right\} \quad (306)$$

Так как длина дуги, кривизна и кручение суть величины, не зависящие от выбора координат в пространстве, то и вид функциональной зависимости  $k(s)$  и  $z(s)$  также от этого выбора не зависит. Уравнения (306) называют *натуральными уравнениями* пространственной кривой. Как мы сейчас увидим, они характеризуют ее геометрическую форму в смысле, вполне аналогичном случаю плоской кривой.

Предварительно нам понадобятся некоторые вспомогательные построения. Сошлемся прежде всего на следующую теорему анализа.

Пусть  $x$  — аргумент, рассматриваемый в некоторой области изменения  $X_0 \leq x \leq X$ , а  $u, v, w$  — его неизвестные функции (число этих функций безразлично; мы берем три для примера). Потребуем, чтобы эти функции удовлетворяли следующим условиям.

При любом значении  $x$  производные  $u, v, w$  должны линейно выражаться через сами эти функции:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w + a_1, \\ \frac{dv}{dx} &= a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w + a_2, \\ \frac{dw}{dx} &= a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w + a_3, \end{aligned}$$

где коэффициенты  $a_{11}, a_{12}, \dots$  — наперед заданные функции от  $x$ , непрерывные в области его изменения.

Кроме того, при некотором фиксированном значении  $x = x_0$  функции  $u, v, w$  должны принимать наперед заданные значения  $u_0, v_0, w_0$ .

Теорема утверждает, что функции  $u, v, w$ , удовлетворяющие указанным требованиям, существуют и определяются единственным образом во всей области изменения  $x^1$ ).

Рассмотрим теперь формулы Френе в связи с этой теоремой. Разложим векторы сопровождающего трехгранника какой-нибудь кривой по ортам  $i, j, k$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= t_x i + t_y j + t_z k, \\ \mathbf{n} &= n_x i + n_y j + n_z k, \text{ с матрицей} \\ \mathbf{b} &= b_x i + b_y j + b_z k \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{ccc} t_x & t_y & t_z \\ n_x & n_y & n_z \\ b_x & b_y & b_z \end{array} \right|. \quad (307)$$

Коэффициенты разложений совпадают с проекциями векторов на оси  $X, Y, Z$  а так как  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  — единичные векторы, то и с их направляющими косинусами. Матрица коэффициентов (307) есть матрица

<sup>1)</sup> Доказательство этой теоремы см. в книге В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1947.

Поясним все же его идею, хотя бы для случая, когда  $a_{11}, a_{12}, \dots$  — аналитические функции от  $x$ . Дифференцируя выписанные уравнения по  $x$ , мы получим в левых частях вторые производные от  $u, v, w$  по  $x$ . Справа же войдут функции  $u, v, w$  и их первые производные (об известных нам функциях  $a_{11}, \dots$  и их производных мы не говорим). Но первые производные от  $u, v, w$  можно заменить их выражениями через  $u, v, w$  из данных уравнений, так что окончательно и вторые производные от  $u, v, w$  выражаются через  $u, v, w$ . Дифференцируя полученные уравнения снова, и т. д., мы выразим производные любого порядка от  $u, v, w$  через сами  $u, v, w$ . Но при  $x = x_0$  значения  $u, v, w$  нам заданы; следовательно, определяются и значения всех производных от  $u, v, w$  по  $x$ . Следовательно, в разложении  $u, v, w$  в ряд Тейлора по степеням  $x - x_0$  нам известны все коэффициенты, т. е. функции  $u, v, w$  определены.

направляющих косинусов взаимно ортогональных направлений  $t, n, b$  по отношению к осям  $X, Y, Z$ . Очевидно, это — матрица ортогональная; в этом легко убедиться и непосредственно, перемножая скалярно векторы  $t, n, b$  между собой; получаем

$$\begin{aligned} t \cdot n = 0, & \text{ т. е. } t_x n_x + t_y n_y + t_z n_z = 0 \text{ и т. д.} \\ t^2 = 1, & \text{ т. е. } t_x^2 + t_y^2 + t_z^2 = 1 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Попарные произведения различных строк матрицы дают нуль, а одинаковых — единицу. Выпишем формулы Френе, рассматривая вдоль кривой кривизну  $k$  и кручение  $\chi$  как определенные функции параметра  $s$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= k(s) n, \\ \frac{dn}{ds} &= \chi(s) b - k(s) t, \\ \frac{db}{ds} &= -\chi(s) n. \end{aligned} \right\} \quad (308)$$

Вставим сюда вместо  $t, n, b$  их разложения (307). Тогда векторные равенства можно будет заменить равносильными им скалярными равенствами, приравнивая коэффициенты при  $j, j, k$  в правой и левой частях каждого векторного равенства. Приравнивая коэффициенты при  $i$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{dt_x}{ds} &= k(s) n_x, \\ \frac{dn_x}{ds} &= \chi(s) b_x - k(s) t_x, \\ \frac{db_x}{ds} &= -\chi(s) n_x. \end{aligned} \right\} \quad (308')$$

Точно такую же тройку равенств мы получим для проекций на ось  $Y$  и на ось  $Z$ , приравнивая коэффициенты при  $j$  и  $k$ . Полученные девять равенств будут эквивалентны формулам (308), представляя собой формулы Френе в координатной форме.

Будем считать функции  $k(s), \chi(s)$  данными (и непрерывными), а  $t_x, n_x, b_x$  неизвестными функциями от  $s$ . От геометрического смысла этих функций и самого аргумента  $s$  совершенно отвлечемся. Тогда в системе дифференциальных уравнений (308') мы вправе будем применить выше формулированную теорему анализа, которая примет такую форму:

*Лемма. Функции  $t_x, n_x, b_x$  от  $s$ , удовлетворяющие уравнениям (308') и, кроме того, при  $s=0$  принимающие фиксированные заранее значения, существуют во всей области изменения  $s$  и определяются единственным образом.*

Переходим к изучению геометрической роли натуральных уравнений.

**Основная теорема.** Для того чтобы две кривые  $C$  и  $C'$  отличались лишь положением в пространстве (черт. 83), необходимо (после согласования начальных точек и направлений отсчета  $s$ ) и достаточно, чтобы их натуральные уравнения были одинаковы.

Мы говорим, что кривые  $C$  и  $C'$  отличаются лишь положением в пространстве, если одну из них можно совместить с другой путем ее непрерывного передвижения в пространстве как твердого тела. Таким образом, совпадение натуральных уравнений необходимо и достаточно, чтобы кривые геометрически имели одну и ту же форму. Переходим к доказательству.

#### Необходимость.

Пусть в результате передвижения  $C$  как твердого тела нам удалось совместить ее с  $C'$ . Тем самым между точками  $C$  и  $C'$  установлено взаимно однозначное соответствие. Выберем за начальные точки отсчета на кривых  $C$  и  $C'$  соответственные точки  $M_0$  и  $M'_0$  (совпадающие при совмещении кривых) и аналогичным образом согласуем направления отсчета дуги  $s$  на обеих кривых. Тогда для любой пары соответственных точек  $M$  и  $M'$  значения  $s$  будут одинаковыми, так как при совмещении  $C$  и  $C'$   $M_0$  попадает в  $M'_0$ ,  $M$  — в  $M'$ , и длины дуг  $M_0 M$  и  $M'_0 M'$  оказываются одинаковыми.

Далее, если сопровождающие трехгранныки, связанные с кривой  $C$  в каждой ее точке, передвигать совместно с ней как одно твердое тело, то они, очевидно, остаются все время сопровождающими трехгранныками для передвигаемой кривой. Действительно, так как при движении твердого тела все расстояния между точками остаются без изменения, то не меняются и порядок касания кривых с кривыми и поверхностями. Поэтому касательная прямая и соприкасающаяся плоскость в каждой точке кривой остаются таковыми и во все время движения; следовательно, то же самое относится и к сопровождающим трехгранныкам. Отсюда ясно, что угол  $\Delta\varphi$  между касательными (или бинормальными) в двух точках кривой при движении кривой как твердого тела остается без изменения. Так как длина дуги  $\Delta s$  между этими точками тоже не меняется, то не меняется и  $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$  — средняя



Черт. 83.

скорость вращения касательной (или бинормали) на данном участке кривой, и (после перехода к пределу) мы можем утверждать, что кривизна и кручение в каждой точке кривой сохраняют свои значения (по модулю). Наконец, знак кручения также не может измениться скачком на обратный ввиду непрерывности движения.

Поэтому, передвинув  $C$ , мы сохраним в точке  $M$  прежние значения кривизны  $k$  и кручения  $\kappa$ , но так как кривая  $C$  с точкой  $M$  совместится с кривой  $C'$  с точкой  $M'$ , то эти значения совпадут со значениями  $k$  и  $\kappa$  в точке  $M'$  кривой  $C'$ .

Итак, в соответствующих точках кривых  $C$  и  $C'$  мы имеем одинаковые значения  $s$ ,  $k$ ,  $\kappa$ . Следовательно, вид функциональных зависимостей (306) должен быть один и тот же для обеих кривых: при равных  $s$  у нас должны определяться всегда одни и те же значения  $k$  и  $\kappa$ .

**Достаточность.** Нам дано, что натуральные уравнения (306) кривых  $C$  и  $C'$  одинаковы. Передвинем  $C$  как твердое тело так, чтобы начальная точка отсчета  $M_0$  совместилась с начальной точкой  $M'_0$ . Этого можно достичь параллельным смещением на вектор  $\vec{M}_0\vec{M}'_0$ . После этого повернем  $C$  как твердое тело около точки  $M_0$  (совпавшей с  $M'_0$ ) так, чтобы сопровождающие трехгранники для кривых  $C$  и  $C'$  в этой точке совпали между собой. Конечно, правую тройку единичных взаимно ортогональных векторов можно перевести вращением в любую другую такую же тройку.

Итак, непрерывным движением кривой  $C$  мы добились совпадения точки  $M_0$  и сопровождающего трехгранника в ней с точкой  $M'_0$  и сопровождающим трехгранником в ней. Мы покажем, что при этом кривая  $C$  целиком совпадет с  $C'$ , чем и будет доказана наша теорема.

Вдоль кривой  $C'$  и вдоль передвинутой кривой  $C$  векторы  $t$ ,  $n$ ,  $b$  можно рассматривать как функции дуги  $s$ . При  $s=0$  мы попадаем на кривой  $C'$  в точку  $M'_0$ , а на передвинутой кривой  $C$  — в передвинутую точку  $M_0$ , т. е. в ту же самую точку  $M'_0$ . Но так как, кроме того, сопровождающий трехгранник в точке  $M_0$  совпал после передвижения  $C$  с трехгранником в точке  $M'_0$ , то значения  $t$ ,  $n$ ,  $b$  будут при  $s=0$  тоже одинаковы для обеих кривых. Итак, при  $s=0$  на кривой  $C'$  и на передвинутой кривой  $C$  мы имеем одинаковые значения вектор-функций  $t(s)$ ,  $n(s)$ ,  $b(s)$ . Тем самым при  $s=0$  принимают одинаковые значения и проекции этих вектор-функций  $t_x$ ,  $n_x$ ,  $b_x$  и т. д., которые также являются функциями от  $s$ , но уже скалярными. Но функции  $t_x$ ,  $n_x$ ,  $b_x$  вдоль обеих кривых удовлетворяют, кроме того, *одной и той же* системе уравнений (308).

Действительно, вид функций  $k(s)$  и  $\kappa(s)$  будет одинаков для обеих кривых, поскольку он был одинаков для кривых  $C$  и  $C'$

и при передвижении кривой  $C$  не менялся (последнее вытекает из проведенного уже доказательства необходимости).

Итак, для обеих кривых функции  $t_x$ ,  $n_x$ ,  $b_x$  удовлетворяют уравнениям (308) с одинаковыми коэффициентами и при  $s=0$  принимают одинаковые значения. На основании леммы (в той ее части, где говорится об единственности) мы можем утверждать, что вид функций  $t_x(s)$ ,  $n_x(s)$ ,  $b_x(s)$  будет одинаков вдоль обеих кривых:  $C'$  и передвинутой  $C$ . То же самое относится, разумеется, и к проекциям на оси  $\bar{Y}$  и  $Z$ . Далее, вдоль любой кривой

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k}$$

и, следовательно,

$$t_x = \frac{dx}{ds},$$

$$dx = t_x ds,$$

$$x(s) = \int t_x(s) ds.$$

Таким образом, при данной функции  $t_x(s)$  функция  $x(s)$  определяется с точностью до постоянного слагаемого, так что  $x(s)$  для  $C'$  и для передвинутой  $C$  отличаются на постоянную. Но так как при  $s=0$  мы попадаем на обеих кривых в одну и ту же точку  $M_0$ , то значения  $x(0)$  одинаковы для обеих кривых, а следовательно, постоянная, на которую они отличаются, есть нуль. В итоге  $x(s)$  имеет один и тот же вид вдоль обеих кривых. То же относится, разумеется, и к  $y(s)$  и  $z(s)$ . Обе кривые имеют одно и то же параметрическое представление, и следовательно, передвинутая  $C$  действительно совпала с  $C'$ . Теорема доказана.

Чтобы полностью выяснить роль натуральных уравнений, необходимо формулировать еще один важный дополнительный результат:

*Если в некоторой области изменения независимого переменного  $s$ ,  $S_0 \leq s \leq S$ , заданы две произвольные непрерывные функции*

$$\varphi(s) > 0 \text{ и } \psi(s),$$

*то всегда можно построить пространственную кривую, для которой натуральные уравнения будут иметь вид (в той же области изменения  $s$ )*

$$k = \varphi(s), \quad x = \psi(s).$$

Из предыдущего ясно, что такая кривая определяется с точностью до положения в пространстве.

Доказательство начинается с чисто аналитических рассуждений, поскольку кривой нет и ее требуется еще построить. Построим прежде всего девять функций аргумента  $s$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} t_x, \quad t_y, \quad t_z, \\ n_x, \quad n_y, \quad n_z, \\ b_x, \quad b_y, \quad b_z. \end{array} \right\} \quad (309)$$

Этим функциям мы не приписываем никакого геометрического смысла, рассматривая их с чисто аналитической точки зрения. Наложим на них следующие требования. Функции первого столбца должны удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \frac{dt_x}{ds} &= \varphi(s) n_x, \\ \frac{dn_x}{ds} &= \psi(s) b_x - \varphi(s) t_x, \\ \frac{db_x}{ds} &= -\psi(s) n_x. \end{aligned} \right\} \quad (310)$$

Таким же уравнениям подчиняют функции второго и третьего столбцов (механически заменяя везде в (310) значок  $x$  на  $y$  и на  $z$ ). Требуем, кроме того, чтобы при  $s=0$  функции (309) принимали значения

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \quad 0 \quad 0, \\ 0 \quad 1 \quad 0, \\ 0 \quad 0 \quad 1. \end{array} \right\} \quad (311)$$

Применяем теперь лемму к функциям  $t_x, n_x, b_x$ . Так как уравнения (310) отличаются от (308') только обозначениями  $\varphi$  и  $\psi$  вместо  $k$  и  $x$  и так как для  $t_x, n_x, b_x$  указаны значения при  $s=0$ , то применение леммы здесь законно. Мы можем утверждать, что функции  $t_x, n_x, b_x$ , удовлетворяющие выставленным требованиям, действительно существуют во всей области изменения  $s$ . То же относится, конечно, и к функциям второго и третьего столбцов матрицы (309).

Итак, функции (309) построены. Докажем, что при любом значении  $s$  матрица (309) будет ортогональной. Составим произведение двух каких-нибудь ее столбцов, например

$$t_x t_y + n_x n_y + b_x b_y,$$

и продифференцируем его по  $s$ . Получим

$$\frac{d}{ds}(t_x t_y + n_x n_y + b_x b_y) = \frac{dt_x}{ds} t_y + t_x \frac{dt_y}{ds} + \frac{dn_x}{ds} n_y + n_x \frac{dn_y}{ds} + \frac{db_x}{ds} b_y + b_x \frac{db_y}{ds}.$$

Тождественное обращение этой производной в нуль легко проверить, заменив производные от  $t_x, n_x, b_x$  их выражениями из (310) и аналогично поступая с производными от  $t_y, n_y, b_y$ .

Итак, произведение каких-либо двух столбцов матрицы (309) остается постоянным при любом значении  $s$ . Но так как при  $s=0$  матрица (309) принимает вид (311), то при  $s=0$  это произведение равно нулю, а следовательно, остается нулем и при любом значении  $s$ .

Совершенно таким же образом, составляя произведение какого-нибудь столбца на себя, например

$$t_x^2 + n_x^2 + b_x^2,$$

и дифференцируя это выражение по  $s$ , получаем производную, равную нулю. Следовательно, выписанное выражение остается постоянным, а так как из (311) видно, что при  $s=0$  оно равно единице, то и при любом  $s$  оно сохраняет это значение.

Итак, попарные произведения разных столбцов матрицы (309) дают нуль, а одинаковых — единицу. Это и означает, что матрица — ортогональная<sup>1)</sup>.

Построим вектор-функции  $t, n, b$  того же аргумента  $s$ , определив их формально равенствами

$$\left. \begin{aligned} t &= t_x i + t_y j + t_z k, \\ n &= n_x i + n_y j + n_z k, \\ b &= b_x i + b_y j + b_z k. \end{aligned} \right\} \quad (312)$$

Никакого геометрического смысла мы им пока не приписываем. Составляя их скалярные произведения и скалярные квадраты

$$\begin{aligned} tn &= t_x n_x + t_y n_y + t_z n_z \text{ и т. д.,} \\ t^2 &= t_x^2 + t_y^2 + t_z^2 \text{ и т. д.,} \end{aligned}$$

мы видим, что получаются попарные произведения строк ортогональной матрицы (309) и, следовательно,

$$tn = nb = bt = 0 \quad \text{и} \quad t^2 = n^2 = b^2 = 1.$$

Вектор-функции  $t, n, b$  образуют, следовательно, тройку единичных взаимно ортогональных векторов<sup>2)</sup>. Легко убедиться также, что вектор-функции (312) удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= \varphi(s) n, \\ \frac{dn}{ds} &= \psi(s) b - \varphi(s) t, \\ \frac{db}{ds} &= -\psi(s) n. \end{aligned} \right\} \quad (313)$$

Действительно, подставляя сюда вместо  $t, n, b$  их разложения и сравнивая коэффициенты при  $i$  в левых и правых частях, мы приходим к уравнениям (310), которые уже имеют место. Таким образом, составляющие по  $i$  в левых и правых частях (313) действительно равны, и по совершенству аналогичным причинам мы получим то же самое и для составляющих по  $j$  и  $k$ .

Теперь, наконец, мы переходим к построению искомой кривой. Мы определим ее параметрическим представлением

$$x = \int t_x(s) ds, \quad y = \int t_y(s) ds, \quad z = \int t_z(s) ds. \quad (314)$$

<sup>1)</sup> Определитель такой матрицы может быть только  $\pm 1$ . Но так как при  $s=0$ , как видно из (311), этот определитель равен  $+1$ , а при изменении  $s$  меняется непрерывно, то он остается равным  $+1$  при любом  $s$ .

<sup>2)</sup> Так как определитель матрицы (309) равен  $+1$ , то вектор-функции  $t(s), n(s), b(s)$  образуют правую тройку (мы считаем, что координатная тройка  $i, j, k$  — правая).

Так как  $t_x, t_y, t_z$  — уже построенные функции от  $s$ , то формулы (314) определяют нам текущие координаты  $x, y, z$  как функции некоторого параметра  $s$  во всей области его изменения и тем самым некоторую кривую в пространстве. При этом мы не знаем заранее, будет ли этот параметр вдоль построенной кривой играть роль длины дуги и будут ли ранее построенные нами вектор-функции  $t(s), n(s), b(s)$  играть роль основных векторов сопровождающего трехгранника для этой кривой. Все это нам предстоит доказать.

Запишем выражение текущего радиус-вектора вдоль нашей кривой:

$$\mathbf{r} = xi + yj + zk = i \int t_x ds + j \int t_y ds + k \int t_z ds.$$

Дифференцируя, получим

$$d\mathbf{r} = it_x ds + jt_y ds + kt_z ds = t(s) ds. \quad (315)$$

Беря обе части равенства по модулю и учитывая, что  $t(s)$  есть вектор единичный, мы получим

$$|d\mathbf{r}| = |ds|.$$

Сравнивая эту формулу с (158''), мы видим, что  $ds$  есть, действительно, дифференциал длины дуги и, следовательно, параметр  $s$  играет роль длины дуги вдоль кривой. Теперь формулу (315) можно переписать в виде

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = t(s),$$

откуда ясно, что введенная ранее вектор-функция  $t(s)$  играет роль единичного касательного вектора к построенной пами кривой.

Нам известно, что в таком случае производная  $\frac{dt(s)}{ds}$  направлена по главной нормали к кривой в положительную сторону. Первая из формул (313) показывает, что единичный вектор  $n(s)$ , отличаясь от  $\frac{dt(s)}{ds}$  лишь положительным множителем  $\varphi(s)$ , имеет то же направление. Итак, введенная ранее вектор-функция  $n$  играет роль единичного вектора в положительном направлении главной нормали для построенной кривой. Наконец, введенная ранее вектор-функция  $b(s)$ , единичная и ортогональная к  $t(s)$  и  $n(s)$ , будет вследствие этого единичным вектором, направленным по бинормали и при этом в ту сторону, которая предписывается формулой (260). Итак, вектор-функции  $t(s), n(s), b(s)$  оказались для построенной нами кривой векторами сопровождающего трехгранника. Мы можем написать для этой кривой формулы Френе, которые будут иметь обычный вид (262). Сравнивая их с формулами (313), которым удовлетворяют те же вектор-функции, мы убеждаемся, что вдоль построенной кривой

$$k = \varphi(s), \quad x = \psi(s).$$

Нам действительно удалось построить кривую с панорад заданным видом функциональной зависимости кривизны и кручения от длины дуги. Конечно, такая кривая будет не единственной; она будет определена с точностью до положения в пространстве. В процессе построения этоказалось, во-первых, в произвольных постоянных в интегралах (314), во-вторых, в произвольном выборе начального вида ортогональной матрицы (309) при  $s=0$ . Для простоты мы взяли, правда, вполне определенный начальный вид (311), но можно было бы взять вместо (311) любую ортогональную матрицу с постоянными элементами.

### Примеры и упражнения.

1. Натуральные уравнения кривой имеют вид

$$k = k(s), \quad z = 0.$$

Мы знаем уже из предыдущего (см. конец § 40), что это необходимо и достаточно для того, чтобы кривая была плоской. Таким образом, особенность натуральных уравнений плоской кривой в том, что вторая функция дуги  $s$ , выражающая кручение, обращается тождественно в нуль.

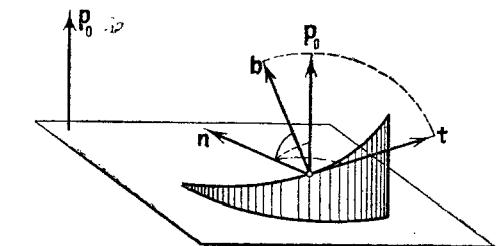
Остается в рассмотрении первая функция, выражающая кривизну. Как раз такое положение вещей мы имели, специально изучая натуральное уравнение кривой на плоскости. Разница только в том, что тогда кривизне  $k$  мы условились определенным образом приписывать знак  $\pm$ , а теперь у нас  $k$  всегда больше нуля. В связи с этим зеркально-симметрические плоские кривые имели тогда различные натуральные уравнения (функции  $k(s)$  отличались знаком), теперь же они будут иметь одни и те же натуральные уравнения. Это расхождение имеет интересный геометрический смысл. Дело в том, что, оставаясь в плоскости, нельзя непрерывным движением совместить зеркально-симметрические плоские кривые. Но, рассматривая эти кривые в пространстве, их можно совместить поворотом на  $180^\circ$  около оси симметрии, так что с этой точки зрения они отличаются только положением в пространстве. Поэтому и натуральные уравнения их теперь одинаковы.

Интересно выяснить в связи с этим, в чем будет разница в натуральных уравнениях зеркально-симметрических пространственных (существенно неплоских) кривых. Примем для простоты плоскость симметрии за координатную плоскость  $XY$ . Тогда в соответствующих точках симметрически расположенных кривых значения  $x, y$  будут одинаковы, а значение  $z$  будет отличаться знаком. Пользуясь формулами (282), мы видим, что при изменении знака  $z$  кривизна  $k$  не изменится, а кручение  $\chi$  изменит знак на обратный. Таким образом, натуральные уравнения зеркально-симметрических кривых отличаются лишь знаком у функции  $z(s)$ . В случае существенно неплоских кривых, т. е. в случае  $\chi \neq 0$ , такие натуральные уравнения будут существенно различны, что связано с невозможностью совместить неплоские зеркально-симметрические кривые непрерывным движением в пространстве.

2. *Линии откоса.* Рассмотрим кривую, обладающую тем свойством, что касательные к ней образуют постоянный угол с некоторым определенным направлением. Если это направление наглядно представлять себе как вертикальное, то касательная к нашей кривой (которую мы будем называть линией откоса) будет направлена под постоянным углом к горизонтальной плоскости, так что крутизна подъема по кривой будет все время одинакова.

Выясним, какими особенностями будут обладать натуральные уравнения линий откоса. Пусть  $p_0$  будет постоянным единичным вектором, взятым по указанному направлению, так что  $p_0$  образует с единичным касательным вектором  $t(s)$  постоянный угол  $\varphi$  во всех точках кривой (черт. 84). Так как косинус этого угла равен скалярному произведению  $t$  на  $p_0$ , то мы можем записать

$$tp_0 = \text{const.}$$



Черт. 84.

Дифференцируя это равенство по  $s$  и учитывая, что  $\mathbf{p}_0$  — постоянный вектор, получим

$$\dot{\mathbf{t}}\mathbf{p}_0 = 0 \text{ или } k\mathbf{n}\mathbf{p}_0 = 0.$$

Считая  $k \neq 0$ , т. е. исключая случай, когда линия откоса прямая, получим

$$\mathbf{n}\mathbf{p}_0 = 0. \quad (316)$$

Таким образом, главные нормали к линии откоса идут перпендикулярно к постоянному направлению  $\mathbf{p}_0$ , в наглядном представлении — параллельно горизонтальной плоскости. Так как вектор  $\mathbf{p}_0$  в каждой точке кривой идет перпендикулярно к  $\mathbf{n}$ , то  $\mathbf{p}_0$  можно поместить в сопрягдающей плоскости, т. е. в плоскости векторов  $\mathbf{t}, \mathbf{b}$ . А так как  $\mathbf{t}$  образует с  $\mathbf{p}_0$  постоянный угол  $\varphi$ , то и  $\mathbf{b}$ , перпендикулярный к  $\mathbf{t}$ , образует с  $\mathbf{p}_0$  постоянный угол, так что скалярное произведение  $\mathbf{b}$  на  $\mathbf{p}_0$ , равное косинусу этого угла, остается постоянным:

$$\mathbf{b}\mathbf{p}_0 = \text{const.}$$

Дифференцируем теперь (316) еще раз по  $s$ . Получим

$$\dot{\mathbf{n}}\mathbf{p}_0 = 0 \text{ или } (\mathbf{x}\mathbf{b} - k\mathbf{t})\mathbf{p}_0 = 0,$$

откуда

$$\mathbf{x}\mathbf{b}\mathbf{p}_0 - k\dot{\mathbf{t}}\mathbf{p}_0 = 0$$

или

$$\frac{\mathbf{x}}{k} = \frac{\dot{\mathbf{t}}\mathbf{p}_0}{\mathbf{b}\mathbf{p}_0}.$$

Мы видим, что правая часть равенства есть величина постоянная. Следовательно, для линий откоса отношение кручения к кривизне:

$$\mathbf{x}(s) : k(s),$$

остается вдоль кривой постоянным. В этом состоит ограничение, наложенное на натуральные уравнения кривой. Покажем, что этот признак не только необходим, но и достаточен.

Действительно, пусть нам известно, что вдоль кривой

$$\frac{\mathbf{x}}{k} = \text{const.} \quad (317)$$

Составим теперь вектор

$$\mathbf{b} + \frac{\mathbf{x}}{k}\mathbf{t}. \quad (318)$$

Очевидно, что в силу (317) этот вектор неизменно связан с векторами  $\mathbf{t}, \mathbf{b}$ , образуя с ними постоянные углы и имея постоянную длину. Покажем теперь, что сам вектор (318) остается постоянным вдоль кривой. Для этой цели дифференцируем его по  $s$ ; учитывая (317), мы получаем

$$\dot{\mathbf{b}} + \frac{\mathbf{x}}{k}\dot{\mathbf{t}} = -\mathbf{x}\mathbf{n} + \frac{\mathbf{x}}{k}\mathbf{k}\mathbf{n} = 0.$$

так, вектор (318) есть вектор постоянный и образует, кроме того, постоянный угол с  $\mathbf{t}$ , т. е. с касательной к кривой. Кривая есть, таким образом, линия откоса; единичный вектор в направлении (318) совпадает с  $\mathbf{p}_0$ .

3. Найти кривую, натуральные уравнения которой имеют вид

$$k = k_0 > 0, \quad z = z_0,$$

где  $k_0$  и  $z_0$  — постоянные.

Мы уже знаем, что винтовая линия (см. ковец § 41) обладает этим свойством; легко проверить, что, положив

$$a = \frac{k_0}{k_0^2 + z_0^2}, \quad \lambda = \frac{z_0}{k_0^2 + z_0^2},$$

мы получим винтовую линию с наперед заданными значениями кривизны  $k_0$  и кручения  $z_0$ .

Все остальные кривые с тем же свойством будут отличаться от этой винтовой линии лишь положением в пространстве (согласно общему теореме § 44).

4. Кривая  $C$  называется *кривой Бертрана*, если для нее можно указать отличную от нее кривую  $C^*$ , обладающую общими с  $C$  главными нормальями.

Пусть  $\mathbf{r}(s)$  — радиус-вектор кривой  $C$ ; так как в любой ее точке  $M$  главная нормаль служит главной нормалью и для  $C^*$ , то, сместившись по главной нормали на какое-то расстояние  $a$ , мы попадем в соответствующую точку  $M^*$  на  $C^*$ . Запишем:

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + a\mathbf{n},$$

где  $\mathbf{r}^*$  — радиус-вектор точки  $M^*$ . Вычислим  $\dot{\mathbf{r}}^*$  (точкой обозначаем дифференцирование по дуге  $s$  вдоль кривой  $C$ ):

$$\dot{\mathbf{r}}^* = \dot{\mathbf{t}} + a\dot{\mathbf{n}} + a(\mathbf{x}\mathbf{b} - k\mathbf{t}). \quad (319)$$

Так как касательная  $\dot{\mathbf{r}}^*$  к кривой  $C^*$  ортогональна к общей главной нормали  $\mathbf{n}$ , то  $\dot{\mathbf{r}}^*\mathbf{n} = 0$ , т. е., в силу (319),

$$\dot{a} = 0, \quad a = \text{const.}$$

Итак,

$$\dot{\mathbf{r}}^* = \dot{\mathbf{t}}(1 - ak) + a\mathbf{x}\mathbf{b}. \quad (320)$$

Дифференцируем  $\dot{\mathbf{r}}^*$  еще раз по  $s$ ; пользуясь формулами Френе, получим

$$\ddot{\mathbf{r}}^* = k\mathbf{n}(1 - ak) + \dot{\mathbf{t}}(1 - ak)^* + a\dot{\mathbf{x}}\mathbf{b} - a\dot{\mathbf{x}}^*\mathbf{n}. \quad (321)$$

Так как соприкасающаяся плоскость к  $C^*$  должна заключать векторы  $\dot{\mathbf{r}}^*, \ddot{\mathbf{r}}^*$  и общую главную нормаль  $\mathbf{n}$ , то эти три вектора должны быть компланарны, что имеет место тогда и только тогда, когда векторы  $[\dot{\mathbf{r}}^*, \mathbf{n}]$  и  $[\ddot{\mathbf{r}}^*, \mathbf{n}]$  коллинеарны. Но в силу формул (320) и (321)

$$[\dot{\mathbf{r}}^*, \mathbf{n}] = (1 - ak)\mathbf{b} - a\mathbf{x}\mathbf{t},$$

$$[\ddot{\mathbf{r}}^*, \mathbf{n}] = (1 - ak)\mathbf{b} - a\mathbf{x}\mathbf{t}.$$

Коллинеарность этих векторов означает, что

$$\frac{(1 - ak)^*}{1 - ak} = \frac{az}{ax}, \quad \text{т. е. } \left( \frac{1 - ak}{x} \right)^* = 0, \quad \frac{1 - ak}{x} = b = \text{const.}$$

Итак, кривизна  $k(s)$  и кручение  $\kappa(s)$  вдоль кривой Бертрана связаны линейным соотношением

$$ak + b\kappa = 1,$$

где  $a \neq 0$  и  $b$  — постоянные.

Это ограничение, наложенное на натуральные уравнения кривой Бертрана, не только необходимо (что мы показали), но и достаточно. В самом деле, если оно имеет место для данной кривой  $C$  при некоторых определенных  $a$  и  $b$ , то мы откладываем по главной нормали отрезок  $a$ ; конец его описывает новую кривую  $C^*$ . Повторением предыдущих выкладок убеждаемся, что  $C^*$  имеет главные нормали, общие с  $C$ , т. е.  $C$  есть кривая Бертрана (как, разумеется, и  $C^*$ ).

Выясним геометрический смысл постоянного  $b$ .

Перепишем выражение для  $\mathbf{r}^*$ :

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{t}(1 - ak) + a\mathbf{x}\mathbf{b} = \mathbf{z}(bt + ab). \quad (322)$$

Так как главные нормали кривых  $C$  и  $C^*$  — общие, то плоскости векторов  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{t}^*$ ,  $\mathbf{b}^*$  параллельны. Формула (322) показывает, что

$$\frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \theta,$$

где  $\theta$  — угол, образуемый направлением касательной к  $C^*$ , т. е. вектором  $\mathbf{r}^*$ , с направлением касательной к  $C$ , т. е. вектором  $\mathbf{t}$  (считая положительным направление вращения от  $\mathbf{t}$  к  $\mathbf{b}$ ). Итак, сопровождающие трехгранники для  $C$  и  $C^*$  имеют общую главную нормаль и сохраняют друг относительно друга неизменное положение (расстояние  $a$  между их вершинами по общей главной нормали и угол  $\theta$  между направлениями касательных остаются постоянными вдоль этих кривых).

Нужно иметь в виду, что  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{n}^*$  могут как совпадать, так и отличаться направлением [в зависимости от знака выражения  $\kappa(bk - ak)$ ]; в первом случае кривизна и кручение связаны для  $C^*$  уравнением  $-ak^* + b\kappa^* = 1$ , а во втором — уравнением  $ak^* + b\kappa^* = 1$  (доказать).

Интересен частный случай кривых Бертрана, когда

$$b=0, \text{ т. е. } ak=1, \quad k=\frac{1}{a}=\text{const.},$$

т. е. когда кривая Бертрана оказывается пространственной кривой постоянной кривизны (косая окружность). Обратно, всякую косую окружность можно рассматривать как частный случай кривой Бертрана, когда  $b=0$ . В этом случае смещение на  $a$  по главной нормали приводит нас, очевидно, в центр кривизны, так что  $C^*$  есть геометрическое место центров кривизны для  $C$ ; тем же свойством обладает и  $C$  по отношению к  $C^*$ , причем  $C^*$  будет тоже косой окружностью с той же постоянной кривизной  $\frac{1}{a}$  (доказать).

Формула  $\operatorname{ctg} \theta = \frac{b}{a}$  дает нам в этом случае  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ , так что или  $\mathbf{t}^* = \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{b}^* = \mathbf{t}$ , или  $\mathbf{t}^* = -\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{b}^* = -\mathbf{t}$ ; при этом всегда  $\mathbf{n}^* = -\mathbf{n}$  (доказать).

## ГЛАВА V.

### ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ.

#### § 45. Криволинейные координаты на поверхности.

В § 32 мы рассматривали поверхность, заданную уравнением

$$F(x, y, z) = 0. \quad (323)$$

Мы ограничивались при этом заведомо обыкновенными точками, т. е. такими, где по крайней мере одна из частных производных  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  отлична от нуля. Вблизи такой точки уравнение (323) можно переписать в виде, разрешенном относительно одной координаты, например

$$z = f(x, y), \quad (323')$$

что дает нам ясное представление о поведении поверхности.

При изучении поверхностей, как и при изучении кривых, наиболее целесообразным способом их задания является параметрическое представление. Пусть нам дана вектор-функция двух скалярных аргументов  $u$ ,  $v$ , рассматриваемых в некоторой области их изменения:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}. \quad (324)$$

Здесь  $x$ ,  $y$ ,  $z$  — координаты этой вектор-функции, также являющиеся функциями  $u$ ,  $v$ .

Будем откладывать  $\mathbf{r}(u, v)$  из начала координат  $O$ . Конец вектора  $\mathbf{r}(u, v)$ , который мы будем обозначать через  $M$ , имеет своим радиус-вектором

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) \quad (325)$$

и своими координатами

$$\left. \begin{array}{l} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v). \end{array} \right\} \quad (325')$$

Итак, кривизна  $k(s)$  и кручение  $\kappa(s)$  вдоль кривой Бертрана связаны линейным соотношением

$$ak + b\kappa = 1,$$

где  $a \neq 0$  и  $b$  — постоянные.

Это ограничение, наложенное на натуральные уравнения кривой Бертрана, не только необходимо (что мы показали), но и достаточно. В самом деле, если оно имеет место для данной кривой  $C$  при некоторых определенных  $a$  и  $b$ , то мы откладываем по главной нормали отрезок  $a$ ; конец его описывает новую кривую  $C^*$ . Повторением предыдущих выкладок убеждаемся, что  $C^*$  имеет главные нормали, общие с  $C$ , т. е.  $C$  есть кривая Бертрана (как, разумеется, и  $C^*$ ).

Выясним геометрический смысл постоянного  $b$ .

Перепишем выражение для  $\dot{r}^*$ :

$$\dot{r}^* = t(1 - ak) + axb = \kappa(bt + ab). \quad (322)$$

Так как главные нормали кривых  $C$  и  $C^*$  — общие, то плоскости векторов  $t$ ,  $b$  и  $t^*$ ,  $b^*$  параллельны. Формула (322) показывает, что

$$\frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \theta,$$

где  $\theta$  — угол, образуемый направлением касательной к  $C^*$ , т. е. вектором  $\dot{r}^*$ , с направлением касательной к  $C$ , т. е. вектором  $t$  (считая положительным направление вращения от  $t$  к  $b$ ). Итак, *сопровождающие треугольники для  $C$  и  $C^*$  имеют общую главную нормаль и сохраняют друг относительно друга неизменное положение* (расстояние  $a$  между их вершинами по общей главной нормали и угол  $\theta$  между направлениями касательных остаются постоянными вдоль этих кривых).

Нужно иметь в виду, что  $n$  и  $n^*$  могут как совпадать, так и отличаться направлением [в зависимости от знака выражения  $\kappa(bk - ax)$ ]; в первом случае кривизна и кручение связаны для  $C^*$  уравнением  $-ak^* + bz^* = 1$ , а во втором — уравнением  $ak^* + bz^* = 1$  (доказать).

Интересен частный случай кривых Бертрана, когда

$$b=0, \text{ т. е. } ak=1, \quad k=\frac{1}{a}=\text{const.},$$

т. е. когда кривая Бертрана оказывается пространственной *кривой постоянной кривизны (косой окружности)*. Обратно, всякую косую окружность можно рассматривать как частный случай кривой Бертрана, когда  $b=0$ . В этом случае смещение на  $a$  по главной нормали приводит нас, очевидно, в *центр кривизны*, так что  $C^*$  есть *геометрическое место центров кривизны для  $C$* ; тем же свойством обладает и  $C$  по отношению к  $C^*$ , причем  $C^*$  будет тоже косой окружностью с той же постоянной кривизной  $\frac{1}{a}$  (доказать).

Формула  $\operatorname{ctg} \theta = \frac{b}{a}$  дает нам в этом случае  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ , так что или  $t^* = b$ ;  $b^* = t$ , или  $t^* = -b$ ,  $b^* = -t$ ; при этом всегда  $n^* = -n$  (доказать).

## ГЛАВА V.

### ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ.

#### § 45. Криволинейные координаты на поверхности.

В § 32 мы рассматривали поверхность, заданную уравнением

$$F(x, y, z) = 0. \quad (323)$$

Мы ограничивались при этом заведомо обыкновенными точками, т. е. такими, где по крайней мере одна из частных производных  $F_x, F_y, F_z$  отлична от нуля. Вблизи такой точки уравнение (323) можно переписать в виде, разрешенном относительно одной координаты, например

$$z = f(x, y), \quad (323')$$

что дает нам ясное представление о поведении поверхности.

При изучении поверхностей, как и при изучении кривых, наиболее целесообразным способом их задания является параметрическое представление. Пусть нам дана вектор-функция двух скалярных аргументов  $u, v$ , рассматриваемых в некоторой области их изменения:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}. \quad (324)$$

Здесь  $x, y, z$  — координаты этой вектор-функции, также являющиеся функциями  $u, v$ .

Будем откладывать  $\mathbf{r}(u, v)$  из начала координат  $O$ . Конец вектора  $\mathbf{r}(u, v)$ , который мы будем обозначать через  $M$ , имеет своим радиус-вектором

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) \quad (325)$$

и своими координатами

$$\left. \begin{array}{l} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v). \end{array} \right\} \quad (325')$$

Когда  $u, v$  пробегают область своего изменения, точка  $M$  с координатами (325'), или, что то же, с радиус-вектором (325), описывает некоторое геометрическое место точек, которое мы будем называть *поверхностью в параметрическом представлении* (черт. 85). Каждой паре значений  $u, v$  из области их изменения отвечает точка поверхности. В дальнейшем, говоря о точке поверхности, мы всегда подразумеваем задание определяющих ее значений  $u$  и  $v$ .

Возьмем частные производные радиус-вектора  $r$  по  $u$  и  $v$ , пользуясь разложением (324):

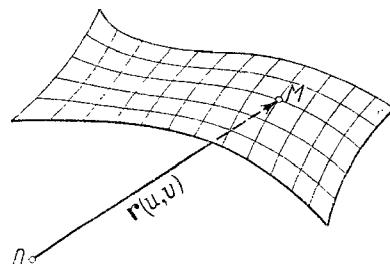
$$\begin{aligned} r_u(u, v) &= x_u(u, v)\mathbf{i} + y_u(u, v)\mathbf{j} + z_u(u, v)\mathbf{k}, \\ r_v(u, v) &= x_v(u, v)\mathbf{i} + y_v(u, v)\mathbf{j} + z_v(u, v)\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (326)$$

Во всем дальнейшем мы ограничимся рассмотрением лишь таких точек поверхности, где векторы  $r_u$  и  $r_v$  не коллинеарны<sup>1)</sup>:

$$r_u \neq r_v. \quad (327)$$

Коллинеарность  $r_u$  и  $r_v$  означала бы пропорциональность координат этих векторов, т. е. пропорциональность элементов в строках

$$\left. \begin{array}{l} x_u, y_u, z_u; \\ x_v, y_v, z_v. \end{array} \right\} \quad (328)$$



Черт. 85.

т. е. при данных значениях  $u, v$ , отличен от нуля первый из них:

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0. \quad (328')$$

Как известно из анализа<sup>2)</sup>, если функции  $x(u, v), y(u, v)$  при данных значениях  $u, v$  удовлетворяют условиям (328'), то вблизи данных значений  $u, v$  и соответствующих им значений  $x, y$  уравнения

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

<sup>1)</sup> В частности, ни один из них не обращается в нуль.

<sup>2)</sup> Фихтенгольц Г. М., т. I, гл. VI, § 2.

могут быть эквивалентным образом переписаны в виде, разрешенном относительно  $u, v$ ,

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y). \quad (329)$$

После того как первые два из уравнений (325') приняли такой вид, можно вставить эти выражения для  $u$  и  $v$  в последнее; получим

$$z = z(u(x, y), v(x, y)) \text{ или, короче, } z = f(x, y). \quad (330)$$

Итак, мы пришли к записи уравнения поверхности вблизи рассматриваемой точки в виде (323'). Таким образом, соблюдение в данной точке поверхности (325) условия  $r_u \neq r_v$  гарантирует нам, что эта точка поверхности будет обыкновенной, т. е. что вблизи этой точки уравнение поверхности может быть записано в виде, разрешенном относительно одной координаты, например  $z = f(x, y)$ .

Другими словами, вблизи этой точки наша поверхность имеет вид простого куска поверхности.

Мы обнаружили, таким образом, что вблизи своих точек, где выполняется условие (327)  $r_u \neq r_v$  (мы их будем называть *заведомо обыкновенными*), поверхность (325) ведет себя совершенно так же, как и поверхность (323) вблизи своих заведомо обыкновенных точек. Нужно отметить только, что для поверхности (323) термин «вблизи» означает, что берутся значения  $x, y, z$ , достаточно близкие к данным их значениям, для поверхности же (325) подразумевается, кроме того, что и значения  $u, v$  рассматриваются только достаточно близкие к значениям их в данной точке.

Во всем дальнейшем мы будем интересоваться *поведением поверхности* (325) лишь вблизи ее заведомо обыкновенных точек. В таком случае первые два из уравнений (325') могут быть переписаны в виде (329)

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Это означает, что не только каждой паре значений  $u, v$  однозначно отвечает точка поверхности, как показывают сами уравнения (325'), но и, обратно, каждой точке поверхности  $x, y, z$  однозначно отвечает пара значений параметров  $u, v$ .

Таким образом, *вблизи заведомо обыкновенной точки поверхности* (325) мы имеем взаимно однозначное соответствие между точками поверхности и парами значений  $u, v$  из соответствующей области изменения  $u, v$ . На этом основании параметры называются *криволинейными координатами* на поверхности.

Оговорка «вблизи заведомо обыкновенной точки» существенна в том смысле, что в противном случае уравнения (325') могут привести нас при других значениях  $u, v$  к той же самой точке  $x, y, z$ <sup>1)</sup>,

<sup>1)</sup> Самопересечение или самоналожение поверхности.

благодаря чему нарушится взаимная однозначность соответствия (одной точке будут отвечать две пары значений  $u, v$ ).

В последующем, если не оговорено противное, мы будем подразумевать, что для рассматриваемого куска поверхности налицо взаимно однозначное соответствие с некоторой областью изменения параметров  $u, v$ , и во всех точках соблюдается условие (327).

Мы видим, что роль криволинейных координат  $u, v$  заключается только в том, чтобы отмечать точки поверхности. В общем случае криволинейные координаты геометрического смысла не имеют и могут выбираться различными способами на одной и той же поверхности. Действительно, введем наряду с параметрами  $u, v$  новые переменные  $U, V$ , связанные с  $u, v$  функциональной зависимостью

$$U = U(u, v), \quad V = V(u, v). \quad (331)$$

Вид этих функций берем совершенно произвольно, требуя, однако, чтобы в рассматриваемой области изменения  $u, v$  и в соответствующей ей области изменения  $U, V$  написанные уравнения были однозначно разрешимы относительно  $u, v$ , т. е. чтобы их можно было эквивалентным образом переписать в виде

$$u = u(U, V), \quad v = v(U, V). \quad (331')$$

В таком случае область изменения переменных  $u, v$ , с одной стороны, и область изменения переменных  $U, V$ , с другой стороны, находятся во взаимно однозначном соответствии. Следовательно, переменные  $U, V$  в их области изменения можно с таким же правом считать криволинейными координатами на данном куске поверхности, как и переменные  $u, v$ . Действительно, каждой паре значений  $U, V$  отвечает, согласно (331'), пара значений  $u, v$ , а этим последним — точка поверхности с радиус-вектором (325):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}\{u(U, V), v(U, V)\}.$$

Мы получили параметрическое представление поверхности в новых параметрах  $U, V$ . Обратно, каждой точке поверхности однозначно отвечает пара значений  $u, v$ , а следовательно, согласно (331), и пара значений  $U, V$ .

Таким образом, в выборе криволинейных координат на поверхности имеется широкий произвол. Поэтому, изучая поверхность, заданную параметрическим представлением (325), нам придется тщательно отделять существенные факты, относящиеся только к самой геометрической форме поверхности, от случайных данных, зависящих от произвольного выбора криволинейных координат на поверхности.

Отметим как частный случай, что на плоскости или в какой-нибудь области на ней можно также ввести общего вида криволинейные координаты. Для этого в данной области достаточно

построить произвольные функции  $u, v$  прямоугольных декартовых координат  $x, y$ :

$$\begin{aligned} u &= u(x, y), \\ v &= v(x, y). \end{aligned}$$

При этом требуется, однако, чтобы в рассматриваемой области написанные уравнения были однозначно разрешимы относительно  $x, y$  и могли быть, следовательно, переписаны в виде

$$\begin{aligned} x &= x(u, v), \\ y &= y(u, v). \end{aligned}$$

В таком случае каждой точке  $x, y$  данной области на плоскости однозначно отвечает пара значений  $u, v$  из области изменения этих переменных, и обратно. Переменные  $u, v$  можно считать криволинейными координатами данной области на плоскости.

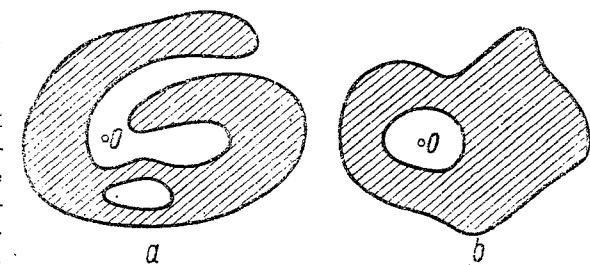
Элементарным примером криволинейных координат на плоскости служат полярные координаты. Если взятая на плоскости область не содержит полюса и не охватывает его кольцом (черт. 86, a), то полярные координаты удовлетворяют требованию взаимно однозначного соответствия с точками области. Точнее: фиксируя значения полярного угла  $\varphi$  и полярного радиуса  $r$  в одной точке и непрерывно изменяя их при перемещении по области, мы при любом выборе пути принципом каждой точке одну и ту же однозначно определенную пару значений  $\varphi, r$ .

Напротив, если область содержит полюс  $O$  или охватывает его (как на черт. 86, b), то при каждом обходе вокруг полюса мы возвращаемся в прежнюю точку области со значением  $\varphi$ , измененным на  $2\pi$ . Взаимная однозначность соответствия нарушается. Из общих определений вытекает, что при теоретическом рассмотрении мы считаем такого рода случаи исключенными.

Укажем еще на географическую широту  $\varphi$  и долготу  $\theta$

$$\left( -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}; -\pi < \theta < \pi \right),$$

как на пример криволинейных координат на сфере. Взаимная однозначность соответствия имеет место при условии, что с поверхности сферы удален меридиан  $\theta = \pm \pi$ , включая и его концы (северный и южный полюсы).



Черт. 86.

### § 46. Кривые на поверхности.

Рассмотрим на поверхности геометрическое место точек, криволинейные координаты которых определяются уравнениями

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad (332)$$

где  $t$  — независимое переменное. Пользуясь параметрическим представлением поверхности (325), можно записать радиус-вектор любой такой точки в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}[u(t), v(t)]. \quad (333)$$

Таким образом,  $\mathbf{r}$  выражается в конечном итоге как функция одного аргумента  $t$  и, когда  $t$  пробегает область своего изменения,  $\mathbf{r}$  описывает своим концом некоторую кривую в пространстве. Уравнения (332) определяют, таким образом, на поверхности некоторую кривую.

В частности, в уравнениях (332) параметром  $t$  может служить одна из криволинейных координат, например  $t = u$ . Тогда пара уравнений (332) сводится к одному

$$v = v(u). \quad (334)$$

С данной системой криволинейных координат на поверхности наиболее непосредственно связаны так называемые *координатные линии*, т. е. кривые, вдоль которых одна из координат остается постоянной.

Будем называть линией  $u$  кривую, вдоль которой меняется только  $u$ . Уравнение такой кривой на поверхности можно записать как частный случай (334):

$$v = \text{const.}, \quad (335)$$

считая, что функция  $v(u)$  является константой.

Совершенно аналогично уравнение линий  $v$  будет

$$u = \text{const.} \quad (336)$$

Так как значение постоянной в правой части уравнений (335) и (336) можно выбирать произвольно, т. е. в первом случае  $v$ , а во втором случае  $u$  можно закреплять на любом значении, то каждое из уравнений определяет нам целое семейство кривых от одного параметра. Два семейства кривых на поверхности, каждое от одного параметра, называются *сетью* кривых на поверхности. Мы построили, таким образом, координатную сеть (черт. 85). Через каждую точку  $M(u_0, v_0)$  на поверхности проходит ровно две линии сети: линия  $u$ , получающаяся, если закрепить  $v$  на значении  $v_0$  (которое  $v$  имеет в точке  $M$ ),

$$v = v_0,$$

и линия  $v$ , вдоль которой и закреплено на значении  $u_0$ :

$$u = u_0.$$

На плоскости в случае прямоугольных декартовых координат координатная сеть образована всевозможными прямыми, параллельными осям, в случае полярных координат — окружностями с центром в полюсе и выходящими из полюса полупрямыми.

Координатная сеть в значительной степени обуславливает выбор системы криволинейных координат, так как, наблюдая линии постоянных значений  $u$  и  $v$ , можно составить себе некоторое представление о ходе изменения этих параметров, однако — неполное: о численных значениях параметров по виду кривых мы ничего сказать, конечно, не можем. Более точно: сделаем преобразование криволинейных координат на поверхности

$$U = U(u), \quad V = V(v)$$

так, чтобы каждая новая координата зависела только от одной старой, в остальном же преобразование произвольно. Конечно, система координат изменится довольно существенно, но координатная сеть останется прежней, так как если вдоль кривой  $v$  постоянное, то  $V(v)$  также остается постоянным, и линии  $u$  совпадают с линиями  $U$ . То же относится и к линиям  $v$ ,  $V$ . Таким образом, *координатная сеть определяет криволинейные координаты с точностью до преобразования  $U(u), V(v)$* . Другие преобразования здесь, как нетрудно показать, невозможны.

Займемся теперь изучением касательных к кривым, проведенным по поверхности. Пусть на поверхности дана кривая (332). Пользуясь ее параметрическим представлением в пространстве

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}[u(t), v(t)],$$

находим дифференциал радиус-вектора

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u(u, v) du + \mathbf{r}_v(u, v) dv, \quad (337)$$

где

$$du = u'(t) dt, \quad dv = v'(t) dt. \quad (337')$$

В дальнейшем мы всегда будем считать, что  $du, dv$  не обращаются в нуль одновременно, так как мы рассматриваем на кривой лишь заведомо обыкновенные точки, где  $d\mathbf{r} = \mathbf{r}' dt \neq 0$ .

Как и всегда,  $d\mathbf{r}$  направлен по касательной к кривой. Мы видим, что в каждой точке кривой  $d\mathbf{r}$  разлагается по векторам  $\mathbf{r}_u(u, v)$ ,  $\mathbf{r}_v(u, v)$  и, следовательно, компланарен с ними. Но эти векторы — частные производные от  $\mathbf{r}(u, v)$  — зависят только от выбора значений  $u, v$ , т. е. от выбора точки на поверхности. Таким образом, в какую бы точку на поверхности мы ни пришли, двигаясь по

нашей кривой, касательная к кривой будет лежать в одной плоскости с векторами  $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$  в этой точке (черт. 87).

Отсюда следует, что если через данную точку поверхности  $M(u, v)$  проводить по поверхности всевозможные кривые, то касательные к ним в этой точке расположатся все в одной плоскости, а именно в плоскости векторов  $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ . Мы знаем (см. § 32), что плоскость, в которой расположены все касательные к поверхности в данной точке, называется касательной плоскостью. Таким образом, мы

подтвердили прежний результат, именно, что такая плоскость существует, и обнаружили, что она определяется векторами  $\mathbf{r}_u$  и  $\mathbf{r}_v$  в данной точке [напомним, что по условию (327)  $\mathbf{r}_u$  и  $\mathbf{r}_v$  не коллинеарны].

Что же касается самих векторов  $\mathbf{r}_u$  и  $\mathbf{r}_v$ , то они направлены по касательным к координатным линиям в данной точке. В самом деле, вдоль координатной линии, например  $u$ , значение  $v$  остается равным постоянному  $v_0$ , и равенство (333) примет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0),$$

где параметром служит независимое переменное  $u$ . Так как теперь  $dv = 0$ , то формула (337) примет вид

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u(u, v_0) du.$$

Касательная к линии  $u$  направлена по  $d\mathbf{r}$ , а следовательно, и в направлении коллинеарного с ним вектора  $\mathbf{r}_u$ .

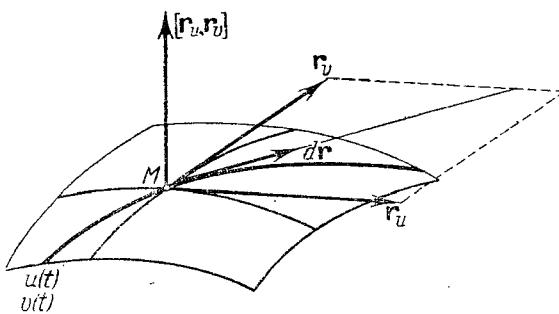
Аналогично обстоит дело и с линиями  $v$ .

Возвращаемся к общему случаю (337). Вектор, характеризующий направление касательной к кривой на поверхности в данной точке  $M$ , имеет вид<sup>1)</sup>

$$\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv = du \left( \mathbf{r}_u + \frac{dv}{du} \mathbf{r}_v \right).$$

Множитель  $du$  не играет роли для направления касательной; векторы  $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$  зависят только от выбора точки  $M$  на поверхности; следовательно, выбор кривой, проведенной по поверхности через

<sup>1)</sup> Считая для определенности, что  $du \neq 0$ .



Черт. 87.

точку  $M$ , сказывается только в значении частного  $dv : du$ , где  $du, dv$  — дифференциалы криволинейных координат вдоль рассматриваемой кривой. Итак, если поверхность и точка  $M$  на ней даны, то направление касательной к кривой на поверхности в точке  $M$  вполне характеризуется отношением дифференциалов  $dv : du$ , взятых вдоль этой кривой. (Точнее, здесь подразумевается  $dv : du = -v'(t) dt : u'(t) dt = v'(t) : u'(t)$ , где  $t$  — параметр вдоль кривой.) Очевидно, что и обратно, направление касательной, т. е. направление, параллельное вектору  $\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv$ , определяет этот вектор с точностью до численного множителя, а следовательно, отношение коэффициентов его разложения  $dv : du$  определяется этим направлением однозначно.

Этот простой результат будет часто применяться в дальнейшем.

Запишем теперь уравнение касательной плоскости в данной точке  $M(u, v)$  на поверхности. Так как эта плоскость проходит через векторы  $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$  в данной точке, то она перпендикулярна к их векторному произведению

$$[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}. \quad (338)$$

Это векторное произведение, которое вследствие условия (327) будет отлично от нуля, укажет нам, таким образом, направление нормали к поверхности в данной точке. Касательную плоскость в точке  $M(u, v)$  можно рассматривать как плоскость, проходящую через  $M(u, v)$  [декартовы координаты этой точки в пространстве будут  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ ] перпендикулярно к вектору (338). Обозначая через  $X, Y, Z$  текущие координаты по плоскости, нетрудно записать ее уравнение в виде

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0. \quad (339)$$

Действительно, здесь коэффициенты при разностях  $X - x, Y - y, Z - z$  совпадают с координатами вектора (338), а это и значит, что плоскость (339) проведена через точку  $x, y, z$  перпендикулярно к вектору (338).

Так же легко записать уравнение нормали как прямой, проходящей через данную точку по направлению вектора (338):

$$\begin{vmatrix} X - x \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y - y \\ z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z - z \\ x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}. \quad (340)$$

### § 47. Первая основная квадратичная форма.

Мы переходим к изучению поверхности в бесконечно малом вблизи какой-нибудь ее точки  $M(u, v)$ . В этом параграфе мы ограничимся точностью 1-го порядка, т. е. будем учитывать лишь бесконечно малые 1-го порядка.

Сместимся из точки  $M(u, v)$  по какой-нибудь кривой на поверхности

$$u = u(t), \quad v = v(t)$$

в бесконечно близкую точку  $M'$  (черт. 88). Если приращение параметра  $t$  при этом будет  $dt$ , то дифференциалы криволинейных координат на поверхности (отличные, вообще говоря, от их приращений) будут

$$du = u'(t) dt, \quad dv = v'(t) dt.$$

В дальнейшем, много раз повторяя это построение, мы просто будем говорить о *дифференциалах*  $du, dv$ , *отвечающих* данному бесконечно малому смещению по поверхности. При

этом читатель должен помнить только что разъясненный точный смысл этого выражения. Отношение этих дифференциалов  $dv : du$  (если  $du \neq 0$ ) имеет вполне определенное значение  $v'(t) : u'(t)$  и характеризует, как мы знаем, направление касательной к пути смещения.

Вычислим дифференциал радиус-вектора  $r$  вдоль нашей кривой, отвечающий смещению из  $M$  в  $M'$ . По формуле (337)

$$dr = r_u du + r_v dv. \quad (341)$$

Теперь нетрудно вычислить и дифференциал дуги  $ds$  кривой, отвечающей тому же смещению  $\overline{MM'}$ . Действительно, по общей формуле (158'')

$$|ds| = |dr| = |r_u du + r_v dv| \quad (341')$$

или

$$ds^2 = dr^2 = (r_u du + r_v dv)^2.$$

Раскрывая скобки, вычисляем скалярный квадрат в правой части и получаем

$$ds^2 = r_u^2 du^2 + 2r_u r_v du dv + r_v^2 dv^2.$$

Векторы  $r_u, r_v$ , а следовательно, и их скалярные произведения суть функции от  $u, v$  и зависят, следовательно, лишь от выбора

точки  $M(u, v)$ . Введем для этих скалярных произведений сокращенные обозначения

$$\left. \begin{aligned} r_u r_u &= E(u, v), \\ r_u r_v &= F(u, v), \\ r_v r_v &= G(u, v). \end{aligned} \right\} \quad (342)$$

Тогда предыдущая формула может быть переписана в виде

$$ds^2 = E(u, v) du^2 + 2F(u, v) du dv + G(u, v) dv^2. \quad (343)$$

Выражение в правой части называется *первой основной квадратичной формой* на поверхности и играет в теории поверхностей огромную роль.

Как известно, вообще квадратичной формой называется целая рациональная функция (многочлен), однородная второй степени. Таким образом, (343) является квадратичной формой по отношению к дифференциалам  $du, dv$ . Что же касается коэффициентов квадратичной формы  $E, F, G$ , то они от  $du, dv$  не зависят, а зависят лишь от выбора точки  $M(u, v)$  на поверхности, по отношению к которой квадратичная форма составлена.

Значение первой квадратичной формы заключается в том, что она выражает квадрат дифференциала дуги  $ds$  при бесконечно малом смещении по поверхности. При этом коэффициенты квадратичной формы определяются той точкой  $M(u, v)$ , из которой производится смещение, а дифференциалы  $du, dv$  отвечают данному смещению из  $M$ .

Таким образом, первая квадратичная форма служит нам прежде всего для измерения в бесконечно малом длины вдоль поверхности. Разумеется, мы выражаем посредством (343) лишь дифференциал  $ds$ , т. е. длину дуги смещения  $\overline{MM'}$  с ошибкой, бесконечно малой 2-го порядка.

Однако посредством интегрирования нетрудно перейти и к точному вычислению длин на поверхности. Пусть, действительно, первая квадратичная форма на поверхности нам известна, т. е. известен вид функциональной зависимости  $E, F, G$  от  $u, v$ . Пусть, далее, нам задан отрезок какой-нибудь кривой на поверхности

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad T_0 \leq t \leq T.$$

Вдоль этой кривой дифференциал дуги будет выражаться, если воспользоваться формулой (343), таким образом:

$$ds = \sqrt{E(u, v) du^2 + 2F(u, v) du dv + G(u, v) dv^2}.$$

Интегрируя дифференциал  $ds$  в пределах от  $T_0$  до  $T$ , получим точную длину соответствующего отрезка кривой от точки  $M_{T_0}$  до точки  $M_T$ :

$\overline{M_{T_0} M_T} =$

$$= \int_{T_0}^T \sqrt{E(u, v) \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + 2F(u, v) \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G(u, v) \left( \frac{dv}{dt} \right)^2} dt. \quad (344)$$

В подинтегральном выражении мы вынесли  $dt$  из-под знака корня. При этом, так как нам известны  $E, F, G$  как функции от  $u, v$ , а  $u, v$  — как функции от  $t$ , то под знаком интеграла стоит известная нам функция от  $t$ . Задача сводится к квадратуре.

Зная первую квадратичную форму на поверхности, можно измерять не только длины но и углы между кривыми. Действительно, пусть из точки  $M$  выходят две кривые. Обозначим через  $du, dv$  дифференциалы криволинейных координат, отвечающие бесконечно малому смещению по одной кривой, и через  $\delta u, \delta v$  — то же самое для другой кривой.

Соответствующие дифференциалы радиус-вектора мы обозначим через  $d\mathbf{r}$  и  $\delta\mathbf{r}$  (черт. 89). Согласно (344)

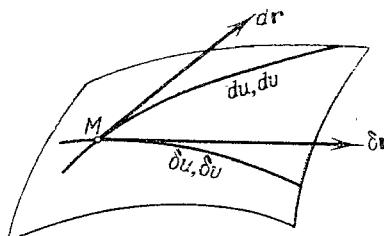
$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv; \quad \delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_u \delta u + \mathbf{r}_v \delta v. \quad (345)$$

Как всегда, эти дифференциалы направлены по касательным к соответствующим кривым. Следовательно, угол между касательными (который мы и называем углом между кривыми) можно вычислять как угол между векторами (345). Как известно, косинус угла между векторами равен их скалярному произведению, деленному на произведение длин:

$$\cos(\widehat{d\mathbf{r}, \delta\mathbf{r}}) = \frac{d\mathbf{r} \cdot \delta\mathbf{r}}{|d\mathbf{r}| \cdot |\delta\mathbf{r}|} = \frac{\mathbf{r}_u \mathbf{r}_u du \delta u + \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v (du \delta v + dv \delta u) + \mathbf{r}_v \mathbf{r}_v dv \delta v}{|ds| \cdot |\delta s|}.$$

В числителе мы вычисляем скалярное произведение  $d\mathbf{r} \delta\mathbf{r}$ , пользуясь формулами (345), а в знаменателях заменяем  $|d\mathbf{r}|$  и  $|\delta\mathbf{r}|$  соответствующими дифференциалами дуг  $|ds|$  и  $|\delta s|$  на основании (344').

Замечая, что скалярные произведения в числителе суть  $E, F, G$ , и заменяя  $ds$  и  $\delta s$  их выражениями согласно (343), получим



Черт. 89.

окончательно

$$\cos(\widehat{d\mathbf{r}, \delta\mathbf{r}}) = \frac{E du \delta u + F(du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v}{\sqrt{E du^2 + 2F du \delta v + G dv^2} \cdot \sqrt{E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2}}. \quad (346)$$

Так выражается косинус угла между двумя кривыми на поверхности через дифференциалы координат  $u$  и  $v$ , отвечающие смещениям вдоль этих кривых из точки их пересечения. Заметим, что (346) — вполне точная формула, так как правая часть зависит фактически лишь от отношений дифференциалов  $du : dv$  и  $\delta u : \delta v$ , а эти отношения имеют точные значения, зависящие лишь от направлений касательных к кривым в точке  $M$ . Числитель правой части называется по отношению к  $du, dv$  и  $\delta u, \delta v$  билинейной формой, полярной по отношению к квадратичной форме (343).

В частности, если мы ищем угол  $\varphi$  между координатными линиями в какой-нибудь точке  $M(u, v)$ , то можно считать

$$du \neq 0, \quad dv = 0 \quad (\text{смещение по линии } u),$$

$$\delta u = 0, \quad \delta v \neq 0 \quad (\text{смещение по линии } v).$$

Формула (346) примет вид

$$\cos \varphi = \pm \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Знак  $\pm$  здесь указывает, что в качестве угла  $\varphi$  можно взять любой из смежных углов, образуемых координатными линиями. Если, в частности, коэффициент  $F$  равен нулю, то это равносильно обращению в нуль  $\cos \varphi$  и означает, что угол  $\varphi$  — прямой.

Наконец, первая квадратичная форма позволяет вычислять на поверхности также и площади. Прежде всего дадим определение понятия площади на поверхности.

Возьмем на поверхности какую-нибудь область  $D$ . Для определенности будем считать, что она ограничена кусочно гладкой кривой. Область  $D$  можно рассматривать одновременно как область изменения параметров  $u, v$ , именно как область, которая образована парами значений  $u, v$ , отвечающими точкам области  $D$ . Разобъем область  $D$ , проведя на поверхности некоторое конечное число координатных линий одного и другого семейств. Область  $D$  распадется на так называемые криволинейные параллелограммы, каждый из которых ограничен с двух сторон отрезками линий  $u$  и с двух сторон — отрезками линий  $v$ . Один из таких параллелограммов в увеличенном масштабе дан на черт. 90 внизу. На куски этих параллелограммов, вырезаемые областью  $D$  около ее границы, мы не обращаем внимания, так как при последующем переходе к пределу в процессе бесконечного измельчения разбиения их роль сведется к нулю.

Рассмотрим один из параллелограммов. Пусть  $M(u, v)$  будет его вершина с наименьшими значениями  $u, v$  и пусть другие вершины его будут  $M_1(u + \Delta u, v)$ ,  $M_2(u, v + \Delta v)$ ,  $M'(u + \Delta u, v + \Delta v)$ ;  $MM_1$  и  $M_2M'$  суть отрезки линий  $u$ , а  $MM_2$  и  $M_1M'$  — отрезки линий  $v$ .

При переходе из  $M$  в  $M_1$  по линии  $u$  остается постоянным, а  $u$  получает приращение  $\Delta u$ , так что радиус-вектор  $r(u, v)$  получит приращение

$$r(u + \Delta u, v) - r(u, v) = \overline{MM}_1.$$

Заменим это приращение соответствующим дифференциалом радиус-вектора  $r$ , рассматривая  $r$  как функцию от  $u$  при закрепленном значении  $v$ .

Этот дифференциал будет равен, очевидно,  $r_u \Delta u$ ; смещением на этот вектор мы заменяем криволинейный переход  $\overline{MM}_1$ , (черт. 90). Совершенно аналогично заменяется криволинейное смещение  $\overline{MM}_2$  прямолинейным смещением на соответствующий частный дифференциал радиус-вектора:

$$r_v \Delta v.$$

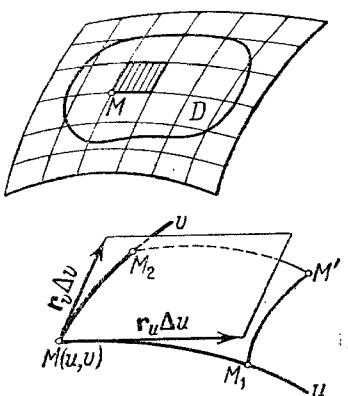
В отличие от обычного здесь  $\Delta u$  и  $\Delta v$  — не бесконечно малые, но в дальнейшем при бесконечном измельчении разбиения  $\Delta u$  и  $\Delta v$  стремятся к нулю, так что ошибка, допущенная при замене приращения радиус-вектора его дифференциалом, превратится в каждом из параллелограммов в бесконечно малую высшего порядка.

Заменим, наконец, криволинейный параллелограмм прямолинейным параллелограммом, построенным на векторах  $r_u \Delta u$ ,  $r_v \Delta v$  и лежащим, следовательно, в касательной плоскости в точке  $M(u, v)$ . Этот параллелограмм приближенно заменяет криволинейный и тем точнее, чем меньше размеры последнего.

Площадь прямолинейного параллелограмма, построенного на данных векторах, равна модулю векторного произведения этих векторов, так что в нашем случае можно записать ее в виде

$$\Delta\sigma = |[r_u \Delta u, r_v \Delta v]| = |[r_u, r_v]| \Delta u \Delta v.$$

Весьма существенно, что эта площадь может быть выражена при помощи коэффициентов первой квадратичной формы. Действительно, для любых двух векторов — по самому определению векторного



Черт. 90.

и скалярного произведения — имеют место равенства

$$|[a, b]| = |a| |b| \sin(a \wedge b), ab = |a| |b| \cos(a \wedge b),$$

отсюда ясно, что

$$|[a, b]|^2 + (ab)^2 = |a|^2 |b|^2.$$

А так как квадрат модуля вектора равен скалярному квадрату самого вектора, то окончательно

$$|[a, b]|^2 + (ab)^2 = a^2 b^2.$$

Применим эту формулу к векторам  $r_u$ ,  $r_v$ :

$$|[r_u, r_v]|^2 + (r_u r_v)^2 = r_u^2 r_v^2$$

и воспользуемся обозначениями (342). Получим

$$|[r_u, r_v]|^2 = EG - F^2, \quad |[r_u, r_v]| = \sqrt{EG - F^2}. \quad (347)$$

Площадь  $\Delta\sigma$  примет теперь вид

$$\Delta\sigma = \sqrt{EG - F^2} \Delta u \Delta v, \quad (348)$$

где значения коэффициентов  $E$ ,  $F$ ,  $G$  взяты, очевидно, в точке  $M(u, v)$ . Таким образом, надстраивая над каждым криволинейным параллелограммом нашего разбиения соответствующий ему прямолинейный параллелограмм, мы получаем площадь последнего  $\Delta\sigma$  в виде произведения корня квадратного из дискриминанта первой квадратичной формы на приращения координат  $\Delta u$ ,  $\Delta v$ , стоящие перед сторонами криволинейного параллелограмма.

Дискриминант первой квадратичной формы  $EG - F^2$  есть функция  $u, v$ ; в формуле (348) он взят в точке  $M$ , где прямолинейный параллелограмм касается криволинейного.

Составим теперь сумму всех площадей

$$\sum \Delta\sigma = \sum \sqrt{EG - F^2} \Delta u \Delta v, \quad (349)$$

где суммирование распространено по всем параллелограммам данного разбиения, попавшим внутрь области  $D$ .

Будем теперь бесконечно измельчать разбиение, т. е. бесконечно увеличивать число начерченных координатных линий из того и другого семейства с таким расчетом, чтобы наибольшее значение  $\Delta u$  в данном разбиении стремилось к нулю, равно как и наибольшее значение  $\Delta v$ .

Предел, к которому стремится при этом сумма площадей (349), называется площадью области  $D$  на поверхности.

Для того чтобы это определение имело смысл, нужно показать, что этот предел существует и зависит только от выбора области  $D$  на поверхности (и не зависит, следовательно, от способа

измельчения разбиения и от выбора криволинейных координат на поверхности).

Чтобы обнаружить это, нужно обратиться к теории кратных интегралов. Так как  $\sqrt{EG - F^2}$  есть непрерывная функция от  $u, v$ , то указанный предел действительно существует, не зависит от способа измельчения разбиения и равен двойному интегралу от  $\sqrt{EG - F^2}$  по  $D$ , как по области изменения переменных  $u, v$ . Обозначим этот предел через  $\sigma$ :

$$\sigma = \lim \sum \int_D \sqrt{EG - F^2} du dv = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (350)$$

Остается показать, что получение выражение не зависит от выбора криволинейных координат на поверхности. Допустим, что мы перешли к новым криволинейным координатам  $U, V$  при помощи преобразования (341). Рассматривая  $\mathbf{r}$  как функцию новых параметров  $U, V$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(U, V),$$

а  $U, V$  — как функции от  $u, v$ , мы можем продифференцировать  $\mathbf{r}$  по  $u$  и по  $v$  как сложную функцию:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u &= \mathbf{r}_U \frac{\partial U}{\partial u} + \mathbf{r}_V \frac{\partial V}{\partial u}, \\ \mathbf{r}_v &= \mathbf{r}_U \frac{\partial U}{\partial v} + \mathbf{r}_V \frac{\partial V}{\partial v}. \end{aligned}$$

Таким образом, при другом выборе криволинейных координат  $u, v$  на поверхности в каждой данной точке поверхности частные производные радиус-вектора по  $u$  и  $v$ ,  $\mathbf{r}_u$  и  $\mathbf{r}_v$  меняют свои значения, хотя сам радиус-вектор  $\mathbf{r}$  остается, конечно, без изменения. Поэтому коэффициенты  $E, F, G$ , вычисленные согласно (342), в тех же точках будут уже другими.

Составим векторное произведение

$$\begin{aligned} [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] &= \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial v} [\mathbf{r}_U, \mathbf{r}_V] + \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial v} [\mathbf{r}_V, \mathbf{r}_U] = \\ &= \left( \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial v} - \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial v} \right) [\mathbf{r}_U, \mathbf{r}_V] = \frac{\partial(U, V)}{\partial(u, v)} [\mathbf{r}_U, \mathbf{r}_V]. \end{aligned}$$

Беря правую и левую части равенства по модулю и вспоминая равенство (347), получим

$$\sqrt{EG - F^2} = \left| \frac{\partial(U, V)}{\partial(u, v)} \right| \sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2}, \quad (351)$$

где  $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$  означают коэффициенты первой квадратичной формы в новых криволинейных координатах  $U, V$ . Формула (351) интересна тем, что она выражает закон преобразования дискриминанта первой квадратичной формы при переходе от новых координат к старым. Мы видим, что корень квадратный из дискриминанта умножается на модуль якобиана от новых координат по старым.

Подставляя полученное выражение (351) в интеграл (350), получим

$$\iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv = \iint_D \sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} \left| \frac{\partial(U, V)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

Пользуясь формулой преобразования переменных под знаком кратного интеграла<sup>1)</sup>, мы можем переписать правую часть в новом виде, переходя к переменным  $U, V$ :

$$\iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv = \iint_{\tilde{D}} \sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} dU dV. \quad (352)$$

Интегрирование в правой части производится по области изменения переменных  $U, V$ , которую мы обозначаем  $\tilde{D}$  и которая соответствует некоторому куску поверхности, тому же, что и область  $D$  в переменных  $u, v$ . Формула (352) показывает, что результат вычисления площади данного куска поверхности будет один и тот же в любой системе криволинейных координат на поверхности. Наше определение площади является, следовательно, законным, и мы можем вычислять площадь области на поверхности по формуле (350).

Подведем итоги. Пусть в некоторой системе криволинейных координат  $u, v$  на поверхности нам задана первая квадратичная форма

$$ds^2 = E du^2 + 2Fdudv + G dv^2,$$

другими словами, пусть  $E, F, G$  заданы как функции  $u, v$ . Тогда, хотя бы мы ничего больше о поверхности не знали (не знали бы ее формы в пространстве, не имели бы ее уравнения и т. д.), мы можем вычислять длины кривых на поверхности, углы между ними и площади областей на поверхности — по формулам (344), (346) и (350). В главе VII будет подробно развита эта точка зрения на поверхность. Те геометрические свойства поверхности, которые можно установить, исходя из задания только первой квадратичной формы, образуют так называемую внутреннюю геометрию поверхности.

В заключение одно замечание из области алгебры. Первая квадратичная форма (343) по самому определению выражает  $ds^2$ , или, что то же,  $d\mathbf{r}^2$  и, следовательно, есть форма положительная при всех значениях  $du, dv$ , кроме, разумеется,  $du = dv = 0$ . Отсюда вытекает, как можно показать чисто алгебраическим путем, что ее дискриминант также положителен:

$$EG - F^2 > 0. \quad (353)$$

Мы уже убедились в этом из геометрических соображений — формула (347) показывает, что дискриминант равен скалярному квадрату вектора  $[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$ .

Далее, так как (346) выражает косинус, то дробь в правой части по модулю  $\leq 1$ , и следовательно, числитель по модулю никогда не превосходит знаменателя. Это неравенство, имеющее место при любых  $du, dv$  и  $\delta u, \delta v$ , также можно алгебраически вывести из положительности квадратичной формы.

<sup>1)</sup> Фихтенгольц Г. М., т. II.

Заметим еще, что если дифференциал дуги  $ds$  вычисляется вдоль линии  $u$ , то  $dv = 0$ , и формула (343) принимает вид

$$ds^2 = Edu^2.$$

Отсюда видно, что

$$E > 0 \text{ и } ds = \sqrt{E} du. \quad (354)$$

Вычисляя аналогично дифференциал дуги  $ds$  вдоль линии  $v$ , убеждаемся, что

$$G > 0 \text{ и } ds = \sqrt{G} dv. \quad (354')$$

Пример.

*Поверхность вращения.* Рассмотрим поверхность, образованную вращением около оси  $Z$  какой-нибудь кривой  $C$ , расположенной в плоскости  $XZ$ . Пусть параметрическое представление кривой  $C$  будет

$$x = \psi(u) > 0, \quad z = \varphi(u)$$

(условие  $\psi(u) > 0$  устраняет пересечение кривой с осью вращения). Чтобы характеризовать положение какой-нибудь точки  $M$  на поверхности, мы будем указывать значение параметра  $u$ , т. е. положение точки на исходной кривой  $C$ , и угол  $v$ , на который кривая  $C$  повернулась около оси  $Z$  (сделать чертеж). Очевидно, меняя  $u$ , мы пробегаем кривую  $C$ , а меняя  $v$ , мы заставляем  $C$  описывать нашу поверхность вращения.

Координаты  $x, y, z$  точки  $M$  выражаются через  $u, v$ :

$$x = \psi(u) \cos v, \quad y = \psi(u) \sin v, \quad z = \varphi(u).$$

Радиус-вектор примет вид

$$\mathbf{r}(u, v) = \psi(u) \mathbf{e}(v) + \varphi(u) \mathbf{k}, \text{ где } \mathbf{e}(v) = \mathbf{i} \cos v + \mathbf{j} \sin v.$$

Легко проверить, что при указанном выборе криволинейных координат  $u, v$  на поверхности вращения координатные линии  $u$  представляют собой меридианы, а линии  $v$  — параллели.

Составим первую квадратичную форму. Вычисляем:

$$\mathbf{r}_u = \psi'(u) \mathbf{e}(v) + \varphi'(u) \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_v = \psi(u) \mathbf{e}\left(v + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$E = \psi'^2 + \varphi'^2, \quad F = 0, \quad G = \psi^2.$$

Отсюда

$$ds^2 = (\psi'^2 + \varphi'^2) du^2 + \psi^2 dv^2.$$

Мы замечаем, что коэффициенты  $E, F, G$  зависят лишь от одной координаты  $u$ ; при этом  $F = 0$ , что и следовало ожидать, так как меридианы и параллели (т. е. наши координатные линии) ортогональны.

Найдем первую квадратичную форму на сфере радиуса  $a$ , рассматривая ее как поверхность вращения. В качестве кривой  $C$  возьмем полуокружность с центром в начале координат:

$$x = a \cos u, \quad z = a \sin u; \quad -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2} \text{ (сделать чертеж).}$$

Получаем согласно предыдущей формуле

$$ds^2 = a^2 du^2 + a^2 \cos^2 u dv^2; \quad E = a^2, \quad F = 0, \quad G = a^2 \cos^2 u.$$

Показать, что  $u$  и  $v$  играют на сфере роль широты и долготы. Получить значения  $E$  и  $G$  другим путем, а именно, вычислив из элементарных соображений  $ds$  вдоль меридианов и вдоль параллелей и подставив затем найденные выражения в (354) и (354').

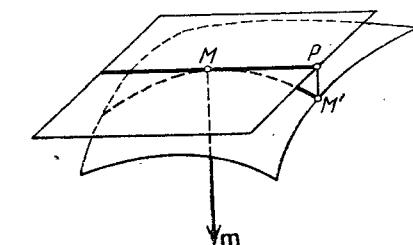
### § 48. Вторая основная квадратичная форма на поверхности.

Продолжаем изучение поверхности вблизи какой-нибудь ее точки  $M$ . Пусть  $MM'$  (черт. 91) — одна из кривых на поверхности, проходящих через  $M$ . Предположим для простоты, что вдоль этой кривой за параметр принята длина дуги  $s$ , так что текущие координаты  $u, v$  выражаются как функции  $s$ :

$$u = u(s), \quad v = v(s)$$

и, следовательно,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}\{u(s), v(s)\}. \quad (355)$$



Черт. 91.

Пусть длина дуги  $MM'$  равна  $\Delta s$ , т. е.  $\Delta s$  есть приращение параметра  $s$  при смещении по кривой из  $M$  в  $M'$  (считая, что  $s$  растет в этом направлении). Соответствующее

приращение  $\Delta \mathbf{r}$  радиус-вектора  $\mathbf{r}$  равно, очевидно,  $\overline{MM'}$ , так что, разлагая это приращение в ряд Тейлора, можно записать

$$\overline{MM'} = \Delta \mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}} \Delta s + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{r}} (\Delta s)^2 + \dots, \quad (356)$$

где  $\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dots$  взяты в точке  $M$ . Пусть теперь  $\Delta s$  стремится к нулю, т. е. смещение  $MM'$  берется бесконечно малым. Если вести исследование с точностью 1-го порядка, то в правой части достаточно принять во внимание лишь первое слагаемое  $\dot{\mathbf{r}} \Delta s$ , совпадающее с дифференциалом  $d\mathbf{r}$ . В таком случае смещение  $MM'$  можно считать направленным по касательной к кривой в точке  $M$  и, следовательно, лежащим в плоскости, касательной к поверхности в  $M$ . В сущности мы именно так и поступали в предыдущем параграфе, так как у нас играла роль лишь дифференциалы радиус-вектора при смещении из данной точки по поверхности.

В этом параграфе мы переходим к более глубокому изучению поверхности бесконечно малом, учитывая при смещении по кривой  $MM'$  бесконечно малые не только 1-го, но и 2-го порядка. Это скажется в том, что в рассмотрение войдут кривизна и соприкасающаяся плоскость кривой смещения  $MM'$ , которое нельзя уже считать расположенным в касательной плоскости. Мы начнем именно с оценки уклонения от касательной плоскости при смещении из точки касания  $M$  в бесконечно близкую точку  $M'$  по какой-нибудь кривой на поверхности (черт. 91).

Пусть  $P$  будет основание перпендикуляра, опущенного из  $M'$  на касательную плоскость. Построим в точке  $M$  единичный вектор  $\mathbf{m}$ , направленный по нормали к поверхности (в произвольно выбранную сторону). Очевидно, что тогда вектор  $\overline{PM'}$  параллелен  $\mathbf{m}$ , так что можно записать

$$\overline{PM'} = l\mathbf{m},$$

где  $l$  — численный коэффициент, положительный, если уклонение  $\overline{PM'}$  от касательной плоскости направлено в сторону  $\mathbf{m}$ , и отрицательный — если оно направлено в обратную сторону. Кроме того, так как  $\mathbf{m}$  — вектор единичный, то  $l$  по модулю равен как раз уклонению  $PM'$ . Мы будем коротко называть  $l$  уклонением и постараемся его вычислить.

Так как, очевидно,

$$\overline{MM'} = \overline{MP} + \overline{PM'} = \overline{MP} + l\mathbf{m},$$

то равенство (356) можно переписать в виде

$$\overline{MP} + l\mathbf{m} = \dot{\mathbf{r}} \Delta s + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{r}} (\Delta s)^2 + \dots$$

Теперь нетрудно вычислить  $l$ , умножая скалярно обе части равенства на  $\mathbf{m}$ . Так как  $\mathbf{m}$  перпендикулярен к касательной плоскости с лежащими в ней векторами  $\overline{MP}$  и  $\dot{\mathbf{r}} \Delta s$ , то первые слагаемые в левой и в правой частях обращаются в нуль. Кроме того, вектор  $\mathbf{m}$  — единичный, так что  $\mathbf{m}^2 = 1$ . В итоге получим

$$l = \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{r}} \mathbf{m} (\Delta s)^2 + \dots \quad (356')$$

Мы вычислили уклонение  $l$  от касательной плоскости при смещении из точки касания  $M$ ; оно будет бесконечно малым 2-го порядка. Главная часть его выписана, точками же обозначены бесконечно малые более высокого порядка. Главной частью уклонения  $l$  мы сейчас и займемся.

Скалярное произведение  $\ddot{\mathbf{r}} \mathbf{m}$  можно представить в двух видах. Во-первых, дифференцируя формулу (355) по  $s$ , получим

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_u \dot{u} + \mathbf{r}_v \dot{v}.$$

Дифференцируем по  $s$  еще раз, учитывая, что

$$\mathbf{r}_u = \mathbf{r}_u(u(s), v(s)), \quad \mathbf{r}_v = \mathbf{r}_v(u(s), v(s)).$$

Получим

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_{uu} \dot{u}^2 + \mathbf{r}_{uv} \dot{u}\dot{v} + \mathbf{r}_u \ddot{u} + \mathbf{r}_{vv} \dot{v}^2 + \mathbf{r}_{vu} \dot{v}\dot{u} + \mathbf{r}_{vv} \dot{v}^2 + \mathbf{r}_v \ddot{v}. \quad (357)$$

Через  $\mathbf{r}_{uu}$ ,  $\mathbf{r}_{uv}$  —  $\mathbf{r}_{vu}$ ,  $\mathbf{r}_{vv}$  обозначены вторые частные производные.

Умножая (357) скалярно на  $\mathbf{m}$  и учитывая, что  $\mathbf{r}_u$ ,  $\mathbf{r}_v$  лежат в касательной плоскости и, следовательно, перпендикуляры к  $\mathbf{m}$ , получим

$$\ddot{\mathbf{r}} \mathbf{m} = \mathbf{r}_{uu} \dot{u}^2 + 2\mathbf{r}_{uv} \dot{u} \dot{v} + \mathbf{r}_{vv} \dot{v}^2. \quad (358)$$

Введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_{uu} \mathbf{m} &= L(u, v), \\ \mathbf{r}_{uv} \mathbf{m} &= M(u, v), \\ \mathbf{r}_{vv} \mathbf{m} &= N(u, v). \end{aligned} \right\} \quad (359)$$

Значения  $L$ ,  $M$ ,  $N$  зависят от выбора точки  $(u, v)$  на поверхности, касательная плоскость в которой сейчас рассматривается. Так как направление  $\mathbf{m}$  может быть изменено на обратное, то  $L$ ,  $M$ ,  $N$  являются не вполне определенными в том смысле, что знаки у них можно изменить одновременно на обратные. Обычно мы будем предполагать, что вектор  $\mathbf{m}$  выбран в каждой точке поверхности по формуле

$$\mathbf{m} = \frac{[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{\sqrt{EG - F^2}}. \quad (360)$$

Действительно, вектор в числителе направлен по нормали к поверхности, а так как в знаменателе стоит его модуль [см. (347)], то получается единичный вектор по нормали. При данном выборе криволинейных координат  $u$ ,  $v$  вектор  $\mathbf{m}$ , а следовательно, и  $L$ ,  $M$ ,  $N$  будут являться вполне определенными функциями от  $u$ ,  $v$ .

Вставляя выражение (360) для  $\mathbf{m}$  в формулы (359), мы получим выражения для  $L$ ,  $M$ ,  $N$  в виде

$$\left. \begin{aligned} L(u, v) &= \frac{\mathbf{r}_{uu} \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ M(u, v) &= \frac{\mathbf{r}_{uv} \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ N(u, v) &= \frac{\mathbf{r}_{vv} \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (361)$$

В чисителях здесь стоят смешанные произведения соответствующих векторов.

Переписывая теперь (358) в сокращенных обозначениях

$$\ddot{\mathbf{r}} \mathbf{m} = L \dot{u}^2 + 2M \dot{u} \dot{v} + N \dot{v}^2 \quad (362)$$

и умножая обе части на  $\frac{1}{2}(\Delta s)^2$ , получим

$$\frac{1}{2} \ddot{\mathbf{r}} \mathbf{m} (\Delta s)^2 = \frac{1}{2} (L d\dot{u}^2 + 2M d\dot{u} d\dot{v} + N d\dot{v}^2),$$

так как  $\dot{u} \Delta s = du$ ,  $\dot{v} \Delta s = dv$ ,

Теперь (356') можно переписать в виде

$$l = \frac{1}{2} (L du^2 + 2M du dv + N dv^2) + \dots$$

Таким образом, главная часть уклона от касательной плоскости при смещении по поверхности из точки касания  $M$  в бесконечно близкую точку  $M'$  выражается половиной квадратичной формы

$$L du^2 + 2M du dv + N dv^2.$$

Эта форма называется второй основной квадратичной формой на поверхности. Как и первая, она является квадратичной формой по отношению к дифференциалам координат, отвечающим смещению из  $M$  в  $M'$ , причем коэффициенты ее суть функции координат  $u, v$  точки  $M$ .

Коэффициенты второй квадратичной формы можно выразить и несколько иначе. Воспользуемся тем, что вектор  $m$ , направленный по нормали к поверхности, ортогонален к касательным векторам  $r_u, r_v$  и образует с ними скалярные произведения, всегда равные нулю:

$$mr_u = 0, \quad mr_v = 0.$$

Дифференцируем каждое из этих тождеств по каждому из аргументов  $u$  и  $v$  поочередно:

$$\begin{aligned} m_u r_u + m_r u = 0, \quad m_u r_v + m_r v = 0, \\ m_v r_u + m_r u = 0, \quad m_v r_v + m_r v = 0. \end{aligned}$$

Сравнивая с формулами (359), получаем

$$\left. \begin{aligned} L &= r_{uu} m = -m_u r_u, \\ M &= r_{uv} m = -m_v r_u = -m_u r_v, \\ N &= r_{vv} m = -m_v r_v. \end{aligned} \right\} \quad (363)$$

Далее, согласно (337),

$$dr = r_u du + r_v dv$$

и аналогично

$$dm = m_u du + m_v dv.$$

Перемножая скалярно  $dr$  на  $dm$ , получим

$$dr dm = r_u m_u du^2 + (r_u m_v + r_v m_u) du dv + r_v m_v dv^2.$$

Пользуясь формулами (363), можно переписать это равенство в виде

$$dr dm = -L du^2 - 2M du dv - N dv^2.$$

Отсюда получаем такую краткую запись второй основной квадратичной формы:

$$L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = -dr dm. \quad (363')$$

Дифференциалы  $du, dv, dr, dm$  берутся в этой формуле при одном и том же (произвольном) бесконечно малом смещении из данной точки поверхности.

### § 49. Основная формула для кривизны кривой на поверхности.

Воспользуемся теперь другим видом записи скалярного произведения  $\vec{r} \cdot \vec{m}$ . Для этого вспомним, что вдоль всякой кривой  $\vec{r} = t$  и, следовательно, по первой формуле Френе

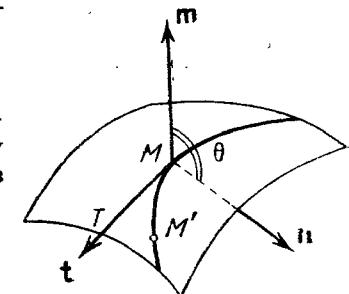
$$\ddot{r} = kn,$$

где  $k$  — кривизна, а  $n$  — единичный вектор по главной нормали. Применяя эту формулу к кривой смещения  $MM'$  в точке  $M$ , мы можем написать

$$\ddot{r} \cdot \vec{m} = knm$$

или

$$\ddot{r} \cdot \vec{m} = k \cos \theta, \quad (364)$$



Черт. 92.

где  $\theta$  — угол между единичными векторами  $m$  и  $n$ , т. е. угол между положительными направлениями главной нормали к кривой  $MM'$  и нормали к поверхности в точке  $M$  (черт. 92).

Сравнивая (364) с (362), получим

$$k \cos \theta = L \left( \frac{du}{ds} \right)^2 + 2M \frac{du}{ds} \cdot \frac{dv}{ds} + N \left( \frac{dv}{ds} \right)^2.$$

Мы пишем здесь  $\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}$  вместо  $u, v$ .

Приводя правую часть к общему знаменателю  $ds^2$  и заменяя его первой квадратичной формой (343), получим

$$k \cos \theta = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}. \quad (365)$$

Это и есть основная формула, геометрический смысл которой мы должны уяснить себе. Если точка  $M$  на поверхности задана, то коэффициенты  $E, F, G, L, M, N$  имеют вполне определенные значения, так что их можно считать постоянными. В таком случае правая часть формулы зависит только от отношения дифференциалов  $dv : du$ , в чем легко убедиться, делая числитель

и знаменатель на  $du^2$  или на  $dv^2$ . Но отношение  $dv : du$  характеризуется направлением касательной к кривой смещения  $MM'$  в точке  $M$  (см. § 46). Поэтому правая часть (365) зависит только от направления касательной  $MT$  к кривой  $MM'$  и имеет одно и то же значение для всех кривых  $MM'$  на поверхности, имеющих в данной точке  $M$  общую касательную.

Пусть касательная  $MT$  к кривой  $MM'$  задана; тогда правая часть (365) вполне определится. Мы рассмотрим лишь случай, когда она отлична от нуля и когда, следовательно, и в левой части  $k > 0$ ,  $\cos \theta \neq 0$ , т. е.  $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ .

Соприкасающаяся плоскость к кривой  $MM'$  в точке  $M$  остается еще при этом неопределенной; точнее, разные кривые  $MM'$  с общей касательной  $MT$  в точке  $M$  могут обладать различными соприкасающимися плоскостями, образующими пучок плоскостей, проходящих через  $MT$ .

Если соприкасающаяся плоскость к  $MM'$  в точке  $M$  также указана, то в ней определяется и главная нормаль как перпендикуляр к  $MT$  в точке  $M$ . Следовательно, определяется и угол  $\theta$  между главной нормалью в положительном направлении  $n$  и нормалью к поверхности  $m$ <sup>1)</sup>. Но в формулу (365) входит еще кривизна  $k$ , которая, как мы видим, теперь определяется однозначно, после деления на  $\cos \theta$  обеих частей формулы.

Таким образом, задание касательной  $MT$  и соприкасающейся плоскости кривой  $MM'$  в точке  $M$  вполне определяет ее кривизну  $k$ . Отсюда все кривые на поверхности, имеющие в данной точке общую касательную и общую соприкасающуюся плоскость (при  $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ ), имеют в этой точке и общую кривизну.

Итак, роль формулы (365) заключается в том, что для всевозможных кривых, проведенных по поверхности через данную точку  $M$ , устанавливается определенная зависимость между направлением касательной, положением соприкасающейся плоскости и кривизной в точке  $M$ .

### § 50. Теорема Менье.

Мы видели, что формула (365) устанавливает зависимость кривизны кривой на поверхности от положения касательной и соприкасающейся плоскости к этой кривой в данной точке. Изучим прежде всего зависимость кривизны от положения соприкасающейся плоскости при заданной касательной.

<sup>1)</sup> Так как  $k > 0$ , то из (365) определяется знак  $\cos \theta$ , а, следовательно, из двух смежных углов, образуемых главной нормалью к кривой и нормалью к поверхности, мы выбираем один вполне определенный.

Итак, в данной точке  $M$  на поверхности рассматриваются всевозможные проходящие через нее по поверхности кривые с общей касательной  $MT$ , заданной, разумеется, в касательной плоскости к поверхности.

Пусть  $\Gamma$  — одна какая-нибудь из этих кривых,  $n$  — ее единичный вектор по главной нормали,  $C$  — центр кривизны (черт. 93).

Среди всевозможных кривых с касательной  $MT$  можно выбрать одну, наиболее непосредственно связанную с самой поверхностью.

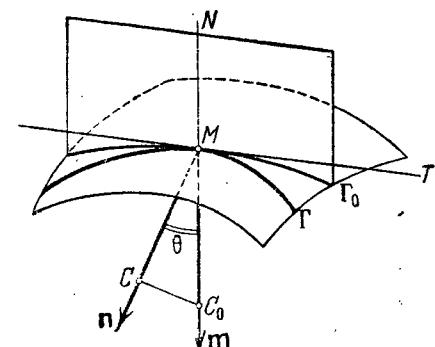
Мы будем называть *нормальным сечением* поверхности в точке  $M$  кривую пересечения поверхности с нормальной плоскостью в точке  $M$ , т. е. с плоскостью, проведенной через нормаль в точке  $M$ . Таких плоскостей в каждой точке  $M$  бесчисленное множество, соответственно чему мы получаем и бесчисленное множество нормальных сечений.

Но всегда можно построить нормальное сечение с заданной касательной  $MT$ . Действительно, проведем нормальную плоскость  $TMN$  через  $MT$  и нормаль к поверхности  $MN$  и возьмем ее пересечение с поверхностью. Получим нормальное сечение  $\Gamma_0$ ; его касательная должна лежать, во-первых, в его плоскости  $TMN$  ( $\Gamma_0$  — плоская кривая) и, во-вторых, в касательной плоскости к поверхности, как и для всякой кривой, проведенной на поверхности. Но  $TM$  есть как раз прямая, лежащая в обеих этих плоскостях и совпадающая, таким образом, с касательной к  $\Gamma_0$ .

Итак, нормальное сечение  $\Gamma_0$  с заданной касательной  $MT$  всегда можно построить и, очевидно, единственным образом.

В случае, когда кривизна  $k_0$  нормального сечения  $\Gamma_0$  в точке  $M$  равна нулю, направление его касательной  $MT$  называется *асимптотическим направлением* в точке  $M$ .

Случай асимптотического направления  $MT$  мы устраним из рассмотрения. Этим мы мало теряем в общности, так как в данной точке поверхности, как мы скоро увидим, имеется не более двух асимптотических направлений (если не считать исключительного случая, когда в данной точке



Черт. 93.

$$L = M = N = 0,$$

и любое касательное направление является асимптотическим).

Итак, мы будем считать, что в точке  $M$  кривизна  $k_0$  нормального сечения  $\Gamma_0$  отлична от нуля

$$k_0 > 0.$$

Это предположение нужно нам потому, что мы хотим рассматривать центр кривизны нормального сечения  $\Gamma_0$ ; в случае же  $k_0 = 0$  центр кривизны уходит в бесконечность.

Так как соприкасающаяся плоскость плоской кривой  $\Gamma_0$  совпадает просто с ее плоскостью  $TMN$ , то главной нормалью к  $\Gamma_0$  будет служить перпендикуляр к  $MT$  в плоскости  $TMN$ , т. е. нормаль  $MN$  к поверхности. Обозначим через  $C_0$  центр кривизны кривой  $\Gamma_0$ , лежащий, таким образом, на нормали  $MN$ . Единичный вектор  $m$  по нормали  $MN$  направим для удобства в сторону  $C_0$ , т. е. в положительную сторону главной нормали  $\Gamma_0$ , так что

$$m = n_0, \quad (366)$$

где  $n_0$  — единичный вектор по главной нормали кривой  $\Gamma_0$ .

Применим теперь формулу (365), во-первых, к кривой  $\Gamma$ , во-вторых, к  $\Gamma_0$ , нормальному сечению с той же касательной  $MT$ ; получим

$$\left. \begin{aligned} k \cos \theta &= \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \\ k_0 &= \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}. \end{aligned} \right\} \quad (367)$$

Здесь через  $k_0$  обозначена кривизна рассматриваемого нормального сечения в точке  $M$ . Множитель  $\cos \theta$  исчез во второй формуле потому, что для кривой  $\Gamma_0$  угол  $\theta$  между  $m$  и  $n_0$  равен нулю, и значит, косинус его равен единице.

Мы замечаем, что правые части формул (367) равны между собой. Действительно, коэффициенты  $E, F, G, L, M, N$  одинаковы, потому что относятся к одной и той же точке  $M$ , а отношения  $dv, du$  одинаковы в обоих случаях потому, что характеризуют направление касательной  $MT$ , общей для  $\Gamma$  и  $\Gamma_0$ .

Приравнивая левые части, получаем

$$k \cos \theta = k_0. \quad (368)$$

Отсюда видно, между прочим, что угол  $\theta$  — острый (черт. 93), так как  $k_0 > 0, k > 0$ , следовательно,  $\cos \theta > 0$ . Формулу (368) можно переписать в виде

$$R = R_0 \cos \theta, \quad (369)$$

где  $R$  и  $R_0$  суть радиусы кривизны соответственно  $\Gamma$  и  $\Gamma_0$ ,

$$R = \frac{1}{k}, \quad R_0 = \frac{1}{k_0}.$$

Очевидно, что, так как нормали  $m$  и  $n$  обе перпендикулярны к касательной  $MT$ , то  $\theta$ , равный  $\widehat{mn}$ , измеряет двугранный угол между плоскостями  $TMC_0$  и  $TMC$ .

Итак, радиус кривизны произвольной кривой  $\Gamma$  на поверхности равен в данной точке радиусу кривизны нормального сечения  $\Gamma_0$ , взятого в той же точке и с той же касательной, умноженному на косинус угла  $\theta$  между соприкасающейся плоскостью к  $\Gamma$  и плоскостью нормального сечения  $\Gamma_0$ . В этом и заключается в сущности теорема Менье. Но ей можно придать очень наглядную геометрическую формулировку, к которой мы сейчас и переходим.

Построим треугольник  $MCC_0$  (черт. 93). Так как  $C$  и  $C_0$  суть соответственно центры кривизны, то

$$MC = R, \quad MC_0 = R_0.$$

Формулу (369) можно переписать, следовательно, в виде

$$MC = MC_0 \cdot \cos \theta.$$

Из этого соотношения следует, что треугольник  $MCC_0$  прямоугольный с прямым углом  $\widehat{MC}C_0$ . Следовательно,  $C$  есть основание перпендикуляра, опущенного из  $C_0$  на главную нормаль кривой  $\Gamma$ . Итак,

$$C_0C \perp MC.$$

Кроме того, касательная  $MT$  перпендикулярна к обеим нормалям  $MC$  и  $MC_0$  и, следовательно, перпендикулярна к любой прямой в их плоскости, в частности, к прямой  $C_0C$ . Отсюда вытекает, что  $C_0C$  перпендикулярна к плоскости прямых  $MC$  и  $MT$ , т. е. к соприкасающейся плоскости кривой  $\Gamma$ .

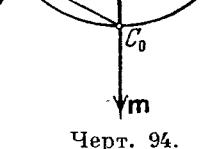
Теорему Менье можно теперь формулировать так: центр кривизны  $C$  для данной точки  $M$  кривой  $\Gamma$  на поверхности можно получить как основание перпендикуляра, опущенного на соприкасающуюся плоскость кривой  $\Gamma$  из центра кривизны нормального сечения  $\Gamma_0$ , взятого в той же точке  $M$  и имеющего общую касательную с  $\Gamma$ .

Чтобы нагляднее представить себе положение вещей, возьмем сечение черт. 93 плоскостью  $CMC_0$  (черт. 94), перпендикулярной к касательной  $MT$ .

Если представить себе, что соприкасающаяся плоскость  $TMC$  вращается около неизменной касательной  $MT$ , удаляясь от соответствующей нормальной плоскости  $TMN$ , то вектор  $n$  поворачивается в плоскости черт. 94, а так как угол  $\widehat{MC}C_0$  остается прямым, то центр кривизны  $C$  описывает окружность, построенную на  $MC_0$ , как на диаметре. Когда угол  $\theta$  стремится к  $\frac{\pi}{2}$  и, следовательно, соприкасающаяся плоскость

$TMC$  стремится совпасть с касательной плоскостью к поверхности, радиус кривизны  $MC$  стремится к нулю, и кривизна бесконечно возрастает (напоминаем, что случай асимптотического направления  $MT$  исключен из рассмотрения).

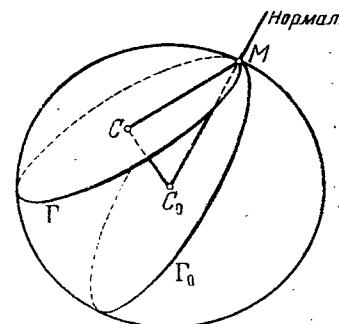
Интересно отметить частный случай, когда кривая  $\Gamma$  есть сечение некоторой плоскостью, но уже не обязательно нормальной. Тогда эта плоскость, содержащая в себе  $\Gamma$ , служит для  $\Gamma$  и соприкасающейся плоскостью. В этом случае черт. 93 нужно представить себе так, что кривая  $\Gamma$  лежит в своей соприкасающейся плоскости  $TMC$  и получена ее пересечением с поверхностью. Вращая плоскость  $TMC$  около неизменной касательной  $MT$  и беря в качестве кривых  $\Gamma$  сечения поверхности этой плоскостью, мы наблюдаем изменение радиуса кривизны  $R$  и положения центра кривизны  $C$  сечения  $\Gamma$  по тому же в точности закону, что и в общем случае.



Примеры.

1. Если рассматривается поверхность сферы, то теорема Мене в применении к плоским сечениям приобретает элементарный характер. Действительно, касательная плоскость к сфере всегда перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания, и, следовательно, этот радиус служит нормалью. Таким образом, все нормали к сфере проходят через ее центр, а следовательно, и всякая нормальная плоскость во всякой точке сферы проходит через центр. Отсюда следует, что все нормальные сечения  $\Gamma_0$  суть окружности больших кругов сферы, и центр кривизны  $C_0$  любого нормального сечения  $\Gamma_0$  совпадает с центром сферы. Если взять, с другой стороны, в качестве кривой  $\Gamma$  любое плоское сечение сферы, то получается окружность и, следовательно, центр кривизны  $C$  кривой  $\Gamma$  есть центр этой окружности (черт. 95). Если теперь из центра кривизны  $C_0$ , т. е. из центра сферы, опустить перпендикуляр на плоскость окружности  $\Gamma$ , то мы попадаем, в силу элементарной теоремы, в центр окружности  $\Gamma$ , или, что то же, в ее центр кривизны  $C$ .

2. Рассмотрим нормальное сечение поверхности вращения (см. ниже черт. 124) в точке  $M$ , имеющее касательную, общую с параллелью (т. е. плоскость сечения проходит через нормаль  $MQ$  перпендикулярно к плоскости чертежа). По теореме Мене центр кривизны нормального сечения должен проектироваться в центр кривизны наклонного сечения с той же касатель-



Черт. 95.

ной, в частности в центр  $P$  окружности (параллели). Отсюда вытекает, что центр кривизны нормального сечения должен лежать на оси вращения и, следовательно, совпадать с точкой  $Q$  (точкой пересечения нормали и оси вращения).

### § 51. Линейная вектор-функция на плоскости.

Целью §§ 51, 52 является подготовка некоторого необходимого нам материала из области векторной алгебры (в широком смысле этого слова). Все построения происходят на некоторой фиксированной плоскости.

Пусть на этой плоскости каким-либо образом определен закон, по которому каждому вектору  $u$  отвечает определенный вектор  $w$ :

$$w = A(u). \quad (370)$$

Другими словами, вектор  $w$  есть однозначная вектор-функция переменного вектора  $u$ .

В отличие от предыдущего аргументом вектор-функции является здесь не скалярное, а векторное переменное.

Мы ограничимся рассмотрением только линейных вектор-функций  $A(u)$ . Это значит, что  $A(u)$  должна обладать следующими двумя свойствами:

1°. Для любых двух векторов  $u$  и  $v$  должно соблюдаться равенство

$$A(u+v) = A(u) + A(v),$$

т. е. функция от суммы двух векторов равна сумме функций от каждого слагаемого по отдельности.

2°. Для каждого вектора  $u$  и каждого числа  $\lambda$  должно соблюдаться равенство

$$A(\lambda u) = \lambda A(u),$$

т. е. числовой множитель можно выносить за знак функции.

Линейная вектор-функция может быть задана следующим образом. Пусть  $a_1, a_2$  — два каких-нибудь неколлинеарных вектора и  $b_1, b_2$  — два каких угодно вектора.

Лемма. Существует одна и только одна линейная вектор-функция  $A(u)$ , значения которой равны  $b_1, b_2$  при значениях аргумента  $a_1, a_2$  (где  $a_1 \neq a_2$ ):

$$b_1 = A(a_1), \quad b_2 = A(a_2). \quad (371)$$

Действительно, любой вектор  $u$  может быть разложен по  $a_1, a_2$  с некоторыми численными коэффициентами

$$u = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2. \quad (372)$$

Тогда, предполагая, что искомая функция  $A(u)$  существует, мы можем ее вычислить, используя свойства 1°, 2°:

$$\begin{aligned} A(u) &= A(\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2) = A(\alpha_1 \mathbf{a}_1) + A(\alpha_2 \mathbf{a}_2) = \\ &= \alpha_1 A(\mathbf{a}_1) + \alpha_2 A(\mathbf{a}_2) = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2. \end{aligned} \quad (373)$$

Итак, функция  $A(u)$  разлагается по  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  с теми же коэффициентами, с какими аргумент  $u$  разлагается по  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ . Это показывает, что искомая функция  $A(u)$  (если она существует) может быть построена только одним именно указанным сейчас способом. Нетрудно, далее, проверить, что функция  $A(u)$ , таким образом построенная, обладает свойствами 1°, 2°, т. е. действительно будет искомой линейной вектор-функцией.

В самом деле, пусть  $u$  и  $v$  — произвольные векторы; запишем их разложения

$$u = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2, \quad v = \beta_1 \mathbf{a}_1 + \beta_2 \mathbf{a}_2. \quad (374)$$

В таком случае

$$u + v = (\alpha_1 + \beta_1) \mathbf{a}_1 + (\alpha_2 + \beta_2) \mathbf{a}_2,$$

а значит, согласно правилу (373),

$$\begin{aligned} A(u + v) &= (\alpha_1 + \beta_1) \mathbf{b}_1 + (\alpha_2 + \beta_2) \mathbf{b}_2 = \\ &= (\alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2) + (\beta_1 \mathbf{b}_1 + \beta_2 \mathbf{b}_2) = A(u) + A(v). \end{aligned}$$

Свойство 1° проверено. Свойство 2° проверяется еще проще: при умножении вектора  $u$  на число  $\lambda$  коэффициенты разложения (372)  $\alpha_1, \alpha_2$  умножаются, очевидно, тоже на  $\lambda$ ; следовательно, на  $\lambda$  умножается и вектор-функция  $A(u)$ , как видно из ее разложения (373). Этим завершается доказательство леммы.

Нас будут интересовать не любые, а симметрические линейные вектор-функции. Мы будем называть линейную вектор-функцию  $A(u)$  симметрической линейной вектор-функцией в том случае, когда для любых двух векторов  $u$  и  $v$  имеет место равенство

$$vA(u) = uA(v), \quad (375)$$

т. е. скалярное произведение одного вектора на функцию второго всегда равно скалярному произведению второго вектора на функцию первого.

Если условие (375) имеет место хотя для одной пары неколлинеарных векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ , то оно справедливо и для любой пары векторов  $u, v$ .

В самом деле, пусть имеет место равенство

$$\mathbf{a}_1 A(\mathbf{a}_2) = \mathbf{a}_2 A(\mathbf{a}_1). \quad (376)$$

Требуется проверить справедливость равенства (375).

Пользуясь разложениями (374), вычислим левую часть (375):

$$\begin{aligned} vA(u) &= (\beta_1 \mathbf{a}_1 + \beta_2 \mathbf{a}_2) A(\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2) = \\ &= (\beta_1 \mathbf{a}_1 + \beta_2 \mathbf{a}_2) [\alpha_1 A(\mathbf{a}_1) + \alpha_2 A(\mathbf{a}_2)] = \\ &= \beta_1 \alpha_1 A(\mathbf{a}_1) + \beta_1 \alpha_2 A(\mathbf{a}_2) + \beta_2 \alpha_1 A(\mathbf{a}_1) + \beta_2 \alpha_2 A(\mathbf{a}_2). \end{aligned} \quad (377)$$

Правая часть (375) получается из левой перестановкой векторов  $v$  и  $u$  между собой. Очевидно, это равносильно замене коэффициентов  $\alpha$  на  $\beta$ , и наоборот; в результате первый и четвертый члены разложения (377) не меняются, а второй и третий меняются лишь местами, как нетрудно заметить, используя равенство (376). Итак,  $vA(u)$  и  $uA(v)$  имеют по существу одно и то же разложение (377), откуда и вытекает равенство (375).

### § 52. Собственные направления и собственные значения.

Вектор  $e \neq 0$  называется *собственным вектором линейной вектор-функции  $A(u)$* , если значение  $A(e)$  коллинеарно самому  $e$ . Это можно записать в виде

$$A(e) = \lambda e, \quad (378)$$

где численный коэффициент  $\lambda$  называется *собственным значением линейной вектор-функции  $A(u)$* .

Если  $e$  есть собственный вектор, то любой коллинеарный ему вектор  $\alpha e$  (где  $\alpha$  — любое число) тоже будет собственным вектором и притом с тем же самым собственным значением. Действительно,

$$A(\alpha e) = \alpha A(e) = \alpha \lambda e = \lambda \alpha e.$$

Другими словами, если заменить  $e$  на  $\alpha e$ , то условие (378) продолжает соблюдаться.

Таким образом, все векторы, идущие в том же направлении, что и вектор  $e$  (т. е. векторы  $\alpha e$  при  $\alpha > 0$ ), и все векторы, идущие в обратном направлении (т. е. векторы  $\alpha e$  при  $\alpha < 0$ ), также будут собственными векторами с тем же собственным значением  $\lambda$ .

Естественно поэтому вместо отдельного собственного вектора  $e$  рассматривать пару взаимно обратных направлений, все векторы которых будут собственными с общим собственным значением  $\lambda$ . Такую пару взаимно обратных направлений мы будем называть *собственным направлением линейной вектор-функции  $A(u)$* .

Собственные направления для произвольной линейной вектор-функции  $A(u)$  не всегда существуют. Так, например, если  $A(u)$  означает поворот  $u$  на постоянный угол (отличный от  $0$  и  $\pi$ ), то собственных направлений, очевидно, нет, так как равенство (378) никогда не выполняется.

Однако для симметрической линейной вектор-функции  $A(u)$  собственные направления всегда существуют, а именно, всегда

можно найти два взаимно ортогональных собственных направления. Это мы сейчас и покажем.

Введем на рассматриваемой плоскости прямоугольные координаты  $x, y$ . Разложим значения нашей функции  $A(u)$  для ортов  $i$  и  $j$  по самим этим ортам:

$$\begin{aligned} A(i) &= a_{11}i + a_{12}j, \\ A(j) &= a_{21}i + a_{22}j. \end{aligned} \quad (379)$$

Коэффициенты разложений могут быть различными в зависимости от выбора функции  $A(u)$ .

Умножая скалярно первое разложение на  $j$ , а второе — на  $i$ , получим (учитывая, что  $i^2 = j^2 = 1, ij = 0$ )

$$jA(i) = a_{12}, \quad iA(j) = a_{21}.$$

Но, в силу условия симметрии,

$$jA(i) = iA(j),$$

следовательно,

$$a_{12} = a_{21}. \quad (380)$$

Ищем теперь собственные векторы  $e$  нашей вектор-функции  $A(u)$ . Пусть  $e$  задан своим разложением по ортам

$$e = xi + yj. \quad (381)$$

Тогда

$$A(e) = A(xi + yj) = xA(i) + yA(j).$$

Пользуясь разложениями (379), получим

$$A(e) = (a_{11}x + a_{21}y)i + (a_{12}x + a_{22}y)j. \quad (382)$$

По определению собственного вектора

$$A(e) = \lambda e, \quad (383)$$

где собственное значение  $\lambda$ , как и собственный вектор  $e$ , является неизвестным.

Итак, мы должны потребовать, чтобы разложение (382) отличалось от (381) лишь некоторым численным множителем  $\lambda$ , т. е.

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{21}y &= \lambda x, \\ a_{12}x + a_{22}y &= \lambda y. \end{aligned}$$

Мы получили два уравнения с тремя неизвестными  $x, y, \lambda$ . При этом относительно  $x, y$  уравнения однородные, так что фактически нам придется определять не  $x, y$ , а их отношение  $y : x$  (т. е. собственный вектор, а собственное направление); неизвестных

## § 52] СОБСТВЕННЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ 249

по существу будет лишь два,  $\lambda$  и  $y : x$ . Перепишем наши уравнения в виде

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x + a_{12}y &= 0, \\ a_{12}x + (a_{22} - \lambda)y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (384)$$

Для того чтобы такая система была *совместной относительно*  $x, y$  (не считая тривиального решения  $x = y = 0$ , которое не дает собственного вектора), необходимо и достаточно обратить в нуль определитель системы

$$\left| \begin{array}{cc} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{array} \right| = 0, \quad (385)$$

т. е.

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0.$$

Мы получили квадратное уравнение, которому необходимо должны удовлетворять искомые собственные значения  $\lambda$ . Число их не может быть, следовательно, больше двух. Раскрывая определитель, мы приняли во внимание, что  $a_{12} = a_{21}$ , и это единственный, но зато очень важный пункт наших выкладок, где используется условие симметрии (380).

В силу него мы можем утверждать, что квадратное уравнение (385) будет иметь *обязательно вещественные корни*. Действительно,

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_{11} + a_{22})^2}{4} - a_{11}a_{22} + a_{12}^2} = \\ &= \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_{11} - a_{22})^2}{4} + a_{12}^2}. \end{aligned} \quad (386)$$

Как мы видим, подкоренное выражение отрицательным быть не может.

Случай, когда корни  $\lambda_1, \lambda_2$  различны, мы будем называть *основным*, когда  $\lambda_1 = \lambda_2$  — *исключительным*.

Основной случай  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Подставляя  $\lambda = \lambda_1$  в уравнения (384), мы обращаем определитель системы в нуль, так что из одного уравнения будет следовать другое и из единственного оставшегося уравнения можно найти нетривиальное решение  $x_1, y_1$  [в тождества оба уравнения (384) не обратятся, так как в этом случае при подстановке  $\lambda = \lambda_2$  определитель системы оказался бы отличным от нуля].

Решение  $x_1, y_1$  определится, конечно, с точностью до умножения  $x_1, y_1$  одновременно на произвольный множитель  $\alpha$ . Таким образом, корню  $\lambda_1$  будет отвечать вектор

$$e_1 = x_1i + y_1j,$$

заданный с точностью до умножения на произвольное число  $\alpha$ , т. е. по существу определяется не вектор, а направление. Так

как при этом система (384) удовлетворяется [что равносильно (383)], то мы имеем

$$A(\mathbf{e}_1) = \lambda_1 \mathbf{e}_1. \quad (387)$$

Совершенно аналогично для корня  $\lambda_2$  найдем вектор  $\mathbf{e}_2$  такой, что

$$A(\mathbf{e}_2) = \lambda_2 \mathbf{e}_2. \quad (388)$$

Итак, в случае различных корней уравнения (385)  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , каждый из них является собственным значением, отвечающим одному (и только одному) собственному направлению.

Так как других собственных значений быть не может, то и собственных направлений будет ровно два.

Остается показать, что собственные направления взаимно ортогональны. Для этого мы умножим скалярно обе части равенства (387) на  $\mathbf{e}_2$ , а обе части равенства (388) — на  $\mathbf{e}_1$ . Получим

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_2 A(\mathbf{e}_1) &= \lambda_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_1 A(\mathbf{e}_2) &= \lambda_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

Черт. 96.

Левые части равны по условию симметрии (375).

Следовательно, правые части тоже равны, и их разность дает нуль:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = 0.$$

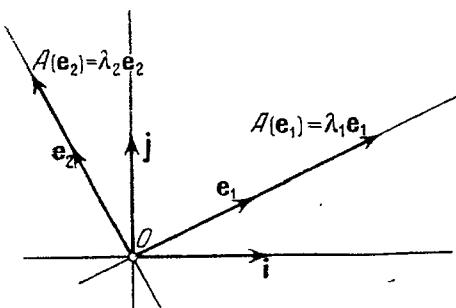
Так как  $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ , то (черт. 96)

$$\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = 0, \quad \mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2. \quad (389)$$

Ортогональность доказана.

Итак, в рассматриваемом случае переход от вектора аргумента  $u$  к вектору  $A(u)$  заключается в том, что плоскость вместе с начертанными на ней всевозможными векторами  $u$  растягивается по двум взаимно перпендикулярным направлениям  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  в отношениях  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Конечно,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  могут иметь и отрицательные значения; тогда растяжение будет происходить с «перепропадыванием» в обратную сторону. Когда  $\lambda_1$  (или  $\lambda_2$ ) имеет значение, по модулю меньшее 1, то «растяжение» в отношении  $\lambda_1$  (или  $\lambda_2$ ) нужно понимать, конечно, как сжатие в соответствующем отношении.

И склонительный случай  $\lambda_1 = \lambda_2$ . В этом случае подкоренное выражение в (386) должно обратиться в нуль, а так



### § 53] ОСНОВНАЯ ВЕКТОР-ФУНКЦИЯ И ГЛАВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ 251

как это есть сумма квадратов, то

$$\lambda_{11} - \lambda_{22} = 0, \quad \lambda_{12} = 0. \quad (390)$$

Обозначим

$$\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda. \quad (391)$$

Согласно (386) получим теперь

$$\lambda = \lambda.$$

Уравнения (384) при  $\lambda = \lambda$  обращаются, как видно из (390), (391), в тождества, т. е. удовлетворяются при любых  $x, y$ . Это значит, что любой вектор будет являться собственным вектором с собственным значением  $\lambda = \lambda$ .

Мы можем, следовательно, записать

$$A(u) = \lambda u \quad (392)$$

при любом векторе  $u$ . Вектор-функция  $A(u)$  получается простым умножением аргумента  $u$  на постоянное число  $\lambda$ . Плоскость с начертанными на ней векторами  $u$  подвергается при этом преобразованию подобия. Любое направление будет являться собственным направлением.

Можно найти, конечно, и два взаимно ортогональных собственных направления — таковыми будут любые два ортогональных направления.

### § 53. Основная вектор-функция и главные направления.

Возвращаемся к изучению поверхности

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$$

вблизи какой-нибудь ее точки  $M$  (при обычном предположении  $\mathbf{r}_u \neq \mathbf{r}_v$ ). Нормальный к поверхности единичный вектор  $\mathbf{m}$  также является функцией криволинейных координат:

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}(u, v).$$

При бесконечно малом смещении из данной точки  $M$  по поверхности оба вектора получают приращения, главные части которых выражаются дифференциалами:

$$\left. \begin{aligned} d\mathbf{r} &= \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv, \\ d\mathbf{m} &= \mathbf{m}_u du + \mathbf{m}_v dv \end{aligned} \right\} \quad (393)$$

[точный смысл  $du, dv$  — см. § 46 (337')].

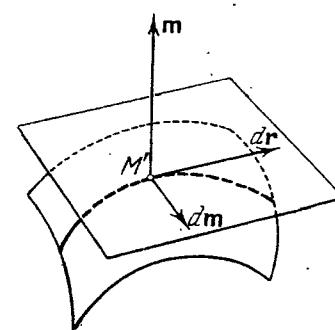
Оба дифференциала  $d\mathbf{r}, d\mathbf{m}$  лежат в касательной плоскости в точке  $M'$  (черт. 97), потому что  $d\mathbf{r}$  — касательный вектор к линии смещения, а  $d\mathbf{m}$  — дифференциал единичного вектора  $\mathbf{m}$  и, следовательно, ортогонален к вектору  $\mathbf{m}$ .

Так как из данной точки  $M$  можно смещаться по разным направлениям на поверхности, то  $d\mathbf{r}$  и  $d\mathbf{m}$  будут различными в зависимости от направления и величины смещения. Однако при этих изменениях векторов  $d\mathbf{r}$  и  $d\mathbf{m}$  вектор  $d\mathbf{m}$  все время выражается через  $d\mathbf{r}$  некоторой вполне определенной линейной вектор-функцией, заданной в касательной плоскости в точке  $M$ :

$$d\mathbf{m} = A(d\mathbf{r}). \quad (394)$$

В самом деле, согласно § 51, в плоскости всегда можно построить линейную вектор-функцию, которая наперед заданную пару неколлинеарных векторов переводит в наперед заданную пару других векторов. При этом такая функция будет единственной. Пользуясь этим результатом, построим в касательной плоскости линейную вектор-функцию  $A(\mathbf{u})$  так, чтобы она переводила неколлинеарные векторы  $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ , соответственно в векторы  $\mathbf{m}_u, \mathbf{m}_v$ :

$$A(\mathbf{r}_u) = \mathbf{m}_u, \quad A(\mathbf{r}_v) = \mathbf{m}_v. \quad (395)$$



Черт. 97.

Таким образом, для каждой точки  $M$  на поверхности в касательной плоскости строится вполне определенная линейная вектор-функция  $A(\mathbf{u})$ , обладающая свойством

$$d\mathbf{m} = A(d\mathbf{r}).$$

Эту вектор-функцию мы будем называть основной вектор-функцией в данной точке  $M$  на поверхности.

Нетрудно заметить, что основная вектор-функция будет симметрической. Действительно, согласно § 51, для этого достаточно соблюдение условия (376)

$$\mathbf{a}_1 A(\mathbf{a}_2) = \mathbf{a}_2 A(\mathbf{a}_1) \quad (396)$$

хотя для одной пары неколлинеарных векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ . В нашем случае возьмем в качестве векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  неколлинеарные векторы  $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ ; тогда  $A(\mathbf{a}_1), A(\mathbf{a}_2)$ , согласно (395), совпадут с  $\mathbf{m}_u, \mathbf{m}_v$ , и условие (396) примет вид

$$\mathbf{r}_u \mathbf{m}_v = \mathbf{r}_v \mathbf{m}_u.$$

Но это условие действительно соблюдается, как мы видели уже раньше [вторая из формул (363) § 48]. Итак, основная вектор-функция  $A(d\mathbf{r})$  — обязательно симметрическая.

## § 54] ИССЛЕДОВАНИЕ КРИВИЗНЫ НОРМАЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ 253

В таком случае в касательной плоскости в точке  $M$  всегда можно найти два взаимно ортогональных собственных направления вектор-функции  $A(\mathbf{u})$  с соответствующими собственными значениями  $\lambda_1, \lambda_2$  (§ 52).

Собственные направления основной вектор-функции  $A(\mathbf{u})$  в каждой данной точке поверхности называются главными направлениями на поверхности в этой точке.

Собственные направления определяются условием коллинеарности  $A(\mathbf{u})$  и  $\mathbf{u}$ :

$$A(\mathbf{u}) \parallel \mathbf{u}.$$

Поэтому главные направления в данной точке поверхности можно определить условием

$$d\mathbf{m} \parallel d\mathbf{r},$$

так как, согласно (394),  $A(d\mathbf{r})$  совпадает с  $d\mathbf{m}$ .

Как следует из результатов § 52, в основном случае ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ) в данной точке существует ровно два (касательных к поверхности и ортогональных между собой) главных направления; в исключительном же случае ( $\lambda_1 = \lambda_2$ ) любое касательное к поверхности направление является главным.

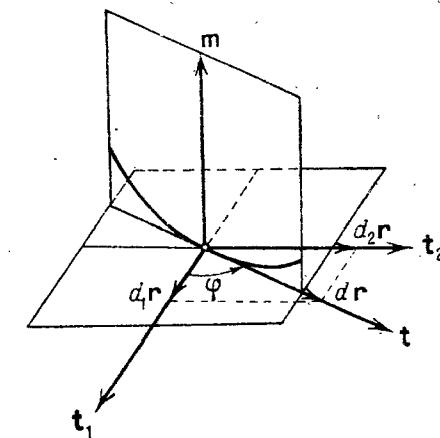
Главные направления обладают важными геометрическими свойствами, которые выясняются в следующем параграфе.

Построим в касательной плоскости единичные векторы  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ , идущие по взаимно ортогональным главным направлениям (черт. 98). Так как  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$  — собственные векторы основной вектор-функции  $A(\mathbf{u})$ , то можно записать

$$A(\mathbf{t}_1) = \lambda_1 \mathbf{t}_1, \quad A(\mathbf{t}_2) = \lambda_2 \mathbf{t}_2. \quad (397)$$

## § 54. Исследование кривизны нормальных сечений.

Согласно теореме Менье, кривизна произвольной кривой на поверхности в данной точке весьма просто и наглядно выражается через кривизну нормального сечения с той же касательной в данной точке. Теперь нам остается изучить, как будет меняться кривизна нормального сечения в данной точке  $M$  в зависимости от его направления (мы знаем, что по каждому касательному к поверхности направлению в данной ее точке проходит одно и только одно нормальное сечение, § 50).



Черт. 98.

Главная нормаль к нормальному сечению совпадает с нормалью к поверхности (§ 50), так что единичный вектор главной нормали  $n_0$  коллинеарен с единичным вектором  $m$ :

$$n_0 = \pm m. \quad (398)$$

Сейчас мы не можем оставить здесь только знак + (как мы это делали в § 50), потому что мы будем рассматривать *всевозможные* нормальные сечения в данной точке, и может оказаться, что векторы  $n_0$  будут в различных случаях направлены в противоположные стороны; а тогда нельзя выбрать вектор  $m$  совпадающим со всеми этими векторами.

Вследствие (398) угол  $\theta = mn_0$  принимает значения 0 или  $\pi$ , следовательно,

$$\cos \theta = \pm 1. \quad (399)$$

Условимся приписывать кривизне нормального сечения знак +, если  $n_0 = m$ , и знак —, если  $n_0 = -m$ . Кривизну нормального сечения, снабженную знаком, будем обозначать  $\tilde{k}$ .

Так как нормальное сечение, как и всякая плоская кривая, уклоняется от своей касательной в положительную сторону главной нормали, в данном случае в сторону вектора  $n_0$ , то знак кривизны  $\tilde{k}$  имеет следующий геометрический смысл.

Если  $\tilde{k} > 0$ , т. е.  $n_0 = m$ , то нормальное сечение уклоняется от своей касательной в сторону вектора  $m$ ; если  $\tilde{k} < 0$ , т. е.  $n_0 = -m$ , то в сторону вектора  $-m$ .

Применим теперь к нормальному сечению основную формулу (365):

$$k \cos \theta = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}.$$

Здесь  $k$  — кривизна нормального сечения в обычном смысле, т. е. величина положительная, а  $\cos \theta$ , согласно (399), равен 1 в случае  $n_0 = m$  и  $-1$  в случае  $n_0 = -m$ . Следовательно,  $k \cos \theta$  в первом случае равно  $k$ , а во втором случае равно  $-k$ , т. е. в обоих случаях совпадает с  $\tilde{k}$ . Итак, окончательно

$$\tilde{k} = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}. \quad (400)$$

Эта формула выражает кривизну нормального сечения в зависимости от точки на поверхности, где это сечение построено, и от направления его касательной (от точки зависят значения  $E, F, G, L, M, N$ , а от направления касательной зависит отношение  $dv : du$ ). Мы исследуем формулу (400), считая, что точка на поверхности остается неподвижной, а касательная нормального сечения вра-

щается в касательной плоскости поверхности. Пусть  $t$  будет единичный касательный вектор нормального сечения в данной точке,  $t_1$  и  $t_2$  — единичные взаимно ортогональные векторы по главным направлениям (см. черт. 98). Обозначим через  $\varphi$  угол поворота от  $t_1$  до  $t$  (положительным направлением вращения считаем направление от  $t_1$  к  $t_2$ ). Тогда каждому значению  $\varphi$  отвечает определенный касательный вектор  $t$ , а значит, и определенное нормальное сечение, кривизна которого  $\tilde{k}$  будет, таким образом, некоторой функцией  $\varphi$ :

$$\tilde{k} = \tilde{k}(\varphi). \quad (401)$$

Мы должны установить вид этой функции и исследовать ее.

Запишем прежде всего в формуле (400) вторую квадратичную форму в виде  $-dr dm$  [согласно (363')], а первую квадратичную форму — в виде  $ds^2$ . Получим

$$\tilde{k} = -\frac{dr dm}{ds^2} = -\frac{dr}{ds} \cdot \frac{dm}{ds}. \quad (402)$$

Как мы знаем (§ 53),

$$dm = A(dr),$$

где  $A(u)$  — основная линейная вектор-функция в данной точке. Разделим обе части этого равенства на  $ds$ , причем в правой части деление можно произвести под знаком функции  $A(dr)$  (в силу ее линейности). Получим

$$\frac{dm}{ds} = A\left(\frac{dr}{ds}\right). \quad (403)$$

Для всякой кривой, в том числе и для нашего нормального сечения,

$$\frac{dr}{ds} = t,$$

где  $t$  — единичный касательный вектор (черт. 98). Очевидно, проекции  $t$  на  $t_1$  и  $t_2$  равны  $\cos \varphi$  и  $\sin \varphi$ , так что можно написать разложение вектора  $\frac{dr}{ds} = t$  по  $t_1$  и  $t_2$  в следующем виде:

$$\frac{dr}{ds} = t_1 \cos \varphi + t_2 \sin \varphi. \quad (404)$$

Подставляя этот результат в (403) и пользуясь линейностью вектор-функции  $A(u)$ , получим

$$\frac{dm}{ds} = A(t_1 \cos \varphi + t_2 \sin \varphi) = \cos \varphi \cdot A(t_1) + \sin \varphi \cdot A(t_2).$$

Наконец, в силу формул (397), получим окончательно

$$\frac{dm}{ds} = \lambda_1 \cos \varphi \cdot t_1 + \lambda_2 \sin \varphi \cdot t_2. \quad (405)$$

Теперь остается подставить выражения (404) и (405) в формулу (402). При скалярном перемножении этих выражений мы учтем, конечно, что  $t_1^2 = t_2^2 = 1$ ,  $t_1 t_2 = 0$ . Формула (402) примет вид

$$\tilde{k} = -\lambda_1 \cos^2 \varphi - \lambda_2 \sin^2 \varphi. \quad (406)$$

Этим самым мы нашли вид функции  $\tilde{k}(\varphi)$ , т. е. зависимость кривизны нормального сечения от угла наклона его касательной к первому главному направлению.

### § 55. Формула Эйлера. Главные кривизны.

Теперь мы должны выяснить геометрический смысл формулы (406) и прежде всего коэффициентов  $-\lambda_1$ ,  $-\lambda_2$ . Оставим сначала в стороне исключительный случай и будем считать  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ .

Положив  $\varphi = 0$ , мы приведем вектор  $t$  в совпадение с  $t_1$  и получим нормальное сечение с касательной, идущей в первом главном направлении, а при  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  — нормальное сечение с касательной, идущей во втором главном направлении. Обозначим кривизну  $\tilde{k}$  первого нормального сечения через  $k_1$ , а второго — через  $k_2$ . Тогда соответственно при  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$  формула (406) принимает вид

$$k_1 = -\lambda_1, \quad k_2 = -\lambda_2. \quad (407)$$

В основном случае, который мы сейчас рассматриваем, очевидно,

$$k_1 \neq k_2.$$

*Нормальные сечения в данной точке поверхности, касательные к которым идут по главным направлениям, называются главными сечениями, а их кривизны  $k_1$ ,  $k_2$  — главными кривизнами в данной точке поверхности.*

Теперь, в силу (407), формула (406) может быть записана в окончательном виде

$$\tilde{k} = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi. \quad (408)$$

Это и есть формула Эйлера, выражающая кривизну произвольного нормального сечения через главные кривизны  $k_1$ ,  $k_2$  и угол  $\varphi$ , образуемый касательной этого нормального сечения с первым главным направлением.

Заменяя  $\cos^2 \varphi$  через  $1 - \sin^2 \varphi$ , формулу можно переписать в виде

$$\tilde{k} = k_1 + (k_2 - k_1) \sin^2 \varphi. \quad (408')$$

Для определенности будем считать  $k_2 > k_1$ .

Так как  $\sin^2 \varphi$  достигает наибольшего значения 1 при  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$  и наименьшего значения 0 при  $\varphi = 0$  или  $\pi$ , а коэффициент при  $\sin^2 \varphi$  равен  $k_2 - k_1 > 0$ , то  $\tilde{k}$  достигает наибольшего и наименьшего значения при тех же значениях  $\varphi$ .

Но при  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$   $\tilde{k} = k_2$ , а при  $\varphi = 0$  или  $\pi$   $\tilde{k} = k_1$ .

Итак, одна из главных кривизн представляет собой наименьшее, а другая наибольшее возможное значение кривизны нормального сечения в данной точке поверхности.

Чтобы проследить изменение  $\tilde{k}$  в зависимости от  $\varphi$ , достаточно менять  $\varphi$  в пределах от  $-\frac{\pi}{2}$  до  $+\frac{\pi}{2}$ , так как значения  $\tilde{k}$ , как видно из (408), будут периодически повторяться с периодом  $\pi$ . Геометрически это означает, что при добавлении  $\pi$  к аргументу  $\varphi$  касательная нормального сечения поворачивается на  $180^\circ$  и совмещается со своим прежним положением, так что нормальное сечение остается прежним, а значит, и  $\tilde{k}$  получает прежнее значение.

Далее, при замене  $\varphi$  на  $-\varphi$  значение  $\tilde{k}$ , как видно из (408), не меняется.

Таким образом, нормальные сечения, касательные к которым расположены симметрично относительно главных направлений, имеют одинаковую кривизну.

В связи с этим достаточно рассмотреть изменение  $\tilde{k}$  при росте угла  $\varphi$  от 0 до  $\frac{\pi}{2}$ . Действительно, при этом  $-\varphi$  пробегает значения от 0 до  $-\frac{\pi}{2}$ , определяя в каждый момент нормальное сечение с той же кривизной  $\tilde{k}(-\varphi) = \tilde{k}(\varphi)$ .

При росте угла  $\varphi$  от 0 до  $\frac{\pi}{2}$   $\sin^2 \varphi$  монотонно растет от 0 до 1; следовательно, как видно из (408'),  $\tilde{k}$  монотонно растет от  $k_1$  до  $k_2$ .

Таким образом, при повороте касательной нормального сечения от первого главного направления до второго кривизна нормального сечения монотонно растет и минимального значения  $k_1$  до максимального  $k_2$ .

Те определения, которые мы дали главным направлениям и главным кривизнам, можно отчетливо выразить в виде краткой формулы. Представим себе, что мы делаем бесконечно малое смещение по поверхности из данной точки  $M$  в каком-нибудь из двух главных направлений (т. е. движемся по кривой, которая в начальной своей точке  $M$  касается главного направления).

При этом смещении (как и при любом бесконечно малом смещении)

$$d\mathbf{m} = A(d\mathbf{r}).$$

Но так как касательный вектор  $d\mathbf{r}$  идет в основном направлении, т. е. в собственном направлении вектор-функции  $A(\mathbf{u})$ , то

$$A(d\mathbf{r}) = \lambda_1 d\mathbf{r} \text{ или } A(d\mathbf{r}) = \lambda_2 d\mathbf{r},$$

причем, согласно (407),  $\lambda_1 = -k_1$ ,  $\lambda_2 = -k_2$ . В результате мы получаем так называемые формулы Родрига

$$d\mathbf{m} = -k_1 d\mathbf{r} \text{ или } d\mathbf{m} = -k_2 d\mathbf{r}. \quad (409)$$

Итак, в случае бесконечно малого смещения в основном направлении (первом или втором)  $d\mathbf{m}$  и  $d\mathbf{r}$  коллинеарны и имеют место формулы (409) (первая или вторая) (черт. 99).

Обратно, если для какого-нибудь бесконечно малого смещения из данной точки  $M$  по поверхности  $d\mathbf{m}$  и  $d\mathbf{r}$  коллинеарны, так что можно записать формулу

$$d\mathbf{m} = -k d\mathbf{r}, \quad (409')$$

где  $-k$  — некоторый численный коэффициент, то направление смещения — главное, а  $k$  равно соответствующей главной кривизне  $k_1$  или  $k_2$ .

В самом деле, так как  $d\mathbf{m} = A(d\mathbf{r})$ , то из формулы (409') следует, что направление  $d\mathbf{r}$  — собственное для вектор-функции  $A(\mathbf{u})$ , т. е. главное для поверхности в данной точке. Коэффициент  $-k$  есть собственное значение и равен, следовательно,  $-k_1$  или  $-k_2$ .

Мы рассматривали до сих пор основной случай  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ .

Перейдем теперь к исключительному случаю:  $\lambda_1 = \lambda_2 = a$ . Формула (406) дает теперь:

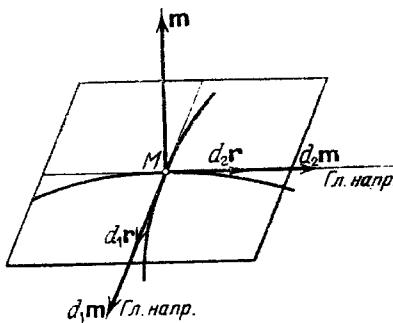
$$\tilde{k} = -a \cos^2 \varphi - a \sin^2 \varphi = -a.$$

Другими словами, кривизна нормального сечения в данной точке остается одинаковой по всем направлениям. Такая точка называется *точкой закругления* (омбилической точкой).

Как уже отмечалось, в такой точке любое касательное к поверхности направление является главным. Единственное значение кривизны  $\tilde{k} = -a$  естественно считать и единственным значением главной кривизны

$$k_1 = k_2 = -a.$$

Формула Родрига имеет место при любом бесконечно малом смещении из точки закругления. Действительно, основная вектор-



Черт. 99.

функция  $A(\mathbf{u})$  при любом  $\mathbf{u}$  выражается формулой (392)

$$A(\mathbf{u}) = a\mathbf{u}.$$

Следовательно, при любом смещении

$$d\mathbf{m} = A(d\mathbf{r}) = a d\mathbf{r},$$

где  $a$  равно взятой с обратным знаком главной кривизне.

Пример точки закругления дает любая точка сферы и любая точка плоскости (в последнем случае  $\lambda_1 = \lambda_2 = a = 0$ ).

### § 56. Вычисление главных кривизн и главных направлений.

Мы ставим в этом параграфе следующую задачу. Пусть на поверхности в данной точке уже вычислены коэффициенты первой и второй основных квадратичных форм. Требуется найти главные направления и главные кривизны. При этом главные направления мы будем задавать отношением дифференциалов  $dv : du$ , отвечающих бесконечно малым смещениям в этих направлениях.

Мы ищем главные направления и главные кривизны из (необходимого и достаточного) условия (409'):

$$d\mathbf{m} = -k d\mathbf{r}.$$

Здесь  $d\mathbf{r}$  идет по любому из главных направлений, а  $k$  обозначает соответствующую главную кривизну. Напишем вместо  $d\mathbf{r}$ ,  $d\mathbf{m}$  их развернутые выражения

$$m_u du + m_v dv = -k(r_u du + r_v dv).$$

Это одно векторное равенство можно заменить двумя скалярными, а именно, умножая скалярно обе части равенства на  $r_u$  и  $r_v$  по очереди:

$$\begin{aligned} m_u r_u du + m_v r_u dv &= -k(r_u r_u du + r_v r_u dv), \\ m_u r_v du + m_v r_v dv &= -k(r_u r_v du + r_v r_v dv). \end{aligned}$$

Двух скалярных равенств достаточно потому, что векторы  $d\mathbf{m}$  и  $-k d\mathbf{r}$  заведомо лежат в касательной плоскости, и для их равенства не только необходимо, но и достаточно, чтобы они давали одинаковые скалярные произведения с двумя неколлинеарными векторами в этой плоскости. В качестве таких векторов мы взяли  $r_u$ ,  $r_v$ .

Полученные уравнения можно переписать, умножив их по отдельности на  $-1$  и заменив скалярные произведения коэффициентами первой и второй квадратичных форм [согласно (342) и (363)]. Получим

$$\left. \begin{aligned} L du + M dv &= k(E du + F dv), \\ M du + N dv &= k(F du + G dv). \end{aligned} \right\} \quad (410)$$

Из этих двух уравнений мы должны определить два неизвестных: главную кривизну  $k$  и отношение  $dv : du$ , отвечающее главному направлению. Исключая сначала  $k$ , получим

$$\begin{vmatrix} L du + M dv & E du + F dv \\ M du + N dv & F du + G dv \end{vmatrix} = 0. \quad (41)$$

Действительно, обращение в нуль этого детерминанта равносильно пропорциональности его столбцов, что в явном виде выражается формулами (410) (при этом всегда можно считать, что первый столбец пропорционален второму, так как второй столбец не может иметь оба элемента, равные нулю: иначе мы получили бы  $EG - F^2 = 0$ , так как  $du, dv$  одновременно в нуль не обращаются).

Раскрывая детерминант, получим

$$(LF - ME) du^2 + (LG - NE) du dv + (MG - NF) dv^2 = 0. \quad (41')$$

Этому уравнению можно придать более компактную запись:

$$\begin{vmatrix} -dv^2 & du dv & -du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0. \quad (41'')$$

Таким образом, для того чтобы касательное к поверхности направление было главным, необходимо и достаточно, чтобы отвечающие ему  $du, dv$  обращали в нуль квадратичную форму (41').

Выделим сначала исключительный случай, когда любое касательное направление является главным и, следовательно, (41') удовлетворяется тождественно при любых  $du, dv$ . Другими словами, коэффициенты квадратичной формы (41') должны все равняться нулю. Но это происходит тогда и только тогда, когда в детерминанте (41'') последние две строки пропорциональны:

$$\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G}. \quad (41)$$

Таким образом, исключительный случай — случай точки закругления — характеризуется пропорциональностью коэффициентов второй и первой основных квадратичных форм. Как очевидно следует из формулы (400), общее значение отношений (412) будет равно постоянной по всем направлениям кривизне нормального сечения.

Теперь точки закругления оставим в стороне. Тогда квадратичная форма (41') имеет хотя один отличный от нуля коэффициент. Пусть это будет коэффициент при  $dv^2$ :

$$MG - NF \neq 0.$$

В таком случае для искомого главного направления  $du \neq 0$ . В самом деле, если предположить  $du = 0$ , то (41') дает

$$(MG - NF) dv^2 = 0, \quad \text{т. е. } dv = 0,$$

но одновременное обращение в нуль  $du$  и  $dv$  невозможно. Итак, мы имеем право поделить (41') на  $du^2$  почленно и вычислить  $\frac{dv}{du}$  из полученного при этом квадратного уравнения

$$(LF - ME) + (LG - NE) \frac{dv}{du} + (MG - NF) \left( \frac{dv}{du} \right)^2 = 0.$$

При этом мы знаем заранее, что это квадратное уравнение имеет два различных вещественных корня, так как по ранее доказанному всегда существует два различных главных направления<sup>1)</sup>.

Если в уравнении (41') отличен от нуля коэффициент при  $du^2$ , то мы можем поступать совершенно аналогично, поменяв лишь роли параметров  $u, v$ . Наконец, если оба квадрата имеют нулевые коэффициенты, то должен быть отличен от нуля коэффициент при  $du dv$ , и уравнение (41') принимает вид

$$du dv = 0.$$

Это значит, что одно главное направление характеризуется уравнением  $dv = 0$ , а другое — уравнением  $du = 0$ , т. е. главные направления совпадают с направлениями координатных линий.

Так или иначе, мы во всех возможных случаях получаем два значения для  $dv : du$  (или  $du : dv$ ), отвечающие двум главным направлениям в данной точке поверхности.

Переходим к вычислению главных кривизн. Перенося в уравнениях (410) все члены влево, можно переписать эти уравнения в виде

$$(L - kE) du + (M - kF) dv = 0,$$

$$(M - kF) du + (N - kG) dv = 0.$$

Так как для главного направления  $du, dv$  и главной кривизны  $k$  эта система двух однородных уравнений относительно  $du, dv$  совместна, то определитель этой системы должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} L - kE & M - kF \\ M - kF & N - kG \end{vmatrix} = 0.$$

Мы получаем квадратное уравнение относительно  $k$ , которому

<sup>1)</sup> С чисто алгебраической точки зрения причина вещественности и неравенства корней лежит в том, что выбор коэффициентов  $E, F, G, L, M, N$  не вполне произволен: должно соблюдаться неравенство

$$EG - F^2 > 0 \quad [\text{см. (353)}].$$

должны удовлетворять главные кривизны  $k_1$  и  $k_2$  из которого их можно определить. Напишем это уравнение в развернутом виде:

$$(EG - F^2) k^2 + (2MF - EN - LG) k + (LN - M^2) = 0. \quad (413)$$

Нетрудно было бы написать явные выражения для каждой из главных кривизн  $k_1$ ,  $k_2$ , как для корней этого квадратного уравнения. Но эти выражения были бы довольно громоздки, и вычисление их не дало бы какого-либо преимущества. Зато из уравнения (413) можно сравнительно просто получить сумму и произведение главных кривизн. Действительно, после того как левая часть уравнения будет поделена на коэффициент при  $k^2$ , т. е. на  $EG - F^2$ , произведение корней будет равно свободному члену, а сумма корней — коэффициенту при  $k$  с обратным знаком. Итак,

$$k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

$$k_1 + k_2 = \frac{EN + LG - 2MF}{EG - F^2}.$$

*Произведение главных кривизн в данной точке поверхности называется полной или гауссовой кривизной поверхности в данной точке.* Эта величина играет огромную роль в теории поверхностей по причинам, которые выясняются в главе VII. Мы будем обозначать полную кривизну через  $K$ .

*Полусумма главных кривизн в данной точке поверхности называется средней кривизной поверхности.* Ее мы будем обозначать через  $H$ <sup>1)</sup>. Окончательно предшествующие формулы перепишутся в виде

$$K = k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad (413')$$

$$2H = k_1 + k_2 = \frac{EN + LG - 2MF}{EG - F^2}. \quad (413'')$$

Мы видим, что полная кривизна  $K$  равна отношению дискриминантов второй и первой квадратичных форм.

### § 57. Три типа точек на поверхности.

Для того чтобы окончательно составить себе представление о поведении поверхности вблизи данной точки  $M$ , нам придется отдельно рассмотреть три возможных здесь случая.

<sup>1)</sup> Заметим, что для точки закругления  $K = \tilde{k}^2$ ,  $H = \tilde{k}$  ( $\tilde{k}$  сохраняет постоянное значение).

1. В данной точке  $M$  полная кривизна  $K$  положительна.

Так как знаменатель в правой части (413') всегда положителен [см. (353)], то  $K$  всегда имеет знак числителя. Итак, мы предполагаем, что в данной точке  $M$

$$K > 0, \text{ т. е. } LN - M^2 > 0.$$

В этом случае точка  $M$  называется *эллиптической*. Изучим поведение поверхности вблизи такой точки. Так как  $K$ , т. е. произведение  $k_1 k_2$ , положительно, то главные кривизны  $k_1$  и  $k_2$  имеют одинаковый знак. Допустим для определенности, что

$$k_1 > 0, \quad k_2 > 0.$$

Таким образом, оба главных сечения загибаются в одну и ту же сторону, именно в сторону вектора  $m$ . Формула Эйлера (408)

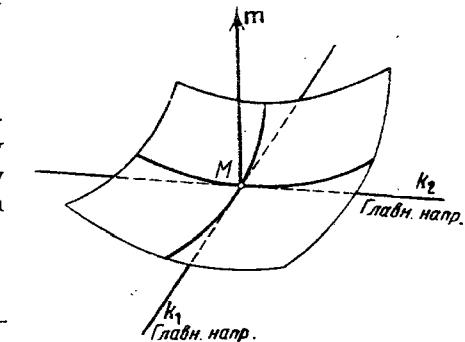
$$\tilde{k} = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi$$

показывает, что  $\tilde{k}$  для всех нормальных сечений также положительно, так как положительны все члены в правой части.

Следовательно, все нормальные сечения загибаются в сторону вектора  $m$ , поверхность по всем направлениям загибается в одну сторону и располагается с одной стороны своей касательной плоскости (черт. 100). Наибольшей и наименьшей кривизнами обладают главные сечения; промежуточные же нормальные сечения имеют промежуточные значения кривизны. Асимптотических направлений (см. § 50) в эллиптической точке, очевидно, нет.

Когда касательная к нормальному сечению, вращаясь около точки  $M$ , описывает прямой угол от одного главного направления до другого, кривизна  $\tilde{k}$  нормального сечения, как мы знаем, монотонно меняется от одного из значений  $k_1$ ,  $k_2$  до другого. При дальнейшем повороте на прямой угол это же монотонное изменение происходит в обратном порядке, и мы возвращаемся к исходному главному сечению.

Случай, когда  $k_1$ ,  $k_2$  обе отрицательны, ничем существенным не отличается от рассмотренного, только лишь все сечения загибаются в сторону  $-m$ . Так как выбор положительного направления на нормали к поверхности условен, то можно при желании принять  $-m$  за  $m$ . Тогда мы вернемся к случаю положительных  $k_1$ ,  $k_2$ .



Черт. 100.

II. В данной точке  $M$  полная кривизна  $K$  отрицательна.

Так как  $K$  и  $LN - M^2$  имеют всегда одинаковые знаки, то в такой точке

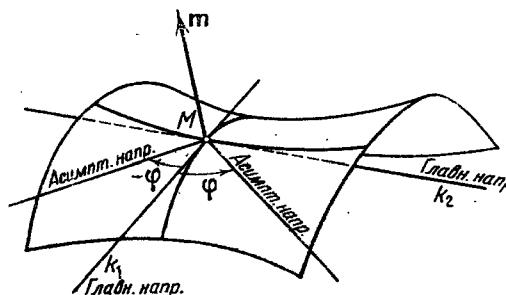
$$K < 0 \text{ и } LN - M^2 < 0;$$

точка называется *гиперболической*. Так как  $K$ , т. е. произведение  $k_1 k_2$ , отрицательно, то  $k_1$  и  $k_2$  имеют разные знаки. Пусть для определенности

$$k_1 < 0, \quad k_2 > 0.$$

Следовательно, одно из главных сечений загибается в сторону, обратную  $m$ , а другое — в сторону  $m$  (черт. 101). Когда касательная к нормальному сечению, вращаясь около точки  $M$ , описывает прямой угол от одного главного направления до другого, его кривизна  $\tilde{k}$  растет монотонно от значения  $k_1 < 0$  до значения  $k_2 > 0$ . Следовательно, по дороге  $\tilde{k}$  проходит через значение нуль.

Найдем направление касательной к нормальному сечению с кривизной нуль. Найти направление касательной к нормальному сечению с кривизной нуль.



Черт. 101.

Воспользовавшись формулой Эйлера, приравняем нуль выражение для  $\tilde{k}$ :

$$\tilde{k} = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \sqrt{-\frac{k_1}{k_2}}. \quad (414)$$

Заметим, что так как  $k_1$  и  $k_2$  разных знаков, то под корнем стоит положительная величина. Мы получаем два нормальных сечения: одно, направленное под углом

$$\varphi = \operatorname{arctg} \sqrt{-\frac{k_1}{k_2}},$$

и второе, направленное под углом

$$\varphi = -\operatorname{arctg} \sqrt{-\frac{k_1}{k_2}},$$

и, следовательно, симметричное первому относительно главных направлений (напомним, что угол  $\varphi$  отсчитывается от одного из главных направлений).

Многозначность  $\operatorname{arctg}$  не играет роли, так как добавление к  $\varphi$  угла, кратного  $\pi$ , приводит нас к прежнему нормальному сечению.

Итак, мы получили в точке  $M$  два нормальных сечения, имеющих в этой точке кривизну нуль. Касательные к этим сечениям в точке  $M$  расположены симметрично относительно главных направлений и образуют *асимптотические направления* в данной точке.

Из двух пар вертикальных углов, образованных асимптотическими направлениями, одна пара заключает, очевидно, направления, отвечающие нормальному сечению с отрицательной кривизной  $\tilde{k}$ , и в этих направлениях поверхность загибается «книзу» (т. е. в сторону, обратную  $m$ ). Другая же пара заключает направления с положительной кривизной  $\tilde{k}$  соответствующих нормальных сечений; в этих направлениях поверхность загибается «кверху» (т. е. в сторону  $m$ ). В результате поверхность вблизи гиперболической точки имеет седлообразную форму (черт. 101).

III. В данной точке  $M$  полная кривизна  $K = 0$ .

Как видно из (413'), это условие равносильно такому:

$$LN - M^2 = 0;$$

точка называется в этом случае *параболической*.

Так как в данной точке

$$K = k_1 k_2 = 0,$$

то по крайней мере один из множителей  $k_1, k_2$  равен нулю. Пусть

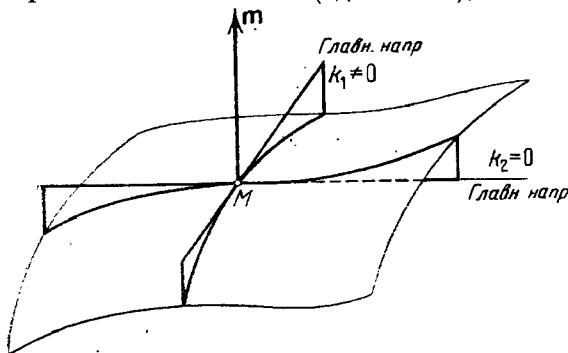
$$k_1 \neq 0, \quad k_2 = 0.$$

Случай  $k_1 = k_2 = 0$  оставляем в стороне, так как это — частный случай точки закругления. Считая для определенности  $k_1 < 0$ , мы имеем одно главное сечение, загибающееся книзу. Что же касается другого главного сечения, то мы знаем, что плоская кривая в точке, где ее кривизна равна нулю, имеет точку распределения, а значит, точку перегиба, если оставить в стороне исключительные случаи (см. § 2).

Поэтому, как правило, второе главное сечение перегибается с одной стороны своей касательной на другую. Поверхность имеет вид, изображенный на черт. 102.

*Асимптотическое направление* совпадает в этом случае с одним из главных направлений, именно отвечающим главной кривизне  $k_2 = 0$ . Других асимптотических направлений в параболической точке не будет, так как при переходе от одного главного сечения к другому кривизна  $\tilde{k}$  меняется монотонно от  $k_2 = 0$  до  $k_1 \neq 0$  и, следовательно, больше через значение 0 не проходит.

Поверхность, сплошь состоящую из параболических точек, мы будем впоследствии подробно изучать. Вообще же говоря, параболические точки (где  $K=0$ ), если только они на поверхности имеются, образуют линию, отделяющую точки эллиптические (где  $K>0$ ) от точек гиперболических (где  $K<0$ ).



Черт. 102.

Их отделяет некоторая кривая на поверхности, состоящая из параболических точек и проходящая через  $M$ .

#### Примеры.

1. Показать, что в данной точке поверхности сумма кривизн нормальных сечений, направленных под прямым углом друг к другу, есть величина постоянная.

2. Применим предшествующую теорию к *поверхности вращения*. Радиус-вектор выражается у нас (см. конец § 47) так:

$$\mathbf{r} = \psi(u)\mathbf{e}(v) + \varphi(u)\mathbf{k}.$$

Выберем в качестве параметра  $u$  на исходной кривой  $C$  координату  $z$ ; тогда  $z = \varphi(u) = u$ , так что уравнение поверхности примет упрощенный вид

$$\mathbf{r} = \psi(u)\mathbf{e}(v) + u\mathbf{k}.$$

Вычисляем производные и коэффициенты первой и второй квадратичных форм. Имеем

$$\mathbf{r}_u = \psi'\mathbf{e}(v) + \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_v = \psi\mathbf{e}\left(v + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\mathbf{r}_{uu} = \psi''\mathbf{e}(v), \quad \mathbf{r}_{uv} = \psi'\mathbf{e}\left(v + \frac{\pi}{2}\right), \quad \mathbf{r}_{vv} = -\psi\mathbf{e}(v).$$

Отсюда

$$E = 1 + \psi'^2, \quad F = 0, \quad G = \psi^2,$$

и так как

$$\mathbf{m} = \frac{[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{|\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v|} = \frac{\psi\psi'\mathbf{k} - \psi\mathbf{e}(v)}{\psi\sqrt{1 + \psi'^2}} = \frac{\psi'\mathbf{k} - \mathbf{e}(v)}{\sqrt{1 + \psi'^2}},$$

то

$$L = \mathbf{r}_{uu}\mathbf{m} = -\frac{\psi''}{\sqrt{1 + \psi'^2}}, \quad M = \mathbf{r}_{uv}\mathbf{m} = 0, \quad N = \mathbf{r}_{vv}\mathbf{m} = \frac{\psi}{\sqrt{1 + \psi'^2}}.$$

Определяя главные направления по формуле (411), получим

$$\begin{vmatrix} L & N \\ E & G \end{vmatrix} du dv = 0,$$

откуда или  $du = 0$ , или  $dv = 0$ , т. е. главные направления совпадают с касательными к координатным линиям — меридианам и параллелям нашей поверхности вращения.

Вычислим по формуле (400) главные кривизны как значения  $\tilde{k}$ , отвечающие главным направлениям. Положив сначала  $dv = 0$  (направление меридиана), потом  $du = 0$  (направление параллели), получим соответственно:

$$k_1 = \frac{L}{E} = -\frac{\psi''}{(1 + \psi'^2)^{3/2}}, \quad k_2 = \frac{N}{G} = \frac{1}{\psi\sqrt{1 + \psi'^2}}.$$

Интересно отметить, что, так как в наших предположениях уравнение исходной кривой  $C$  в плоскости  $XZ$  имеет вид

$$x = \psi(z) > 0,$$

то  $k_1$ , кривизна нормального сечения в направлении меридиана, совпадает по модулю с кривизной кривой  $C$ . Это и заранее можно было предвидеть, так как нормальное сечение в направлении меридиана есть сам меридиан, а любой меридиан поверхности можно рассматривать как повернутую около оси вращения кривую  $C$ . Знак  $k_1$  у нас будет получаться обратный знаку  $\psi''$ , т. е. +, если кривая  $C$  обращена выпуклостью от оси вращения, и —, если она обращена выпуклостью к оси вращения.

Далее, так как  $\frac{1}{k_2}$  равно  $\psi\sqrt{1 + \psi'^2}$ , то из формулы (22) следует, что это есть отрезок нормали кривой  $C$  от точки  $M$  до оси вращения (отрезок  $MQ$  на черт. 124). Интересно заметить, что этот результат уже получен нами в § 50, пример 2, где было доказано, что  $MQ$  есть радиус кривизны нормального сечения в направлении параллели.

Вычислим полную и среднюю кривизны:

$$K = k_1 k_2 = -\frac{\psi''}{\psi(1 + \psi'^2)^2}, \quad 2H = k_1 + k_2 = \frac{1 + \psi'^2 - \psi\psi''}{\psi(1 + \psi'^2)^{3/2}}.$$

Если кривая  $C$  обращена выпуклостью от оси вращения, т. е.  $\psi'' < 0$ , то  $K > 0$ , и поверхность состоит из эллиптических точек; в противном случае она состоит из точек гиперболических.

3. Отметим один замечательный класс поверхностей отрицательной полной кривизны — *минимальные поверхности*. Так называются поверхности со средней кривизной  $H$ , равной нулю во всех точках. Очевидно, это равносильно тому, что главные кривизны  $k_1$  и  $k_2$  отличаются только знаком; формула (414) дает в этом случае  $\varphi = \pm \frac{\pi}{4}$ , т. е. асимптотические направления суть биссектрисы прямых углов между главными направлениями и, следовательно, ортогональны между собой.

Особое значение минимальных поверхностей связано со следующим фактом. Пусть нам дана поверхность в виде односвязной области, ограниченной замкнутым контуром. Будем менять поверхность, *оставляя неизменным ограничивающий ее контур*. Допустим, что среди всевозможных таких поверхностей (т. е. пленок, натянутых на данный контур) нам удалось найти *поверхность с наименьшей площадью*. Тогда эта поверхность будет *обязательно минимальной*, т. е. с нулевой средней кривизной. Так, мыльная пленка, натянутая на изогнутый в пространстве проволочный контур, принимает форму минимальной поверхности.

Решим теперь задачу: *найти все возможные минимальные поверхности вращения.*

Потребуем обращения в нуль средней кривизны  $H$ , вычисленной в предыдущем примере. Получим

$$1 + \psi'^2 - \psi\psi'' = 0,$$

где  $x = \psi(z)$  — уравнение кривой  $C$ , или

$$\frac{\psi''\psi'}{1 + \psi'^2} = \frac{\psi'}{\psi}, \quad \text{т. е. } \frac{1}{2} (\ln(1 + \psi'^2))' = (\ln \psi)'.$$

Отсюда после интегрирования получаем

$$\psi = \alpha \sqrt{1 + \psi'^2}, \quad \alpha = \text{const.},$$

или

$$\sqrt{\frac{\psi^2}{\alpha^2 - 1}} = 1.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\left\{ \ln \left( \frac{\psi}{\alpha} + \sqrt{\frac{\psi^2}{\alpha^2} - 1} \right) \right\}' = \frac{1}{\alpha}.$$

Интегрирование дает

$$\ln \left( \frac{\psi}{\alpha} + \sqrt{\frac{\psi^2}{\alpha^2} - 1} \right) = \frac{z}{\alpha}, \quad \text{т. е. } \psi(z) = \frac{\alpha}{2} (e^{\frac{z}{\alpha}} + e^{-\frac{z}{\alpha}}).$$

Кривая  $C$ , вращением которой образована поверхность, есть *цепная линия*, имеющая ось вращения директрисой. При последнем интегрировании мы пренебрегли постоянной, так как она означает лишь параллельное смещение поверхности параллельно оси вращения.

Полученная поверхность называется *жатеноидом*; на первый взгляд она по своей форме похожа на однополостный гиперболоид вращения, сильно сплющенный в направлении оси вращения.

### § 58. Вычислительные формулы.

В предыдущих параграфах при изучении поверхности предполагались известными коэффициенты первой и второй квадратичных форм и остальные величины выражались посредством их.

Остановимся несколько подробнее на формулах, позволяющих из уравнения поверхности

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \quad (415)$$

находить эти коэффициенты. Для частных производных от  $\mathbf{r}$  по параметрам  $u, v$  мы получаем следующие выражения, дифференцируя (415) почленно:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u &= x_u \mathbf{i} + y_u \mathbf{j} + z_u \mathbf{k}, \\ \mathbf{r}_v &= x_v \mathbf{i} + y_v \mathbf{j} + z_v \mathbf{k}, \\ \mathbf{r}_{uu} &= x_{uu} \mathbf{i} + y_{uu} \mathbf{j} + z_{uu} \mathbf{k}, \\ \mathbf{r}_{uv} &= x_{uv} \mathbf{i} + y_{uv} \mathbf{j} + z_{uv} \mathbf{k}, \\ \mathbf{r}_{vv} &= x_{vv} \mathbf{i} + y_{vv} \mathbf{j} + z_{vv} \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (416)$$

Записывая теперь скалярные произведения в формулах (342) в развернутом виде, получим развернутые формулы для коэффициентов первой квадратичной формы:

$$\left. \begin{aligned} E &= \mathbf{r}_u^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \\ F &= \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \\ G &= \mathbf{r}_v^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2. \end{aligned} \right\} \quad (417)$$

Перепишем теперь формулы (361), причем запишем смешанные произведения в числителях как определители третьего порядка, пользуясь разложениями (416):

$$L = \frac{\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad M = \frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad N = \frac{\begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}. \quad (418)$$

Мы выписали довольно громоздкие формулы (417) и (418), чтобы показать, как фактически вычисляются в общем случае коэффициенты основных форм. Исходным пунктом здесь являются функции, выражающие текущие координаты  $x, y, z$  на поверхности через криволинейные координаты  $u, v$ .

Остановимся на важном частном случае, именно, когда поверхность задана уравнением

$$z = f(x, y). \quad (419)$$

Здесь можно считать, что две из декартовых координат  $x, y$  играют роль криволинейных координат  $u, v$  на поверхности, а третья декартиова координата  $z$  выражена как функция  $x, y$ . Нетрудно и радиус-вектор, скользящий кондом по поверхности, выразить как функцию от  $x, y$ . Действительно,

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

и, следовательно,

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}. \quad (419')$$

Выведем формулы (416) для этого частного случая параметрического представления поверхности, дифференцируя (419') по  $x$  и  $y$  ( $x$  играет роль  $u$ ,  $y$  — роль  $v$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_x &= \mathbf{i} + f_x \mathbf{k}, \\ \mathbf{r}_y &= \mathbf{j} + f_y \mathbf{k}, \\ \mathbf{r}_{xx} &= f_{xx} \mathbf{k}, \\ \mathbf{r}_{xy} &= f_{xy} \mathbf{k}, \\ \mathbf{r}_{yy} &= f_{yy} \mathbf{k}. \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (420)$$

Вычисляем теперь коэффициенты первой квадратичной формы как скалярные произведения:

$$\left. \begin{aligned} E &= \mathbf{r}_x^2 = 1 + f_x^2, \\ F &= \mathbf{r}_x \mathbf{r}_y = f_x f_y, \\ G &= \mathbf{r}_y^2 = 1 + f_y^2; \end{aligned} \right\} \quad (421)$$

отсюда

$$EG - F^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2. \quad (422)$$

Заметим, что формула (350) для площади куска поверхности принимает теперь вид

$$s = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy, \quad (422')$$

где область изменения переменных  $x, y$  совпадает с проекцией данного куска поверхности на плоскость  $XY$  [задание поверхности уравнением (419) означает взаимно однозначное соответствие между точками поверхности и их проекциями на плоскость  $XY$ ].

Далее, составим векторное произведение

$$[\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y] = [\mathbf{i} + f_x \mathbf{k}, \mathbf{j} + f_y \mathbf{k}] = \mathbf{k} - f_x \mathbf{i} - f_y \mathbf{j}.$$

Этот вектор направлен, как мы знаем, по нормали к поверхности, так как первые частные производные радиус-вектора по параметрам лежат в касательной плоскости. Длину вектора  $[\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y]$  легко подсчитать, зная его координаты:

$$|[\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y]| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}.$$

Единичный вектор  $\mathbf{m}$  по нормали к поверхности мы получим, разделив вектор  $[\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y]$  на его длину:

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{k} - f_x \mathbf{i} - f_y \mathbf{j}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}. \quad (423)$$

Наконец, вычислим коэффициенты второй квадратичной формы как скалярные произведения:

$$\left. \begin{aligned} L &= \mathbf{r}_{xx} \mathbf{m} = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \\ M &= \mathbf{r}_{xy} \mathbf{m} = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \\ N &= \mathbf{r}_{yy} \mathbf{m} = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (424)$$

Интересно еще выражение полной кривизны  $K$ :

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}. \quad (425)$$

### § 59. Линии кривизны.

До сих пор мы рассматривали поверхность лишь в бесконечно малом вблизи какой-нибудь ее точки. Но полученные нами результаты можно связать с построениями, осуществляемыми уже на целом куске поверхности. Сюда принадлежат прежде всего линии кривизны.

*Линией кривизны на поверхности называется кривая, в каждой точке которой касательная направлена по одному из двух главных направлений в этой точке поверхности* (черт. 103).

Пусть уравнения кривой на поверхности будут

$$u = u(t), \quad v = v(t),$$

где  $t$  — параметр вдоль кривой. Тогда в любой точке кривой, т. е. при любом значении  $t$ , касательная к ней должна идти по главному направлению в этой точке, а для этого необходимо и достаточно, как мы знаем, чтобы  $du, dv$  при смещении по кривой были подчинены условию (411)

$$\begin{vmatrix} L du + M dv & M du + N dv \\ E du + F dv & F du + G dv \end{vmatrix} = 0,$$

или в развернутом виде

$$(LF - ME) du^2 + (LG - NE) du dv + (MG - NF) dv^2 = 0. \quad (426)$$

Итак, для того чтобы кривая на поверхности была линией кривизны, необходимо и достаточно, чтобы дифференциалы  $du, dv$  вдоль нее в любой точке удовлетворяли уравнению (426), где  $L, M, N, E, F, G$  взяты для этой же точки.

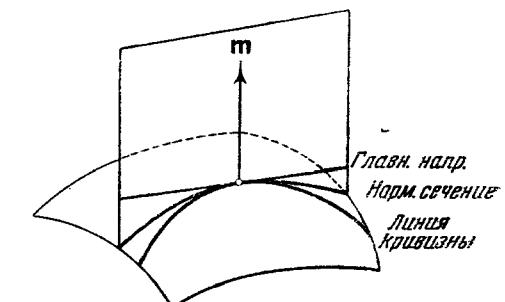
Разберем подробнее, что дает этот результат для изучения линий кривизны. Так как точки закругления мы считаем исключенными, то уравнение (426) нигде не обращается в тождество относительно дифференциалов, т. е. все три коэффициента не обращаются одновременно в нуль.

Допустим, что в уравнении (426) хотя один из коэффициентов при  $du^2, dv^2$  отличен от нуля. Пусть для определенности

$$LF - ME \neq 0.$$

Тогда, деля левую часть уравнения на  $dv^2$ , получаем квадратное уравнение относительно  $du : dv$

$$(LF - ME) \left( \frac{du}{dv} \right)^2 + (LG - NE) \frac{du}{dv} + (MG - NF) = 0. \quad (426')$$

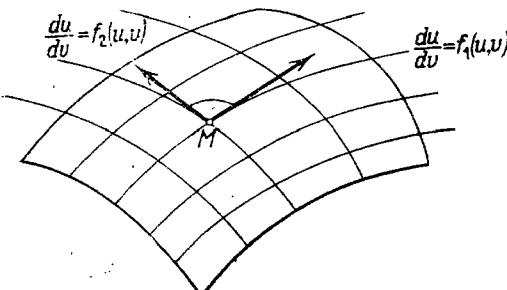


Черт. 103.

Решая его, получим, как мы знаем, два действительных различных корня (отвечающих двум взаимно ортогональным главным направлениям в каждой точке)

$$\frac{du}{dv} = f_1(u, v), \quad \frac{du}{dv} = f_2(u, v). \quad (427)$$

Мы записали полученные корни как функции от  $u, v$  на том основании, что коэффициенты квадратного уравнения зависели от  $u, v$  через коэффициенты первой и второй квадратичных форм. Формулы (427) характеризуют главные направления в любой точке поверхности. Таким образом, уравнение (426) приводит либо к первому, либо ко второму из уравнений (427). Следовательно, вдоль линий кривизны должно иметь место либо первое, либо второе из уравнений (427).



Черт. 104.

Другими словами, существует функция  $y(x)$  (и притом только одна), производная которой  $\frac{dy}{dx}$  связана с аргументом  $x$  и самой функцией  $y$  указанной зависимостью и которая при  $x = x_0$  принимает значение  $y_0$ . Идея доказательства может быть пояснена подобно тому, как это сделано в подстрочном примечании на стр. 205.

Применяя этот результат к уравнениям (427), мы видим, что через каждую точку  $M(u, v)$  на нашей поверхности проходит одна линия кривизны, вдоль которой удовлетворяется первое из уравнений (427), и одна, вдоль которой удовлетворяется второе из них. Мы получаем два семейства (сеть) линий кривизны. Сеть эта ортогональная, так как линии кривизны разных семейств направлены по двум взаимно ортогональным главным направлениям и встречаются всегда под прямым углом (черт. 104).

Мы оставили в стороне случай, когда в уравнении (426) обращаются тождественно в нуль коэффициенты при обоих квадратах, так что имеют место условия

$$LF - ME = 0, \quad MG - NF = 0 \quad (428)$$

и (426) принимает вид

$$(LG - NE) du dv = 0.$$

Так как все три коэффициента в уравнении (426) не обращаются в нуль одновременно, то  $LG - NE \neq 0$ , следовательно,

$$\text{или } du = 0, \text{ или } dv = 0. \quad (429)$$

Таким образом, вдоль линий кривизны или  $du = 0$ , т. е.  $u$  постоянное, или  $dv = 0$ , т. е.  $v$  постоянное. Следовательно, мы снова получаем сеть линий кривизны с той особенностью, что она совпадает с координатной сетью. При этом нужно иметь в виду, что координатная сеть зависит от произвольного в принципе выбора криволинейных координат на поверхности, в то время как сеть линий кривизны строится на данной поверхности вполне однозначно, как видно из самого определения линий кривизны.

Поэтому совпадение обеих сетей означает в сущности такой специальный выбор криволинейных координат на поверхности, что координатная сеть совпадает с сетью линий кривизны. Можно было бы показать, что на любой поверхности в достаточно малой окрестности какой-нибудь точки, не являющейся точкой закругления, такой выбор криволинейных координат всегда возможен.

Укажем необходимый и достаточный признак того, что данная координатная сеть на поверхности совпадает с сетью линий кривизны.

Этот признак заключается в том, что в соответствующей системе координат  $u, v$  средние коэффициенты первой и второй квадратичных форм тождественно обращаются в нуль:

$$F = M = 0. \quad (430)$$

**Достаточность.** Из условий (430) немедленно следуют условия (428), а следовательно, повторяя прежние рассуждения, получаем, что линии кривизны определяются условием (429) и совпадают с координатными линиями.

**Необходимость.** Пусть координатные линии суть линии кривизны. Тогда вдоль них должно соблюдаться условие (426), которое вдоль линий  $u$  запишется в виде

$$LF - ME = 0,$$

так как вдоль линий  $u$  мы имеем  $dv = 0, du \neq 0$ . Совершенно аналогично, условие (426) вдоль линий  $v$  дает

$$MG - NF = 0.$$

Если допустить, что  $F, M$  не обращаются одновременно в нуль, то мы имеем здесь два линейных однородных уравнения относи-

тельно  $F, M$ , совместных между собой. Определитель системы должен быть равен нулю:

$$LG - NE = 0.$$

В результате все три коэффициента уравнения (426) обращаются в нуль, что невозможно, так как точки закругления устранины из рассмотрения. Следовательно, необходимо

$$F = M = 0.$$

Заметим еще, что в отдельности первое из условий (430)  $F = 0$ , т. е.  $\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v = 0$ ,  $\mathbf{r}_u \perp \mathbf{r}_v$ , выражает ортогональность координатной сети, а второе — ее сопряженность, т. е. сопряженность направлений координатных линий в каждой точке поверхности.

Понятие о сопряженных направлениях будет дано в § 61.

В следующей главе, после знакомства с развертывающимися поверхностями, будет доказана теорема о нормалах к поверхности вдоль линий кривизны (§ 74).

Примеры.

1. Линии кривизны на поверхности вращения совпадают с ее меридианами и параллелями, так как главные направления в каждой точке касаются меридиана и параллели (пример 2, § 57).

2. Замечательный способ отыскания линий кривизны дает теорема Дюпена.

Допустим, что в пространстве построены три семейства поверхностей, каждое от одного параметра:

$$F_1(x, y, z) = C_1, \quad F_2(x, y, z) = C_2, \quad F_3(x, y, z) = C_3.$$

В некоторой области пространства, где определены функции  $F_1, F_2, F_3$ , через каждую точку  $M$  проходит по одной поверхности из каждого семейства; если три плоскости, касательные к этим поверхностям, взаимно ортогональны во всех точках  $M$ , то мы говорим, что три семейства поверхностей образуют триортогональную систему. Такую систему образуют, например, плоскости, проходящие через ось  $Z$ , прямые круговые конусы, имеющие осью ось  $Z$ , и сферы с центром в начале.

Введем обозначения

$$u_1 = F_1(x, y, z), \quad u_2 = F_2(x, y, z), \quad u_3 = F_3(x, y, z)$$

и выразим из этих уравнений  $x, y, z$ , обратно, как функции от  $u_1, u_2, u_3$ . Тогда и радиус-вектор любой точки  $M$  в рассматриваемой области пространства можно рассматривать как функцию переменных  $u_1, u_2, u_3$ :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_1, u_2, u_3).$$

Положим здесь, например,  $u_3 = C_3$ , где  $C_3 = \text{const.}$ ; тогда тем самым  $F_3(x, y, z) = C_3$ , и мы получаем одну из поверхностей третьего семейства (при этом заданную в параметрическом представлении через  $u_1, u_2$ ).

Поэтому  $\mathbf{r}_1$  (вектор с индексом 1, 2 или 3) означает производную от этого вектора соответственно по  $u_1, u_2, u_3$  равно как и  $\mathbf{r}_2$  будут касательными векторами к поверхности третьего семейства. Аналогично  $\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$  касаются поверхности первого семейства, а  $\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1$  — поверхности второго семейства. Итак,  $\mathbf{r}_1$  лежит на пересечении плоскостей, касательных к поверхностям второго и третьего семейств, и аналогичное утверждение имеет место для  $\mathbf{r}_2$  и  $\mathbf{r}_3$ .

В силу взаимной ортогональности касательных плоскостей к поверхностям первого, второго и третьего семейств, векторы  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ , направленные по прямым их пересечения, тоже взаимно ортогональны, так что мы имеем в любой точке

$$\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 = 0, \quad \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3 = 0, \quad \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_1 = 0.$$

Дифференцируя первое уравнение по  $u_3$ , второе — по  $u_1$  и третье — по  $u_2$ , получим

$$\mathbf{r}_{13} \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_{23} = 0, \quad \mathbf{r}_{21} \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_{31} = 0, \quad \mathbf{r}_{32} \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_{12} = 0;$$

здесь  $\mathbf{r}_{13} = \mathbf{r}_{31} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u_1 \partial u_3}$  и т. д. Складывая два первых уравнения и вычитая третье, получаем  $\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_{31} = 0$ , и аналогично  $\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_{23} = 0, \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_{12} = 0$ .

Рассмотрим для определенности поверхность третьего семейства

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_1, u_2, u_3), \quad \text{где } u_3 = C_3.$$

Так как  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  касаются этой поверхности, то перпендикулярный к ним вектор  $\mathbf{r}_3$  направлен по нормали  $\mathbf{m}$  к поверхности.

Вычислим средний коэффициент второй квадратичной формы

$$M = m_{uv}.$$

Так как вектор  $\mathbf{m}$  параллелен  $\mathbf{r}_3$ , а  $\mathbf{r}_{uv}$  есть в нашем случае  $\mathbf{r}_{12}$ , то

$$M = 0,$$

ибо у нас  $\mathbf{r}_{12} \mathbf{r}_3 = 0$ , т. е.  $\mathbf{r}_3 \perp \mathbf{r}_{12}$ .

Точно так же средний коэффициент первой квадратичной формы равен нулю:

$$F = \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v = \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 = 0.$$

Итак,  $M = F = 0$ , следовательно, координатная сеть  $u_1, u_2$  на нашей поверхности есть сеть линий кривизны. Но эта координатная сеть получается так: на поверхности  $u_3 = C_3$ , т. е.  $F_3(x, y, z) = C_3$ , мы полагаем либо  $u_1 = \text{const.}$ , т. е.  $F_1(x, y, z) = \text{const.}$ , либо  $u_2 = \text{const.}$ , т. е.  $F_2(x, y, z) = \text{const.}$  Другими словами, поверхность третьего семейства мы пересекаем со всем возможными поверхностями первого и второго семейств.

Окончательно получаем следующий результат: линии, по которым поверхности какого-нибудь одного семейства триортогональной системы пересекаются с поверхностями двух других семейств, суть линии кривизны. В этом и состоит теорема Дюпена.

3. Применим теорему Дюпена к отысканию линий кривизны на центральных поверхностях второго порядка.

Пусть дана поверхность

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1,$$

где для определенности  $A < B < C$ .

Включим эту поверхность в триортогональную систему поверхностей 2-го порядка, которую построим следующим образом.

Первое семейство:

$$\frac{x^2}{A - C_1} + \frac{y^2}{B - C_1} + \frac{z^2}{C - C_1} = 1,$$

где параметр семейства  $C_1$  меняется в пределах

$$-\infty < C_1 < A;$$

семейство состоит из эллипсоидов.

Второе семейство:

$$\frac{x^2}{A-C_2} + \frac{y^2}{B-C_2} + \frac{z^2}{C-C_2} = 1,$$

где

$$A < C_2 < B,$$

состоит из однополостных гиперболоидов.

Третье семейство:

$$\frac{x^2}{A-C_3} + \frac{y^2}{B-C_3} + \frac{z^2}{C-C_3} = 1,$$

где

$$B < C_3 < C,$$

состоит из двуполостных гиперболоидов.

Можно показать, что через каждую точку пространства  $x, y, z$ , не лежащую на координатных плоскостях, проходит одна и только одна поверхность из каждого семейства. Докажем, что нормали к этим трем поверхностям в каждой данной точке взаимно ортогональны (т. е. что мы получили действительно триортогональную систему).

Возьмем вектор-градиент от левой части первого и от левой части второго уравнений:

$$\nabla F_1 = \frac{2x}{A-C_1} \mathbf{i} + \frac{2y}{B-C_1} \mathbf{j} + \frac{2z}{C-C_1} \mathbf{k};$$

$$\nabla F_2 = \frac{2x}{A-C_2} \mathbf{i} + \frac{2y}{B-C_2} \mathbf{j} + \frac{2z}{C-C_2} \mathbf{k}.$$

Составив скалярное произведение этих двух векторов, мы легко убеждаемся, что полученное выражение равно нулю. Для этого достаточно из уравнения первой поверхности вычесть почлененно уравнение второй поверхности (оба они удовлетворяются в рассматриваемой точке). Получим

$$(C_2 - C_1) \left\{ \frac{x^2}{(A-C_1)(A-C_2)} + \frac{y^2}{(B-C_1)(B-C_2)} + \frac{z^2}{(C-C_1)(C-C_2)} \right\} = 0.$$

Левая часть здесь лишь не равным нулю множителем отличается от скалярного произведения  $\nabla F_1 \cdot \nabla F_2$ , и требуемое доказано. Так же можно доказать равенства  $\nabla F_1 \cdot \nabla F_3 = 0$ ,  $\nabla F_2 \cdot \nabla F_3 = 0$ .

Построив таким образом триортогональную систему, можно найти линии кривизны на каждой из пограничных систем (в частности, на исходной поверхности), пересекая эту поверхность с не включающими ее двумя семействами поверхностей. Если, например,  $A, B, C$  были положительны, следовательно, исходная поверхность — эллипсоид, то линии кривизны получатся: одно семейство — в пересечении с однополостными, другое — с двуполостными гиперболоидами триортогональной системы.

## § 60. Асимптотические линии.

Мы уже знаем, что асимптотическим направлением в данной точке поверхности называется направление, касательное к нормальному сечению с кривизной нуль в этой точке. Выпишем общую формулу (400) для кривизны нормального сечения

$$\tilde{k} = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}.$$

Для обращения  $\tilde{k}$  в нуль необходимо и достаточно обращение в нуль числителя дроби. Следовательно, условие

$$L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = 0, \quad (431)$$

наложенное на дифференциалы  $du, dv$  при смещении из данной точки по некоторому нормальному сечению, необходимо и достаточно для того, чтобы касательная к этомуциальному сечению шла по асимптотическому направлению.

Но и при смещении из данной точки по произвольной кривой условие (431) остается необходимым и достаточным для того, чтобы касательная к этой кривой шла по асимптотическому направлению. Действительно, ввиду однородности условия (431) относительно  $du, dv$  оно накладывается по существу на отношение  $du : dv$ , которое зависит лишь от направления касательной. Поэтому, если условие (431) выполняется, то выполняется одновременно для всех кривых на поверхности с общей касательной в данной точке, в том числе и для нормального сечения; а это означает, что общая касательная идет по асимптотическому направлению.

Кривая на поверхности, касательная к которой в каждой точке направлена по асимптотическому направлению в этой точке, называется асимптотической линией.

В силу только что сказанного, для того чтобы кривая на поверхности была асимптотической линией, необходимо и достаточно, чтобы вдоль нее в каждой точке соблюдалось условие (431)

$$L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = 0.$$

Здесь  $du, dv$  — дифференциалы текущих координат вдоль асимптотической линии, а  $L, M, N$  — функции этих координат.

Разберем в отдельности возможные три случая поведения асимптотических линий.

1. Поверхность состоит из эллиптических точек.

$$K > 0, LN - M^2 > 0. \quad (432)$$

В таком случае условие (431) невыполнимо ни при каких  $du, dv$ , так как вторая квадратичная форма, стоящая в левой части (431), существенно положительна, если  $L > 0$ , и отрицательна, если  $L < 0$ . Действительно,

$$L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = \frac{1}{L} \{(L du + M dv)^2 + (LN - M^2) dv^2\},$$

и так как выражение в фигурной скобке заведомо положительно, то вторая квадратичная форма при любых  $du, dv$  имеет знак  $L$  и в нуль обращаться не может; заметим, что  $L$  не может обращаться в нуль в силу того же условия (432).

Следовательно, в этом случае на поверхности не существует асимптотических линий. Впрочем, мы уже видели, что в эллиптической точке ни одно из нормальных сечений не имеет кривизны  $\tilde{k}=0$ .

2. Поверхность состоит из гиперболических точек.

$$K < 0, \quad LN - M^2 < 0. \quad (433)$$

В этом случае асимптотические линии существуют и образуют сеть на поверхности. Действительно, пусть во второй квадратичной форме отличен от нуля хотя один из коэффициентов при квадратах. Пусть для определенности

$$L \neq 0$$

на рассматриваемом куске поверхности. Тогда после деления левой части условия (431) на  $dv^2$  это условие можно записать в виде квадратного уравнения

$$L \left( \frac{du}{dv} \right)^2 + 2M \frac{du}{dv} + N = 0,$$

решая которое, получим два корня

$$\frac{du}{dv} = -\frac{M}{L} + \frac{\sqrt{M^2 - LN}}{L} \quad \text{и} \quad \frac{du}{dv} = -\frac{M}{L} - \frac{\sqrt{M^2 - LN}}{L}.$$

Вследствие (433) под радикалом стоит положительная величина. Учитывая, что вместе с  $L, M, N$  правые части уравнений являются функциями от  $u, v$ , и обозначая эти функции через  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , получим, что асимптотические линии характеризуются тем, что вдоль них

$$\frac{du}{dv} = \varphi_1(u, v) \quad \text{или} \quad \frac{du}{dv} = \varphi_2(u, v). \quad (434)$$

Повторяя рассуждения, примененные нами к линиям кривизны, мы заключаем, что через каждую точку поверхности проходит одна и только одна асимптотическая линия, вдоль которой соблюдается первое из уравнений (434), и одна и только одна,—вдоль которой соблюдается второе из этих уравнений. Касательные к этим линиям в данной точке образуют асимптотические направления; мы еще раньше видели, что в гиперболической точке таких направлений будет два.

Таким образом, асимптотические линии образуют на поверхности два семейства, так называемую *асимптотическую сеть*.

Если обращаются тождественно в нуль оба коэффициента при квадратах во второй квадратичной форме, т. е. если  $L = N = 0$ , то условие (431) принимает вид

$$2M du dv = 0.$$

Если бы  $M$  тоже обращалось в какой-нибудь точке в нуль, то в этой точке мы имели бы частный случай точки закругления, когда  $\tilde{k}$  по всем направлениям равно нулю [см. (412)]. Но точки закругления исключены из рассмотрения, так что  $M \neq 0$ , и из предыдущего уравнения следует, что вдоль асимптотических линий

$$du = 0 \quad \text{или} \quad dv = 0. \quad (435)$$

Таким образом, в этом случае снова имеем два семейства асимптотических линий, причем одно из них совпадает с семейством координатных линий  $u$ , а второе — с семейством координатных линий  $v$ .

Асимптотическая сеть однозначно определяется на поверхности, выбор же координатной сети произволен. Можно показать, что в достаточно малой окрестности гиперболической точки поверхности всегда можно так выбрать систему криволинейных координат, что координатная сеть совпадает с асимптотической.

*Необходимым и достаточным признаком того, что выбранная на поверхности координатная сеть совпадает с асимптотической, является тождественное обращение в нуль коэффициентов при квадратах во второй квадратичной форме:*

$$L = N = 0. \quad (436)$$

Достаточность этого условия только что была доказана. Что же касается его необходимости, то, если координатные линии являются асимптотическими, то вдоль них должно соблюдаться условие (431). Но вдоль линий  $u$

$$du \neq 0, \quad dv = 0,$$

так что (431) принимает вид  $L = 0$ . Совершенно аналогично получаем  $N = 0$ , используя условие (431) вдоль линий  $v$ .

Докажем теперь интересное характеристическое свойство асимптотических линий.

*Для того чтобы линия на поверхности была асимптотической, необходимо и достаточно, чтобы она или была прямой, или имела в каждой точке касательную плоскость к поверхности своей соприкасающейся плоскостью.*

Выпишем основную формулу (365), имеющую место для любой кривой на поверхности:

$$k \cos \theta = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}.$$

Для того чтобы линия на поверхности была асимптотической, необходимо и достаточно соблюдение вдоль нее условия (431), т. е. обращение в нуль правой части этого уравнения, а следовательно, и левой его части:

$$k \cos \theta = 0. \quad (437)$$

Но здесь представляются две возможности: или

$$k = 0,$$

т. е. кривизна линии тождественно равна нулю, и, значит, линия прямая; или в точках, где кривизна отлична от нуля,

$$\cos \theta = 0,$$

т. е. угол  $\theta$  между нормалью  $m$  к поверхности и главной нормалью  $n$  к кривой равен  $90^\circ$ . В этом случае вектор  $n$  перпендикулярен  $m$  и лежит, следовательно, в касательной плоскости к поверхности. Так как касательный вектор  $t$  всегда лежит в касательной плоскости к поверхности, то эта плоскость содержит оба вектора  $t$ ,  $n$  и совпадает, следовательно, с соприкасающейся плоскостью к кривой. Теорема доказана.

В заключение докажем *теорему Бельтрами-Эннепера о кручении асимптотических линий*. Заметим прежде всего, что единичный вектор по нормали к поверхности, будучи перпендикулярен соприкасающейся плоскости к асимптотической линии, направлен по бинормали к ней. Поэтому вдоль асимптотической линии  $m$  совпадает с единичным вектором  $b$  по бинормали или отличается от него знаком:

$$b = \pm m. \quad (438)$$

Вспомним затем третью формулу Френе

$$\frac{db}{ds} = -zn.$$

Умножая скалярно обе части на  $n$  и учитывая, что  $n^2 = 1$ , получим

$$n \frac{db}{ds} = -z.$$

Так как  $n = -[t, b]$  [см. (260")], то последнюю формулу можно переписать в виде

$$-[t, b] \frac{db}{ds} = -z,$$

или

$$z = \left( t, b, \frac{db}{ds} \right), \quad (439)$$

где в правой части стоит смешанное произведение трех векторов. Полученная формула верна для любой пространственной кривой. Применим ее для асимптотической линии на поверхности. Так как теперь  $b = \pm m$ , то

$$z = \left( t, m, \frac{dm}{ds} \right). \quad (440)$$

Здесь вектор  $m$  рассматривается вдоль асимптотической линии как функция дуги  $s$ .

Преобразуем полученное выражение для кручения асимптотической линии. Выпишем для асимптотической линии в какой-нибудь ее точке формулы (404) и (405):

$$\left. \begin{aligned} t &= \cos \varphi \cdot t_1 + \sin \varphi \cdot t_2, \\ \frac{dm}{ds} &= -k_1 \cos \varphi \cdot t_1 - k_2 \sin \varphi \cdot t_2. \end{aligned} \right\} \quad (441)$$

Здесь  $t_1$  и  $t_2$  — единичные векторы по главным направлениям в данной точке,  $\varphi$  — угол, образуемый вектором  $t$  с  $t_1$ . Но так как  $t$  касается асимптотической линии, то он идет по асимптотическому направлению в данной точке, и угол  $\varphi$  удовлетворяет, следовательно, условию (414)

$$\lg \varphi = \pm \sqrt{-\frac{k_1}{k_2}}. \quad (442)$$

Теперь остается вставить выражения (441) в формулу (440). Получим

$$z = [\cos \varphi \cdot t_1 + \sin \varphi \cdot t_2, m] (-k_1 \cos \varphi \cdot t_1 - k_2 \sin \varphi \cdot t_2).$$

Раскрывая скобки в векторном произведении, учтем, что  $t_1, m, t_2$  — единичные взаимно ортогональные векторы и, следовательно, при подходящей нумерации  $t_1, t_2$  можно считать

$$[t_1, m] = t_2, \quad [t_2, m] = -t_1.$$

Получим

$$z = (\cos \varphi \cdot t_2 - \sin \varphi \cdot t_1) (-k_1 \cos \varphi \cdot t_1 - k_2 \sin \varphi \cdot t_2).$$

Раскрывая, наконец, скобки в этом скалярном произведении, приходим к формуле

$$z = \cos \varphi \sin \varphi \cdot (k_1 - k_2) = \frac{\lg \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} (k_1 - k_2),$$

так как  $t_1^2 = t_2^2 = 1$ ,  $t_1 t_2 = 0$ . Но для асимптотической линии угол  $\varphi$  удовлетворяет условию (442), причем знак  $\pm$  в правой части (442) характеризует, по какому из двух асимптотических направлений в данной точке идет наша асимптотическая линия.

Вставляя в выражение для  $z$  значение  $\operatorname{tg} \varphi$ , получаем

$$z = \pm \sqrt{-\frac{k_1}{k_2}} \cdot \frac{k_1 - k_2}{1 - \frac{k_1}{k_2}} = \mp k_2 \sqrt{-\frac{k_1}{k_2}}.$$

Мы видим, что *кручение асимптотических линий, проходящих через данную точку по двум асимптотическим направлениям, отличаются только знаком*. Что же касается модуля кручения  $z$ , то, возводя  $z$  в квадрат, получаем из предыдущей формулы

$$z^2 = -k_1 k_2 = -K$$

или

$$z = \pm \sqrt{-K}. \quad (443)$$

Итак, *модуль кручения асимптотической линии равен корню квадратному из взятой с обратным знаком полной кривизны в рассматриваемой точке поверхности*. Напомним, что сейчас мы рассматриваем поверхность, состоящую из гиперболических точек, так что  $-K$  — величина положительная. Два подчеркнутых предложения составляют содержание теоремы Бельтрами-Эннепера, которая, таким образом, доказана.

3. Поверхность состоит из параболических точек.

$$K = 0, \quad LN - M^2 = 0. \quad (444)$$

В этом случае  $L$  и  $N$  не могут обращаться в нуль одновременно, так как тогда  $M$  также обратилось бы в нуль, и мы имели бы част-

ный случай точки закругления, когда все  $\tilde{K}$  равны нулю. Пусть для определенности  $L \neq 0$ .

Деля, как и в предыдущем случае, левую часть уравнения (431) на  $dv^2$ , приходим к квадратному уравнению относительно  $\frac{du}{dv}$

$$L \left( \frac{du}{dv} \right)^2 + 2M \frac{du}{dv} + N = 0,$$

которое, в силу (444), имеет теперь лишь один корень

$$\frac{du}{dv} = -\frac{M}{L}. \quad (445)$$

Правая часть этого равенства есть функция от  $u, v$ . Ссылаясь на ту же теорему анализа, что и в предыдущих случаях, можно утверждать, что через каждую точку поверхности проходит одна и только одна кривая, вдоль которой соблюдается уравнение (445), т. е. одна и только одна асимптотическая линия [действительно, в рассматриваемом случае условие (431) оказалось эквивалентным равенству (445)]. На поверхности имеется одно семейство асимптотических линий. Это связано с ранее полученным результатом (§ 57), что в параболической точке имеется лишь одно асимптотическое направление и это асимптотическое направление совпадает с тем из двух главных направлений, которому отвечает главная кривизна нуль. Поэтому для поверхности, состоящей из параболических точек, асимптотические линии суть в то же время и линии кривизны; они образуют одно из двух семейств линий кривизны и будут, как мы убедимся впоследствии (см. ниже § 72), обязательно прямыми линиями.

#### Примеры

1. Асимптотические линии на поверхности вращения (см. пример 2 § 57). Составим дифференциальное уравнение асимптотических линий

$$L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = 0,$$

которое в нашем случае примет вид

$$\frac{-\psi'' du^2 + \psi' dv^2}{\sqrt{1 + \psi'^2}} = 0$$

(параметр  $u$  совпадает с  $z$ ). Отсюда

$$dv = \pm \sqrt{\frac{\psi''}{\psi}} du, \quad v = \pm \int \sqrt{\frac{\psi''(u)}{\psi(u)}} du + C.$$

Отыскание асимптотических линий сводится к квадратуре, причем интеграл вещественный, если  $\psi'' > 0$ , т. е. если  $K < 0$ . Произвольная постоянная  $C$  означает, что, найдя одну асимптотическую, мы можем ее повернуть вокруг оси  $Z$  на произвольный угол  $C$  (все значения угла  $v$  вдоль кривой изменятся при этом на  $C$ ), причем она останется асимптотической на той же поверхности.

2. Асимптотические линии на катеноиде. В этом случае (пример 3 § 57)

$$\psi = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}} \right), \text{ следовательно, } \psi'' = \frac{1}{a^2} \psi.$$

Дифференциальное уравнение асимптотических линий есть  $dv = \pm \frac{du}{a}$ , откуда  $u = av + C$  (первое семейство) или  $u = -av + C$  (второе семейство).

Таким образом, асимптотические линии катеноида обвиваются вокруг него, напоминая винтовые линии, причем приращения  $v$  и  $u$  пропорциональны. Другими словами,  $v$ , «подъем в вертикальном направлении» (у нас  $u = z$ , см. пример 2 § 57), растет пропорционально  $v$ , углу обхода вокруг оси вращения (для второго семейства нужно говорить о «спуске в вертикальном направлении»).

Так как катеноид — минимальная поверхность, то асимптотические линии идут под углами в  $45^\circ$  к линиям кривизны, т. е. меридианам и параллелям катеноида.

#### § 61. Третья основная квадратичная форма. Сопряженные направления.

Когда мы движемся по какой-нибудь кривой на поверхности, отнесенной для простоты к дуге, как к параметру:  $u = u(s)$ ,  $v = v(s)$ , то единичный вектор  $m$  по нормали к поверхности, являющейся функцией от  $u, v$ , можно рассматривать вдоль этой кривой также, как функцию от  $s$ :

$$m = m\{u(s), v(s)\}$$

Согласно формуле (149)

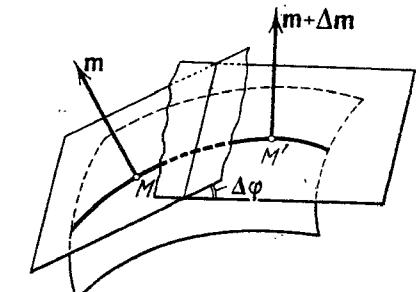
$$\Delta\varphi = |dm| + \dots,$$

где  $\Delta\varphi$  — угол между нормалью  $m$  и  $m + \Delta m$  в бесконечно близких точках кривой  $M$  и  $M'$ , причем точками в формуле обозначены бесконечно малые высшего порядка. Обозначая главную линейную часть угла  $\Delta\varphi$  через  $d\varphi$ , можно записать

$$d\varphi = |dm|.$$

Переходим к основной задаче этого параграфа — к изучению взаимного расположения двух касательных плоскостей к поверхности: в данной точке  $M$  и в бесконечно близкой точке  $M'$  (черт. 105). Это взаимное расположение характеризуется величиной двугранного угла между плоскостями и положением прямой их пересечения.

Так как угол  $\Delta\varphi$  между нормалью в точках  $M$  и  $M'$  численно равен двугрannому углу между касательными плоскостями в этих же точках, то можно сказать, что угол поворота касательной



Черт. 105.

плоскости при смещении из точки  $M$  в бесконечно близкую точку  $M'$  равен (если взять его главную линейную часть  $d\varphi$ ) модулю дифференциала  $d\mathbf{m}$ , отвечающего этому же смещению.

Так как  $d\varphi$  есть модуль вектора  $d\mathbf{m}$ , то квадрат  $d\varphi$  равен скалярному квадрату этого вектора:

$$d\varphi^2 = d\mathbf{m}^2. \quad (446)$$

Так как при смещении по поверхности

$$d\mathbf{m} = \mathbf{m}_u du + \mathbf{m}_v dv,$$

то, возводя  $d\mathbf{m}$  в скалярный квадрат и вводя обозначения

$$\mathbf{m}_u = e(u, v), \quad \mathbf{m}_u \mathbf{m}_v = f(u, v), \quad \mathbf{m}_v^2 = g(u, v), \quad (446')$$

получим

$$d\varphi^2 = e du^2 + 2f du dv + g dv^2. \quad (447)$$

Мы получили в правой части квадратичную форму относительно  $du$ ,  $dv$ ; коэффициенты ее есть функции координат  $u, v$ . Эта квадратичная форма называется *третьей основной квадратичной формой на поверхности*. Интересно сопоставить все три квадратичные формы:

Первая  $ds^2 = dr^2$ ,

Вторая  $l = -dr dm$ ,

Третья  $d\varphi^2 = d\mathbf{m}^2$ .

Таким образом, первая и третья формы отличаются тем, что векторы  $r$  и  $\mathbf{m}$  меняются ролями; вторая же форма занимает промежуточное положение между ними. Этому соответствует и геометрический смысл основных форм. А именно, если во всех случаях иметь в виду главные части соответствующих бесконечно малых величин, то можно сказать, что основные формы выражают нам:

Первая—квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками на поверхности.

Вторая—расстояние от одной из этих точек до касательной плоскости в другой точке.

Третья—квадрат угла между касательными плоскостями в этих точках.

Рассмотрим теперь прямую пересечения касательных плоскостей в данной точке  $M$  и в бесконечно близкой точке  $M'$ . Уравнение первой плоскости имеет вид

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \mathbf{m} = 0, \quad (448)$$

где  $\mathbf{R}$ —текущий радиус-вектор,  $\mathbf{r}$ —радиус-вектор точки  $M$  и  $\mathbf{m}$ —единичный вектор нормали в точке  $M$ .

Аналогично этому запишем уравнение второй плоскости, переходя в точку  $M'$  и заменив  $\mathbf{r}, \mathbf{m}$  через  $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}, \mathbf{m} + \Delta\mathbf{m}$ :

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r} - \Delta\mathbf{r}) (\mathbf{m} + \Delta\mathbf{m}) = 0. \quad (448')$$

Прямая пересечения определяется системой уравнений (448), (448'). При этом второе уравнение можно заменить более простым, раскрывая в нем скобки, вычитая из него первое уравнение и деля результат на  $\Delta s$  почленно. Получим

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \frac{\Delta\mathbf{m}}{\Delta s} - \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta s} (\mathbf{m} + \Delta\mathbf{m}) = 0. \quad (448'')$$

Так как  $M' \rightarrow M$ , т. е.  $\Delta s \rightarrow 0$ , то

$$\frac{\Delta\mathbf{m}}{\Delta s} \rightarrow \frac{d\mathbf{m}}{ds}, \quad \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta s} \rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad \mathbf{m} + \Delta\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{m}.$$

Так как  $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$  и  $\mathbf{m}$  взаимно ортогональны, то в пределе вычитаемое в (448'') обращается в нуль, и (448'') принимает вид

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \frac{d\mathbf{m}}{ds} = 0. \quad (449)$$

Что же касается уравнения (448), то оно остается без изменения. Оставляя в стороне исключительный случай, будем считать

$$\frac{d\mathbf{m}}{ds} \neq 0.$$

Тогда пара уравнений (448), (449) определяет прямую, проходящую через точку  $M$ , так как эти уравнения удовлетворяются при  $R = r$ ; кроме того, эта прямая лежит в касательной плоскости в точке  $M$  [согласно (448)] и направлена ортогонально к вектору  $d\mathbf{m}$  [как показывает (449)].

Итак, прямая пересечения неподвижной касательной плоскости в точке  $M$  и бесконечно близкой касательной плоскости в точке  $M'$  стремится занять положение прямой, касательной к поверхности в точке  $M$  и направленной ортогонально к  $d\mathbf{m}$  (где дифференциал вектора  $\mathbf{m}$  берется при смещении из  $M$  в  $M'$ ).

Так как  $d\mathbf{m} = A(d\mathbf{r})$ , а  $d\mathbf{r}$  направлен по касательной к линии смещения, то прямая пересечения в пределе направлена ортогонально к основной вектор-функции  $A$  от вектора, касательного к линии смещения.

Если в касательной плоскости в данной точке  $M$  даны два вектора  $u$  и  $v$  такие, что

$$\mathbf{v} A(\mathbf{u}) = 0, \quad \text{т. е. } \mathbf{v} \perp A(\mathbf{u}), \quad (450)$$

то направление вектора  $v$  мы будем называть *сопряженным* направлением вектора  $u$  (направления рассматриваются с точностью до за-

мены на противоположные). Очевидно, для каждого направления  $v$  существует одно и только одно направление  $u$ , ему сопряженное, — в случае  $A(u) \neq 0$ . В исключительном же случае, когда  $A(u) = 0$ , любое направление  $v$  в касательной плоскости можно считать сопряженным направлению  $u$ .

Сопряженность есть свойство взаимное. Действительно, условие (450) можно записать в виде равенства нулю скалярного произведения

$$vA(u) = 0.$$

Но, в силу симметричности основной вектор-функции  $A(u)$ ,

$$vA(u) = uA(v)$$

и, следовательно,

$$uA(v) = 0, \quad u \perp A(v),$$

т. е. направление вектора  $u$ , в свою очередь, сопряжено направлению вектора  $v$ .

Пользуясь термином сопряженности, можно сказать, что предельное положение прямой пересечения имеет направление, сопряженное с направлением касательной к линии смещения. Дадим более развернутую формулировку этого предложения.

Пусть в данной точке  $M$  на поверхности выбраны два любых взаимно сопряженных направления; пусть  $M'$  — бесконечно близкая точка поверхности, причем секущая  $MM'$  стремится совпасть с каким-нибудь одним из этих направлений. Тогда прямая пересечения касательных плоскостей в точках  $M$  и  $M'$  стремится совпасть с другим из этих направлений.

Разумеется, в этой формулировке под направлениями нужно иметь в виду прямые, проходящие в этих направлениях через точку  $M$ ; при этом исключительный случай  $A(u) = 0$  или  $A(v) = 0$  предполагается устранимым.

Если дифференциалы криволинейных координат  $u, v$ , а также векторов  $r, m$  при смещении по одному из сопряженных направлений обозначить через  $du, dv, dr, dm$ , а по другому —  $\delta u, \delta v, \delta r, \delta m$ , то условие сопряженности, согласно (450), будет иметь вид

$$\delta r \perp A(dr),$$

т. е.

$$\delta r \perp dm,$$

или

$$\delta r dm = 0. \quad (450')$$

Запишем здесь дифференциалы в развернутом виде

$$(r_u \delta u + r_v \delta v)(m_u du + m_v dv) = 0.$$

Раскрывая скобки и пользуясь формулами (363) для коэффициентов второй основной квадратичной формы, мы получим (после-

## § 62] ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ

изменения знака левой части)

$$L du \delta u + M (du \delta v + dv \delta u) + N dv \delta v = 0. \quad (450'')$$

Условие сопряженности двух направлений  $du, dv \delta u, dv \delta v$  заключается, таким образом, в обращении в нуль билинейной формы, полярной второй квадратичной форме и выписанной для  $du, dv; \delta u, \delta v$ .

Из этой записи еще раз видно, что условие сопряженности (450'') симметрично относительно обоих направлений, так что его можно писать и в виде  $dr \delta m = 0$ .

Отметим условие сопряженности координатной сети, т. е. сопряженности направлений координатных линий в каждой точке поверхности. Для координатных линий

$$du \neq 0, \quad dv = 0, \quad \delta u = 0, \quad \delta v \neq 0,$$

и условие (450'') принимает вид  $M du \delta v = 0$ , т. е.  $M = 0$ .

Искомое условие заключается в обращении в нуль среднего коэффициента второй квадратичной формы.

В частности сеть линий кривизны (§ 59) всегда является сопряженной, и главные направления всегда сопряжены между собой.

## § 62\*. Зависимость между тремя основными квадратичными формами.

Третья квадратичная форма играет меньшую роль в теории поверхностей, чем первые две, что в значительной мере объясняется следующей причиной. Оказывается, что третья форма может быть алгебраически получена из первых двух при помощи изящной формулы, которую мы сейчас выведем. Пусть бесконечно малому смещению из точки  $M$  отвечают дифференциалы координат  $du, dv$ ; тогда, как мы знаем из формул (404) и (405), при том же смещении

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{ds} &= \cos \varphi \cdot t_1 + \sin \varphi \cdot t_2, \\ \frac{dm}{ds} &= -k_1 \cos \varphi \cdot t_1 - k_2 \sin \varphi \cdot t_2, \end{aligned} \right\} \quad (451)$$

где  $t_1$  и  $t_2$  — единичные взаимно ортогональные векторы по главным направлениям. Умножая первую формулу на  $k_1$  и складывая со второй, получим

$$\frac{dm}{ds} + k_1 \frac{dr}{ds} = \sin \varphi \cdot (k_1 - k_2) \cdot t_2,$$

или, умножая на  $ds$ ,

$$dm + k_1 dr = \sin \varphi \cdot (k_1 - k_2) ds \cdot t_2.$$

Мы видим, что вектор  $d\mathbf{m} + k_1 d\mathbf{r}$  лишь скалярным множителем отличается от  $\mathbf{t}_2$  и, следовательно, ему параллелен:

$$d\mathbf{m} + k_1 d\mathbf{r} \parallel \mathbf{t}_2.$$

Совершенно аналогично, умножая первое из равенств (451) на  $k_2$  и складывая со вторым, убеждаемся, что

$$d\mathbf{m} + k_2 d\mathbf{r} \parallel \mathbf{t}_1.$$

Поскольку векторы  $d\mathbf{m} + k_1 d\mathbf{r}$  и  $d\mathbf{m} + k_2 d\mathbf{r}$  параллельны векторам  $\mathbf{t}_2$  и  $\mathbf{t}_1$ , между собой взаимно ортогональным, то они и сами ортогональны между собой, и их скалярное произведение равно нулю:

$$(d\mathbf{m} + k_1 d\mathbf{r}) (d\mathbf{m} + k_2 d\mathbf{r}) = 0.$$

Раскроем скобки:

$$d\mathbf{m}^2 + (k_1 + k_2) d\mathbf{m} d\mathbf{r} + k_1 k_2 d\mathbf{r}^2 = 0.$$

Но  $k_1 + k_2$  есть удвоенная средняя кривизна, т. е.  $2H$ , а  $k_1 k_2$  есть полная кривизна  $K$ , следовательно, эта формула перепишется окончательно в виде

$$\text{III} - 2H \cdot \text{II} + K \cdot \text{I} = 0. \quad (452)$$

Здесь через III коротко обозначена третья квадратичная форма  $d\mathbf{m}^2$ , через II—вторая форма  $-d\mathbf{r} d\mathbf{m}$  и через I—первая форма  $d\mathbf{r}^2$ . Так как  $K$  и  $H$  выражаются, как мы знаем, через коэффициенты первой и второй форм, то формула (452) позволяет выразить третью форму целиком через первые две, и притом чисто алгебраическим путем.

### § 63. Сферическое отображение поверхности.

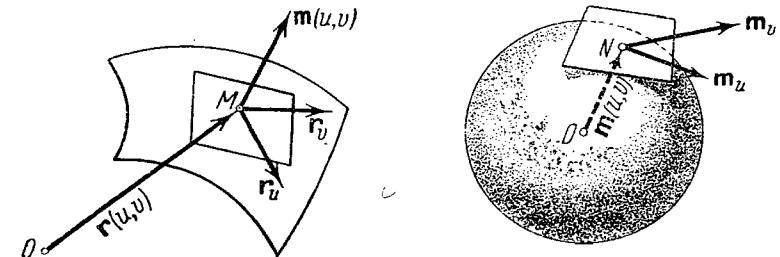
Третьей квадратичной форме можно придать весьма наглядное истолкование, если воспользоваться геометрическим построением, которое называется *сферическим отображением поверхности* и бывает полезным во многих случаях. А именно, из одной и той же точки  $O$  (черт. 106) при любых значениях криволинейных координат  $u, v$  будем откладывать единичный нормальный вектор  $\mathbf{m}$ , являющийся вдоль поверхности функцией  $u, v$ ,

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}(u, v). \quad (453)$$

Так как вектор  $\mathbf{m}$ —единичный, то при переменных  $u, v$  конец его будет двигаться по сфере радиуса 1 с центром в  $O$ . Каждой точке  $u, v$  на нашей поверхности будет отвечать точка единичной сферы с радиус-вектором  $\mathbf{m}(u, v)$ . Рассматриваемая область на поверхности однозначно отобразится на соответствую-

щую область единичной сферы, для которой уравнение (453) можно рассматривать как параметрическое представление:  $\mathbf{m}$ —как радиус-вектор, а  $u$  и  $v$ —как параметры<sup>1</sup>.

Двигаясь по какой-нибудь кривой на поверхности, мы описываем соответствующую кривую на единичной сфере, вдоль которой



Черт. 106.

$d\mathbf{m}$  будет дифференциалом радиус-вектора  $u$ , следовательно, квадрат дифференциала дуги будет выражаться формулой

$$ds^{*2} = d\mathbf{m}^2 = \text{III}.$$

Таким образом, при сферическом отображении поверхности третья квадратичная форма на ней превращается в первую квадратичную форму на единичной сфере.

Разумеется, при этом предполагается, что параметрам  $u, v$  приписываются на поверхности и на сфере одинаковые значения в соответствующих точках, как это и было осуществлено в только что проведенном построении.

Выведем теперь одну вспомогательную формулу, которая позволит нам получить интересное геометрическое истолкование полной кривизны  $K$  при помощи сферического отображения поверхности.

Пусть  $N$ —точка, отвечающая в сферическом отображении точке  $M$  на поверхности (черт. 106). Вектор  $\mathbf{m}$  служит единичной нормалью не только для поверхности в точке  $M$ , но и для сферы в точке  $N$ . Действительно,  $\mathbf{m}$  является радиус-вектором точки  $N$ , а так как радиус сферы, проведенный в какую-нибудь точку на ней, перпендикулярен к касательной плоскости, то вектор направлен по нормали к сфере в точке  $N$ . Таким образом, поверхность и сфера имеют в соответственных точках  $M, N$  параллель-

<sup>1</sup>) Мы предполагаем, что  $K$ —полная кривизна поверхности—отлична от нуля. Немного ниже показано, что в этом случае  $u, v$  действительно способны служить криволинейными координатами на сфере. Случай же тождественного обращения  $K$  в нуль приводит к вырождению отображения: поверхность отображается в линию на сфере (см. ниже § 72).

ные касательные плоскости. В этих плоскостях, перпендикулярных к вектору  $m$ , располагаются частные производные от радиус-вектора по параметрам: для поверхности  $r_u, r_v$ , для сферы  $m_u, m_v$ . Составим векторные произведения  $[m_u, m_v]$  и  $[r_u, r_v]$ ; они направлены каждое перпендикулярно к соответствующей касательной плоскости и, следовательно, параллельно вектору  $m$ . Будучи коллинеарными, эти векторные произведения отличаются лишь скалярным множителем:

$$[m_u, m_v] = a [r_u, r_v]. \quad (454)$$

Неопределенный пока множитель  $a$  нетрудно подсчитать. Умножим скалярно обе части равенства на векторное произведение  $[r_u, r_v]$ . Применяя известную из векторной алгебры формулу для скалярного произведения двух векторных произведений

$$[a, b] [c, d] = \begin{vmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{vmatrix},$$

получим

$$\begin{vmatrix} r_u m_u & r_u m_v \\ r_v m_u & r_v m_v \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} r_u r_u & r_u r_v \\ r_v r_u & r_v r_v \end{vmatrix}.$$

В определителе левой части стоят скалярные произведения, отличающиеся лишь знаком от коэффициентов второй квадратичной формы [см. (363)]; справа же скалярные произведения в определителе совпадают с коэффициентами первой квадратичной формы [см. (342)]. В результате равенство можно переписать в виде

$$\begin{vmatrix} -L & -M \\ -M & -N \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}$$

или

$$a = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Но, согласно (413'), это выражение совпадает с полной кривизной  $K$ , так что окончательный вид формулы (454) будет

$$[m_u, m_v] = K [r_u, r_v]. \quad (455)$$

Эту формулу мы и хотели вывести. Теперь уясним себе ее геометрический смысл. Мы ограничиваемся случаем, когда

$$K \neq 0. \quad (456)$$

Тогда прежде всего  $m_u$  и  $m_v$  не коллинеарны. Действительно, по нашим предположениям  $r_u$  и  $r_v$  не коллинеарны, т. е.  $[r_u, r_v]$  отлично от нуля, а следовательно, и  $[m_u, m_v]$  отлично от нуля, как видно из (455). Итак,  $m_u$  и  $m_v$  не коллинеарны.

Соблюдение этого условия для вектора  $m(u, v)$  как для радиус-вектора единичной сферы означает, что параметры  $u, v$  в достаточно близости каждой данной точки действительно способны играть роль криволинейных координат на этой сфере (взаимная однозначность соответствия, см. § 45). В дальнейшем мы предполагаем, что в рассматриваемой области изменения  $u, v$  это имеет место.

Беря обе части равенства (455) по модулю, получим

$$|[m_u, m_v]| = |K| |[r_u, r_v]|. \quad (457)$$

Модуль векторного произведения  $|[r_u, r_v]|$ , как мы знаем из формулы (347), равен корню квадратному из дискриминанта первой квадратичной формы:

$$|[r_u, r_v]| = \sqrt{EG - F^2}.$$

Применяя эту же формулу к единичной сфере, для которой радиус-вектором служит  $m(u, v)$ , а первой квадратичной формой — третья квадратичная форма на исходной поверхности, получим

$$|[m_u, m_v]| = \sqrt{eg - f^2}.$$

Теперь (457) примет вид

$$\sqrt{eg - f^2} = |K| \sqrt{EG - F^2}. \quad (458)$$

Рассмотрим некоторую область изменения параметров  $u, v$ . Ей будет отвечать определенная область  $D$  на исходной поверхности и одновременно область  $D^*$  на сфере, в которую  $D$  переходит при сферическом отображении. Вычислим площадь  $\sigma^*$  области  $D^*$ , пользуясь формулой (350) применительно к поверхности сферы. Так как коэффициенты первой квадратичной формы для сферы обозначены нами через  $e, f, g$ , то формула (350) дает

$$\sigma^* = \iint \sqrt{eg - f^2} du dv,$$

где двойной интеграл распространен по соответствующей области изменения параметров  $u, v$ . Пользуясь формулой (458), выражение для  $\sigma^*$  можно переписать в виде

$$\sigma^* = \iint |K| \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (459)$$

С другой стороны, как видно из той же формулы (350) уже в применении к исходной поверхности, площадь  $\sigma$  области  $D$  на исходной поверхности выражается интегралом

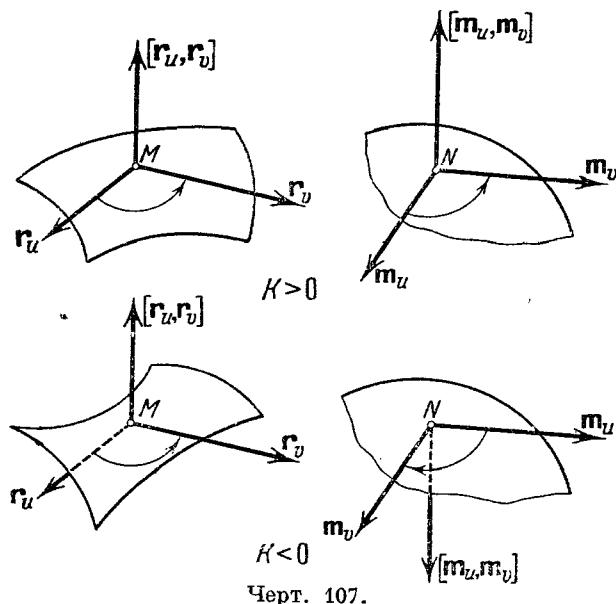
$$\sigma = \iint \sqrt{EG - F^2} du dv \quad (460)$$

по той же области изменения параметров  $u, v$ .

Допустим теперь, что область  $D$  на поверхности неограниченно уменьшается, стягиваясь в точку  $M$ . Тогда соответствующая область  $D^*$  на сфере также неограниченно уменьшается, стягиваясь в точку  $N$ . Тогда, как следует из основных свойств кратных интегралов, отношение интегралов (459) и (460) стремится к пределу, равному отношению подинтегральных выражений в той точке, к которой стягивается область интегрирования. Так как это последнее отношение равно в нашем случае  $|K|$  в точке  $M$ , то можно написать

$$\frac{\sigma^*}{\sigma} \rightarrow |K|. \quad (461)$$

Мы получили интересное истолкование модуля полной кривизны поверхности в данной точке  $M$  как *предела отношения площади*



Черт. 107.

площади  $\sigma^*$  на единичной сфере к соответствующей площади  $\sigma$  на поверхности, когда эта последняя<sup>1)</sup> неограниченно стягивается к точке  $M$ .

Чтобы истолковать теперь и знак  $K$ , вернемся к формуле (455). Если  $K > 0$ , то векторные произведения  $[r_u, r_v]$  и  $[m_u, m_v]$  направлены в одну сторону и, следовательно, направление вращения от  $r_u$  к  $r_v$  то же самое, что и от  $m_u$  к  $m_v$  (напоминаем,

<sup>1)</sup> Точнее область, для которой площадь  $\sigma$  берется.

что эти две пары векторов лежат в параллельных плоскостях) (черт. 107 вверху). Если же  $K < 0$ , то векторные произведения имеют взаимно обратные направления, и направления вращения от  $r_u$  к  $r_v$  и от  $m_u$  к  $m_v$  противоположны (черт. 107 внизу). В связи с этим нетрудно показать следующее.

Возьмем бесконечно малое смещение из точки  $M$  по поверхности

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv$$

и соответствующее ему смещение из точки  $N$  по сфере

$$d\mathbf{m} = \mathbf{m}_u du + \mathbf{m}_v dv.$$

Будем вращать направление  $d\mathbf{r}$ , увеличивая отношение  $\frac{dv}{du}$ ; тогда в разложении  $d\mathbf{r}$  составляющая по  $\mathbf{r}_v$  растет сравнительно с составляющей по  $\mathbf{r}_u$  и  $d\mathbf{r}$  вращается в направлении вращения от  $\mathbf{r}_u$  к  $\mathbf{r}_v$ ; соответственно вектор  $d\mathbf{m}$  вращается в направлении от  $\mathbf{m}_u$  к  $\mathbf{m}_v$ . Отсюда следует, что при  $K > 0$  направление вращения  $d\mathbf{m}$  совпадает с направлением вращения  $d\mathbf{r}$ , а в случае  $K < 0$  ему противоположно.

Итак, вращению около точки  $M$  на поверхности в определенном направлении в сферическом отображении поверхности соответствует вращение около точки  $N$  в том же направлении, если  $K > 0$ , и в обратном, если  $K < 0$ .

Говорят, что в первом случае при сферическом отображении *ориентация* поверхности сохраняется, во втором же — меняется на обратную.

ием  $u$ ; что же касается выбора какой-нибудь точки  $M$  на этой образующей, то его мы будем характеризовать расстоянием  $NM$  по образующей от направляющей линии до точки  $M$ . При этом расстояние  $NM$  мы берем со знаком, принимая на образующей направление  $l$  за положительное. Будем обозначать расстояние  $NM$  коротко через  $v$ ,

$$NM = v.$$

В таком случае радиус-вектор произвольной точки  $M$  на произвольной образующей, определяемой значением  $u$ , можно записать в виде

$$\mathbf{r} = \overline{OM} = \overline{ON} + \overline{NM},$$

где

$$\overline{ON} = \rho(u), \quad \overline{NM} = v\mathbf{l}(u);$$

действительно, вектор  $\overline{NM}$  коллинеарен единичному вектору  $l$  и потому отличается от него лишь скалярным множителем, равным длине  $NM$  с соответствующим знаком, т. е. множителем  $v$ . Итак, окончательно

$$\mathbf{r} = \rho(u) + v\mathbf{l}(u). \quad (464)$$

В результате радиус-вектор произвольной точки  $M$  на произвольной образующей выразился как функция двух независимых параметров  $u, v$ . Мы получили, таким образом, *параметрическое представление линейчатой поверхности*, именно той, которая образована прямыми (образующими) построенного нами однопараметрического семейства прямых.

Фиксируя в этом уравнении  $u$  и меняя  $v$ , мы движемся, очевидно, по образующей, отвечающей данному значению  $u$ . Следовательно, семейством координатных линий  $v$  у нас будут служить образующие. Если же фиксировать  $v$  и менять  $u$ , то мы идем по образующим «параллельно» направляющей линии в том смысле, что расстояние  $NM = v$  остается постоянным.

Таким образом, координатные линии  $v$  образуют семейство линий, «параллельных» направляющей линии, которая сама также входит в это семейство и отвечает случаю, когда  $v$  фиксировано на значении 0.

Заметим, что направляющая линия геометрически ничем на заданной линейчатой поверхности не выделяется. В качестве направляющей может быть взята любая кривая на линейчатой поверхности, последовательно пересекающаяся с ее образующими; произвел этот отразится только на выборе параметров  $u, v$  на поверхности.

## ГЛАВА VI.

### ЛИНЕЙЧАТЫЕ И РАЗВЕРТЫВАЮЩИЕСЯ ПОВЕРХНОСТИ.

В этой главе мы будем заниматься одним замечательным частным классом поверхностей, именно линейчатыми, в частности развертывающимися поверхностями. Эти поверхности интересны не только по своим специальным геометрическим свойствам, но и по тем применением, которые они имеют в общей теории.

#### § 64. Понятие о линейчатых и развертывающихся поверхностях.

Поверхность, представляющая собой геометрическое место прямых линий, называется *линейчатой*. Точнее линейчатую поверхность мы будем строить следующим образом.

Бернем какую-нибудь кривую в пространстве; пусть  $\rho$  — ее текущий радиус-вектор, а  $u$  — параметр, к которому она отнесена,

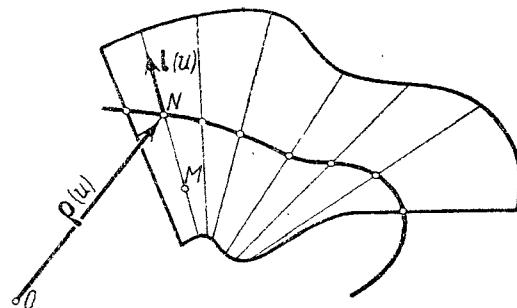
$$\rho = \rho(u). \quad (462)$$

Эту кривую мы будем называть *направляющей*. В каждой точке этой кривой зададим единичный вектор, который будет являться, таким образом, также функцией параметра  $u$  вдоль кривой,

$$\mathbf{l} = \mathbf{l}(u). \quad (463)$$

Через каждую точку  $N$  направляющей линии с радиус-вектором  $\rho(u)$  проводим прямую параллельно вектору  $\mathbf{l}(u)$ , отвечающему этой точке. В результате мы получаем в пространстве семейство прямых (черт. 108) от одного

параметра, именно от  $u$ . Эти прямые мы будем называть *образующими*. Выбор образующей определяется, таким образом, значе-



Черт. 108.

Вычислим теперь частные производные радиус-вектора по параметрам. Очевидно,

$$\mathbf{r}_u = \rho'(u) + v\mathbf{l}'(u), \quad \mathbf{r}_v = \mathbf{l}(u). \quad (465)$$

Составим векторное произведение этих векторов, направленное, как мы знаем, по нормали к поверхности<sup>1)</sup>:

$$[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] = [\rho', \mathbf{l}] + v[\mathbf{l}', \mathbf{l}]. \quad (466)$$

Исследуем поведение нормали к линейчатой поверхности, когда точка движется по поверхности вдоль какой-нибудь образующей, т. е. когда мы меняем  $v$  при фиксированном  $u$ . Так как

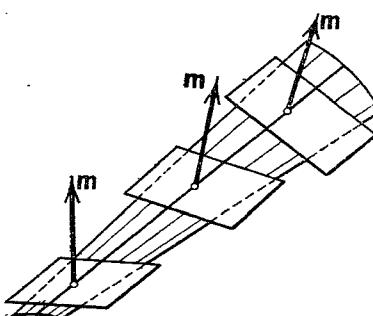
$\rho, \mathbf{l}$  являются функциями только  $u$ , то векторные произведения  $[\rho', \mathbf{l}]$  и  $[\mathbf{l}', \mathbf{l}]$  остаются постоянными, и правая часть (466) может меняться лишь вследствие изменения коэффициента  $v$ .

Здесь мы будем различать два случая, общий и специальный.

Общий случай: векторные произведения  $[\rho', \mathbf{l}]$  и  $[\mathbf{l}', \mathbf{l}]$  не коллинеарны. В этом случае при движении вдоль образующей, т. е. при изменении  $v$ , первое слагаемое в правой части (466) постоянно, второе же, ему не параллельное, изменяется пропорционально  $v$ .

В результате вся правая часть представляет собой вектор, направление которого меняется вместе с  $v$ . Следовательно, вдоль образующей направление нормали к поверхности меняется от точки к точке. Очевидно, что касательная плоскость в какой-нибудь точке на данной образующей проходит через эту образующую (так как образующая является своей собственной касательной). Поэтому при движении точки касания вдоль образующей касательная плоскость, все время проходя через образующую, вращается около нее. В этом случае линейчатая поверхность называется *косой* (черт. 109).

Специальный случай: векторные произведения  $[\rho', \mathbf{l}]$  и  $[\mathbf{l}', \mathbf{l}]$  коллинеарны. В этом случае оба слагаемых в правой части (466) параллельны друг другу (а следовательно, и своей сумме) при любом значении  $v$ . Таким образом, все нормали вдоль данной образующей параллельны между собой, так как они параллельны векторам  $[\rho', \mathbf{l}]$  и  $[\mathbf{l}', \mathbf{l}]$ . Когда точка касания движется вдоль образующей, то касательная плоскость проходит все время через образующую; и так как касательная плоскость



Черт. 109.

должна, кроме того, оставаться перпендикулярной к неизменному направлению нормали, то она не может вращаться около образующей и остается неподвижной.

Итак, в рассматриваемом случае *касательные плоскости к поверхности в точках, расположенных на одной и той же образующей, совпадают между собой*. Такую линейчатую поверхность мы будем называть *развертывающейся поверхностью* (черт. 110).

Обратно, если мы имеем развертывающуюся поверхность, т. е. касательная плоскость для всех точек образующей одна и та же, и нормали вдоль образующей параллельны, то направление вектора (466) не зависит от значения  $v$ , что возможно лишь в случае

$$[\rho', \mathbf{l}] \parallel [\mathbf{l}', \mathbf{l}]. \quad (467)$$

Таким образом, условие (467) необходимо и достаточно для того, чтобы линейчатая поверхность оказалась развертывающейся. Этому условию можно придать более простую форму.

Общее направление двух векторных произведений будет ортогональным ко всем их множителям, т. е. к векторам  $\mathbf{l}, \mathbf{l}', \rho'$ , которые, таким образом, оказываются компланарными (параллельными одной плоскости).

Легко видеть, что это условие и достаточно. Итак, условие (467) может быть переписано в эквивалентном виде

$$\mathbf{l}(u), \mathbf{l}'(u), \rho'(u) \text{ компланарны, т. е. } (\mathbf{l}, \mathbf{l}', \rho') = 0. \quad (468)$$

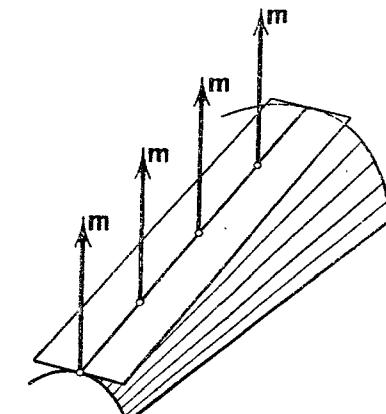
Это условие наложено, как мы видим, на вектор-функции  $\rho(u)$  (радиус-вектор направляющей кривой) и  $\mathbf{l}(u)$  (единичный вектор на образующей). Плоскость векторов (468) будет параллельна векторам (465) при любом значении  $v$ , т. е. параллельна касательной плоскости, проходящей через соответствующую образующую.

Пример. *Минимальным геликоидом* называется линейчатая поверхность, описываемая подвижной прямой (образующей), которая, все время пересекая под прямым углом некоторую неподвижную прямую (ось), вращается около этой оси и одновременно смещается вдоль нее пропорционально углу поворота.

Образующие геликоида расположены, следовательно, наподобие ступенек винтовой лестницы.

Если принять ось геликоида за ось  $Z$  и считать ее *направляющей линией* поверхности, то можно записать

$$\rho(u) = \lambda u \mathbf{k},$$



Черт. 110.

<sup>1)</sup> Мы предполагаем, как обычно, что векторы  $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$  не параллельны.

где за параметр  $u$  принят угол поворота образующей сравнительно с начальным ее положением, а  $\lambda$  — постоянный коэффициент пропорциональности.

Если начальное положение образующей принять за ось  $X$ , то вектор  $\mathbf{l}$ , указывающий направление образующей, будет в нашем случае

$$\mathbf{l}(u) = \mathbf{i} \cos u + \mathbf{j} \sin u.$$

Записать параметрическое представление геликоида в виде (464), найти его первую и вторую квадратичные формы и показать, что геликоид — поверхность минимальная.

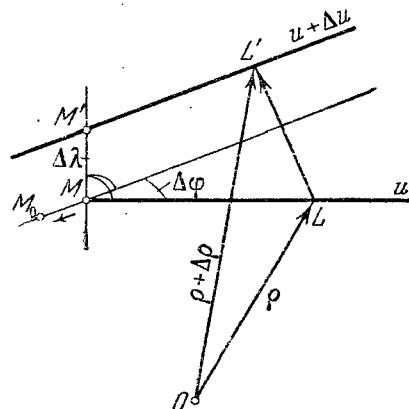
Показать, что одно семейство асимптотических линий совпадает с образующими, а второе — с винтовыми линиями, описываемыми точками подвижной образующей.

Показать, что уравнения линий кривизны будут

$$v = \pm \operatorname{sh}(u - u_0), \quad u_0 = \text{const.}$$

### § 65. Горловая точка.

До сих пор мы изучали поверхности обычно в бесконечно малой окрестности *данной точки*. Но так как линейчатая поверхность имеет особенно простое строение — состоит из прямолинейных образующих, то ее можно рассматривать сразу в окрестности целой образующей. Другими словами, можно взять произвольную образующую, которая отвечает некоторому значению  $u$ , и рассмотреть бесконечно близкую образующую, которая отвечает значению  $u + \Delta u$  и стремится к первой образующей, описывая нашу линейчатую поверхность (по крайней мере в некоторой ее части, прилегающей к образующей  $u$ ).



Черт. 111.

Значения  $\rho(u)$ ,  $\mathbf{l}(u)$  при данном значении  $u$  мы будем обозначать просто  $\rho$ ,  $\mathbf{l}$ , а при наращенном значении  $u + \Delta u$  через  $\rho + \Delta\rho$ ,  $\mathbf{l} + \Delta\mathbf{l}$ .

Найдем прежде всего общий перпендикуляр  $MM'$  к образующим  $u$ ,  $u + \Delta u$  (черт. 111).

Радиус-вектор точки  $M$ , согласно (464), можно записать в виде

$$\mathbf{r} = \rho + v\mathbf{l},$$

где, однако,  $v$  неизвестно и должно быть найдено. Аналогично запишется и радиус-вектор точки  $M'$ , который мы обозначим  $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ :

$$\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r} = \rho + \Delta\rho + (v + \Delta v)(\mathbf{l} + \Delta\mathbf{l}).$$

Здесь  $v + \Delta v$  также неизвестно.

Вычитая из второго равенства первое, мы вычислим вектор  $\Delta\mathbf{r}$ , который, очевидно, совпадает с  $\overline{MM'}$ .

$$\overline{MM'} = \Delta\mathbf{r} = \Delta\rho + v\Delta\mathbf{l} + \Delta v(\mathbf{l} + \Delta\mathbf{l}).$$

Так как  $\overline{MM'}$  направлен по общему перпендикуляру к двум образующим, то он ортогонален и к  $\mathbf{l}$ , и к  $\mathbf{l} + \Delta\mathbf{l}$ , а значит, и к их разности  $\Delta\mathbf{l}$ . Следовательно, будут равны нулю и скалярные произведения:

$$\overline{MM'}\mathbf{l} = 0, \quad \overline{MM'}\Delta\mathbf{l} = 0.$$

Вставляя в эти равенства вместо  $\overline{MM'}$  его выражение, получим соответственно:

$$\Delta\rho\mathbf{l} + v\Delta\mathbf{l}\mathbf{l} + \Delta v(\mathbf{l} + \Delta\mathbf{l})\mathbf{l} = 0$$

(так как  $\mathbf{l}^2 = 1$ ), и

$$\Delta\rho\Delta\mathbf{l} + v\Delta\mathbf{l}^2 + \Delta v(\mathbf{l}\Delta\mathbf{l} + \Delta\mathbf{l}^2) = 0.$$

Для дальнейшего будет удобно поделить первое уравнение на  $\Delta u$ , а второе — на  $(\Delta u)^2$  почлененно. Получим, обозначая  $\frac{\Delta v}{\Delta u}$  через  $w$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta\rho}{\Delta u}\mathbf{l} + v\frac{\Delta\mathbf{l}}{\Delta u}\mathbf{l} + w(1 + \Delta\mathbf{l})\mathbf{l} &= 0, \\ \frac{\Delta\rho\Delta\mathbf{l}}{\Delta u\Delta u} + v\left(\frac{\Delta\mathbf{l}}{\Delta u}\right)^2 + w\left(\mathbf{l}\frac{\Delta\mathbf{l}}{\Delta u} + \frac{\Delta\mathbf{l}}{\Delta u}\Delta\mathbf{l}\right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (469)$$

Мы имеем два уравнения с двумя неизвестными  $v$  и  $w$ , из которых, вообще говоря, можно их найти, после чего определяются и точки  $M$ ,  $M'$ , а значит, и перпендикуляр  $MM'$ .

Однако  $MM'$  — общий перпендикуляр к образующим  $u$ ,  $u + \Delta u$  — есть прямая, в значительной мере случайная, так как при  $\Delta u \rightarrow 0$  она будет передвигаться ввиду перемещения второй образующей, стремящейся к совпадению с первой.

Поэтому гораздо естественней вместо  $MM'$  рассматривать его *пределное положение* при  $\Delta u \rightarrow 0$ , которое будет вполне определенным для каждой данной образующей  $u$ . Существование такого предельного положения нужно, конечно, доказать. Однако для этого нам придется *устранить из рассмотрения цилиндрические поверхности*. Действительно, у цилиндрической поверхности образующие параллельны, общий перпендикуляр двух образующих

неопределенный, так что нет смысла говорить о его предельном положении. Параллельность образующих можно записать условием

$$l(u) = \text{const.} \quad \text{или} \quad l'(u) = 0.$$

Устранив цилиндрические поверхности, мы будем предполагать

$$l'(u) \neq 0.$$

Конечно, и у нецилиндрической поверхности для отдельных образующих  $l'(u)$  может обращаться в нуль, но мы таких образующих рассматривать не будем.

При  $\Delta u \rightarrow 0$  коэффициенты уравнений (469) стремятся к пределам, которые нетрудно найти. Нужно только иметь в виду, что

$$\frac{\Delta \rho}{\Delta u} \rightarrow \rho', \quad \frac{\Delta l}{\Delta u} \rightarrow l',$$

$$\frac{\Delta l}{\Delta u} \Delta l \rightarrow l' \cdot 0 = 0, \quad 1 \Delta l \rightarrow 0, \quad 1 \frac{\Delta l}{\Delta u} \rightarrow ll' = 0$$

(так как  $l' \perp l$  в силу леммы 1 § 18).

В пределе уравнения (469) с неизвестными  $v, w$  примут вид

$$\left. \begin{aligned} \rho' l + w &= 0, \\ \rho' l' + v l'^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (469')$$

Детерминант этой системы

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ l'^2 & 0 \end{vmatrix} = -l'^2 \neq 0.$$

Значит, и у системы (469) при достаточно малом  $\Delta u$  детерминант тоже не равен нулю, и система (469) имеет единственное решение  $v, w$  (т. е. существует вполне определенный перпендикуляр  $MM'$ ).

Решение  $v, w$  системы (469) стремится в пределе к решению системы (469'), так как  $v, w$  вполне определенным образом выражаются через коэффициенты системы, а коэффициенты системы (469) стремятся к коэффициентам системы (469') (причем детерминант системы стремится к пределу, не равному нулю). Итак,

$$v \xrightarrow[\Delta u \rightarrow 0]{} v_0, \quad w = \frac{\Delta v}{\Delta u} \xrightarrow[\Delta u \rightarrow 0]{} w_0,$$

где  $v_0, w_0$  — решение системы (469'), т. е.

$$v_0 = -\frac{\rho' l'}{l'^2}, \quad w_0 = -\rho' l. \quad (469'')$$

Так как  $v$  — координата точки  $M$  на образующей  $u$ , то  $v \rightarrow v_0$  означает, что  $M$  стремится по этой образующей к предельному положению  $M_0$  с координатой  $v_0$ .

Таким образом, основание  $M$  общего перпендикуляра  $MM'$  при  $\Delta u \rightarrow 0$  стремится по образующей  $u$  к предельному положению  $M_0$ ; точка  $M_0$  называется горловой точкой образующей  $u$ .

Горловая точка на каждой образующей отмечает «самое узкое место» линейчатой поверхности в окрестности этой образующей.

Нетрудно написать явно радиус-вектор горловой точки согласно (464) и, пользуясь (469''):

$$\mathbf{r} = \rho(u) - \frac{\rho'(u) l'(u)}{l'(u)^2} l(u). \quad (470)$$

Что же касается предельного положения самого перпендикуляра  $MM'$ , то оно пройдет через  $M_0$  параллельно вектору  $[l, l']$ . Действительно,  $MM'$  перпендикулярен к направляющим векторам  $l, l + \Delta l$  образующих  $u, u + \Delta u$ . А значит,

$$\overline{MM'} \parallel [l, l + \Delta l] = [l, \Delta l].$$

Поделив правую часть на  $\Delta u$ , получим

$$\overline{MM'} \parallel \left[ l, \frac{\Delta l}{\Delta u} \right].$$

Это векторное произведение при  $\Delta u \rightarrow 0$  стремится к пределу  $[l, l']$ . Следовательно, в то время, когда основание перпендикуляра  $MM'$  стремится в точку  $M_0$ , его направление стремится к направлению вектора  $[l, l']$ .

## § 66. Горловая линия. Строение развертывающейся поверхности.

Итак, на каждой образующей линейчатой поверхности имеется [в предположении  $l'(u) \neq 0$ ] ровно одна горловая точка. Геометрическое место горловых точек называется *горловой линией*. Если в уравнении (470) считать  $u$  переменным, то оно покажет изменение радиус-вектора горловой точки в зависимости от параметра  $u$ , т. е. от выбора образующей. Мы получаем, следовательно, *параметрическое уравнение горловой линии*.

Геометрический смысл горловой линии состоит в том, что она «опоясывает» линейчатую поверхность по самому узкому ее месту. Так, например, для однополостного гиперболоида вращения

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

который является дважды линейчатой поверхностью (две системы прямолинейных образующих), горловой линией в обоих случаях будет окружность его пересечения с плоскостью  $XY$

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad z = 0.$$

На этом примере видно, что горловая линия пересекает образующие, вообще говоря, не под прямым углом, вопреки тому, что можно подумать с первого взгляда.

Заметим, между прочим, что для однополостного гиперболоида общего вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a \neq b,$$

горловая линия не будет линией пересечения с плоскостью  $XY$  (она будет пространственной кривой 4-го порядка, особой для каждой системы прямолинейных образующих).

Чтобы горловую линию было удобнее изучать, примем ее за направляющую кривую  $\rho = \rho(u)$ . Тогда в формуле (470) радиус-вектор  $r$  горловой линии совпадает с радиус-вектором  $\rho$  направляющей кривой, так что вычитаемое должно обратиться в нуль. А это значит

$$\rho' l' = 0, \text{ т. е. } l' \perp \rho'. \quad (470')$$

Очевидно, это условие и достаточно для того, чтобы направляющая совпадала с горловой линией.

Теперь нам придется отдельно рассмотреть два случая.

1°. Косая линейчатая поверхность. Векторы  $l$ ,  $l'$ ,  $\rho'$  не компланарны. Касательная плоскость к поверхности в горловой точке  $N$  (см. черт. 108) проходит через образующую (т. е. через вектор  $l$ ) и через касательный вектор  $\rho'(u)$  к горловой линии (теперь мы считаем направляющую, изображенную на черт. 108, горловой линией). Но вектор  $l'$  ортогонален к  $l$  (§ 18) и ортогонален к  $\rho'$  в силу (470'). Следовательно, вектор  $l'$  направлен по нормали к поверхности в горловой точке  $N$ .

Обратно, если в некоторой точке поверхности нормаль направлена по вектору  $l'$ , то эта точка будет горловой. Действительно, проведем через данную точку какую-нибудь направляющую  $\rho(u)$ ; тогда нормальный вектор  $l'$  ортогонален касательному вектору  $\rho'$ , условие (470') соблюдается, а значит, уравнение (470) дает

$$r = \rho,$$

т. е. горловая точка  $r$  совпадает с данной точкой  $\rho$ .

Итак, в горловой точке  $N$  нормаль к поверхности идет по вектору  $l'$ . Проследим, как поворачивается нормаль к поверхности по мере того как мы смещаемся по образующей из горловой точки  $N$  на некоторое расстояние  $v$  в точку  $M$ .

Согласно (466) нормаль к поверхности направлена по вектору

$$[\rho', l] + v [l', l].$$

Но в нашем случае  $\rho', l \perp l'$ , так что векторное произведение  $[\rho', l]$  направлено по  $l'$  и отличается от  $l'$  лишь некоторым численным множителем

$$[\rho', l] = p l'. \quad (471)$$

Конечно, число  $p$  для разных образующих имеет разные значения (т. е. является функцией  $u$ ).

Итак, нормаль к поверхности в точке  $M$  направлена по вектору

$$p l' + v [l', l]. \quad (*)$$

Векторы  $l'$  и  $[l', l]$ , по которым разложен вектор  $(*)$ , ортогональны между собой и имеют одинаковую длину  $|l'|$ . Поэтому тангенс угла  $\alpha$ , который вектор  $(*)$  образует с вектором  $l'$  (черт. 112), выражается отношением коэффициентов:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{p}. \quad (471')$$

Но вектор  $(*)$  направлен по нормали в точке  $M$ , а  $l'$  — по нормали в горловой точке  $N$ .

Итак, по мере смещения из горловой точки вдоль образующей тангенс угла поворота нормали растет пропорционально пройденному пути. В формуле (471') все величины берутся со знаками. Угол  $\alpha$  считается положительным при повороте от  $l'$  в сторону  $[l', l]$ .

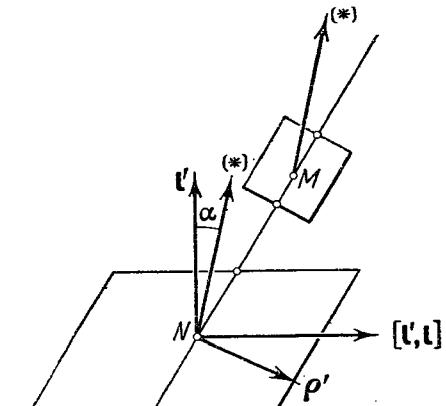
Когда  $v \rightarrow \pm \infty$ , угол  $\alpha \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$  (если  $p > 0$ ), или  $\alpha \rightarrow \mp \frac{\pi}{2}$  (если  $p < 0$ ). Заметим, что  $p$  нулем быть не может; иначе, согласно (471), получилось бы

$$[\rho', l] = 0, \quad \rho' \parallel l,$$

что противоречит условию некомпланарности векторов  $l$ ,  $l'$ ,  $\rho'$ .

2°. Развертывающаяся поверхность. Векторы  $l$ ,  $l'$ ,  $\rho'$  компланарны. Кроме того, согласно (470'),

$$\rho' l' = 0.$$



Черт. 112.

Рассмотрим сначала *исключительный случай*, когда оба условия соблюдаются вследствие того, что

$$\rho' = 0.$$

Это означает, что

$$\rho(u) = \text{const.},$$

т. е. горловая линия вырождается в точку — горловые точки на различных образующих совпадают между собой. Мы получаем *коническую поверхность* с вершиной в общей всем образующим горловой точке.

Переходим к *основному случаю*, когда

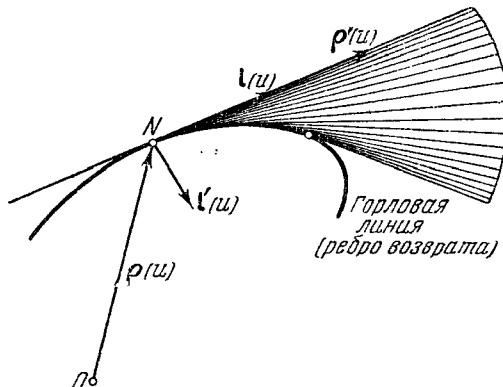
$$\rho'(u) \neq 0.$$

Тогда  $\rho' \perp I'$  в силу (470'). Кроме того,  $I \perp I'$ , так как  $|I|=1$ . Далее, все три вектора компланарны и могут быть для наглядности помещены в одной плоскости. В результате  $\rho'$  и  $I$ , векторы, ортогональные к одному и тому же вектору  $I'$ , коллинеарны между собой (черт. 113)

$$I \parallel \rho'.$$

Так как образующая развертывающейся поверхности направлена по  $I(u)$ , а касательная к горловой линии — по  $\rho'(u)$  и так как обе они проходят через горловую точку  $N$ , то должны совпадать.

Итак, в основном случае развертывающаяся поверхность представляет собой *геометрическое место касательных к своей горловой линии*. Горловая линия развертывающейся поверхности называется ее *ребром возврата*. Заметим, что касательная плоскость к развертывающейся поверхности, постоянная вдоль данной образующей, совпадает с соприкасающейся плоскостью ребра возврата в горловой точке  $N$ . Действительно, вектор  $I(u)$ , единичный касательный вектор к ребру возврата, имеет производную  $I'(u)$ , направленную по главной нормали ребра возврата. Таким образом, плоскость векторов  $I, I'$ , отложенных в точке  $N$ , есть соприкасающаяся плоскость ребра возврата и в то же время касательная плоскость развертывающейся поверхности (см. конец § 64).



Черт. 113.

Нами был исключен из исследования случай *цилиндрической поверхности* (§ 65). Между тем это также случай развертывающейся поверхности. Действительно, в этом случае

$$I(u) = \text{const.}, \quad I'(u) = 0,$$

так что компланарность векторов  $I, I', \rho'$  имеет место при любом выборе направляющей  $\rho = \rho(u)$  (горловой линии в этом случае не существует).

Итак, *всякая развертывающаяся поверхность будет или цилиндрической, или конической, или геометрическим местом касательных к некоторой кривой*.

Последний случай — основной, а два первых — исключительные (черт. 114, 115). Верна и обратная теорема.

*Всякая поверхность, являющаяся цилиндрической, конической или геометрическим местом касательных к произвольной кривой, будет развертывающейся поверхностью.*

Для цилиндрических поверхностей мы это только что показали. Далее, пусть дана произвольная коническая поверхность, т. е. линейчатая поверхность, образующие которой проходят через фиксированную точку  $O$ . Если точку  $O$  выбрать за начало координат, то радиус-вектор любой точки на поверхности будет лежать на соответствующей образующей и будет коллинеарен, следовательно, вектору  $I(u)$ .

$$\rho(u) = q(u) I(u),$$

где  $q(u)$  — скалярный коэффициент. Отсюда

$$\rho'(u) = q'(u) I(u) + q(u) I'(u),$$

и, следовательно, требование компланарности (468) соблюдается.

Наконец, линейчатая поверхность, образованная касательными к *произвольной пространственной кривой*, всегда дает нам развертывающуюся поверхность. Действительно, примем эту кривую за направляющую линию

$$\rho = \rho(u)$$

на полученной линейчатой поверхности. Так как образующие поверхности в каждой точке этой кривой направлены по ее касательным, то вектор  $\mathbf{l}(u)$  всегда параллелен  $\rho'(u)$  и, следовательно, условие (468) соблюдается. Мы имеем развертывающуюся поверхность.

Развертывающаяся поверхность своим ребром возврата делится на две полости. А именно, когда точка касания описывает ребро возврата, то касательная к нему описывает развертывающуюся поверхность, причем полукасательная, расположенная по одну сторону точки касания, описывает одну полость, а другая полукасательная — другую. Эти две полости как бы обрезаны по ребру возврата и склеены вдоль него друг с другом и притом довольно своеобразно. А именно, обе полости подходят к ребру возврата с одной стороны (черт. 115) и склеиваются там под углом нуль, т. е. касаясь друг друга. Если пересечь развертывающуюся поверхность плоскостью, нормальной к ребру возврата в какой-нибудь точке  $M$ , то в сечении получается кривая вида  $PMQ$ , имеющая в  $M$  точку возврата. В точке  $M$  встречаются ее ветви  $PM$  и  $QM$ , полученные пересечением нормальной плоскости с двумя полостями развертывающейся поверхности. Конечно, точки ребра возврата являются особыми для развертывающейся поверхности.

Проверка всех этих утверждений требует добавочных выкладок, которые мы опускаем.

Итак, у нас исчерпаны все возможные случаи строения развертывающейся поверхности: специальные — цилиндрические и конические поверхности — и общий — геометрическое место касательных к какой-нибудь кривой в пространстве. В частности, эту кривую можно взять плоской, и тогда развертывающаяся поверхность оказывается плоскостью.

Докажем теперь, что развертывающаяся поверхность (по крайней мере в окрестности любой обыкновенной точки) можно путем непрерывной деформации, сохраняющей без изменения длины всех кривых на поверхности, наложить на плоскость. Другими словами, изгибая кусок развертывающейся поверхности без растяжений и сжатий, мы можем сделать его куском плоскости. Этим и объясняется само название поверхности «развертывающиеся». Другие поверхности таким свойством не обладают; например, если взять кусок поверхности сферы, даже очень малый, то его никоим образом нельзя развернуть на плоскость, если не прибегать к растяжениям или сжатиям.

Для доказательства примем за направляющую линию  $\rho(u)$  ребро возврата (в случае цилиндрических и конических поверхностей теорема почти очевидна), причем  $u$  считаем длиной дуги вдоль ребра возврата. Так как образующие совпадают с касательными, то вектор  $\mathbf{l}(u)$  совпадает с единичным касательным вектором.

ром  $t(u)$ . Уравнение (464) примет вид

$$\mathbf{r} = \rho(u) + vt(u).$$

Отсюда

$$\mathbf{r}_v = t, \quad \mathbf{r}_u = t + vkn,$$

где  $\rho'(u)$  заменено через  $t$ , а  $t'(u)$  — по первой формуле Френе — через  $kn$ . Отсюда коэффициенты первой квадратичной формы вычисляются так:

$$E = \mathbf{r}_u^2 = 1 + v^2 k^2(u), \quad F = \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v = 1, \quad G = \mathbf{r}_v^2 = 1.$$

Будем непрерывно изменять ребро возврата как пространственную кривую; для этой цели можно непрерывно менять вид функций, входящих в его натуральные уравнения:

$$k = k(u) > 0, \quad x = x(u).$$

Сообразно написанным целям будем оставлять вид функции  $k(u)$  без изменения, а вид функции  $x(u)$  будем менять непрерывно с таким расчетом, чтобы  $x(u)$  в конце концов обратилось тождественно в нуль,

$$x(u) = 0,$$

т. е. чтобы ребро возврата сделалось плоской кривой.

При указанной деформации ребра возврата будет непрерывно деформироваться и определяемая им развертывающаяся поверхность, причем в конце концов она станет плоской (для плоского ребра возврата). При этом мы отображаем каждую точку  $M(u, v)$  на первоначальной поверхности в точку с теми же значениями  $u, v$  на деформированной поверхности.

Теперь нужно убедиться в том, что отображение на плоскость (взаимно однозначный характер которого можно гарантировать лишь в малом) происходит без изменения длин кривых на поверхности. Но это сразу видно из выражений для  $E, F, G$ , так как  $x(u)$  в эти выражения не входит, а вид функции  $k(u)$  остается неизменным; следовательно, и вид функций  $E, F, G$  по отношению к аргументам  $u, v$  остается прежним. Отсюда следует, что и длины всех кривых на поверхности, выражаемые согласно формуле (344), остаются в процессе деформации неизменными.

### § 67\*. Параметр распределения.

Вернемся к произвольной линейчатой поверхности

$$\mathbf{r} = \rho(u) + v\mathbf{l}(u).$$

Случай цилиндрической поверхности исключаем и считаем  $\mathbf{l}'(u) \neq 0$ .

При переходе от данного значения параметра  $u$  к бесконечно близкому значению  $u + \Delta u$  образующая  $u$  переходит в положение  $u + \Delta u$  (см. черт. 111), поворачиваясь на некоторый угол  $\Delta\varphi$  и уклоняясь от прежнего положения на расстояние  $\Delta\lambda = \overline{MM'}$ .

Обе эти величины бесконечно малы, но отношение  $\frac{\Delta\lambda}{\Delta\varphi}$  будет стремиться, как мы сейчас покажем, к определенному пределу.

Этот предел является важной геометрической характеристикой линейчатой поверхности в окрестности данной образующей. Он показывает, грубо говоря, какое уклонение образующей от первоначального положения приходится на единицу угла поворота этой образующей при ее бесконечно малом смещении по поверхности.

Найдем сначала предел отношения  $\frac{\Delta\varphi}{|\Delta u|}$ , причем угол  $\Delta\varphi$  будем считать всегда положительным. Так как  $\Delta\varphi$  есть угол поворота единичного вектора  $\mathbf{l}(u)$ , то по лемме 2 § 18

$$\lim \frac{\Delta\varphi}{|\Delta u|} = |\mathbf{l}'(u)|. \quad (472)$$

Далее, составим смешанное произведение

$$(\mathbf{l}, \mathbf{l} + \Delta\mathbf{l}, \overline{LL'}) = (\mathbf{l}, \mathbf{l} + \Delta\mathbf{l}, \overline{MM'}).$$

Мы заменили  $\overline{LL'}$  на  $\overline{MM'}$ , так как разность этих векторов равна  $\overline{M'L'} - \overline{ML}$ , причем  $ML$  коллинеарно  $\mathbf{l}$ , первому множителю, а  $\overline{M'L'}$  — коллинеарно  $\mathbf{l} + \Delta\mathbf{l}$ , второму множителю смешанного произведения. Следовательно, при такой замене смешанное произведение сохранит прежнее значение.

Далее, объем параллелепипеда, построенного на векторах  $\mathbf{l}, \mathbf{l} + \Delta\mathbf{l}, \overline{MM'}$ , будет равен  $\Delta\lambda \sin \Delta\varphi$ , так как  $\overline{MM'}$  ортогонален к  $\mathbf{l}$  и  $\mathbf{l} + \Delta\mathbf{l}$ , а векторы  $\mathbf{l}, \mathbf{l} + \Delta\mathbf{l}$  — единичные.

Условимся присыпывать  $\Delta\lambda$  знак смешанного произведения  $(\mathbf{l}, \mathbf{l} + \Delta\mathbf{l}, \overline{MM'})$ ; тогда правую часть равенства можно заменить через  $\Delta\lambda \sin \Delta\varphi$ . В левой части мы откинем  $\mathbf{l}$  во втором множителе (т. е. слагаемое, коллинеарное с первым множителем) и заменим  $\overline{LL'}$  через  $\Delta\varphi$  (черт. 111). Получим

$$(\mathbf{l}, \Delta\mathbf{l}, \Delta\varphi) = \Delta\lambda \sin \Delta\varphi.$$

Разделим полученное равенство почленно на  $(\Delta u)^2$ :

$$(\mathbf{l}, \frac{\Delta\mathbf{l}}{\Delta u}, \frac{\Delta\varphi}{\Delta u}) = \frac{\Delta\lambda}{|\Delta u|} \cdot \frac{\sin \Delta\varphi}{|\Delta u|}.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta\lambda}{|\Delta u|} = \frac{\left(\mathbf{l}, \frac{\Delta\mathbf{l}}{\Delta u}, \frac{\Delta\varphi}{\Delta u}\right)}{\frac{\sin \Delta\varphi}{|\Delta u|}} = \frac{\left(\mathbf{l}, \frac{\Delta\mathbf{l}}{\Delta u}, \frac{\Delta\varphi}{\Delta u}\right)}{\frac{\Delta\varphi}{|\Delta u|} \cdot \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi}}.$$

Последнее выражение при  $\Delta u \rightarrow 0$ , очевидно, стремится к пределу, который нетрудно подсчитать, пользуясь соотношениями

$$\frac{\Delta\mathbf{l}}{\Delta u} \rightarrow \mathbf{l}', \quad \frac{\Delta\varphi}{\Delta u} \rightarrow \varphi', \quad \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi} \rightarrow 1,$$

а также соотношением (472). Получим

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta\lambda}{|\Delta u|} = \frac{(\mathbf{l}, \mathbf{l}', \varphi')}{|\mathbf{l}'|}.$$

Деля полученное равенство на (472) почленно, получим окончательно

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta\lambda}{\Delta\varphi} = \frac{(\mathbf{l}, \mathbf{l}', \varphi')}{|\mathbf{l}'|^2} = \frac{(\mathbf{l}, \mathbf{l}', \varphi')}{\mathbf{l}'^2}. \quad (473)$$

Таким образом,  $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta\lambda}{\Delta\varphi}$  существует и вычисляется согласно (473).

Этот предел называется параметром распределения линейчатой поверхности. Для каждой образующей он имеет, вообще говоря, свое значение и является функцией параметра  $u$ .

Если, в частности, поверхность развертывающаяся, то  $\mathbf{l}, \mathbf{l}', \varphi'$  компланарны, и смешанное произведение в правой части обращается в нуль. Следовательно,

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta\lambda}{\Delta\varphi} = 0, \quad (473')$$

и расстояние  $\Delta\lambda$  является бесконечно малым высшего порядка сравнительно с углом поворота  $\Delta\varphi$ .

Условие (473') не только необходимо, но и достаточно для того, чтобы линейчатая поверхность была развертывающейся, так как из (473') следует, согласно (473), что

$$(\mathbf{l}, \mathbf{l}', \varphi') = 0, \quad \mathbf{l}, \mathbf{l}', \varphi' \text{ компланарны.}$$

Итак, условие (473'), т. е. обращение в нуль параметра распределения, необходимо и достаточно для того, чтобы данная линейчатая поверхность была развертывающейся. Для косой линейчатой поверхности параметр распределения отличен от нуля. При этом существенно, что коэффициент  $p$  в формулах (471), (471') совпадает с параметром распределения. Действительно, согласно (471),

$$[\varphi', \mathbf{l}] = p\mathbf{l}'.$$

Умножая обе части равенства на  $\mathbf{l}'$  скалярно, получим

$$(\mathbf{p}', \mathbf{l}, \mathbf{l}') = p\mathbf{l}'^2$$

или

$$p = \frac{(\mathbf{l}, \mathbf{l}', \mathbf{p}')}{\mathbf{l}'^2} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta \lambda}{\Delta \varphi}.$$

Знак параметра распределения  $p$  косой линейчатой поверхности, очевидно, совпадает со знаком  $\Delta \lambda$  (так как  $\Delta \varphi > 0$ ) и имеет следующий геометрический смысл.

Наблюдая из точки  $M'$  на второй из двух бесконечно близких образующих (черт. 111) за вращением первой образующей вокруг ее точки  $M$  на угол  $\Delta \varphi$  до совпадения по направлению с первой образующей, мы в случае  $p > 0$  увидим это вращение происходящим против часовой стрелки, а в случае  $p < 0$  — наоборот. Весьма существенно, что этот результат не зависит от того, какую образующую мы будем считать первой и какую второй.

#### Упражнения.

1. Показать, что горловая линия геликоида совпадает с его осью и что его параметр распределения есть величина постоянная.

2. Найти вычислением горловую линию и параметр распределения однополостного гиперболоида вращения; гиперболического параболоида  $x^2 - y^2 = 2pz$ .

3. То же самое для однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида общего вида.

### § 68. Огибающая семейства поверхностей от одного параметра.

Рассмотрим в пространстве семейство поверхностей, зависящих от одного параметра  $C$ :

$$F(x, y, z, C) = 0. \quad (474)$$

Каждому значению  $C$  в рассматриваемой области его изменения отвечает поверхность, определяемая уравнением (474). Для семейства (474) можно развить теорию огибающих, аналогичную теории огибающих семейства кривых на плоскости.

Огибающей мы будем называть поверхность<sup>1</sup>), которая в каждой своей точке касается некоторой поверхности семейства.

При этом предполагается, что в рассматриваемой области пространства на поверхностях семейства и на огибающей имеются только заведомо обыкновенные точки, особые же точки устраниены из рассмотрения.

Будем искать уравнение огибающей (или ее части) в виде

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad (475)$$

предполагая, что огибающая семейства (474) существует. Пусть

<sup>1)</sup> Точнее, совокупность всевозможных таких поверхностей.

$M(x, y, z)$  — какая-нибудь точка, взятая на огибающей. Тогда по определению огибающей эта же точка лежит и на некоторой поверхности семейства, причем касательная плоскость будет в этой точке общей для обеих поверхностей.

Пусть  $C$  — значение параметра, отвечающее этой поверхности семейства. В таком случае координаты  $x, y, z$  удовлетворяют, во-первых, уравнению огибающей

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

и, во-вторых, — совместно с  $C$  — уравнению поверхности семейства

$$F(x, y, z, C) = 0. \quad (476)$$

Эти два равенства имеют место в каждой точке огибающей. Поэтому при бесконечно малом смещении точки  $M(x, y, z)$  по огибающей мы имеем право дифференцировать эти равенства почленно. Получим

$$\left. \begin{aligned} \varphi_x dx + \varphi_y dy + \varphi_z dz &= 0, \\ F_x dx + F_y dy + F_z dz + F_C dC &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (477)$$

где  $dx, dy, dz, dC$  — дифференциалы, соответствующие проделанному бесконечно малому смещению<sup>1)</sup>). Но так как касательные плоскости для обеих поверхностей в точке  $M(x, y, z)$  совпадают, то нормаль тоже общая, и градиенты

$$\varphi_x \mathbf{i} + \varphi_y \mathbf{j} + \varphi_z \mathbf{k}, \quad F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k},$$

направленные по нормали соответственно к огибающей и к поверхности семейства (§ 32), должны быть параллельны. Другими словами,

$$F_x : \varphi_x = F_y : \varphi_y = F_z : \varphi_z.$$

В таком случае первое из уравнений (477) влечет за собой

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0,$$

так что от второго уравнения остается только

$$F_C dC = 0.$$

Случай  $dC = 0$  мы оставляем в стороне, так как он означал бы, что  $C$  сохраняет при движении точки  $M(x, y, z)$  по огибающей одно и то же значение, т. е. что все точки  $M(x, y, z)$  на огибающей попадают на одну и ту же поверхность семейства. Формально это не противоречит нашему определению огибающей, но, конечно, случай совпадения огибающей с одной из поверхностей семейства

<sup>1)</sup> Вполне уточненное доказательство можно получить, относя огибающую поверхность к ее параметрам  $u, v$  и рассматривая  $x, y, z$ , а также  $C$  как функции этих параметров. Тогда (475) и (476) превращаются в тождество относительно  $u, v$  и в качестве таковых дифференцируются почленно (берутся полные дифференциалы при аргументах  $u, v$ ).

мы оставляем в стороне, как вполне тривиальный. Тогда мы должны считать, что  $dC \neq 0$  и, следовательно,

$$F_C = 0.$$

Итак, каждая точка  $M(x, y, z)$  на огибающей и параметр  $C$ , отвечающий поверхности семейства, которая касается огибающей в этой точке, связаны уравнениями

$$F(x, y, z, C) = 0, \quad F_C(x, y, z, C) = 0. \quad (478)$$

Рассмотрим теперь эту пару уравнений независимо от огибающей. Так как здесь мы имеем два уравнения, связывающих четыре величины, то практически можно ожидать, что отсюда удастся выразить  $x, y, z$  и  $C$  как функции двух из них, или, более обще, как функции двух каких-нибудь независимых параметров  $u, v$  в достаточно малых областях изменения величин  $x, y, z, C$ ; более детальный анализ условий этого мы оставляем в стороне.

Тогда  $x, y, z$ , выраженные как функции  $u, v$ , определят нам некоторую поверхность, а  $C$ , тоже как функция  $u, v$ , сопоставит каждой точке этой поверхности определенное значение  $C$ . Полученную поверхность (или точнее систему всевозможных таких поверхностей) мы будем называть *дискриминантной* поверхностью. В каждой точке этой поверхности и для соответствующего значения  $C$  соблюдаются по определению уравнения (478).

Так как выше мы выяснили, что для огибающей и соответствующих ее точкам значений  $C$  уравнения (478) заведомо имеют место, то отсюда следует, что *огибающая лежит на дискриминантной поверхности*.

Теперь мы докажем и обратное, именно, что *дискриминантная поверхность в каждом своем простом куске является огибающей*. Тем самым будет установлено полное тождество обеих поверхностей.

Пусть  $M(x, y, z)$ —какая-нибудь точка на дискриминантной поверхности и  $C$ —соответствующее значение параметра. Тогда имеют место равенства (478); прежде всего

$$F(x, y, z, C) = 0, \quad (479)$$

т. е. поверхность семейства, отвечающая данному значению  $C$  [обозначим ее коротко через  $(C)$ ], проходит через точку  $M$ . Покажем, более того, что она касается дискриминантной поверхности в этой точке  $M$ . Этим наше утверждение будет доказано. Сместимся из точки  $M$  по дискриминантной поверхности; так как (479) имеет место в любой ее точке, то мы имеем право это равенство дифференцировать. Получаем

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz + F_C dC = 0,$$

где дифференциалы отвечают бесконечно малому смещению по дискриминантной поверхности (см. предшествующую сноска).

Но так как  $x, y, z, C$  удовлетворяют и второму из уравнений (478), то  $F_C = 0$ , и мы получаем

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0. \quad (480)$$

Обозначим коротко

$$\nabla F = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k};$$

это—градиент левой части уравнения поверхности семейства, направленный, как мы знаем, по нормали к поверхности семейства. Он взят нами в точке  $M(x, y, z)$  при соответствующем ей значении  $C$  и направлен, следовательно, по нормали к поверхности ( $C$ ) в точке  $M$ . Далее, дифференциал радиус-вектора  $d\mathbf{r}$  при рассматриваемом смещении по дискриминантной поверхности можно записать в виде

$$d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}.$$

Отсюда левую часть (480) можно представить в виде скалярного произведения

$$d\mathbf{r} \nabla F = 0.$$

Так как  $d\mathbf{r}$ —дифференциал радиус-вектора при произвольном смещении из точки  $M$  по дискриминантной поверхности, то все касательные к этой поверхности в точке  $M$  направлены перпендикулярно к  $\nabla F$ . Следовательно,  $\nabla F$  направлен по нормали к дискриминантной поверхности в точке  $M$ . А так как, кроме того, он направлен по нормали к поверхности ( $C$ ) в той же точке  $M$ , то нормали и касательные плоскости к обеим поверхностям в точке  $M$  совпадают. Это значит, что дискриминантная поверхность в каждом своем простом куске является и огибающей.

Итак, *огибающая поверхность совпадает с дискриминантной поверхностью* (478)<sup>1</sup>. Заметим, что при доказательстве существенную роль играло предположение, что в рассматриваемой области на поверхностях семейства и на огибающей имеются лишь заведомо обычные точки. Это сказалось в том, что мы градиенты  $\nabla F, \nabla \Phi$  предполагали отличными от нуля, без чего наше доказательство оказалось бы несостоятельным.

При практическом отыскании огибающей мы используем ее совпадение с дискриминантной кривой, т. е. исходим из уравнения (478). Конечно, нет необходимости обязательно выражать  $x, y, z, C$  в функции двух независимых параметров, как это мы делали при теоретическом рассмотрении. Нас вполне устроит, если удастся исключить из этих двух уравнений  $C$ , получив одно уравнение непосредственно между текущими координатами  $x, y, z$ —уравнение огибающей.

<sup>1)</sup> Если не обращать внимания на возможные особые точки дискриминантной поверхности.

В заключение следует ввести еще одно важное понятие, связанное с предыдущими построениями. До сих пор мы исходили из огибающей и уже в связи с ней рассматривали поверхности семейства. Пусть теперь, наоборот, дана поверхность семейства ( $C$ )

$$F(x, y, z, C) = 0 \quad (481)$$

при каком-нибудь *фиксированном* значении  $C$ . Нас интересуют те точки этой поверхности, где ее касается огибающая. Мы знаем, что координаты этих точек связаны с соответствующим значением параметра  $C$  уравнениями (478). Следовательно, к уравнению (481), выражающему, что точка  $(x, y, z)$  лежит на поверхности ( $C$ ), нужно присоединить уравнение

$$F_C(x, y, z, C) = 0. \quad (482)$$

Так как сейчас  $C$  фиксировано, т. е. поверхность ( $C$ ) задана, то уравнения (481) и (482) наложены только на  $(x, y, z)$  и определяют нам, как правило, кривую, лежащую на поверхности ( $C$ ). Точки этой кривой лежат в то же время и на огибающей, причем всем им отвечает

фиксированное значение  $C$ , т. е. во всех этих точках огибающая касается одной и той же поверхности ( $C$ ).

Кривая, вдоль которой огибающая касается данной поверхности семейства, называется *характеристикой*. Уравнения (478) превращаются в уравнения характеристики при фиксированном  $C$ . Очевидно, огибающую можно рассматривать как геометрическое место характеристик: каждая из поверхностей семейства касается огибающей по характеристике, которые в совокупности заполняют всю огибающую (черт. 116).

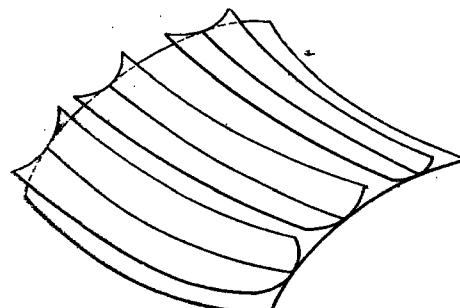
Нетрудно доказать, что если существует предельное положение линии пересечения бесконечно близких поверхностей семейства ( $C$ ) и ( $C + \Delta C$ ) при  $\Delta C \rightarrow 0$ , то это будет характеристика, лежащая на ( $C$ ).

Пример. Каналовой поверхностью называется огибающая семейства сфер

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - R^2 = 0,$$

где  $a, b, c, R$  суть функции параметра  $C$ .

Показать, что характеристики будут в этом случае окружностями, так что каналовая поверхность всегда образована  $\infty^1$  окружностей (обратное, однако, неверно).



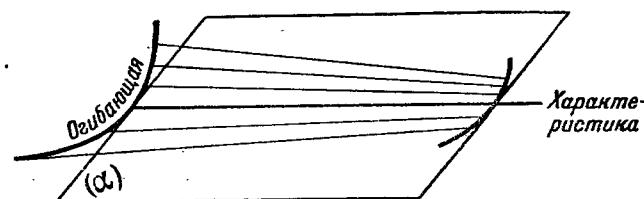
Черт. 116.

### § 69. Развертывающаяся поверхность как огибающая семейства плоскостей.

Изучим теперь важный частный случай огибающей семейства поверхностей, именно, когда эти поверхности суть плоскости. Общий вид уравнения такого семейства будет

$$A(\alpha)x + B(\alpha)y + C(\alpha)z + D(\alpha) = 0, \quad (483)$$

где  $x, y, z$  — текущие координаты плоскости, а  $A, B, C, D$  — коэффициенты ее уравнения, зависящие от параметра семейства  $\alpha$ .



Черт. 117.

Найдем *характеристику*, лежащую на данной плоскости семейства. Для этого к уравнению (483) нужно присоединить, как мы знаем из § 68, еще уравнение

$$A'(\alpha)x + B'(\alpha)y + C'(\alpha)z + D'(\alpha) = 0, \quad (484)$$

полученное дифференцированием левой части (483) по параметру  $\alpha$ . Мы будем считать, что уравнения (483) и (484) совместны и независимы<sup>1)</sup>. Тогда совместно они определяют на данной плоскости семейства прямую, которая и будет служить характеристикой. Итак, характеристики в нашем случае — прямые, и огибающая — как их геометрическое место — представляет собой линейчатую поверхность. Эта поверхность, как легко показать, будет не только линейчатой, но и развертывающейся. Действительно, вдоль характеристики, т. е. вдоль своей прямолинейной образующей, огибающая поверхность касается поверхности семейства, т. е. некоторой плоскости из семейства (483) (черт. 117). Эта пло-

<sup>1)</sup> Это всегда имеет место, за исключением случая  $A': A = B': B = C': C$ , с которым мы кратко ознакомимся, чтобы в дальнейшем оставить его в стороне. Путем почлененного интегрирования по  $\alpha$  мы убеждаемся, что  $\ln A, \ln B, \ln C$  могут отличаться друг от друга лишь постоянными слагаемыми, а следовательно,  $A(\alpha), B(\alpha), C(\alpha)$  находятся друг к другу в постоянных отношениях. Другими словами, у всех плоскостей семейства (483) коэффициенты  $A, B, C$  пропорциональны, что означает параллелизм всех этих плоскостей. Итак, (483) представит нам пучок параллельных плоскостей (в частном случае сливающихся в одну плоскость). Огибающей, очевидно, не существует.

скость служит, таким образом, общей касательной плоскостью во всех точках образующей, так что наша огибающая является развертывающейся поверхностью по самому определению последней.

Обратно, всякая развертывающаяся поверхность есть огибающая некоторого семейства плоскостей от одного параметра. Действительно, семейство образующих развертывающейся поверхности зависит от одного параметра. А так как через данную образующую проходит единственная касательная плоскость (касающаяся поверхности во всех точках образующей), то семейство всевозможных касательных плоскостей к развертывающейся поверхности будет зависеть *только от одного параметра* (в отличие от этого для произвольной поверхности семейство касательных плоскостей будет зависеть от двух параметров). В результате развертывающаяся поверхность в каждой своей точке касается некоторой плоскости из однопараметрического семейства своих касательных плоскостей, т. е. является для этого семейства огибающей.

Итак, для того чтобы поверхность была развертывающейся, необходимо и достаточно, чтобы она была огибающей семейства плоскостей от одного параметра.

### § 70\*. Ребро возврата огибающей семейства плоскостей.

Развертывающейся поверхности можно, таким образом, дать второе определение как огибающей однопараметрического семейства плоскостей.

Продолжим теперь изучение семейства плоскостей, заданного уравнением (483). Мы знаем, что огибающая отыскивается как геометрическое место прямых (характеристик), определяемых парой уравнений (483), (484) при всевозможных значениях  $\alpha$ . Поставим вопрос, как найти ребро возврата огибающей, если такое существует (т. е. если огибающая — не цилиндрическая и не коническая поверхность).

Отметим для каждого значения  $\alpha$  на отвечающей ему характеристике точку, где эта характеристика (образующая развертывающейся поверхности) касается ребра возврата. Пусть координаты этой точки выражаются пока неизвестными нам функциями

$$x = x(\alpha), \quad y = y(\alpha), \quad z = z(\alpha). \quad (485)$$

Тогда эти функции удовлетворяют прежде всего уравнениям (483) и (484), так как при каждом значении  $\alpha$  соответствующая точка (485) лежит на соответствующей характеристике. Итак, имеем тождество

$$\left. \begin{array}{l} Ax + By + Cz + D = 0, \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0, \end{array} \right\} \quad (486)$$

где аргумент  $\alpha$  при всех рассматриваемых величинах для краткости не выписывается.

Теперь нужно дополнительно выставить требование, чтобы при каждом значении  $\alpha$  производная радиус-вектора

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}$$

вдоль ребра возврата была направлена по соответствующей характеристике. Но эта характеристика лежит, во-первых, на плоскости (483) и, следовательно, перпендикулярна к вектору

$$A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k},$$

а во-вторых, — на плоскости (484) и, следовательно, перпендикулярна к вектору

$$A'\mathbf{i} + B'\mathbf{j} + C'\mathbf{k}.$$

Очевидно, этими условиями направление характеристики вполне определяется, так что, для того чтобы  $\mathbf{r}'$  был направлен по характеристике, необходимо и достаточно, чтобы он был перпендикулярен к выписанным двум векторам. Запишем это, приравнивая нулью скалярные произведения вектора  $\mathbf{r}'$  с каждым из двух выписанных векторов:

$$\left. \begin{array}{l} Ax' + By' + Cz' = 0, \\ A'x' + B'y' + C'z' = 0. \end{array} \right\} \quad (487)$$

Итак, условия (486) и (487), наложенные на функции (485), необходимы и достаточны, чтобы кривая, определяемая уравнениями (485), была ребром возврата для огибающей рассматриваемого семейства плоскостей. Действительно, (486) выражает, что при каждом  $\alpha$  точка кривой (485) лежит на соответствующей характеристике, а (487) — что эта характеристика направлена по касательной к кривой (485) и, следовательно, с этой касательной совпадает.

Условия (486), (487) нетрудно преобразовать. Дифференцируя первое из равенств (486) по  $\alpha$ , получим

$$A'x + B'y + C'z + D' + Ax' + By' + Cz' = 0.$$

Принимая во внимание второе из равенств (486), можно отбросить здесь первые четыре члена. Получаем первое из равенств (487), которое, таким образом, самостоятельного значения не имеет и получается как следствие из (486).

Дифференцируем теперь второе из равенств (486). Тогда

$$A''x + B''y + C''z + D'' + A'x' + B'y' + C'z' = 0.$$

Принимая во внимание второе из равенств (487), можно отбросить здесь последние три члена, после чего получается

$$A''x + B''y + C''z + D'' = 0. \quad (488)$$

Обратно, из (488) и из предыдущего равенства немедленно следует второе из условий (487). Поэтому условия (486) и (487) равносильны условиям (486) с добавлением условия (488). Окончательно получаем следующие требования, наложенные на  $x(\alpha)$ ,  $y(\alpha)$ ,  $z(\alpha)$ :

$$\left. \begin{array}{l} Ax + By + Cz + D = 0, \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0, \\ A''x + B''y + C''z + D'' = 0, \end{array} \right\} \quad (489)$$

необходимые и достаточные для того, чтобы функции  $x(\alpha)$ ,  $y(\alpha)$ ,  $z(\alpha)$  определяли ребро возврата.

Если определитель системы отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} \neq 0, \quad (490)$$

то система трех линейных уравнений (489) однозначно разрешается относительно  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , и искомые функции, определяющие параметрическое представление ребра возврата, получаются непосредственно. При этом не исключена возможность, что  $x$ ,  $y$ ,  $z$  окажутся постоянными, т. е. ребро возврата выродится в точку (случай, когда семейство плоскостей огибает коническую поверхность). В случае же тождественного обращения в нуль определителя (490) линейные уравнения системы (489), как известно, несовместны (что означает отсутствие ребра возврата) или при добавочном условии зависимы между собой, так что их решение становится неопределенным.

Чтобы уяснить себе положение вещей в этом случае, составим вектор-функцию параметра  $\alpha$ :

$$\mathbf{N}(\alpha) = Ai + Bj + Ck. \quad (490')$$

Очевидно, что обращение в нуль определителя (490) можно записать теперь в виде

$$(\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathbf{N}'') = 0, \quad (491)$$

где в левой части стоит смешанное произведение векторов  $\mathbf{N}(\alpha)$ ,  $\mathbf{N}'(\alpha)$ ,  $\mathbf{N}''(\alpha)$ . Другими словами,  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{N}'$ ,  $\mathbf{N}''$  компланарны. Обозначим через  $\mathbf{n}(\alpha)$  единичный вектор, перпендикулярный к их плоскости; тогда

$$\mathbf{n}\mathbf{N} = \mathbf{n}\mathbf{N}' = \mathbf{n}\mathbf{N}'' = 0. \quad (492)$$

Дифференцируем по  $\alpha$  первые два произведения:

$$\mathbf{n}'\mathbf{N} + \mathbf{n}\mathbf{N}' = \mathbf{n}'\mathbf{N}' + \mathbf{n}\mathbf{N}'' = 0.$$

Сравнивая с (492), получим

$$\mathbf{n}'\mathbf{N} = \mathbf{n}'\mathbf{N}' = 0.$$

Отсюда следует, что  $\mathbf{n}' = 0$ ; действительно, в противном случае  $\mathbf{n}'$  ортогонален плоскости  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{N}'$  ( $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{N}'$  не коллинеарны, см. сноску на стр. 315) и, следовательно, параллелен  $\mathbf{n}$ , что невозможно, так как  $|\mathbf{n}| = 1$  и  $\mathbf{n}' \perp \mathbf{n}$ .

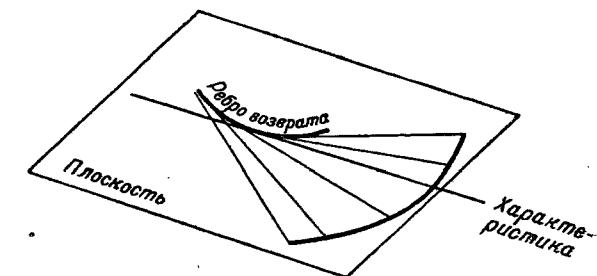
Итак,  $\mathbf{n}' = 0$ ,  $\mathbf{n} = \text{const.}$ , а следовательно, вектор  $\mathbf{N}(\alpha)$  ортогонален все время постоянному вектору  $\mathbf{n}$ .

Так как плоскости семейства (483) перпендикулярны к соответствующим векторам  $\mathbf{N}(\alpha)$ , то *постоянный вектор  $\mathbf{n}$  параллелен плоскостям семейства (483) при любом значении  $\alpha$* .

Все плоскости семейства оказываются параллельными постоянному вектору. В результате их огибающая будет цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными тому же вектору. Ребро возврата отсутствует, что отвечает несовместности уравнений (489).

Возможно, однако, вырождение такого семейства просто в пучок плоскостей; тогда цилиндрическая огибающая поверхность вырождается в ось пучка. Понятие ребра возврата теряет вообще смысл, и этому-то случаю отвечают линейная зависимость между уравнениями (489) и неопределенность их решения.

Итак, если оставить в стороне исключительные случаи, то при каждом значении  $\alpha$  уравнение (483) определяет плоскость семейства; уравнения (483) и (484) определяют на этой плоскости прямую — характеристику. Присоединя еще одно уравнение, мы приходим к системе (489), которая на этой характеристике определяет точку ребра возврата. Когда параметр  $\alpha$  меняется, то характеристика описывает огибающую развертывающуюся поверхность, для которой плоскости семейства служат касательными вдоль характеристики; точка, отмеченная на характеристике, описывает ребро возврата, для которого характеристики служат касательными, а плоскости семейства — соударивающимися плоскостями (последнее вытекает из свойств ребра возврата, см. § 66) (черт. 118).



Черт. 118.

Заметим еще, что характеристику из данной плоскости семейства можно получить как предельное положение прямой пересечения этой плоскости с бесконечно близкой плоскостью семейства, а точка ребра возврата на данной плоскости семейства может быть получена как предельное положение точки пересечения данной плоскости и двух бесконечно близких к ней плоскостей семейства.

#### Примеры.

Рассмотрим в заключение несколько интересных примеров огибающих семейства плоскостей, связанных с произвольно выбранной пространственной кривой. Пусть попрежнему  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$  — уравнение этой кривой, отнесенное к дуге  $s$  как параметру, а  $\mathbf{t}(s)$ ,  $\mathbf{n}(s)$ ,  $\mathbf{b}(s)$  — векторы основного трехгранника, рассматриваемые как функции от  $s$ .

1. Семейство соприкасающихся плоскостей. Уравнение соприкасающейся плоскости в произвольной точке  $s$  нашей кривой мы запишем как уравнение плоскости, проходящей через точку  $\mathbf{r}(s)$  перпендикулярно к вектору  $\mathbf{b}(s)$ :

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}(s)) \mathbf{b}(s) = 0;$$

Здесь уравнение дано в сокращенной векторной записи, причем под  $\mathbf{R}$  мы понимаем радиус-вектор произвольной точки плоскости:

$$\mathbf{R} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k},$$

где  $X, Y, Z$  — текущие координаты. Так как в уравнении участвует параметр  $s$ , то мы имеем здесь целое семейство соприкасающихся плоскостей, взятых для любой точки кривой. Найдем прежде всего характеристики. Для этого к уравнению семейства присоединим результат его дифференцирования по  $s$ . Получим

$$-\mathbf{r}'(s) \mathbf{b}(s) + (\mathbf{R} - \mathbf{r}(s)) \mathbf{b}'(s) = 0$$

или

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}(s)) \mathbf{n}(s) = 0,$$

так как  $\mathbf{r}'(s) = \mathbf{t}(s) \perp \mathbf{b}(s)$  и  $\mathbf{b}'(s) = -\kappa(s) \mathbf{n}(s)$  (мы считаем  $\kappa(s) \neq 0$ ).

Мы видим теперь, что  $\mathbf{R} - \mathbf{r}(s)$  перпендикулярно к  $\mathbf{b}(s)$  и к  $\mathbf{n}(s)$  одновременно и, следовательно, направлено по  $\mathbf{t}(s)$ ; характеристика при каждом значении  $s$  совпадает с соответствующей касательной к кривой.

Наконец, для получения точек ребра возврата присоединяем третье уравнение, которое получится из второго, т. е. из

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}(s)) \mathbf{n}(s) = 0$$

дифференцированием снова по  $s$ :

$$-\mathbf{r}'(s) \mathbf{n}(s) + (\mathbf{R} - \mathbf{r}(s)) (\kappa(s) \mathbf{b}(s) - k(s) \mathbf{t}(s)) = 0.$$

Так как  $\mathbf{r}'(s) = \mathbf{t}(s) \perp \mathbf{n}(s)$ , то первый член отпадает. Комбинируя это уравнение с ранее полученными, мы видим, что  $\mathbf{R} - \mathbf{r}(s)$  дает нуль в скалярном произведении со всеми тремя векторами  $\mathbf{t}(s)$ ,  $\mathbf{n}(s)$ ,  $\mathbf{b}(s)$  и, следовательно, сам обращается в нуль. Итак, для точки ребра возврата

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(s),$$

т. е. она совпадает с соответствующей точкой кривой. Ребром возврата служит исходная кривая.

#### § 71] АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ЛИНИИ И ПОЛНАЯ КРИВИЗНА

2. Семейство нормальных плоскостей. Уравнение нормальной плоскости как плоскости, проходящей через точку  $\mathbf{r}(s)$  перпендикулярно к  $\mathbf{t}(s)$ , имеет вид

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}(s)) \mathbf{t}(s) = 0.$$

При переменном  $s$  мы имеем здесь семейство нормальных плоскостей. Присоединяя для отыскания характеристик второе уравнение, полученнное дифференцированием по  $s$ :

$$-\mathbf{r}'(s) \mathbf{t}(s) + (\mathbf{R} - \mathbf{r}(s)) \mathbf{t}'(s) = 0, \quad \text{т. е.} \quad -1 + (\mathbf{R} - \mathbf{r}(s)) \mathbf{k}(s) \mathbf{n}(s) = 0.$$

Отсюда легко вывести, что точки  $\mathbf{R}$  расположены на прямой, параллельной  $\mathbf{b}(s)$  и проходящей через центр кривизны  $\mathbf{r}(s) + \frac{1}{k(s)} \mathbf{n}(s)$ . Другими словами, характеристика при каждом значении  $s$  совпадает с осью кривизны. Следовательно, оси кривизны пространственной кривой образуют некоторую развертывающуюся поверхность, огибающую семейство нормальных плоскостей. Чтобы отыскать ребро возврата, которого касаются все оси кривизны, нужно присоединить третье уравнение, полученное новым дифференцированием по  $s$ . Но соответствующая выкладка была фактически проведена в § 43, при выводе формулы (296), где она приводила нас к отысканию радиус-вектора  $\mathbf{r}_s$  для центра соприкасающейся сферы. В данном случае совершенно аналогичные формулы получатся для вектора  $\mathbf{R}$ , так что ребро возврата совпадает с геометрическим местом центров соприкасающихся сфер.

3. Семейство спрямляющих плоскостей. Имеем

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}(s)) \mathbf{n}(s) = 0.$$

Соответствующая выкладка легко приводит нас к выводу, что характеристики будут совпадать с мгновенными осями вращения трехгранника  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ . Образованная ими развертывающаяся поверхность называется спрямляющей. Название это объясняется тем, что после развертывания этой поверхности на плоскость исходная кривая обратится в прямую.

#### § 71\*. Асимптотические линии и полная кривизна линейчатой поверхности.

Пусть дана произвольная линейчатая поверхность. В каждой ее точке направление образующей будет служить асимптотическим направлением, т. е. кривизна нормального сечения в этом направлении равна нулю. Действительно, плоскость, проведенная через нормаль и направление образующей в данной точке поверхности, очевидно, пересекается с поверхностью по образующей, которая и служит нормальным сечением. Кривизна его как прямой линии равна нулю. Таким образом, образующие линейчатой поверхности дают одно из двух семейств асимптотических линий на ней.

Проверим этот результат выкладкой. Воспользуемся параметрическим представлением линейчатой поверхности (464)

$$\mathbf{r} = \rho(u) + v\mathbf{l}(u).$$

Вычислим вторые частные производные радиус-вектора по  $u, v$ :

$$\mathbf{r}_{uu} = \rho'' + v\mathbf{l}'', \quad \mathbf{r}_{uv} = \mathbf{l}', \quad \mathbf{r}_{vv} = 0. \quad (493)$$

Учтем также, что единичный вектор по нормали можно получить, разделив нормальный вектор (466) на его модуль (всегда равный  $\sqrt{EG - F^2}$ ):

$$\mathbf{m} = \frac{[\mathbf{r}', \mathbf{l}] + v [\mathbf{l}', \mathbf{l}]}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Отсюда по формулам (359), определяющим коэффициенты второй квадратичной формы, получаем

$$\left. \begin{aligned} L &= \mathbf{r}_{uu} \mathbf{m} = \frac{Av^2 + Bv + C}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ M &= \mathbf{r}_{uv} \mathbf{m} = \frac{D}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ N &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (494)$$

где коэффициенты  $A, B, C, D$  имеют, очевидно, следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} A &= (\mathbf{l}'', \mathbf{l}', \mathbf{l}), & B &= (\mathbf{r}'', \mathbf{l}', \mathbf{l}) + (\mathbf{l}'', \mathbf{r}', \mathbf{l}), \\ C &= (\mathbf{r}'', \mathbf{r}', \mathbf{l}), & D &= (\mathbf{l}', \mathbf{r}', \mathbf{l}), \end{aligned} \right\} \quad (495)$$

и, следовательно, зависят только от  $u$ . Дифференциальное уравнение

$$L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = 0,$$

определенное асимптотические линии, примет теперь вид (после откidyивания знаменателя  $\sqrt{EG - F^2}$ )

$$\begin{aligned} (Av^2 + Bv + C) du^2 + 2D du dv &= 0, \\ [(Av^2 + Bv + C) du + 2D dv] du &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда или

$$du = 0,$$

что дает нам в качестве одного семейства асимптотических линий координатные линии  $v$ , т. е. образующие; или

$$(Av^2 + Bv + C) du + 2D dv = 0, \quad (496)$$

что определяет нам второе семейство асимптотических линий.

Здесь следует различать два случая.

Косая (т. е. неразвертывающаяся) линейчатая поверхность. Так как необходимым и достаточным признаком развертывающейся поверхности служит компланарность векторов  $\mathbf{l}, \mathbf{l}', \mathbf{r}'$  [см. (468)], т. е. обращение в нуль смешанного произведения этих векторов, то в нашем случае это смешанное произведение отлично от нуля и, следовательно,

$$D \neq 0.$$

Дифференциальное уравнение (496) оказывается уравнением типа Риккати:

$$\frac{dv}{du} + \frac{A}{2D} v^2 + \frac{B}{2D} v + \frac{C}{2D} = 0.$$

Решения этого уравнения

$$v = v(u)$$

дают уравнения асимптотических линий второго семейства. По известным свойствам уравнения Риккати любые четыре его решения

$$v_1(u), v_2(u), v_3(u), v_4(u)$$

образуют постоянное «ангармоническое отношение»:

$$\frac{v_3(u) - v_1(u)}{v_3(u) - v_2(u)} : \frac{v_4(u) - v_1(u)}{v_4(u) - v_2(u)} = \text{const.}$$

Геометрически это означает, что, пересекая какую-нибудь четверку асимптотических второго семейства всевозможными образующими, мы получаем на каждой из образующих четверку точек, ангармоническое отношение которых будет иметь одно и то же значение.

Действительно,  $v_1(u), v_2(u), v_3(u), v_4(u)$  при данном значении  $u$  суть координаты четырех точек на соответствующей образующей, в которых она встречается с четырьмя асимптотическими линиями.

Отметим еще, что для линейчатой поверхности полная кривизна имеет вид

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{-D^2}{(EG - F^2)^2}. \quad (497)$$

Мы воспользовались здесь формулами (494). В нашем случае неразвертывающейся поверхности, когда  $D \neq 0$ , мы получаем полную кривизну существенно отрицательной. Это видно, впрочем, уже из того, что поверхность содержит два семейства асимптотических линий.

Теперь рассмотрим другой возможный случай.

Развертывающаяся поверхность. В этом случае в силу признака (468) у нас  $D = 0$ , уравнение (496) дает тоже

$$du = 0,$$

и оба семейства асимптотических совпадают. Это возможно лишь в случае 3 § 60, так что асимптотические (образующие) суть в то же время линии кривизны одного семейства и

$$K = 0; \quad (498)$$

мы получаем, следовательно, поверхность нулевой полной кривизны. Также из формулы (497) непосредственно видно, что из  $D = 0$  следует  $K = 0$ .

Итак, развертывающиеся поверхности выделяются среди линейчатых обращением в нуль полной кривизны. Мы покажем, далее, что и вообще развертывающиеся поверхности тождественны с поверхностями нулевой полной кривизны.

При мер. На однополостном гиперболоиде и гиперболическом параболоиде асимптотические линии обоих семейств совпадают с прямолинейными образующими. Следовательно, биссектрисы углов между образующими дают главные направления.

### § 72. Развертывающиеся поверхности как поверхности нулевой полной кривизны.

Можно показать без каких-либо выкладок, что развертывающаяся поверхность имеет нулевую полную кривизну

$$K = 0.$$

Действительно, вдоль прямолинейной образующей касательная плоскость, а значит, и единичный вектор нормали  $\mathbf{m}$  остаются постоянными, так что

$$d\mathbf{m} = 0.$$

Вектор нуль коллинеарен с любым другим вектором, так что можно считать, что

$$d\mathbf{m} \parallel d\mathbf{r},$$

где  $d\mathbf{r}$  — дифференциал радиус-вектора вдоль образующей. А это значит (§ 55), что прямолинейная образующая в каждой своей точке идет по одному из главных направлений.

Это главное направление будет и асимптотическим, так как прямолинейная образующая обязательно будет асимптотической линией (§ 60). Но совпадение асимптотического и главного направлений имеет место только в параболических точках, так что все точки развертывающейся поверхности параболические и

$$K \equiv 0.$$

Верна и обратная теорема. Если все точки поверхности параболические,  $K \equiv 0$ , то поверхность развертывающаяся. То, что поверхность линейчатая, заранее не предполагается.

Как мы знаем (конец § 60), в случае  $K \equiv 0$  на поверхности имеется лишь одно семейство асимптотических, совпадающее с одним из двух семейств линий кривизны. Следовательно, касательная к асимптотической линии в каждой точке идет по направлению одновременно и асимптотическому и главному, при-

чем соответствующая главная кривизна  $k_2$  в этом случае равна нулю (§ 57):

$$k_2 = 0.$$

Кроме того, при бесконечно малом смещении вдоль асимптотической имеет место формула Родрига

$$d\mathbf{m} = -k_2 d\mathbf{r},$$

так как это смещение происходит в главном направлении.

Сопоставляя эти формулы, получим

$$d\mathbf{m} = 0; \quad \mathbf{m} = \mathbf{m}_0 = \text{const.}$$

Единичный нормальный вектор  $\mathbf{m}$  остается постоянным вдоль асимптотической линии и, следовательно, нормали к поверхности во всех точках асимптотической линии параллельны между собой. Более того, нетрудно показать, что плоскости, касательные к поверхности в точках асимптотической линии, все совпадают между собой.

В самом деле, рассмотрим вдоль асимптотической линии скалярное произведение  $r\mathbf{m}_0$ . Дифференциал его, в силу постоянства  $\mathbf{m}_0$ , имеет вид  $\mathbf{m}_0 d\mathbf{r}$  и равен нулю, так как  $d\mathbf{r}$  направлено по касательной к асимптотической линии и, следовательно, перпендикулярно к  $\mathbf{m}_0$ . Итак,  $r\mathbf{m}_0$  остается постоянным. Пусть  $\mathbf{r}_0$  — радиус-вектор какой-либо фиксированной точки  $M_0$  асимптотической линии. Тогда

$$r\mathbf{m}_0 = \mathbf{r}_0\mathbf{m}_0 \text{ и, следовательно, } (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{m}_0 = 0.$$

Отсюда следует, что вектор  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ , соединяющий фиксированную точку  $M_0$  на асимптотической линии с ее произвольной точкой, перпендикулярен к  $\mathbf{m}_0$ , и лежит, следовательно, в касательной плоскости в точке  $M_0$ . Таким образом, асимптотическая линия всеми своими точками лежит в касательной плоскости в точке  $M_0$ . В результате эта плоскость, заключая асимптотическую линию и будучи перпендикулярна к постоянному вдоль нее нормальному вектору  $\mathbf{m}_0$ , будет служить касательной плоскостью во всех ее точках.

Так как асимптотические линии образуют семейство от одного параметра и каждой из них отвечает единственная касательная плоскость, то рассматриваемая поверхность обладает семейством касательных плоскостей от одного параметра, для которого она является, очевидно, огибающей. На основании доказанного в § 69 мы знаем, что тем самым поверхность будет и развертывающейся. Наша цель достигнута: доказано, что, для того чтобы поверхность была развертывающейся, необходимо и достаточно, чтобы ее полная кривизна  $K$  была равна нулю.

**§ 73\*. Ортогональные траектории развертывающихся поверхностей.**

Из двух взаимно ортогональных семейств линий кривизны, которые имеются на каждой поверхности, в случае развертывающейся поверхности одно превращается в семейство прямолинейных образующих, а другое — в семейство их ортогональных траекторий, т. е. кривых, встречающих все образующие под прямым углом.

Если даы две пространственные кривые, точки которых можно поставить во взаимно однозначное соответствие так, что *каждая касательная к первой кривой является нормалью в соответствующей точке второй кривой*, то первая кривая называется *эволютой* по отношению ко второй, а вторая — *эвольвентой* по отношению к первой (черт. 119).

Очевидно, что то же самое может быть формулировано и так: *эволюта и эвольвента — это соответственно ребро возврата и некоторая ортогональная траектория какой-нибудь развертывающейся поверхности*.

Действительно, касательные к эволюте образуют некоторую развертывающуюся поверхность, для которой эволюта является, таким образом, ребром возврата и на которой эвольвента, имея образующие своими нормальми, служит ортогональной траекторией.

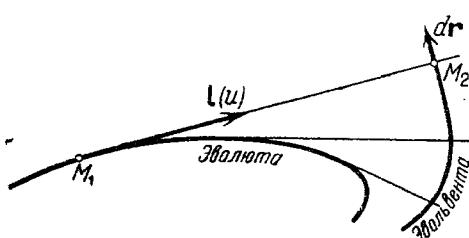
Обратно, на всякой развертывающейся поверхности ортогональная траектория пересекает образующие под прямым углом и имеет их, следовательно, своими нормальми; для ребра же возврата образующие служат, как мы знаем, касательными в соответствующих точках.

Итак, второе определение эквивалентно первому, и только лишь в случае плоских кривых предпочтительнее первое (вполне совпадающее с ранее известным). Действительно, развертывающаяся поверхность, о которой идет речь во втором определении, оказывается в этом случае плоской и ее образующие становятся неопределенными.

Мы рассмотрим теперь две задачи.

1. По данной эволюте (ребру возврата) найти эвольвенту (ортогональную траекторию). Пусть уравнение ребра возврата будет

$$\rho = \rho(u).$$



Черт. 119.

При образовании развертывающейся поверхности мы примем ребро возврата за направляющую кривую; тогда вектор-функция  $\mathbf{l}(u)$ , указывающая направления образующих, совпадает с единичным касательным вектором к ребру возврата, так что

$$\mathbf{l}(u) = \mathbf{t}(u) = \frac{d\rho(u)}{ds(u)} \text{ или } d\rho(u) = \mathbf{l}(u) ds(u), \quad (499)$$

где  $s(u)$  — длина дуги, отсчитываемая вдоль ребра возврата в сторону возрастания  $u$ .

Вводим криволинейные координаты  $u$ ,  $v$  обычным для линейчатой поверхности путем (§ 64) и ищем уравнение ортогональной траектории в виде

$$v = v(u). \quad (500)$$

Так как радиус-вектор произвольной точки поверхности имеет вид (464), то вдоль кривой (500) мы имеем

$$\mathbf{r} = \rho(u) + v(u) \mathbf{l}(u),$$

отсюда

$$d\mathbf{r} = d\rho + \mathbf{l} dv + v d\mathbf{l}$$

или, заменяя  $d\rho$ , согласно (499),

$$d\mathbf{r} = \mathbf{l}(ds + dv) + v d\mathbf{l}.$$

Потребуем теперь, чтобы вектор  $d\mathbf{r}$ , касательный к рассматриваемой кривой, был при каждом значении  $u$  перпендикулярен к соответствующей образующей, т. е. к вектору  $\mathbf{l}(u)$ .

Дифференциал  $dv$  единичного вектора  $\mathbf{l}$  перпендикулярен к  $\mathbf{l}$ ; поэтому остается потребовать, чтобы обращалась в нуль составляющая по  $\mathbf{l}$ , т. е. чтобы

$$ds(u) + dv(u) = 0.$$

Интегрируя это соотношение, получаем

$$v(u) = C - s(u), \quad (501)$$

где  $C$  — произвольное постоянное. В результате мы получаем семейство кривых, каждая из которых есть ортогональная траектория развертывающейся поверхности и, следовательно, эвольвента по отношению к ребру возврата.

Уравнение (501) показывает, что при движении по ребру возврата отрезок образующей  $M_1M_2$  (черт. 119), численно выражаемый функцией  $v(u)$ , уменьшается на столько, на сколько увеличивается  $s(u)$  — длина дуги, отсчитываемая по ребру возврата.

Далее, если

$$v = v_1(u) \quad \text{и} \quad v = v_2(u)$$

—уравнения двух ортогональных траекторий, то, согласно (501),

$$v_1(u) = C_1 - s(u), \quad v_2(u) = C_2 - s(u),$$

откуда

$$v_2(u) - v_1(u) = C_2 - C_1.$$

Итак, отрезок образующей между двумя ортогональными траекториями сохраняет постоянную длину.

2. По данной эвольвенте (ортогональной траектории) найти эволюту (ребро возврата). Пусть уравнение данной кривой в пространстве будет

$$\rho = \rho(s); \quad (502)$$

где  $s$  — длина дуги.

Требуется построить развертывающуюся поверхность, для которой данная кривая будет служить ортогональной траекторией; тогда для ребра возврата этой поверхности данная кривая сама собой будет служить эвольвентой. Примем

(502) за направляющую кривую искомой поверхности (см. начало § 64); так как образующие последней должны ортогонально пересекать кривую (502), то вектор  $\mathbf{l}(s)$  должен быть при каждом значении  $s$  направлен по нормали к этой кривой. Поэтому  $\mathbf{l}(s)$  лежит в плоскости векторов  $\mathbf{n}(s)$  и  $\mathbf{b}(s)$ . Обозначая через  $\varphi(s)$  угол, образуемый  $\mathbf{l}(s)$  с  $\mathbf{n}(s)$  (черт. 120), можно искать вдоль кривой единичный вектор  $\mathbf{l}$  в виде

$$\mathbf{l} = \mathbf{n} \cos \varphi + \mathbf{b} \sin \varphi. \quad (503)$$

Потребуем теперь, чтобы линейчатая поверхность с направляющей линией  $\rho(s)$  и образующими, идущими по  $\mathbf{l}(u)$ , была развертывающейся. Согласно § 64 для этого необходима и достаточна компланарность векторов  $\rho'$ ,  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{l}'$ , т. е. в нашем случае векторов  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{l}$ ,  $\frac{d\mathbf{l}}{ds}$ .

Дифференцируя разложение  $\mathbf{l}$  (503), получим

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{l}}{ds} &= \frac{d\mathbf{n}}{ds} \cos \varphi - \mathbf{n} \sin \varphi \frac{d\varphi}{ds} + \frac{d\mathbf{b}}{ds} \sin \varphi + \mathbf{b} \cos \varphi \frac{d\varphi}{ds} = \\ &= (\mathbf{b} - k\mathbf{t}) \cos \varphi - \mathbf{n} \sin \varphi \frac{d\varphi}{ds} - \mathbf{n} \sin \varphi + \mathbf{b} \cos \varphi \frac{d\varphi}{ds} = \\ &= -k \cos \varphi \cdot \mathbf{t} + \left( \frac{d\varphi}{ds} + z \right) (-\sin \varphi \cdot \mathbf{n} + \cos \varphi \cdot \mathbf{b}). \end{aligned} \quad (503')$$

Очевидно, линейная зависимость полученного вектора от векторов  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{l}$  имеет место в том и только в том случае, если

$$\frac{d\varphi}{ds} + z = 0. \quad (504)$$

Действительно, если (504) имеет место, то в выражении  $\frac{d\mathbf{l}}{ds}$  остается только член, параллельный  $\mathbf{t}$ , так что линейная зависимость налицо. Напротив, если  $\frac{d\varphi}{ds} + z \neq 0$ , то в выражении  $\frac{d\mathbf{l}}{ds}$  имеется еще член, параллельный вектору

$$-\sin \varphi \cdot \mathbf{n} + \cos \varphi \cdot \mathbf{b}$$

и, следовательно, ортогональный и к  $\mathbf{t}$ , и к  $\mathbf{l}$  [что легко проверить, пользуясь выражением (503)]. В этом случае линейная зависимость от  $\mathbf{t}$  и  $\mathbf{l}$  не может, очевидно, иметь места.

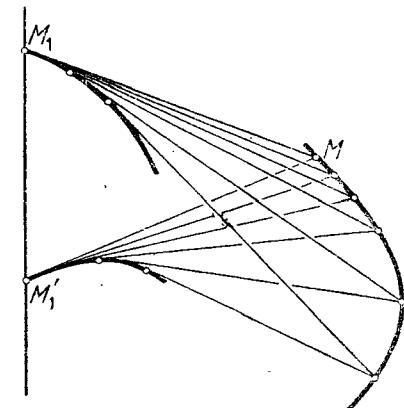
Итак, для того чтобы построенная нами линейчатая поверхность была развертывающейся, необходимо и достаточно соблюдение условия (504), которое можно переписать в виде

$$d\varphi = -z(s) ds \text{ или } \varphi = - \int z(s) ds. \quad (505)$$

При интегрировании здесь войдет произвольная постоянная, так что допустимых функций  $\varphi(s)$  будет бесчисленное множество, причем все они друг от друга отличаются постоянными слагаемыми.

В соответствии с этим можно построить бесчисленное множество развертывающихся поверхностей, для которых исходная кривая  $\rho(s)$  служит ортогональной траекторией. А именно, любая из этих поверхностей образуется нормальями, проведенными в каждой точке кривой  $\rho(s)$  по направлению вектора (503), т. е. под углом  $\varphi(s)$  к главной нормали. При этом  $\varphi(s)$  определяется уравнением (505). Если от одной такой поверхности перейти к другой, то  $\varphi(s)$  может измениться лишь на постоянное; следовательно, все нормали кривой, служащие образующими поверхности, повернутся на один и тот же угол, каждая в своей нормальной плоскости (черт. 121).

Отсюда следует, что если две развертывающиеся поверхности имеют общую ортогональную траекторию, то их образующие встречаются на ней под постоянным углом.



Черт. 121.

Обратно, если образующие развертывающейся поверхности в точках, где они встречаются с какой-нибудь ортогональной траекторией, повернуть все на один и тот же угол в плоскостях, нормальных к траектории, то в новых положениях они опять образуют развертывающуюся поверхность. Это также непосредственно следует из предыдущих рассуждений, так как при добавлении к функции  $\phi(s)$  постоянного слагаемого она попрежнему удовлетворяет условию (505) и, следовательно, посредством вектора (503) попрежнему определяет развертывающуюся поверхность.

Итак, мы умеем построить для каждой пространственной кривой всевозможные развертывающиеся поверхности, для которых данная кривая служит ортогональной траекторией. Для этого достаточно принять данную кривую  $\rho(s)$  за направляющую и провести через каждую ее точку  $M$  образующую по направлению вектора

$$\mathbf{l}(s) = \mathbf{n} \cos \phi + \mathbf{b} \sin \phi, \text{ где } \phi = - \int \kappa(s) ds.$$

Найдем теперь ребро возврата для какой-нибудь из этих поверхностей (на черт. 121 изображены два таких ребра возврата).

Воспользуемся формулой (470), которая дает параметрическое представление горловой линии (совпадающей в случае развертывающейся поверхности с ребром возврата):

$$\mathbf{r} = \rho(s) - \frac{\rho'(s) \mathbf{l}'(s)}{\mathbf{l}'(s)^2} \mathbf{l}(s). \quad (506)$$

Роль параметра  $s$  у нас играет дуга  $s$ .

Очевидно,

$$\rho'(s) = \mathbf{t},$$

где  $\mathbf{t}$  — единичный касательный вектор, и, согласно (503') и (504),

$$\mathbf{l}'(s) = -k \cos \phi \cdot \mathbf{t}. \quad (507)$$

Отсюда следует

$$\rho'(s) \mathbf{l}'(s) = -k \cos \phi, \quad \mathbf{l}'(s)^2 = k^2 \cos^2 \phi. \quad (508)$$

Пользуясь формулами (508) и (503), мы можем переписать уравнение (506) в виде

$$\mathbf{r} = \rho(s) + \frac{1}{k \cos \phi} (\mathbf{n} \cos \phi + \mathbf{b} \sin \phi) = \rho + R \mathbf{n} + R \operatorname{tg} \phi \mathbf{b}, \quad (509)$$

где  $R = \frac{1}{k}$  есть радиус кривизны исходной кривой  $\rho(s)$ .

Все величины, стоящие в правой части, являются функциями  $s$ , причем функция  $\phi$  определена с точностью до постоянного слагаемого согласно (505).

Формула (509) позволяет по заданной наперед кривой  $\rho(s)$  (эволвенте) найти эволюту, т. е. ребро возврата развертываю-

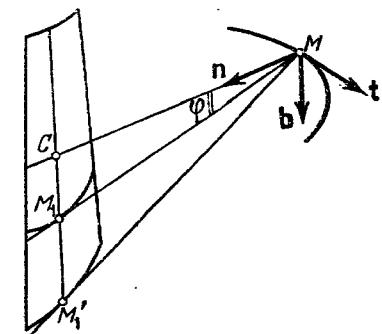
щейся поверхности, имеющей данную кривую своей ортогональной траекторией. Этих эволют будет бесчисленное множество, так как  $\phi(s)$  включает произвольное постоянное слагаемое.

Геометрически мы попадаем из точки  $M$  на кривой  $\rho(s)$  в соответствующую точку  $M_1$  на ее эволюте, сместившись сначала на вектор  $R \mathbf{n}$ , что приводит нас в центр кривизны  $C$ , и после этого сместившись на вектор  $bR \operatorname{tg} \phi$ , т. е. параллельно бинормали, и, следовательно, вдоль оси кривизны. Мы останавливаемся в некоторой точке  $M_1$  на оси кривизны так, что направление  $MM_1$  образует с главной нормалью  $MC$  угол  $\phi$  (черт. 122).

Когда точка  $M$  движется по кривой  $\rho(s)$ , то точка  $M_1$  описывает одну из эволют этой кривой. Так как при этом ось кривизны описывает развертывающуюся поверхность (см. § 70, пример 2), то все эволюты расположатся на этой поверхности. При этом через каждую точку  $M_1$  этой поверхности проходит одна и только одна эволюта. Действительно, произвольное постоянное в интеграле (505) всегда можно подобрать так, чтобы при каком-нибудь заданном значении  $s = s_0$  функция  $\phi(s)$  приобрела любое наперед заданное значение; в связи с этим можно добиться, чтобы вектор (509) при заданном значении  $s = s_0$  указал своим концом в любую наперед заданную точку на соответствующей оси кривизны. Меняя далее  $s$ , мы получим эволюту, проходящую через любую наперед заданную точку на заданной оси кривизны, отвечающей  $s = s_0$ , т. е. через любую точку поверхности осей кривизны.

Итак, эволюты располагаются на развертывающейся поверхности осей кривизны, целиком ее заполняя; при этом их касательные в соответствующих точках  $M_1$  и  $M'_1$  (черт. 122) сходятся на эволвенте в точке  $M$  под постоянным углом  $M_1 M M'_1$ . Нормальная плоскость к эволвенте касается вдоль оси кривизны  $CM_1$  развертывающейся поверхности осей кривизны.

В частности, *плоская кривая*, если ее рассматривать в пространстве, обладает, кроме известной нам из главы III *плоской эволюти*, еще бесчисленным множеством *пространственных эволют*. Они все расположатся на развертывающейся поверхности осей кривизны, которая будет в данном случае цилиндрической. Действительно, оси кривизны плоской кривой суть перпендикуляры к ее плоскости, проведенные через точки ее плоской эволюти. Все свойства, доказанные в общей теории, сохраняются, конечно, и здесь.



Черт. 122.

### § 74. Геометрические свойства линий кривизны.

С развертывающимися поверхностями связана геометрическая характеристика линий кривизны на любой поверхности. До сих пор линии кривизны определялись у нас как кривые, в каждой своей точке касающиеся главного направления поверхности в этой точке. Теперь мы можем доказать следующую теорему:

Для того чтобы кривая на поверхности была линией кривизны, необходимо и достаточно, чтобы нормали к поверхности вдоль этой кривой образовывали развертывающуюся поверхность.

Пусть на поверхности дана какая-нибудь кривая, уравнение которой пусть будет

$$\rho = \rho(s).$$

В каждой точке этой кривой берем нормаль к поверхности; она идет по направлению единичного нормального вектора  $\mathbf{m}$ , который вдоль кривой также является функцией ее параметра

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}(s).$$

Построенные нами нормали образуют линейчатую поверхность, для которой кривую  $\rho(s)$  можно рассматривать как направляющую, а  $\mathbf{m}(s)$  играет роль вектор-функции  $\mathbf{l}(s)$  (см. § 64).

Допустим, что кривая  $\rho(s)$  на исходной поверхности есть линия кривизны. Тогда вдоль этой кривой соблюдается формула Родрига (409), например,

$$d\mathbf{m} = -k_1 d\rho,$$

или, что то же,

$$\mathbf{m}'(s) = -k_1(s) \rho'(s), \quad (510)$$

где  $k_1(s)$  — соответствующая главная кривизна поверхности, рассматриваемая как функция параметра  $s$  вдоль линии кривизны.

Из формулы (468) следует, что компланарность векторов  $\mathbf{m}(s)$ ,  $\mathbf{m}'(s)$ ,  $\rho'(s)$  является в нашем случае необходимым и достаточным признаком того, что построенная линейчатая поверхность нормалей будет развертывающейся. Но (510) показывает, что  $\mathbf{m}'(s)$  параллельно  $\rho'(s)$ . Следовательно, компланарность  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{m}'$ ,  $\rho'$  заведомо имеет место, и поверхность нормалей — развертывающаяся.

Найдем, между прочим, ребро возврата этой развертывающейся поверхности. Воспользуемся параметрическим представлением горловой линии (которая в случае развертывающейся поверхности совпадает с ребром возврата):

$$\mathbf{r} = \rho(s) - \frac{\rho'(s) \mathbf{m}'(s)}{\mathbf{m}'(s)^2} \mathbf{m}(s). \quad (511)$$

Мы переписали здесь формулу (470), учитывая, что роль параметра  $s$  у нас играет дуга  $s$  и роль вектора  $\mathbf{l}(s)$  — вектор  $\mathbf{m}(s)$ . В нашем случае

$$\rho'(s) = \mathbf{t},$$

где  $\mathbf{t}$  — единичный касательный вектор к линии кривизны, и, в силу (510),

$$\mathbf{m}'(s) = -k_1 \mathbf{t},$$

так что

$$\rho'(s) \mathbf{m}'(s) = -k_1, \quad \mathbf{m}'(s)^2 = k_1^2.$$

Уравнение (511) окончательно примет вид

$$\mathbf{r} = \rho(s) + R_1(s) \mathbf{m}(s), \quad (512)$$

где  $R_1 = \frac{1}{k_1}$  называется *главным радиусом кривизны* и имеет тот же знак, что и соответствующая главная кривизна  $k_1$ . Таким образом (черт. 123), вектор  $MC$ , соединяющий точку  $M$  линии кривизны на поверхности с соответствующей точкой  $C$  ребра возврата, имеет вид

$$MC = R_1 \mathbf{m}.$$

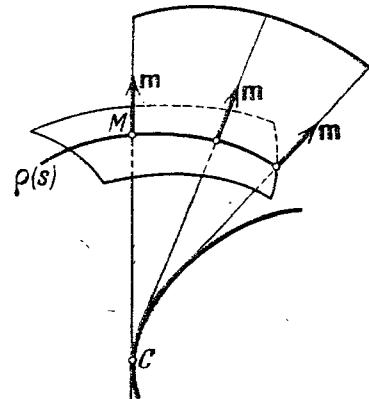
Другими словами, отрезок нормали  $MC$  по модулю равен главному радиусу кривизны  $R_1$ ; при этом он направлен в сторону  $\pm \mathbf{m}$  в зависимости от знака у главного радиуса кривизны  $R_1$ .

Итак, каждая линия кривизны на поверхности сопровождается кривой в пространстве, касательные к которой являются нормальми к поверхности вдоль линии кривизны (если оставить в стороне случаи вырождения ребра возврата).

Взятые для всех линий кривизны на данной поверхности, эти ребра возврата в свою очередь образуют поверхность (так называемую *поверхность центров*), состоящую из двух полостей; каждая полость отвечает одному семейству линий кривизны.

Вернемся к кривой  $\rho(s)$  на исходной поверхности и допустим теперь, что нормали к поверхности, взятые вдоль кривой  $\rho(s)$ , образуют развертывающуюся поверхность. В таком случае необходимо соблюдаются условие (468) и, следовательно, векторы

$$\mathbf{m}(s), \quad \mathbf{m}'(s), \quad \rho'(s)$$



Черт. 123.

должны быть компланарны при каждом значении  $s$ . Но  $\rho'$  как касательный к поверхности вектор ортогонален к  $m$ ; далее,  $m'$  как производная единичного вектора  $m$  также ортогональна к  $m$ . Следовательно,  $\rho'$  и  $m'$ , находясь в одной плоскости с  $m$  и будучи к нему ортогональны, параллельны между собой:

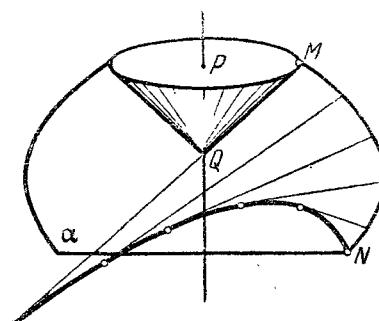
$$m' \parallel \rho' \text{ или } dm \parallel d\rho.$$

Но это условие необходимо и достаточно для того, чтобы направление  $d\rho$  было главным направлением в данной точке поверхности. Следовательно, в любой точке кривой  $\rho(s)$  ее касательная, параллельная  $d\rho$ , направлена по главному направлению в этой точке, и кривая  $\rho(s)$  есть линия кривизны. Формулированная выше теорема доказана.

В связи с этой теоремой приведем несколько примеров. Возьмем любую кривую на сфере (в предельном случае — на плоскости). Так как любая точка сферы есть точка закругления, то всякое направление можно считать главным. В связи с этим любую кривую на сфере можно считать линией кривизны. Доказанная в этом параграфе теорема имеет место для любой кривой на сфере. Действительно, все нормали к сферической поверхности проходят через ее центр, следовательно, нормали, взятые в точках любой кривой на сфере, образуют коническую (т. е. развертывающуюся) поверхность.

Рассмотрим еще в качестве наглядного примера линии кривизны на поверхности вращения. Мы утверждаем, что это будут меридианы и параллели. В самом деле, пусть поверхность образована вращением плоской дуги  $MN$  около оси, лежащей в той же плоскости  $\alpha$  (черт. 124). Так как поверхность получится совершенно симметричной относительно плоскости  $\alpha$ , то нормаль к поверхности в точке  $M$  лежит в этой плоскости и пересекает ось вращения в точке  $Q$  (или параллельна оси). При вращении дуги  $MN$  около оси точка  $M$  описывает одну из параллелей, а прямая  $MQ$  прямой круговой конус (или цилиндр), оставаясь все время нормалью к поверхности в точках параллели. Таким образом, нормали вдоль параллели образуют развертывающуюся поверхность, и параллели являются линиями кривизны.

Еще проще убедиться в том же самом для меридианов, например для меридиана  $MN$ . Все нормали к поверхности вдоль  $MN$



Черт. 124.

лежат, как уже было замечено, в плоскости  $\alpha$  и образуют, следовательно, развертывающуюся поверхность (плоскость).

Возвращаясь к общей теории, выведем важное следствие из теоремы этого параграфа. Пусть две поверхности  $S_1, S_2$  пересекаются по кривой  $C$ , которая служит линией кривизны для каждой из них. Тогда нормали к каждой из двух поверхностей вдоль линии  $C$  образуют развертывающуюся поверхность, и мы имеем две развертывающиеся поверхности, для которых  $C$  служит общей ортогональной траекторией. Из результатов предыдущего параграфа следует, что образующие развертывающиеся поверхности, т. е. нормали к поверхностям  $S_1, S_2$ , встречаются вдоль кривой  $C$  под постоянным углом (черт. 125). Следовательно, касательные плоскости к  $S_1$  и  $S_2$  в точках кривой  $C$  также образуют между собой постоянный угол. Нами доказана теорема:

Две поверхности  $S_1$  и  $S_2$ , имеющие общую линию кривизны  $C$ , пересекаются вдоль нее под постоянным углом.

Нетрудно доказать и обратную теорему:

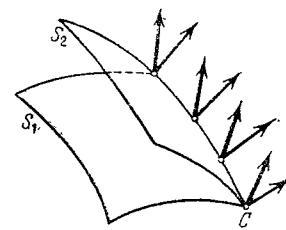
Если две поверхности  $S_1$  и  $S_2$  пересекаются вдоль некоторой кривой  $C$  под постоянным углом и если  $C$  служит линией кривизны для  $S_1$ , то она будет линией кривизны и для  $S_2$ .

В самом деле, рассмотрим линейчатые поверхности, образованные нормальными к  $S_1$  и  $S_2$  вдоль кривой  $C$ . Так как  $C$  есть линия кривизны для  $S_1$ , то первая из этих поверхностей — развертывающаяся. Что же касается второй поверхности, то ее образующие (т. е. нормали к  $S_2$ ) получены из образующих первой (т. е. из нормалей к  $S_1$ ) поворотом их в нормальных к  $C$  плоскостях на постоянный угол (так как  $S_1$  и  $S_2$  встречаются вдоль  $C$  под постоянным углом). Как известно из предыдущего параграфа, при этих условиях вторая линейчатая поверхность будет тоже развертывающейся и, следовательно,  $C$  будет линией кривизны и для поверхности  $S_2$ .

Доказанная теорема имеет ценные применения при отыскании линий кривизны в конкретных случаях. Так, например, если данная поверхность пересекается под постоянным углом с какой-нибудь сферой, то линия пересечения обязательно будет линией кривизны. Действительно, на сфере любую кривую, в том числе и линию пересечения, можно считать линией кривизны; следовательно, она будет линией кривизны и на данной поверхности. То же относится и к пересечению данной поверхности с какой-нибудь плоскостью.

В частности, отсюда следует, что на канальной поверхности (см. конец § 68) ее круговые характеристики дают одно семейство линий кривизны; действительно, вдоль каждой характеристики канальная поверхность касается одной из сфер, огибающих семейство, т. е. образует с этой сферой постоянный угол (равный нулю).

Обратно, всякая поверхность, обладающая одним семейством круговых линий кривизны, есть канальная. Действительно, проведем через каждую круговую линию кривизны сферу, касающуюся поверхности хотя бы в одной точке; эту окружность, как и всякую кривую, на сфере можно считать тоже линией кривизны. Вдоль общей линии кривизны поверхность и сфера должны образовывать постоянный угол. Но этот угол в одной точке нуль, следовательно, он все время равен нулю, и построенная нами сфера касается поверхности вдоль всей круговой линии кривизны. Мы получаем семейство сфер, по одной для каждой круговой линии кривизны, огибающей которого служит данная поверхность.



Черт. 125.

### § 75\*. Сопряженные сети на поверхности.

Рассмотрим следующую задачу. На поверхности  $S$  взята произвольная кривая  $C$ . Требуется провести через каждую точку  $M$  кривой  $C$  прямую, касательную к поверхности, так, чтобы эти прямые образовали развертывающуюся поверхность. Тривиальное решение, когда берутся касательные к самой кривой  $C$ , мы оставим в стороне. Пусть  $\rho$  будет радиус-вектор произвольной точки  $M$  на кривой  $C$ , а  $l$  — единичный вектор, определяющий направление некоторой касательной к поверхности в точке  $M$ . Рассматривая кривую  $C$  как направляющую линию получаем таким образом линейчатую поверхность, запишем условие (468), необходимое и достаточное для того, чтобы линейчатая поверхность была развертывающейся:

$$l, d\mathbf{l}, d\rho \text{ компланарны.}$$

Так как  $l$  и  $d\rho$  определяют в нашем случае касательную плоскость к поверхности в точке  $M$ , то условие можно переписать в виде

$d\mathbf{l}$  лежит в касательной плоскости,

или, что же, вдоль кривой  $C$  соблюдается условие

$$\mathbf{m} d\mathbf{l} = 0, \quad (513)$$

где  $\mathbf{m}$  — единичный нормальный вектор к поверхности.

Так как  $l$  — касательный к поверхности вектор, то он все время ортогонален к  $\mathbf{m}$ , так что вдоль кривой

$$l\mathbf{m} = 0.$$

Дифференцируя, получим

$$d\mathbf{l}\mathbf{m} + l d\mathbf{m} = 0,$$

откуда видно, что условие (513) равносильно следующему:

$$l d\mathbf{m} = 0. \quad (514)$$

Этим поставленная задача решена. Для того чтобы касательные к поверхности, взятые вдоль данной кривой  $C$ , образовывали развертывающуюся поверхность, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке  $M$  на  $C$  соответствующая касательная была направлена по вектору  $l$ , ортогональному к  $d\mathbf{m}$  (где  $d\mathbf{m}$  — дифференциал единичного нормального вектора  $\mathbf{m}$  вдоль кривой  $C$ ).

Оставим в стороне исключительный случай, когда вдоль  $C$  все время  $d\mathbf{m} = 0$ ; последнее означает, что кривая  $C$  — плоская, причем во всех точках кривой  $C$  ее плоскость служит касательной плоскостью к поверхности. Тогда  $l$  можно выбирать в касательной плоскости как угодно, все равно получаем развертывающуюся поверхность, а именно, плоскость кривой  $C$ .

Итак, считаем  $d\mathbf{m} \neq 0$ . Направление вектора  $l$  определяется тогда однозначно как ортогональное к  $d\mathbf{m} = A(d\mathbf{r})$  или, что то же самое, сопряженное с направлением  $d\mathbf{r}$  [по определению сопряженных направлений, (450), § 61]. Направление  $l$  мы рассматриваем с точностью до замены на обратное.

Итак, для того чтобы касательные к поверхности  $S$ , взятые по одной в каждой точке кривой  $C$  (лежащей на  $S$ ), образовывали развертывающуюся поверхность, необходимо и достаточно, чтобы направления этих касательных были сопряжены с направлениями касательных к кривой  $C$ .

Далее, заметим, что касательная плоскость в точке  $M$  будет общей для исходной поверхности  $S$  и для построенной развертывающейся поверхности. Действительно, вектор  $l$  будет, очевидно, касательным к обеим поверхностям и вектор  $d\mathbf{r}$  — тоже, так как кривая  $C$ , которой  $d\mathbf{r}$  касается, лежит на обеих поверхностях. Векторы  $l$  и  $d\mathbf{r}$  (непараллельные по предположению) определяют, следовательно, общую касательную плоскость.

Таким образом, касательные плоскости к исходной поверхности  $S$  в точках  $M$  кривой  $C$  служат касательными плоскостями к построенной развертывающейся поверхности вдоль соответствующих образующих.

Другими словами, построенную развертывающуюся поверхность можно рассматривать как огибающую семейства касательных плоскостей к поверхности  $S$  в точках кривой  $C$ .

Рассмотрим, наконец, сопряженные сети на поверхности. Под сетью вообще мы понимаем два семейства кривых на поверхности, каждое от одного параметра:

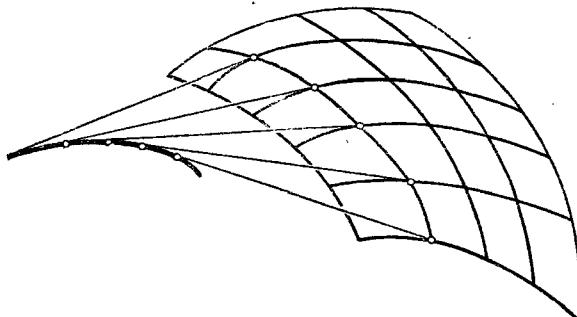
$$\omega_1(u, v) = C_1, \quad \omega_2(u, v) = C_2. \quad (515)$$

такие, что через каждую точку поверхности проходят две кривые сети, по одной из каждого семейства. Под сопряженной сетью мы понимаем такую сеть, что в каждой точке поверхности проходящие через нее кривые сети имеют сопряженные направления касательных. Из только что доказанного следует, что для этого необходимо и достаточно, чтобы вдоль каждой линии одного семейства касательные к линиям другого семейства образовывали развертывающуюся поверхность (черт. 126).

Сопряженные сети можно строить на поверхности весьма разнообразными способами. Один геометрически очень наглядный способ дает теорема Кенигса.

Возьмем в пространстве произвольную прямую  $l$  (черт. 127) и будем проводить через нее всевозможные плоскости. Пересекая ими поверхность, мы получим на ней семейство кривых от одного параметра (на чертеже  $a_1, a_2, \dots$ ). Касательные к этим кривым, находясь в одной плоскости с прямой  $l$ , пересекаются с нею.

Рассмотрим геометрическое место точек, взятых по одной на каждой из кривых  $a$  так, что касательные к кривым  $a$  в этих точках сходятся в данной точке  $L$  на прямой  $l$ . Это геометрическое место мы будем называть *линией тени* (оно служит границей освещенной и неосвещенной частей поверхности, если источник света находится в точке  $L$ ). Каждой точке  $L$  на прямой  $l$ , если из  $L$  можно проводить касательные к поверхности, будет отвечать своя линия тени, так

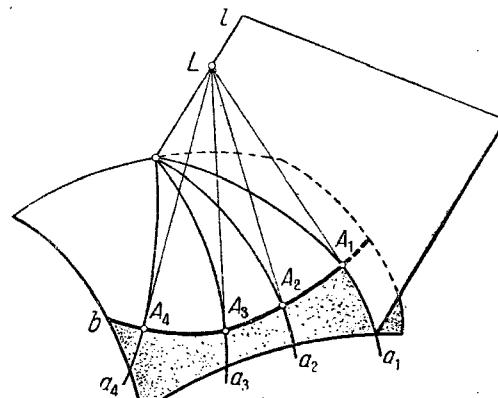


Черт. 126.

что линии тени образуют также семейство от одного параметра. Покажем теперь — и в этом заключается теорема, — что линии тени совместно с плоскими сечениями  $a$  образуют сопряженную сеть.

В самом деле, касательные к кривым  $a$ , взятые вдоль какой-нибудь линии тени  $b$ , по самому построению сходятся в одной точке (на прямой  $l$ ) и образуют, следовательно, коническую поверхность (частный случай развертывающейся). Следовательно, направления этих касательных к кривым  $a$  сопряжены с направлениями касательных к рассматриваемой линии тени  $b$ . А так как это имеет место для каждой линии тени, то и в любой точке поверхности линии  $a$  и  $b$  встречаются, имея сопряженные направления касательных. Мы получили сопряженную сеть.

Самый общий вид сопряженной сети на данной поверхности, можно получить, выбирая одно из семейств сетей совершенно произвольно; тогда второе семейство однозначно<sup>1)</sup> определяется, если потребовать, чтобы сеть получилась сопряженной. В самом



Черт. 127.

<sup>1)</sup> С нижеуказанным исключением.

деле, пусть одно семейство задано произвольно,

$$\omega(u, v) = C. \quad (516)$$

Тогда в каждой точке поверхности дифференциалы криволинейных координат при смещении по кривой семейства (их мы обозначим через  $\delta u$ ,  $\delta v$ ) будут связаны соотношением

$$\omega_u \delta u + \omega_v \delta v = 0, \quad (516')$$

которое мы получим, дифференцируя (516). Мы исключаем из рассмотрения особые точки кривых (516), так что из  $\omega_u$ ,  $\omega_v$  по крайней мере одно не равно нулю. Пусть для определенности  $\omega_v \neq 0$ , следовательно,  $\delta v \neq 0$ .

Мы должны построить теперь второе семейство, сопряженное с первым. Пусть  $du$ ,  $dv$  будут дифференциалы координат  $u$ ,  $v$  при смещении из какой-нибудь точки поверхности по кривой второго семейства. Потребуем теперь сопряженность сети, что равносильно соблюдению условия (450') в *каждой* точке поверхности. Перепишем это условие:

$$L du \delta u + M du \delta v + M dv \delta u + N dv \delta v = 0. \quad (517)$$

Дели на  $\delta v$  и заменяя  $\frac{\delta v}{\delta u}$  через  $-\frac{\omega_u}{\omega_v}$  в силу (516'), получаем

$$\left( L - M \frac{\omega_u}{\omega_v} \right) du + \left( M - N \frac{\omega_u}{\omega_v} \right) dv = 0. \quad (518)$$

В круглых скобках стоят известные нам функции от  $u$ ,  $v$ , так что мы получаем дифференциальное уравнение, которое можно переписать в виде

$$\frac{dv}{du} = f(u, v),$$

если коэффициент при  $dv$  отличен от нуля. По теореме существования мы получаем семейство интегральных кривых, проходящих по одной через каждую точку поверхности. Это семейство от одного параметра и составит сопряженную сеть совместно с произвольно выбранным семейством (516).

Если коэффициент при  $dv$  равен нулю, но при  $du$  отличен от нуля, то получаем  $du = 0$ , т. е. искомое семейство совпадает с семейством координатных линий  $v$ . В обоих случаях второе семейство определится однозначно.

Наконец, если оба коэффициента равны нулю, то уравнение (518) удовлетворяется при любых  $du$ ,  $dv$ , т. е. любое семейство на поверхности образует с выбранным семейством (516) сопряженную сеть. Чтобы выяснить, когда такой случай возможен, запишем условия

$$L - M \frac{\omega_u}{\omega_v} = 0, \quad M - N \frac{\omega_u}{\omega_v} = 0. \quad (519)$$

Отсюда немедленно следует

$$LN - M^2 = 0,$$

а следовательно, полная кривизна  $K$  тоже равна нулю, и наша поверхность оказывается развертывающейся. Вставим теперь в (519) вместо  $-\frac{\omega_u}{\omega_v}$  снова  $\frac{\delta v}{\delta u}$ . Получим

$$L \delta u + M \delta v = M \delta u + N \delta v = 0,$$

откуда, умножая первое выражение на  $\delta u$ , второе на  $\delta v$  и складывая, получим

$$L \delta u^2 + 2M \delta u \delta v + N \delta v^2 = 0.$$

Это показывает, что дифференциалы координат  $\delta u$ ,  $\delta v$  вдоль кривых семейства (516) удовлетворяют уравнению асимптотических линий, т. е. семейство (516) есть семейство асимптотических линий. Но на развертывающейся поверхности асимптотические линии совпадают с прямолинейными образующими.

Следовательно, по произвольно выбранному семейству (516) на данной поверхности однозначно определяется второе семейство, образующее с первым сопряженную сеть, за исключением случая, когда (516) есть семейство образующих на развертывающейся поверхности. В последнем случае второе семейство становится неопределенным.

К этому следует добавить, что может случиться, что второе семейство хотя и определится однозначно, но совпадает с первым, так что сопряженная сеть выродится фактически в одно семейство. Посмотрим, когда это возможно. В таком случае можно принять  $du$ ,  $dv$  вдоль кривой второго семейства совпадающими с  $\delta u$ ,  $\delta v$  вдоль кривой семейства (516), и условие сопряженности (517) примет вид

$$L \delta u^2 + 2M \delta u \delta v + N \delta v^2 = 0. \quad (520)$$

Таким образом,  $\delta u$ ,  $\delta v$  вдоль кривых семейства (516) удовлетворяют дифференциальному уравнению асимптотических линий. Итак, совпадение второго семейства с исходным семейством (516) означает, что в качестве исходного семейства (516) выбрано одно из двух семейств асимптотических (подразумевается, на поверхности, где  $K < 0$ ). Это и естественно было ожидать, так как асимптотическое направление само себе сопряжено, и условие (520), характеризующее асимптотическое направление, можно рассматривать как частный случай условия (517), когда записывается сопряженность данного направления самому себе.

## ГЛАВА VII.

### ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТИ.

#### § 76. Понятие об изгибании.

Пусть в пространстве даны две поверхности  $S$  и  $S^*$ , между точками которых установлено взаимно однозначное соответствие так, что длина любой кривой на поверхности  $S$  равна длине соответствующей кривой на поверхности  $S^*$ . Такого рода взаимно однозначное отображение поверхности  $S$  в поверхность  $S^*$  мы будем коротко называть *изгиблением*<sup>1)</sup> поверхности  $S$  в поверхность  $S^*$ ; мы будем также говорить, что  $S^*$  получена путем изгибаия  $S$  и т. д.

Само соответствие между  $S$  и  $S^*$  мы будем называть *изометрическим*.

Термин «изгибание» связан с наглядным представлением о поверхности как о гибкой, но нерастяжимой и несжимаемой пленке; такую пленку можно изгибать в пространстве, меняя ее форму, но сохраняя длины всех кривых на ней. Примером может служить свертывание плоского листа бумаги в цилиндр или конус. Приведенное определение изгибаия формулирует математическую сущность этого наглядного представления.

Всякую поверхность можно изгибать (по крайней мере, если ограничиваться достаточно малыми ее кусками). Но, изгибая данную поверхность, можно получить далеко не все остальные поверхности, а только определенный их класс. Дело в том, что далеко не всякие две поверхности допускают изометрическое соответствие между собой.

Так, например, даже очень малый кусочек сферы нельзя изогнуть на кусочек плоскости или на кусочек сферы другого радиуса.

<sup>1)</sup> Строго говоря, такое отображение называется изгиблением только в том случае, если оно может быть осуществлено *непрерывной* деформацией поверхности  $S$  в поверхность  $S^*$  с сохранением всех длин на  $S$ . Мы позволим себе употреблять этот термин в более широком смысле.

Отсюда немедленно следует

$$LN - M^2 = 0,$$

а следовательно, полная кривизна  $K$  тоже равна нулю, и наша поверхность оказывается развертывающейся. Вставим теперь в (519) вместо  $-\frac{\omega_u}{\omega_v}$  снова  $\frac{\delta v}{\delta u}$ . Получим

$$L \delta u + M \delta v = M \delta u + N \delta v = 0,$$

откуда, умножая первое выражение на  $\delta u$ , второе на  $\delta v$  и складывая, получим

$$L \delta u^2 + 2M \delta u \delta v + N \delta v^2 = 0.$$

Это показывает, что дифференциалы координат  $\delta u$ ,  $\delta v$  вдоль кривых семейства (516) удовлетворяют уравнению асимптотических линий, т. е. семейство (516) есть семейство асимптотических линий. Но на развертывающейся поверхности асимптотические линии совпадают с прямолинейными образующими.

Следовательно, по произвольно выбранному семейству (516) на данной поверхности однозначно определяется второе семейство, образующее с первым сопряженную сеть, за исключением случая, когда (516) есть семейство образующих на развертывающейся поверхности. В последнем случае второе семейство становится неопределенным.

К этому следует добавить, что может случиться, что второе семейство хотя и определится однозначно, но совпадает с первым, так что сопряженная сеть выродится фактически в одно семейство. Посмотрим, когда это возможно. В таком случае можно принять  $du$ ,  $dv$  вдоль кривой второго семейства совпадающими с  $\delta u$ ,  $\delta v$  вдоль кривой семейства (516), и условие сопряженности (517) примет вид

$$L \delta u^2 + 2M \delta u \delta v + N \delta v^2 = 0. \quad (520)$$

Таким образом,  $\delta u$ ,  $\delta v$  вдоль кривых семейства (516) удовлетворяют дифференциальному уравнению асимптотических линий. Итак, совпадение второго семейства с исходным семейством (516) означает, что в качестве исходного семейства (516) выбрано одно из двух семейств асимптотических (подразумевается, на поверхности, где  $K < 0$ ). Это и естественно было ожидать, так как асимптотическое направление само себе сопряжено, и условие (520), характеризующее асимптотическое направление, можно рассматривать как частный случай условия (517), когда записывается сопряженность данного направления самому себе.

## ГЛАВА VII.

### ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТИ.

#### § 76. Понятие об изгибании.

Пусть в пространстве даны две поверхности  $S$  и  $S^*$ , между точками которых установлено взаимно однозначное соответствие так, что длина любой кривой на поверхности  $S$  равна длине соответствующей кривой на поверхности  $S^*$ . Такого рода взаимно однозначное отображение поверхности  $S$  в поверхность  $S^*$  мы будем коротко называть *изгиблением*<sup>1)</sup> поверхности  $S$  в поверхность  $S^*$ ; мы будем также говорить, что  $S^*$  получена путем изгибаия  $S$  и т. д.

Само соответствие между  $S$  и  $S^*$  мы будем называть *изометрическим*.

Термин «изгибание» связан с наглядным представлением о поверхности как о гибкой, но нерастяжимой и нескимаемой пленке; такую пленку можно изгибать в пространстве, меняя ее форму, но сохраняя длины всех кривых на ней. Примером может служить свертывание плоского листа бумаги в цилиндр или конус. Приведенное определение изгибаия формулирует математическую сущность этого наглядного представления.

Всякую поверхность можно изгибать (по крайней мере, если ограничиваться достаточно малыми ее кусками). Но, изгибаая данную поверхность, можно получить далеко не все остальные поверхности, а только определенный их класс. Дело в том, что далеко не всякие две поверхности допускают изометрическое соответствие между собой.

Так, например, даже очень малый кусочек сферы нельзя изогнуть на кусочек плоскости или на кусочек сферы другого радиуса.

<sup>1)</sup> Строго говоря, такое отображение называется *изгиблением* только в том случае, если оно может быть осуществлено *непрерывной* деформацией поверхности  $S$  в поверхность  $S^*$  с сохранением всех длин на  $S$ . Мы позволим себе употреблять этот термин в более широком смысле.

### § 77. Внутренняя геометрия и изгибание поверхности.

Пусть на поверхности  $S$ , отнесенной к криволинейным координатам  $u, v$ , задана первая квадратичная форма

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \quad (521)$$

т. е.  $E, F, G$  заданы как функции от  $u, v$ . При этом уравнение самой поверхности может быть и не задано, так что мы, возможно, не знаем ничего определенного о форме поверхности в пространстве.

Тем не менее мы сможем рассматривать внутреннюю геометрию поверхности (§ 47). *Внутренняя геометрия поверхности изучает те связанные с поверхностью геометрические построения и величины, которые могут быть определены на основе знания одной лишь первой квадратичной формы.*

Так, например, понятие о длине  $s$  отрезка кривой на поверхности относится к внутренней геометрии. Действительно, если кривая задана уравнениями

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (522)$$

то  $s$  вычисляется по формуле

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E(u, v) \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + 2F(u, v) \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G(u, v) \left( \frac{dv}{dt} \right)^2}, \quad (522')$$

в которой используется лишь первая квадратичная форма.

Напротив, кривизна кривой, заданной на поверхности уравнениями (522), не может быть вычислена на основе знания лишь первой квадратичной формы и к внутренней геометрии поверхности не относится.

К внутренней геометрии относится еще, как мы знаем из § 47, понятие угла между кривыми на поверхности и площади куска поверхности. Мы познакомимся вскоре и с другими, более тонкими построениями внутренней геометрии.

Сейчас мы хотим установить связь между внутренней геометрией поверхности и изгиблением поверхности. Будем сохранять в процессе изгиблания у каждой точки те криволинейные координаты  $u, v$ , которые она имела до изгиблания. В таком случае не меняются и значения  $du, dv$ , отвечающие переходу в бесконечно близкую точку. Так как по определению изгиблания длины всех кривых на поверхности остаются без изменения, то остается без изменения и дифференциал дуги  $ds$ ; а тем самым и значение квадратичной формы (521) при любых  $du, dv$ .

Это возможно лишь в случае, когда  $E, F, G$  в каждой точке  $u, v$  сохраняют прежние значения, т. е. остаются прежними функциями  $u, v$ , а значит, новая квадратичная форма (521) тождественно совпадает с прежней.

Итак, *первая квадратичная форма при изгиблении не меняется, а так как внутренняя геометрия поверхности вполне определяется первой квадратичной формой, то и внутренняя геометрия инвариантна при изгиблении.*

Обратно, *геометрические построения и величины, связанные с поверхностью и инвариантные при изгиблении, вполне определяются заданием первой квадратичной формы, т. е. принадлежат внутренней геометрии поверхности.*

Действительно, пусть на поверхности  $S$  нам задана первая квадратичная форма (но сама поверхность  $S$ , возможно, не задана). Построим любую поверхность  $S_0$ , обладающую той же первой квадратичной формой. Это значит, что при подходящем выборе на  $S_0$  криволинейных координат коэффициенты  $E, F, G$  выражаются теми же функциями от  $u, v$ , как и на  $S$ . Будем считать соответствующими точки на  $S$  и  $S_0$ , если они снабжены одинаковыми координатами  $u, v$ . Тогда длины соответствующих кривых будут равны [так как они выражаются одной и той же формулой (522')], и  $S_0$  получается из  $S$  изгиблением. Все геометрические построения и величины, инвариантные при изгиблении, можно сначала реализовать на уже построенной поверхности  $S_0$ , а затем перенести на  $S$ , пользуясь установленным между  $S_0$  и  $S$  соответствием. Так как это соответствие есть изгиблание, а речь идет о построениях и величинах, инвариантных при изгиблении, то мы получим в результате такие же построения и величины, как если бы мы нашли их непосредственно на  $S$  (чего мы не можем сделать, так как поверхность  $S$  нам не задана). Итак, зная на  $S$  лишь первую квадратичную форму, мы можем провести на  $S$  все геометрические построения и найти все величины, инвариантные при изгиблении; эти построения и величины принадлежат, таким образом, внутренней геометрии поверхности.

Обе приведенные выше формулировки можно объединить следующим образом:

*Занимаясь внутренней геометрией поверхности, мы рассматриваем ее геометрические свойства, инвариантные при изгиблении.*

Представим себе поверхность как абсолютно гибкую, но нерастяжимую пленку; тогда мы интересуемся лишь теми геометрическими свойствами фигур, начертанных на этой пленке, которые остаются без изменения, какую бы (достаточно гладкую) форму мы ей ни придали.

### § 78. Индексные обозначения.

Начиная с этого параграфа, мы переходим к новым обозначениям. Криволинейные координаты на поверхности и коэффициенты первой и второй квадратичных форм мы будем обозначать буквами, снаженными целесообразно подобранными знаками

(индексами). Прежде всего криволинейные координаты  $u$ ,  $v$  мы будем обозначать  $u^1$ ,  $u^2$ . Значки 1, 2 поставлены нами вверху, а не внизу по весьма существенным причинам, которые полностью раскрываются в тензорном анализе; здесь мы не можем вдаваться в изложение их. Коэффициент первой формы  $E$  мы обозначаем через  $g_{11}$ ,  $F$  — через  $g_{12}$  или  $g_{21}$  безразлично (так что  $g_{12} = g_{21}$ ),  $G$  — через  $g_{22}$ . Коэффициенты второй формы обозначаем аналогично  $b_{11}$ ,  $b_{12} = b_{21}$ ,  $b_{22}$ . Дифференцирование радиус-вектора  $\mathbf{r}$  поверхности по  $u^1$  мы отмечаем значком 1, поставленным при  $\mathbf{r}$  снизу, а дифференцирование по  $u^2$  — значком 2 снизу.

Ниже следующая таблица дает переход от новых обозначений к старым:

$u$	$v$	$E$	$F$	$F$	$G$	$L$	$M$	$M$	$N$	$\mathbf{r}_u$	$\mathbf{r}_v$	$\mathbf{r}_{uu}$	$\mathbf{r}_{uv} = \mathbf{r}_{vu}$	$\mathbf{r}_{vv}$
$u^1$	$u^2$	$g_{11}$	$g_{12}$	$g_{21}$	$g_{22}$	$b_{11}$	$b_{12}$	$b_{21}$	$b_{22}$	$\mathbf{r}_1$	$\mathbf{r}_2$	$\mathbf{r}_{11}$	$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_{21}$	$\mathbf{r}_{22}$

(523)

Новые обозначения кажутся значительно сложнее и неудобнее старых; тем не менее в тех вопросах, которыми мы сейчас займемся, обнаружатся их большие преимущества, заключающиеся в сжатой и наглядной записи различных формул и соотношений.

Прежде всего запишем в новых обозначениях первую квадратичную форму:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 = g_{11} (du^1)^2 + 2g_{12} du^1 du^2 + g_{22} (du^2)^2.$$

Мы видим, что значения у  $g_{11}$ ,  $g_{12}$ ,  $g_{22}$  подобраны так, чтобы они совпадали с номерами координат, от которых взяты дифференциалы в соответствующем члене. Очевидно, формулу можно переписать в виде

$$ds^2 = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta.$$

Совершенно аналогично, вторая квадратичная форма примет вид

$$\sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta.$$

Сделаем еще один шаг в упрощении записи. Мы будем подразумевать, что по  $\alpha$  и  $\beta$  производится суммирование (в котором  $\alpha$  и  $\beta$  пробегают значения 1, 2), не выписывая явно знаков суммирования.

### § 79. ДЕРИВАЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ ПЕРВОЙ ГРУППЫ

ния. Таким образом, запись первой и второй квадратичных форм примет вид

$$g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta \text{ и } b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta. \quad (524)$$

Более того, мы условимся раз навсегда, что если в написанном одночленном выражении дважды встречается один и тот же буквенный значок, например  $\alpha$ , один раз вверху и один раз внизу, то подразумевается, что выражение просуммировано по этому значку  $\alpha$ , т. е.  $\alpha$  приданы последовательно значения  $\alpha = 1, 2$ , и результаты сложены. Знак  $\sum$  при этом лишь подразумевается, но не выписывается. Очевидно, (524) есть частный случай такой сокращенной записи.

На первый взгляд кажется, что эта запись будет давать повод к многочисленным недоразумениям; однако, как мы увидим, она оказывается весьма практичной.

Перепишем еще известные нам выражения для коэффициентов первой и второй квадратичных форм в новых обозначениях. Мы имеем

$$E = \mathbf{r}_u \mathbf{r}_u, \quad F = \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v, \quad G = \mathbf{r}_v \mathbf{r}_v, \quad L = \mathbf{r}_{uu} \mathbf{m}, \quad M = \mathbf{r}_{uv} \mathbf{m}, \quad N = \mathbf{r}_{vv} \mathbf{m}.$$

Теперь получим

$$\begin{aligned} g_{11} &= \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1, & g_{12} &= \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2, & g_{22} &= \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_2, \\ b_{11} &= \mathbf{r}_{11} \mathbf{m}, & b_{12} &= \mathbf{r}_{12} \mathbf{m}, & b_{22} &= \mathbf{r}_{22} \mathbf{m}. \end{aligned}$$

Очевидно, эти формулы можно переписать кратко, употребляя буквенные обозначения для индексов:

$$g_{ij} = \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j, \quad b_{ij} = \mathbf{r}_{ij} \mathbf{m}. \quad (525)$$

Действительно, если здесь давать  $i, j$  значения 1, 2 во всевозможных комбинациях, то формулы (525) порождают выписанные выше шесть формул. Мы условимся раз навсегда, что если в данном равенстве какой-нибудь буквенный значок (например  $i$ ) встречается по одному разу в каждом члене, то равенство подразумевается верным при любом значении  $i = 1, 2$ ; то же относится и к случаю, когда таких (встречающихся по одному разу) значков несколько.

### § 79. ДЕРИВАЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ ПЕРВОЙ ГРУППЫ.

Когда мы рассматриваем вопросы, связанные в первую очередь с кривизной кривых на поверхности, мы неизбежно сталкиваемся со вторыми производными  $\mathbf{r}_{ij}$  радиус-вектора  $\mathbf{r}$  по криволинейным координатам. Так называемые деривационные формулы первой группы имеют своей целью исчерпывающе выяснить строение векторов  $\mathbf{r}_{ij}$ .

Переходим к выводу *деривационных формул*. Рассмотрим вторые производные радиус-вектора  $\mathbf{r}$  по криволинейным координатам в данной точке,  $\mathbf{r}_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ). Каждый из этих векторов разложим по векторам  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{m}$ , т. е. по двум неколлинеарным касательным векторам  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  в данной точке и по единичному нормальному вектору  $\mathbf{m}$ . Запишем

$$\mathbf{r}_{ij} = G_{ij}^1 \mathbf{r}_1 + G_{ij}^2 \mathbf{r}_2 + \alpha_{ij} \mathbf{m}. \quad (526)$$

Через  $G_{ij}^1$ ,  $G_{ij}^2$  обозначены коэффициенты разложения при  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$ ; значки  $i$ ,  $j$  поставлены внизу, чтобы отметить, что разлагается вектор  $\mathbf{r}_{ij}$ . Через  $\alpha_{ij}$  обозначен коэффициент при  $\mathbf{m}$  в разложении  $\mathbf{r}_{ij}$ . Фактически в записи (526) заключаются три формулы, получающиеся из (526) при  $i, j$ , равных соответственно 1, 1; 1, 2; 2, 2. Случай  $i = 2, j = 1$  ничего нового не дает, так как, очевидно,  $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_{21}$ , и коэффициенты разложения должны тоже быть одинаковыми:

$$G_{12}^1 = G_{21}^1, \quad G_{12}^2 = G_{21}^2.$$

Эти равенства, выражющие, как говорят, симметрию величин  $G_{ij}^k$  относительно нижних индексов, можно записать одной формулой с буквенными индексами

$$G_{ij}^k = G_{ji}^k \quad (i, j, k = 1, 2). \quad (527)$$

Действительно, пробуя всевозможные комбинации индексов  $i$ ,  $j$ ,  $k$ , мы получим формально восемь равенств, из которых четыре будут тождествами, а остальные четыре совпадут с предшествующими равенствами, каждое из которых появится по два раза.

Займемся теперь подсчетом коэффициентов в разложении (526). Умножая скалярно на  $\mathbf{m}$  обе части равенства (526) и учитывая, что  $\mathbf{m}$  перпендикулярен к касательным векторам  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$ , так что  $\mathbf{m}\mathbf{r}_1 = \mathbf{m}\mathbf{r}_2 = 0$ , получим

$$\mathbf{r}_{ij}\mathbf{m} = \alpha_{ij}.$$

Другими словами, коэффициенты  $\alpha_{ij}$  совпадают с коэффициентами второй квадратичной формы, как это видно из (525). Итак,

$$\alpha_{ij} = b_{ij},$$

и разложение (526) перепишется в виде

$$\mathbf{r}_{ij} = G_{ij}^1 \mathbf{r}_1 + G_{ij}^2 \mathbf{r}_2 + b_{ij} \mathbf{m}. \quad (528)$$

Остается найти шесть коэффициентов  $G_{ij}^k$  ( $i, j, k = 1, 2$ ).

Введем сокращенные обозначения для следующих скалярных произведений:

$$\mathbf{r}_k \mathbf{r}_{ij} = G_{k,ij} \quad (i, j, k = 1, 2). \quad (529)$$

## § 79] ДЕРИВАЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ ПЕРВОЙ ГРУППЫ

Как мы видим, если давать  $i$ ,  $j$ ,  $k$  всевозможные комбинации значений 1, 2, получается шесть существенно различных величин  $G_{k,ij}$ , так как относительно последних двух индексов они будут, очевидно, симметричны:

$$G_{k,ij} = G_{k,ji}.$$

Умножим теперь скалярно обе части равенства (528), во-первых, на  $\mathbf{r}_1$  и, во-вторых, на  $\mathbf{r}_2$ . Получим

$$\left. \begin{aligned} G_{1,ij} &= G_{ij}^1 g_{11} + G_{ij}^2 g_{21}, \\ G_{2,ij} &= G_{ij}^1 g_{12} + G_{ij}^2 g_{22} \end{aligned} \right\} \quad (i, j = 1, 2). \quad (530)$$

Коэффициенты первой квадратичной формы появились здесь в силу формул (525), а последние члены обратились в нуль вследствие ортогональности  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  к  $\mathbf{m}$ . Считая  $i$ ,  $j$  в формулах (530) на время фиксированными, можно рассматривать (530) как систему двух уравнений с двумя неизвестными  $G_{ij}^1$  и  $G_{ij}^2$ . Легко, конечно, разрешить эту систему; в результате получим

$$\left. \begin{aligned} G_{ij}^1 &= \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} (g_{22}G_{1,ij} - g_{12}G_{2,ij}), \\ G_{ij}^2 &= \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} (-g_{12}G_{1,ij} + g_{11}G_{2,ij}). \end{aligned} \right\} \quad (530')$$

Итак, величины  $G_{k,ij}$  выражаются через величины  $G_{ij}^k$  посредством (530) и, обратно, величины  $G_{ij}^k$  — через  $G_{k,ij}$  посредством (530'), в обоих случаях с участием коэффициентов первой квадратичной формы.

Введем сокращенные обозначения

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}, \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}. \quad (531)$$

Другими словами, матрицы

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{vmatrix}$$

связаны друг с другом как матрицы взаимных миноров. Теперь предыдущие формулы могут быть переписаны в виде

$$G_{ij}^1 = g^{11}G_{1,ij} + g^{12}G_{2,ij}, \quad G_{ij}^2 = g^{21}G_{1,ij} + g^{22}G_{2,ij}. \quad (532)$$

Мы видим, что в этой записи (532)  $G_{ij}^k$  имеют вполне закономерное строение: в выражении для  $G_{ij}^1$  первый значок наверху у членов в правой части будет 1, т. е. такой же, как у  $G_{ij}^1$  наверху. Второй же значок наверху сначала имеет значение 1, потом 2, т. е. всегда такое же, как численный значок внизу в тех же членах правой части. То же имеет

место и для второй из формул (532). Исходя из этого, мы можем переписать эти формулы сокращенно в виде одной:

$$G_{ij}^k = g^{ka} G_{a,ij} \quad (i, j, k = 1, 2). \quad (533)$$

Действительно, давая  $k$  значения сначала 1, потом 2 и производя каждый раз в правой части подразумеваемое там суммирование по индексу  $a$ ,  $\sum_{a=1}^2$ , мы вернемся к подробной записи (532) тех же формул. Совершенно аналогично, формулы (530) можно переписать в сжатом виде так:

$$G_{k,ij} = G_{ij}^a g_{ak} \quad (i, j, k = 1, 2). \quad (534)$$

Как мы сейчас покажем, — и это очень важное обстоятельство — величины  $G_{k,ij}$  могут быть выражены через частные производные коэффициентов первой квадратичной формы  $g_{ij}$  по  $u^1, u^2$ . В самом деле, запишем, пользуясь формулами (525):

$$\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j = g_{ij}, \quad \mathbf{r}_j \mathbf{r}_k = g_{jk}, \quad \mathbf{r}_k \mathbf{r}_i = g_{ki}.$$

Здесь каждый из значков  $i, j, k$  имеет значение либо 1, либо 2, но во всяком случае одно и то же во всех трех формулах. Продифференцируем первое равенство по  $u^k$ , второе по  $u^i$ , третье по  $u^j$ . Получим

$$\mathbf{r}_{ik} \mathbf{r}_j + \mathbf{r}_i \mathbf{r}_{jk} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k},$$

$$\mathbf{r}_{ji} \mathbf{r}_k + \mathbf{r}_j \mathbf{r}_{ki} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i},$$

$$\mathbf{r}_{kj} \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_k \mathbf{r}_{ij} = \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j}.$$

Почленно сложим последние два равенства и вычтем из них первое. Тогда, учитывая, что порядок значков у  $\mathbf{r}_{ij}$  и  $g_{ij}$  не играет роли (так как  $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_{21}$  и  $g_{12} = g_{21}$ ), мы получим

$$2\mathbf{r}_k \mathbf{r}_{ij} = \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}.$$

Остальные члены левой части, как легко проверить, взаимно уничтожаются. Отсюда, пользуясь сокращенным обозначением (529), получим

$$G_{k,ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right). \quad (535)$$

Это — одна из основных формул теории поверхностей; смысл ее заключается в том, что скалярные произведения вторых частных производных радиус-вектора  $\mathbf{r}(u^1, u^2)$  на его первые частные производные удается выразить посредством только коэффициентов первой квадратичной формы (точнее, через производные о

них). Этот факт совсем не самоочевиден и имеет в дальнейшем важные применения.

Выпишем три из формул (535):

$$G_{1,11} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1}, \quad G_{1,12} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}, \quad G_{1,22} = \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}.$$

Остальные три получаются из этих заменой значка 1 через 2, и наоборот.

Выражения (535), полученные нами для величин  $G_{k,ij}$ , часто называются символами Христоффеля 1-го рода. Подставим эти выражения в формулы (530').

Тогда и все величины  $G_{ij}^k$  выражаются через коэффициенты первой квадратичной формы  $g_{ij}$  и их первые частные производные  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}$ .

Полученные выражения для  $G_{ij}^k$ , которые мы явно выписывать не будем, часто называются символами Христоффеля 2-го рода.

Теперь в формулах (528) подсчитаны все коэффициенты, причем коэффициенты  $G_{ij}^1, G_{ij}^2$  вполне определяются из первой квадратичной формы на поверхности. Формулы (528) мы будем называть *первой группой дериивационных формул* (дериивационные формулы Гаусса).

### § 80\*. Дериивационные формулы второй группы.

Переходим к выводу *второй группы дериивационных формул*. Запишем перпендикулярность вектора  $\mathbf{m}$  к любому из касательных векторов  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ :

$$\mathbf{m} \mathbf{r}_i = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Продифференцируем теперь это тождество по любой из координат  $u^1, u^2$

$$\frac{\partial}{\partial u^j} (\mathbf{m} \mathbf{r}_i) = 0 \quad (i, j = 1, 2)$$

или

$$\mathbf{m}_j \mathbf{r}_i + \mathbf{m} \mathbf{r}_{ij} = 0.$$

В силу (525) второе слагаемое совпадает с  $b_{ij}$ , и мы получаем при любых  $i, j$

$$\mathbf{m}_j \mathbf{r}_i = -b_{ij} \quad (i, j = 1, 2). \quad (536)$$

Эти выражения для коэффициентов второй квадратичной формы уже были в свое время получены нами в старых обозначениях.

Назначение второй группы дериивационных формул состоит в том, чтобы дать частные производные единичного нормального вектора  $\mathbf{m}$  по  $u^1$  и  $u^2$  в разложении по основным векторам  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{m}$

в каждой точке поверхности. Эти частные производные — мы их будем обозначать  $m_1, m_2$  — взяты от единичного нормального вектора  $m$ , следовательно, ему ортогональны и расположены в касательной плоскости к поверхности. Поэтому при их разложении можно ограничиться векторами  $r_1$  и  $r_2$ :

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= -b_1^1 r_1 - b_1^2 r_2, \\ m_2 &= -b_2^1 r_1 - b_2^2 r_2, \end{aligned} \right\} \quad (537)$$

где через  $b_i^j$  обозначены неизвестные пока коэффициенты разложения. Знаки при  $b$  расставлены так, что обе формулы (537) можно записать в нашей сокращенной записи:

$$m_i = -b_i^1 r_1 - b_i^2 r_2 = -b_i^\alpha r_\alpha \quad (i=1, 2). \quad (537')$$

Чтобы подсчитать коэффициенты  $b_i^j$ , умножим скалярно обе части равенства (537') сначала на  $r_1$ , потом на  $r_2$ . Получим

$$\begin{aligned} m_1 r_1 &= -b_1^1 r_1 r_1 - b_1^2 r_2 r_1, \\ m_2 r_2 &= -b_2^1 r_1 r_2 - b_2^2 r_2 r_2. \end{aligned}$$

В силу (536) и (525) мы узнаем слева коэффициенты второй, а справа первой квадратичной формы; равенства переписываются так:

$$\left. \begin{aligned} b_{11} &= b_1^1 g_{11} + b_1^2 g_{21}, \\ b_{12} &= b_1^1 g_{12} + b_1^2 g_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (538)$$

Решая эти уравнения относительно  $b_1^1$  и  $b_1^2$ , получаем

$$\begin{aligned} b_1^1 &= \frac{b_{11}g_{22} - b_{12}g_{21}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = b_{11}g^{11} + b_{12}g^{21} = b_{1a}g^{a1}, \\ b_1^2 &= \frac{-b_{11}g_{12} + b_{12}g_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = b_{11}g^{12} + b_{12}g^{22} = b_{1a}g^{a2}. \end{aligned}$$

Эти обе формулы можно объединить в одной:

$$b_i^j = b_{1a}g^{aj}. \quad (538')$$

Здесь  $i, j$  придаются все четыре возможные комбинации значений  $a$ : 1, 2, а по  $a$  производится суммирование,  $\sum_{a=1}^2$ . Формулы (537), где

коэффициенты  $b_i^j$  определяются согласно (538'), и называются *второй группой дифференциональных формул (формулы Вейнгардена)*. Объединим теперь формулы (528) и (537), переписав их в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u^i} &= G_{1i}^1 \mathbf{r}_1 + G_{1i}^2 \mathbf{r}_2 + b_{1i} \mathbf{m}, \\ \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u^i} &= G_{2i}^1 \mathbf{r}_1 + G_{2i}^2 \mathbf{r}_2 + b_{2i} \mathbf{m}, \quad (i=1, 2), \\ \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial u^i} &= -b_1^i \mathbf{r}_1 - b_2^i \mathbf{r}_2. \end{aligned} \right\} \quad (539)$$

Смысл этих формул заключается, очевидно, в следующем. Они выражают первые частные производные<sup>1)</sup> по  $u^1$  и  $u^2$  от основных векторов в данной точке поверхности — двух касательных  $r_1$  и  $r_2$  и одного нормального  $m$ . Эти частные производные от  $r_1, r_2, m$  получаются в виде разложения по самим векторам  $r_1, r_2, m$ .

Дифференцируя эти формулы еще раз и пользуясь уже имеющимися разложениями первых производных, получаем и вторые производные от  $r_1, r_2, m$ , разложенные по  $r_1, r_2, m$ ; то же относится и к производным третьего и т. д. порядков. Это позволяет отнести всю картину поведения поверхности (в бесконечной близости данной точки определяемую именно значениями последовательных частных производных от  $r$  в этой точке) к основным векторам  $r_1, r_2, m$ . Особенно существенно при всем этом, что коэффициенты разложения (539) определяются, как мы видели, целиком через коэффициенты  $g_{ij}, b_{ij}$  первой и второй квадратичных форм (и их производные); то же будет относиться, очевидно, и к разложению производных от векторов  $r_1, r_2, m$  по  $u^1, u^2$  второго и выше порядков.

### § 81\*. Роль второй квадратичной формы.

Выведенные в § 80 дифференциональные формулы (539) играют фундаментальную роль в теории поверхностей вообще, в том числе и при изучении внутренней геометрии поверхности. Но прежде чем окончательно перейти в область внутренней геометрии, мы используем эти формулы, чтобы ответить на некоторые естественно возникающие вопросы из «внешней» геометрии поверхности. Мы знаем, что задание первой квадратичной формы на поверхности определяет внутреннюю геометрию на поверхности, т. е. характеризует поверхность с точностью до ее изгибаия. Какие аналитические данные следует присоединить к первой квадратичной форме, чтобы изгибание сделалось невозможным и поверхность приобрела твердую форму в пространстве? На это отвечает следующая теорема:

*Если на некоторой поверхности  $S$  заданы и первая и вторая квадратичные формы, т. е. если в некоторой системе криволинейных координат  $u^1, u^2$  коэффициенты  $g_{ij}, b_{ij}$  заданы как функции от  $u^1, u^2$ , то геометрическая форма поверхности  $S$  в пространстве вполне определяется<sup>2)</sup>. Более точно: любая поверхность  $S^*$ , обладающая теми же первой и второй квадратичными формами,*

<sup>1)</sup> Отсюда и термин — дифференциональные формулы (*dérivée* — производная).

<sup>2)</sup> В этом параграфе мы предполагаем, что на рассматриваемых поверхностях направление единичной нормали  $m$  выбрано всегда в сторону векторного произведения  $[r_1, r_2]$ , чем устраняется неопределенность в знаке второй квадратичной формы [см. (360)].

может отличаться от  $S$  лишь положением в пространстве, т. е. получается из  $S$  движением  $S$  как твердого тела в пространстве. Отметим, между прочим, что обратная теорема очевидна: передвигая  $S$  как твердое тело в пространстве, мы не меняем на  $S$  ни первой ни второй квадратичных форм, что легко вытекает из их геометрического смысла.

Итак, пусть даны две поверхности  $S$  и  $S^*$ , обладающие одинаковыми первой и второй квадратичными формами. Более точно: на  $S$  и  $S^*$  можно так согласовать выбор криволинейных координат  $u^1, u^2$ , что  $g_{ij}$  и  $b_{ij}$  будут выражаться одинаковыми функциями от  $u^1, u^2$ , причем и область изменения переменных  $u^1, u^2$  будет на  $S$  и  $S^*$  одинакова. Мы будем называть точку  $M$  на  $S$  и точку  $M^*$  на  $S^*$  соответствующими точками, если им отвечают одинаковые значения  $u^1, u^2$ . Очевидно, что в соответствующих точках обеих поверхностей значения  $g_{ij}$  и  $b_{ij}$  тоже будут одинаковы. Докажем, что движением  $S^*$  в пространстве можно добиться совмещения  $S^*$  с  $S$  таким образом, что каждая точка  $M^*$  совпадет с соответствующей точкой  $M$ .

Фиксируем прежде всего на поверхности  $S$  некоторую точку  $M_0$  в качестве начальной; соответствующую ей точку  $M_0^*$  на  $S^*$  примем за начальную на  $S^*$ . Рассмотрим векторы  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  как в точке  $M_0$  поверхности  $S$ , так и в точке  $M_0^*$  поверхности  $S^*$ . Мы замечаем, что скалярные квадраты  $\mathbf{r}_1^2, \mathbf{r}_2^2$  и скалярное произведение  $\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2$  будут равны соответственно  $g_{11}, g_{22}$  и  $g_{12}$  и, следовательно, имеют одинаковые значения в той и другой точках. Отсюда следует, что векторы  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  в точках  $M_0$  и  $M_0^*$  имеют соответственно одинаковые длины и образуют между собой одинаковые углы. Поэтому фигуры, образуемые векторами  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  в точках  $M_0$  и  $M_0^*$ , конгруэнтны, и движением поверхности  $S^*$  как твердого тела можно добиться совпадения точки  $M_0^*$  и векторов  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  в ней с точкой  $M_0$  и векторами  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  в ней. Тогда векторы  $\mathbf{m}$  в точках  $M_0^*$  и  $M_0$  тоже совпадут, так как они будут одинаково направлены в сторону вектора  $[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]$ .

Итак, движением поверхности  $S^*$  как твердого тела мы добились совмещения точки  $M_0^*$  и основных векторов  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{m}$  в ней с соответствующей точкой  $M_0$  на поверхности  $S$  и с основными векторами  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{m}$  в ней. Остается доказать, что теперь поверхность  $S^*$  целиком совместилаась с  $S$ .

Возьмем на поверхности  $S$  какую-нибудь кривую

$$u^1 = u^1(t), \quad u^2 = u^2(t), \quad (540)$$

которая при  $t=0$  проходит через точку  $M_0$ . Пользуясь этими же уравнениями (540) на поверхности  $S^*$ , мы получаем там соответствующую кривую, т. е. одинаковым значениям  $t$  будут отвечать соответствующие точки на обеих поверхностях. В частности, при  $t=0$  кривая на поверхности  $S^*$  проходит через точку  $M_0^*$ .

Изучим изменение векторов  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{m}$  вдоль кривой (540) на поверхности  $S$ . Эти векторы являются функциями координат  $u^1, u^2$  на поверхности; но так как вдоль кривой (540)  $u^1, u^2$  в свою очередь зависят от  $t$ , то  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{m}$  в конечном итоге являются функциями от  $t$ . Запишем их производные по  $t$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u^1} \frac{du^1}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u^2} \frac{du^2}{dt} = \left( G_{11}^1 \frac{du^1}{dt} + G_{12}^1 \frac{du^2}{dt} \right) \mathbf{r}_1 + \\ &\quad + \left( G_{21}^1 \frac{du^1}{dt} + G_{22}^1 \frac{du^2}{dt} \right) \mathbf{r}_2 + \left( b_{11} \frac{du^1}{dt} + b_{12} \frac{du^2}{dt} \right) \mathbf{m}, \\ \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u^1} \frac{du^1}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u^2} \frac{du^2}{dt} = \left( G_{11}^2 \frac{du^1}{dt} + G_{12}^2 \frac{du^2}{dt} \right) \mathbf{r}_1 + \\ &\quad + \left( G_{21}^2 \frac{du^1}{dt} + G_{22}^2 \frac{du^2}{dt} \right) \mathbf{r}_2 + \left( b_{21} \frac{du^1}{dt} + b_{22} \frac{du^2}{dt} \right) \mathbf{m}, \\ \frac{d\mathbf{m}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial u^1} \frac{du^1}{dt} + \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial u^2} \frac{du^2}{dt} = - \left( b_1^1 \frac{du^1}{dt} + b_1^2 \frac{du^2}{dt} \right) \mathbf{r}_1 - \\ &\quad - \left( b_2^1 \frac{du^1}{dt} + b_2^2 \frac{du^2}{dt} \right) \mathbf{r}_2. \end{aligned} \quad (541)$$

Здесь для получения окончательных выражений в правой части использованы деривационные формулы (539).

Мы замечаем, что выписанные равенства дают нам систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме, если рассматривать  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{m}$  как неизвестные функции от  $t$ . Действительно, производные от  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{m}$  по  $t$  выражены как линейные комбинации самих векторов  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{m}$ . Коэффициенты при  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{m}$  в правых частях выражаются при этом через величины  $G_{ij}^k$  и  $b_{ij}$ , т. е. через коэффициенты второй и первой квадратичных форм и их производные, и через производные  $\frac{du^1}{dt}, \frac{du^2}{dt}$  вдоль кривой (540).

Если мы рассмотрим теперь соответствующим образом кривую (540) на поверхности  $S^*$ , то вдоль нее мы также придем к уравнениям (541), причем не только общая запись уравнений, но и вид функциональной зависимости от параметра  $t$  выражений в круглых скобках будет прежний. Действительно, при одинаковых значениях  $t$  мы попадаем на обеих поверхностях  $S$  и  $S^*$  в соответствующие точки, где значения  $u^1, u^2$  — одинаковые, следова-

тельно, значения  $\frac{du^1}{dt}, \frac{du^2}{dt}$  — тоже одинаковые; кроме того, и это самое существенное, значения  $g_{ij}, b_{ij}$  и их производных в соответствующих точках — тоже одинаковые, так как  $g_{ij}, b_{ij}$  на обеих поверхностях выражаются одинаковыми функциями от  $u^1, u^2$ . Следовательно, и значения  $G_{ij}^k$  — тоже одинаковы. Итак, коэффициенты при  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{m}$  в системе линейных дифференциальных

уравнений (541) будут *одинаковыми* функциями  $t$  как вдоль кривой (540) на поверхности  $S$ , так и вдоль соответствующей кривой на поверхности  $S^*$ . Но, кроме того, при  $t=0$  мы попадаем на обеих кривых в точки  $M_0$  и  $M_0^*$ , совпавшие между собой, причем в этих точках векторы  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{m}$  имеют одинаковые значения для обеих поверхностей.

Итак, при рассмотрении  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{m}$  как функций  $t$  вдоль кривой (540) на поверхности  $S$  и вдоль соответствующей кривой на поверхности  $S^*$  эти функции  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{m}$  удовлетворяют не только одной и той же нормальной системе линейных дифференциальных уравнений (541), но и принимают при  $t=0$  одни и те же начальные значения. Из анализа известно, что этими данными  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{m}$  как функции от  $t$  определяются однозначно<sup>1)</sup> и должны, следовательно, быть одинаковыми вдоль кривой (540) на  $S$  и вдоль соответствующей кривой на  $S^*$ .

Возьмем какое-нибудь значение  $t$ ; ему отвечает некоторая точка  $M$  на кривой (540) поверхности  $S$  и соответствующая точка  $M^*$  на кривой (540) поверхности  $S^*$ . Приращение радиус-вектора при переходе из точки  $M_0$  при  $t=0$  в точку  $M$  может быть выражено, очевидно, интегралом вдоль кривой (540)

$$\int_0^t \left( \mathbf{r}_1 \frac{du^1}{dt} + \mathbf{r}_2 \frac{du^2}{dt} \right) dt.$$

Аналогично выражается приращение радиус-вектора при переходе из точки  $M_0^*$  в точку  $M^*$ . Но так как  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  вдоль обеих кривых—одинаковые функции от  $t$  и так как  $u^1$ ,  $u^2$ —тоже одинаковые функции от  $t$ , то этот интеграл имеет одно и то же значение в обоих случаях. Вектор смещения  $\overline{M_0 M}$  совпадает с вектором  $\overline{M_0^* M^*}$ , а так как точки  $M_0$  и  $M_0^*$  совпадают, то и точки  $M$  и  $M^*$  совпадут. Итак, любые две соответствующие точки  $M$  и  $M^*$  на кривых (540) поверхностей  $S$  и  $S^*$  совпадают. Но кривую (540) мы проводили по поверхности  $S$  совершенно произвольно и могли прити в любую точку  $M$  на  $S$ ; следовательно, поверхность  $S$  всеми своими точками совпадает с соответствующими точками поверхности  $S^*$ . Теорема доказана.

Легко было бы показать теперь, что совпадение первых квадратичных форм на поверхностях  $S$  и  $S^*$  и отличие вторых форм

<sup>1)</sup> Степанов В. В., Дифференциальные уравнения, гл. IV, § 1: гл. VII, § 2.

Соответствующая теорема доказывается в анализе, конечно, для *скалярных* функций. Но, разлагая наши вектор-функции  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{m}$  по осям  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , мы можем вместо трех векторных уравнений (541) записать девять скалярных с девятью неизвестными скалярными функциями—координатами векторов  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{m}$ . Этим мы обнаруживаем законность применения теоремы в нашем случае.

лишь знаком означает, что одна из этих поверхностей может быть получена из другой движением как твердое тело и *зеркальным отражением*.

Нами выяснено, что первая и вторая квадратичные формы определяют поверхность с точностью до ее положения в пространстве, и следовательно, все остальные геометрические данные и величины, связанные с поверхностью, целиком определяются заданием  $g_{ij}$  и  $b_{ij}$ . Но возникает вопрос, нет ли, кроме того, какой-либо связи между самими  $g_{ij}$  и  $b_{ij}$  как функциями  $u^1$ ,  $u^2$ , связи, имеющей место на любой поверхности и в любых координатах  $u^1$ ,  $u^2$ . Другими словами, нас интересует вопрос: *в какой мере задание  $g_{ij}$ , т. е. внутренней геометрии поверхности, ограничивает выбор  $b_{ij}$  и тем самым влияет на окончательное оформление поверхности в пространстве?*

Наиболее естественный путь для ответа на этот вопрос состоял бы в составлении *условий интегрируемости* деривационных формул (539). А именно, нужно было бы сначала выписать формулы (539) при  $i=1$  и продифференцировать их почленно по  $u^2$ ; потом, наоборот, выписав (539) при  $i=2$ , продифференцировать их по  $u^1$ . Легко видеть, что в обоих случаях в левых частях формул (539) получится одно и то же; следовательно, можно приравнять и правые части соответствующих формул. Получим три векторных равенства; разлагая участящие в них векторы по  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{m}$  и сравнивая коэффициенты при них, приходим к девяти уже скалярным уравнениям (из которых существенными, как оказывается, будут лишь три). Эти уравнения дают нам искомую зависимость между  $g_{ij}$  и  $b_{ij}$  (с участием и производных от этих величин).

Мы не пойдем непосредственно этим путем ввиду его технической сложности, а применим в сущности тот же прием, но в несколько замаскированном виде.

Этому будут посвящены §§ 82, 83. Соответственно с двумя группами деривационных формул мы получим и две группы условий интегрируемости—формулу Гаусса и формулы Петерсона-Кодадци.

При этом формула Гаусса, как мы увидим, имеет важнейший геометрический смысл: она показывает, что полная кривизна  $K$  поверхности может быть определена на основе одной первой квадратичной формы.

### § 82. Теорема Гаусса.

В этом параграфе мы покажем, что полная кривизна поверхности  $K = k_1 k_2$  может быть выражена через коэффициенты  $g_{ij}$  первой квадратичной формы и их первые и вторые частные производные по криволинейным координатам  $u^1$ ,  $u^2$ .

Тем самым *полная кривизна  $K$  вполне определяется при задании первой квадратичной формы на поверхности, а следовательно,*

принадлежит к внутренней геометрии поверхности и остается инвариантной при изгибании.

Это — один из наиболее глубоких результатов теории поверхностей; его нельзя усмотреть непосредственно из определения полной кривизны  $K = k_1 k_2$ , так как  $k_1, k_2$  по отдельности при изгибании меняются. Выпишем формулу (535):

$$\mathbf{r}_{ij} \mathbf{r}_k = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right).$$

Продифференцируем обе части по  $u^l$ , где  $i, j, k, l$  можно давать в любой комбинации значения 1, 2. Получим, обозначая через  $\mathbf{r}_{ijl}$  третью производную  $\mathbf{r}$  по  $u^i, u^j, u^l$ :

$$\mathbf{r}_{ijl} \mathbf{r}_k + \mathbf{r}_{il} \mathbf{r}_{kj} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial u^j \partial u^l} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial u^i \partial u^l} - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u^k \partial u^l} \right).$$

Так как эта формула верна при любых значениях индексов  $i, j, k, l = 1, 2$ , то она останется верной, если то значение, которое имел индекс  $l$ , мы припишем  $j$ , и наоборот. Формально это будет означать, что индексы  $l$  и  $j$  поменяются местами:

$$\mathbf{r}_{ill} \mathbf{r}_k + \mathbf{r}_{il} \mathbf{r}_{ki} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial u^l \partial u^j} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial u^i \partial u^j} - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u^k \partial u^j} \right).$$

Вычитая из верхней формулы нижнюю почленно и учитывая, что порядок индексов, указывающих последовательные частные дифференцирования по  $u^1, u^2$ , не играет роли, получим

$$\mathbf{r}_{il} \mathbf{r}_{kl} - \mathbf{r}_{il} \mathbf{r}_{ki} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u^k \partial u^l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial u^i \partial u^j} - \frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial u^i \partial u^l} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial u^k \partial u^j} \right).$$

Кажется на первый взгляд, что здесь заключается большое количество формул в зависимости от значений, которые мы будем придавать индексам  $i, j, k, l$ . На самом деле существенной здесь является лишь одна формула, получаемая при  $i = j = 1, k = l = 2$ :

$$\mathbf{r}_{11} \mathbf{r}_{22} - \mathbf{r}_{12} \mathbf{r}_{12} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2 \partial u^2} + \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1} - 2 \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1 \partial u^2} \right). \quad (542)$$

Если попробовать другие комбинации значений  $i, j, k, l$ , то легко убедиться, что получаются либо тождества, либо то же самое уравнение (542).

В самом деле, если  $i = k$ , то справа и слева получается тождественно нуль. То же происходит, если  $j = l$ . Остается случай, когда  $i$  и  $k$  различны, т. е. имеют значения 1, 2, и  $j$  и  $l$  тоже различны, т. е. также имеют значения 1, 2. Положим ли мы  $i = 1, k = 2$ , или наоборот, не имеет значения, так как разница будет лишь в знаках обеих частей равенства. То же относится и к индексам  $j$  и  $l$ .

Формула (542) показывает, что определенная комбинация скалярных произведений вторых производных  $\mathbf{r}_{ij} \mathbf{r}_{kl}$  определяется первой квадратичной формой, хотя это и неверно по отношению к каждому произведению  $\mathbf{r}_{ij} \mathbf{r}_{kl}$  в отдельности. На основе формулы (542) мы покажем, что дискриминант второй квадратичной формы  $b_{11} b_{22} - b_{12}^2$  также определяется первой квадратичной формой. Выпишем с этой целью формулы (528) при различных значениях  $i, j$ :

$$\mathbf{r}_{11} = G_{11}^\alpha \mathbf{r}_\alpha + b_{11} \mathbf{m}, \quad \mathbf{r}_{12} = G_{12}^\gamma \mathbf{r}_\gamma + b_{12} \mathbf{m}, \quad \mathbf{r}_{22} = G_{22}^\beta \mathbf{r}_\beta + b_{22} \mathbf{m}. \quad (543)$$

В правых частях использована сокращенная запись суммирования. Составим следующие скалярные произведения, помня, что скалярные произведения  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  на  $\mathbf{m}$  равны нулю:

$$\mathbf{r}_{11} \mathbf{r}_{22} = G_{11}^\alpha G_{22}^\beta \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta + b_{11} b_{22} \mathbf{m}^2,$$

$$\mathbf{r}_{12} \mathbf{r}_{12} = G_{12}^\gamma G_{12}^\delta \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\delta + b_{12}^2 \mathbf{m}^2.$$

Здесь  $\gamma, \delta$ , как и  $\alpha, \beta$ , — независимые индексы суммирования, пробегающие значения 1, 2; при этом  $\gamma$  входит в выражение (543) для  $\mathbf{r}_{12}$ , а  $\delta$  — совершенно аналогичное выражение для  $\mathbf{r}_{12}$ , взятое вторым множителем в скалярном произведении  $\mathbf{r}_{12} \mathbf{r}_{12}$ . Учитывая, что  $\mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta = g_{\alpha\beta}$  и  $\mathbf{m}^2 = 1$ , и вставляя полученные выражения в (542), приходим к окончательной формуле

$$G_{11}^\alpha G_{22}^\beta g_{\alpha\beta} - G_{12}^\gamma G_{12}^\delta g_{\gamma\delta} + b_{11} b_{22} - b_{12}^2 = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2 \partial u^2} + \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1} - 2 \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1 \partial u^2} \right)$$

или

$$b_{11} b_{22} - b_{12}^2 = \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2 \partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1} + G_{12}^\gamma G_{12}^\delta g_{\gamma\delta} - G_{11}^\alpha G_{22}^\beta g_{\alpha\beta}. \quad (544)$$

Эта формула называется *формулой Гаусса*. Ее значение состоит в следующем. Прежде всего правая часть (544) содержит только  $g_{11}, g_{12}, g_{22}$  и их первые и вторые производные по  $u^1, u^2$ . Действительно, три члена, содержащих вторые производные, у нас выписаны; что же касается величин  $G_{ij}^k$ , то они целиком выражаются через  $g_{11}, g_{12}, g_{22}$  и их первые производные по  $u^1, u^2$ , согласно формулам (530') и (535). Можно было бы выписать суммирование по  $\gamma, \delta$  и  $\alpha, \beta$  в развернутом виде и фактически написать последние два члена формулы (544) выраженнымми через  $g_{11}, g_{12}, g_{22}$  и их первые производные по  $u^1, u^2$ . Никаких трудностей, кроме чисто технических, выкладка не представляет, но результат дает громоздкий и лишенный наглядности, поэтому останавливаться на ней мы не будем.

Итак, правая часть формулы (544) зависит только от первой квадратичной формы; левая же часть есть, очевидно, не что иное, как дискриминант второй квадратичной формы, в старых обозначениях  $LN - M^2$ .

Итак, при задании первой квадратичной формы на поверхности вторую квадратичную форму нельзя выбирать произвольно, ибо потому, что ее дискриминант будет вполне определен формулой Гаусса.

Этот результат допускает чрезвычайно важную геометрическую формулировку. Мы знаем, что полная кривизна поверхности определяется формулой

$$K = k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{b_{11} b_{22} - b_{12}^2}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}. \quad (545)$$

Мы видим, что в силу (544) полная кривизна  $K$  на поверхности вполне определяется коэффициентами первой квадратичной формы и их первыми и вторыми производными по  $u^1$ ,  $u^2$ .

Допустим теперь, что рассматриваемая поверхность подвергается изгибуанию. Мы знаем, что если при этом сохранять у каждой точки те значения  $u^1$ ,  $u^2$ , которые ей отвечали до изгибаания, то и  $g_{11}$ ,  $g_{12}$ ,  $g_{22}$  остаются теми же функциями от  $u^1$ ,  $u^2$ , как и до изгибаания (см. конец § 77), и следовательно, они и их производные в каждой точке сохраняют прежние значения. Отсюда следует, что при изгибаании поверхности полная кривизна  $K$  в каждой ее точке остается без изменения. Таким образом, хотя при изгибаании поверхность вблизи каждой точки меняет свою форму, вследствие чего главные кривизны меняют свои значения, но их произведение — полная кривизна  $K$  — остается постоянным.

Отсюда вытекает ряд важных выводов. Из их числа докажем следующую теорему.

*Всякая поверхность, изгибающаяся на плоскость (или на кусок плоскости) есть развертывающаяся поверхность.*

Действительно, так как при изгибаании полная кривизна  $K$  сохраняет свое значение, то во всех точках данной поверхности она должна быть такой же, как и на плоскости, т. е. нулем. А это означает, что данная поверхность — развертывающаяся (§ 72).

Доказанная теорема является обратной теореме конца § 66. Теперь мы можем утверждать следующее:

*Для того чтобы поверхность была развертывающейся, необходимо и достаточно, чтобы она (по крайней мере в окрестности каждой своей обыкновенной точки) была изгибаема на плоскость.*

### § 83\*. Формулы Петерсона-Кодаци.

Переходим к выводу формул Петерсона-Кодаци — еще двух дифференциальных уравнений, связывающих коэффициенты первой и второй квадратичных форм. Используя выражения (536) для коэффициентов второй квадратичной формы, можно написать:

$$b_{i1} = -m_1 r_i, \quad b_{i2} = -m_2 r_i.$$

Дифференцируем первое равенство по  $u^2$ , а второе — по  $u^1$ :

$$\frac{\partial b_{i1}}{\partial u^2} = -m_{12} r_i - m_1 r_{i2},$$

$$\frac{\partial b_{i2}}{\partial u^1} = -m_{21} r_i - m_2 r_{i1}.$$

Вычитаем из первого равенства второе, учитывая, что

$$m_{12} = m_{21} = \frac{\partial^2 m}{\partial u^1 \partial u^2}.$$

Получим

$$\frac{\partial b_{i1}}{\partial u^2} - \frac{\partial b_{i2}}{\partial u^1} = m_2 r_{i1} - m_1 r_{i2}.$$

Вставим сюда выражения для  $r_{i1}$  и  $r_{i2}$ , взятые из (528):

$$r_{i1} = G_{i1}^1 r_1 + G_{i1}^2 r_2 + b_{i1} m,$$

$$r_{i2} = G_{i2}^1 r_1 + G_{i2}^2 r_2 + b_{i2} m.$$

Получим, учитывая, что скалярные произведения  $m_1$ ,  $m_2$  на  $m$  дают нуль, так как  $m$  — единичная вектор-функция и, следовательно, ортогональна своим производным:

$$\frac{\partial b_{i1}}{\partial u^2} - \frac{\partial b_{i2}}{\partial u^1} = G_{i1}^1 r_1 m_2 + G_{i1}^2 r_2 m_2 - G_{i2}^1 r_1 m_1 - G_{i2}^2 r_2 m_1.$$

Снова пользуясь выражениями (536), можно переписать уравнение в виде

$$\frac{\partial b_{i1}}{\partial u^2} - \frac{\partial b_{i2}}{\partial u^1} = -G_{i1}^1 b_{12} - G_{i1}^2 b_{22} + G_{i2}^1 b_{11} + G_{i2}^2 b_{21}$$

или окончательно

$$\frac{\partial b_{i1}}{\partial u^2} - G_{i2}^1 b_{11} - G_{i2}^2 b_{21} = \frac{\partial b_{i2}}{\partial u^1} - G_{i1}^1 b_{12} - G_{i1}^2 b_{22}. \quad (546)$$

Давая индексу  $i$  последовательно значения 1 и 2, получаем два дифференциальных уравнения, связывающих коэффициенты второй квадратичной формы  $b_{11}$ ,  $b_{12}$ ,  $b_{22}$  и их первые производные с коэффициентами первой квадратичной формы  $g_{11}$ ,  $g_{12}$ ,  $g_{22}$  и их первыми производными (входящими исключительно через величины  $G_{ij}^k$ ). Эти два уравнения называются *формулами Петерсона-Кодаци*.

Для того чтобы полностью осветить роль формулы Гаусса (544) и формул Петерсона-Кодаци (546), формулируем, хотя и без доказательства, следующую основную теорему. Как уже упоминалось, отыскивая условия интегрируемости дифференциальных формул (539), мы приходим к девяти уравнениям, связывающим коэффициенты  $g_{ij}$ ,  $b_{ij}$  и их производные. Как показала бы

соответствующая выкладка, среди этих девяти уравнений только три существенных, а именно формулы Гаусса и Петерсона-Кодадци. Исходя из того, что формулы Гаусса и Петерсона-Кодадци исчерпывают условия интегрируемости системы дифференциальных формул (539), и пользуясь соответствующими теоремами существования из теории дифференциальных уравнений, можно доказать такую теорему:

Пусть в некоторой односвязной области изменения переменных  $u^1, u^2$  заданы две дифференциальные квадратичные формы с коэффициентами соответственно  $g_{11}, g_{12}, g_{22}$  и  $b_{11}, b_{12}, b_{22}$ . Точнее, коэффициенты этих форм заданы как функции от  $u^1, u^2$ .

Единственное ограничение, наложенное на коэффициенты первой квадратичной формы:

$$g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0, \quad g_{11} > 0,$$

что означает, что форма положительная<sup>1)</sup>.

Единственное ограничение, наложенное на коэффициенты второй квадратичной формы, то, что они должны удовлетворять совместно с коэффициентами первой квадратичной формы уравнениям (544) и (546) (формулам Гаусса и Петерсона-Кодадци).

Тогда можно построить поверхность, для которой (при определенном выборе криволинейных координат  $u^1, u^2$ ) первая и вторая квадратичные формы совпадут с наперед заданными нам дифференциальными квадратичными формами (а область изменения криволинейных координат  $u^1, u^2$  совпадет с наперед заданной областью изменения переменных  $u^1, u^2$ ).

К этому следует добавить, что на основании доказанного в § 81 такая поверхность определяется с точностью до движения ее как твердого тела в пространстве.

Итак, чисто аналитически заданные две дифференциальные квадратичные формы, из которых одна положительна, а другая связана с нею формулами Гаусса и Петерсона-Кодадци, всегда могут быть осуществлены на некоторой поверхности как ее первая и вторая квадратичные формы. Мы можем это выразить и так, сказав, что формулы Гаусса и Петерсона-Кодадци представляют собой необходимое и достаточное условие того, чтобы две аналитически заданные квадратичные дифференциальные формы, из которых одна положительная, служили первой и второй квадратичными формами для некоторой поверхности (которую они определяют в этом случае с точностью до движжения).

<sup>1)</sup> Чтобы убедиться в последнем, достаточно представить форму в виде

$$\frac{1}{g_{11}}(g_{11}du^1 + g_{12}du^2)^2 + \frac{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}{g_{11}}(du^2)^2.$$

### § 84\*. Векторы на поверхности.

Переходя к изучению внутренней геометрии поверхности, рассмотрим с этой точки зрения векторы на поверхности. Под вектором на поверхности мы понимаем вектор, заданный в какой-нибудь точке поверхности и лежащий в касательной плоскости в этой точке. Пользуясь тем, что в каждой точке  $M$  имеются два вектора,  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ , касательные к координатным линиям в этой точке (черт. 128), мы будем всякий касательный вектор  $\mathbf{a}$  в точке  $M$  разлагать по  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ :

$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{r}_1 + a^2 \mathbf{r}_2. \quad (547)$$

Через  $a^1, a^2$  мы обозначаем коэффициенты разложения. Мы можем, таким образом, аналитически задавать вектор в данной точке поверхности парой его координат  $a^1, a^2$ .

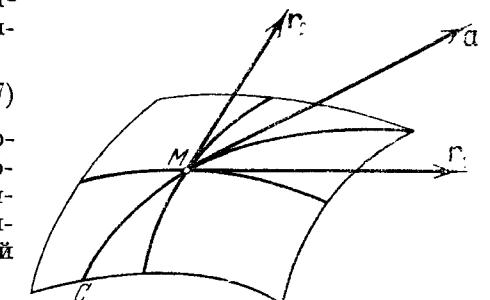
Разумеется, при переходе от данной системы криволинейных координат  $u^1, u^2$  на поверхности к какой-нибудь другой системе, координаты  $a^1, a^2$  того же самого вектора  $\mathbf{a}$  принимают другие значения, так как векторы  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  становятся другими.

Заметим кстати, что различные другие рассмотренные нами величины:  $g_{ij}, b_{ij}, G_{ij}^k$ , также принимают новые значения при переходе к новым координатам  $u^1, u^2$  на поверхности. Изучение соответствующих законов преобразования привело бы нас в область тензорного анализа, в которой впервые полностью раскрылся бы смысл индексных обозначений, введенных нами в этой главе. Однако мы не можем здесь этим заниматься, и индексные обозначения останутся для нас лишь орудием сокращенной записи формул.

Допустим, что рассматриваемая поверхность  $S$  подвергается изгибуанию. Всякий вектор  $\mathbf{a}$ , касательный к поверхности  $S$  в какой-нибудь точке  $M$ , мы условимся преобразовывать при этом следующим образом. Проведем через точку  $M$  какую-нибудь кривую  $C$ , лежащую на  $S$  и касающуюся вектора  $\mathbf{a}$  в точке  $M$ . Мы потребуем, чтобы после изгибаания поверхности  $S$  вместе с лежащими на ней кривой  $C$  и точкой  $M$  вектор  $\mathbf{a}$  продолжал касаться кривой  $C$  в точке  $M$ , сохраняя при этом прежнюю длину (и указывая прежнее направление вдоль  $C$ ).

Пусть уравнение кривой  $C$  на поверхности  $S$  было

$$u^1 = u^1(t), \quad u^2 = u^2(t). \quad (548)$$

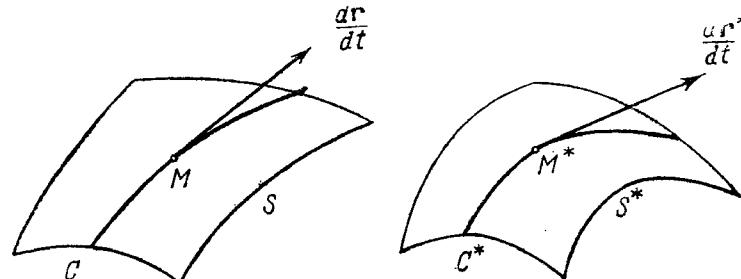


Черт. 128.

Тогда касательный вектор к кривой  $C$  в какой-нибудь точке  $M$ , направленный в сторону возрастания параметра  $t$ , может быть получен в виде

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}_1 \frac{du^1}{dt} + \mathbf{r}_2 \frac{du^2}{dt}.$$

Будем теперь изгибать поверхность  $S$ , сохраняя прежние значения  $u^1, u^2$  в каждой ее точке. Тогда уравнение кривой  $C^*$  на поверхности  $S^*$ , куда перейдет кривая  $C$  на  $S$  после изгиба-



Черт. 129.

ния, попрежнему имеет вид (548), а касательный вектор к кривой  $C^*$  в точке  $M^*$  может быть получен в виде

$$\frac{d\mathbf{r}^*}{dt} = \mathbf{r}_1^* \frac{du^1}{dt} + \mathbf{r}_2^* \frac{du^2}{dt}.$$

Мы утверждаем, что вектор  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$  в точке  $M$  переходит при изгибеании именно в вектор  $\frac{d\mathbf{r}^*}{dt}$  в соответствующей точке  $M^*$  (черт. 129). В самом деле, эти векторы приложены в соответствующих точках  $M$  и  $M^*$  и направлены по касательным к соответствующим кривым  $C$  и  $C^*$  в соответствующие стороны — в сторону возрастания  $t$ . Остается показать, что длины этих векторов одинаковы. Вычислим скалярные квадраты этих векторов:

$$\left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 = g_{11} \left( \frac{du^1}{dt} \right)^2 + 2g_{12} \frac{du^1}{dt} \frac{du^2}{dt} + g_{22} \left( \frac{du^2}{dt} \right)^2.$$

$$\left( \frac{d\mathbf{r}^*}{dt} \right)^2 = g_{11}^* \left( \frac{du^1}{dt} \right)^2 + 2g_{12}^* \frac{du^1}{dt} \frac{du^2}{dt} + g_{22}^* \left( \frac{du^2}{dt} \right)^2.$$

Так как при сохранении прежних  $u^1, u^2$  коэффициенты  $g_{11}, g_{12}, g_{22}$  при изгибеании не меняются, то  $g_{ij}^* = g_{ij}$ , и выражения совпадают. Итак,  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$  вдоль  $C$  переходит при изгибеании в  $\frac{d\mathbf{r}^*}{dt}$  вдоль  $C^*$ . Мы замечаем при этом, что коэффициенты раз-

ложения  $\frac{d\mathbf{r}^*}{dt}$  по  $\mathbf{r}_1^*, \mathbf{r}_2^*$  равны  $\frac{du^1}{dt}, \frac{du^2}{dt}$  и совпадают, следовательно, с коэффициентами разложения  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$  по  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ . Таким образом, при изгибеании поверхности  $S$  вместе со всевозможными касательными к ней векторами координаты последних  $a^1, a^2$  остаются без изменения (предполагая, что после изгибаии каждой точке  $M$  отнесены прежние значения  $u^1, u^2$ ). Этот результат выведен у нас, собственно, для вектора  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$  вдоль кривой  $C$ , но так как кривую  $C$  на поверхности и параметризацию  $t$  на  $C$  можно выбирать произвольно, то в качестве  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$  можно получить любой касательный к поверхности вектор  $a$ . В частности, если  $a^1 = 1, a^2 = 0$ , то  $a$  совпадает с  $\mathbf{r}_1$ , и мы заключаем, что после изгибаии координаты  $a^1, a^2$  снова равны 1, 0, и следовательно,  $\mathbf{r}_1$  переходит после изгибаии в  $\mathbf{r}_1^*$ . То же относится и к  $\mathbf{r}_2$ .

### § 85\*. Градиент скалярного поля на поверхности.

Введем теперь понятие о *векторном поле* на поверхности. Пусть в каждой точке поверхности нам задан вполне определенный вектор  $a$ , касательный к поверхности в этой точке. Аналитически это означает, что координаты вектора  $a$  в каждой точке заданы как функции  $u^1, u^2$ :

$$a^1 = a^1(u^1, u^2), \quad a^2 = a^2(u^1, u^2).$$

В этом случае мы говорим, что на поверхности задано векторное поле. Особенно нас интересует частный случай *градиентного векторного поля*. А именно, пусть на поверхности задано *скалярное поле*  $\varphi$ , т. е. каждой точке  $M$  отнесено вполне определенное значение переменной величины  $\varphi$ . Аналитически это означает, что  $\varphi$  задана как функция  $u^1, u^2$ :

$$\varphi = \varphi(u^1, u^2).$$

Построим теперь в каждой точке поверхности касательный вектор  $a$ , определяемый тем требованием, чтобы его скалярные произведения с координатными векторами  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  были равны частным производным  $\frac{\partial \varphi}{\partial u^1}, \frac{\partial \varphi}{\partial u^2}$  (последние мы будем обозначать коротко  $\varphi_1, \varphi_2$ ). Итак,

$$a\mathbf{r}_1 = \varphi_1, \quad a\mathbf{r}_2 = \varphi_2. \quad (549)$$

Покажем, что такой вектор всегда можно построить. Пусть  $a^1, a^2$  — его координаты; тогда

$$a = a^1\mathbf{r}_1 + a^2\mathbf{r}_2,$$

и условия (549), если учесть, что  $\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j = g_{ij}$ , примут вид

$$g_{11}a^1 + g_{12}a^2 = \varphi_1, \quad g_{21}a^1 + g_{22}a^2 = \varphi_2.$$

Эти два уравнения однозначно разрешаются относительно  $a^1, a^2$ :

$$\left. \begin{aligned} a^1 &= \frac{g_{22}\varphi_1 - g_{12}\varphi_2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = g^{11}\varphi_1 + g^{12}\varphi_2, \\ a^2 &= \frac{-g_{12}\varphi_1 + g_{11}\varphi_2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = g^{21}\varphi_1 + g^{22}\varphi_2. \end{aligned} \right\} \quad (550)$$

Таким образом, вектор  $\mathbf{a}$  однозначно определяется в каждой точке. Однако мы еще не можем утверждать, что  $\mathbf{a}$  образует векторное поле на поверхности, так как в понятии поля подразумевается, что значение рассматриваемой величины (вектора  $\mathbf{a}$ , скаляра  $\varphi$  и т. д.), определяясь выбором точки на поверхности, не зависит при этом от выбора системы координат  $u^1, u^2$  на поверхности. Между тем в нашем определении  $\mathbf{a}$  посредством требований (549) это неясно. Покажем, что вектору  $\mathbf{a}$  в каждой точке поверхности можно дать и чисто геометрическое определение, при котором его независимость от выбора координат на поверхности будет ясна.

Пусть через данную точку  $M$  проходит произвольная кривая  $C$  по поверхности, отнесенная к длине дуги. Тогда, рассматривая вдоль этой кривой значение величины  $\varphi$  как функцию от  $s$ , можно взять производную

$$\frac{d\varphi}{ds} = \varphi_1 \frac{du^1}{ds} + \varphi_2 \frac{du^2}{ds}.$$

Так как вектор  $\mathbf{a}$  удовлетворяет условиям (549), то можно переписать  $\frac{d\varphi}{ds}$  в виде

$$\frac{d\varphi}{ds} = \mathbf{a} \mathbf{r}_1 \frac{du^1}{ds} + \mathbf{a} \mathbf{r}_2 \frac{du^2}{ds} = \mathbf{a} \left( \mathbf{r}_1 \frac{du^1}{ds} + \mathbf{r}_2 \frac{du^2}{ds} \right) = \mathbf{a} \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

или окончательно

$$\frac{d\varphi}{ds} = \mathbf{a} \mathbf{t}, \quad (551)$$

где  $\mathbf{t}$  — единичный касательный вектор к кривой  $C$ , направленный в сторону отсчета дуги  $s$ .

Итак, скорость изменения величины  $\varphi$  по отношению к пути, проходимому по кривой  $C$ , равна в каждой точке проекции вектора  $\mathbf{a}$  на положительное направление касательной к кривой  $C$ .

Отсюда легко дать геометрическое определение вектора  $\mathbf{a}$ . Если взять в качестве  $C$  линию уровня скалярного поля  $\varphi$

$$\varphi(u^1, u^2) = \text{const.},$$

то левая часть (551) обращается в нуль и, следовательно, а ортогонально к  $\mathbf{t}$ . Другими словами, вектор  $\mathbf{a}$  в каждой точке поверхности направлен по нормали к линии уровня  $\varphi$ .

Если взять теперь в качестве  $C$  кривую, касающуюся вектора  $\mathbf{a}$  в данной точке и отсчитывать по ней дугу  $s$  в сторону  $\mathbf{a}$ , то  $\mathbf{t}$  будет направлено в

$$\mathbf{t} \mathbf{a} = |\mathbf{a}|$$

и (551) принимает вид

$$\frac{d\varphi}{ds} = |\mathbf{a}|.$$

Мы видим, что  $|\mathbf{a}|$  имеет геометрический смысл — скорости изменения  $\varphi$  по отношению к  $s$  в направлении, ортогональном линии уровня. Наконец, эта же формула показывает, что  $\frac{d\varphi}{ds} > 0$ ,  $\varphi$  растет вместе с  $s$ , т. е. в сторону  $\mathbf{a}$ .

Итак,  $\mathbf{a}$  строится в каждой точке поверхности как касательный вектор, нормальный к линии уровня  $\varphi$ , направленный в сторону возрастания  $\varphi$  и по длине равный скорости изменения  $\varphi$  относительно  $s$  в нормальном к линии уровня направлении (черт. 130).

Это построение показывает, что  $\mathbf{a}$  определяется независимо от выбора системы координат  $u^1, u^2$  на поверхности и образует инвариантное векторное поле на поверхности. Такое векторное поле  $\mathbf{a}$  называется градиентным по отношению к скалярному полю  $\varphi$ .

Из этого же построения ясно, что при изгибании поверхности вместе со скалярным полем  $\varphi$  и векторным полем  $\mathbf{a}$  последнее остается градиентным по отношению к  $\varphi$ .

Вычислим, наконец, для двух данных скалярных полей  $\varphi(u^1, u^2)$  и  $\psi(u^1, u^2)$  скалярное произведение отвечающих им градиентных векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ .

Полученную величину будем обозначать через  $\nabla(\varphi, \psi)$ . Возьмем разложение вектора  $\mathbf{a}$

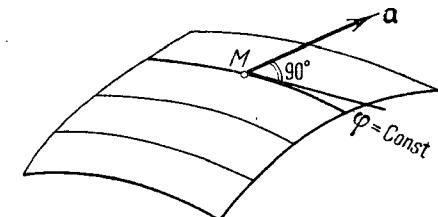
$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{r}_1 + a^2 \mathbf{r}_2$$

и умножим скалярно обе части равенства на  $\mathbf{b}$ . Получим

$$\nabla(\varphi, \psi) = \mathbf{a} \mathbf{b} = a^1 \mathbf{r}_1 \mathbf{b} + a^2 \mathbf{r}_2 \mathbf{b}.$$

Пользуясь условиями (549) в применении к  $\mathbf{b}$  как градиенту  $\psi$ , переписываем это равенство в виде

$$\nabla(\varphi, \psi) = \mathbf{a} \mathbf{b} = a^1 \psi_1 + a^2 \psi_2.$$



Черт. 130.

Особенно важен частный случай, когда  $Da = 0$ . Это означает, что при переходе из  $M$  в  $M'$  дифференциал  $da$  целиком направлен по нормали  $\mathbf{m}$ , или, другими словами, при проектировании  $a - da$  на касательную плоскость в точке  $M$  мы получаем исходное значение вектора  $a$  в точке  $M$ . В этом случае мы будем говорить, что вектор  $a + da$  есть вектор  $a$ , параллельно перенесенный из точки  $M$  в бесконечно близкую точку  $M'$ . Таким образом, у нас определено параллельное перенесение вектора  $a$  из точки  $M$  в бесконечно близкую точку  $M'$  на поверхности. Для этого нужно в касательной плоскости в точке  $M'$  подобрать вектор, превращающийся в вектор  $a$  при проектировании его на касательную плоскость в точке  $M$ .

Переходим к аналитической записи абсолютного дифференциала. Пусть вдоль рассматриваемой кривой в каждой точке  $t$  координаты вектора  $a(t)$ , т. е. коэффициенты его разложения по векторам  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  будут  $a^1(t), a^2(t)$ . Итак,

$$a = a^1 \mathbf{r}_1 + a^2 \mathbf{r}_2,$$

где  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  — координатные векторы поверхности в той же точке  $t$ .

Вычисляем  $da$ :

$$da = da^1 \mathbf{r}_1 + da^2 \mathbf{r}_2 + a^1 (r_{11} du^1 + r_{12} du^2) + a^2 (r_{21} du^1 + r_{22} du^2).$$

Воспользуемся деривационными формулами (528):

$$\begin{aligned} da &= da^1 \mathbf{r}_1 + da^2 \mathbf{r}_2 + a^1 \{(G_{11}^1 \mathbf{r}_1 + G_{11}^2 \mathbf{r}_2) du^1 + (G_{12}^1 \mathbf{r}_1 + G_{12}^2 \mathbf{r}_2) du^2\} + \\ &\quad + a^2 \{(G_{21}^1 \mathbf{r}_1 + G_{21}^2 \mathbf{r}_2) du^1 + (G_{22}^1 \mathbf{r}_1 + G_{22}^2 \mathbf{r}_2) du^2\} + \dots \end{aligned}$$

Точками обозначены члены, содержащие вектор  $\mathbf{m}$  и образующие нормальную составляющую вектора  $da$ . Откидывая эту нормальную составляющую и оставляя лишь явно выписанные члены, мы получаем вместо  $da$  абсолютный дифференциал  $Da$ . Объединяя коэффициенты при  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ , запишем

$$\begin{aligned} Da &= \mathbf{r}_1 (da^1 + G_{11}^1 a^1 du^1 + G_{12}^1 a^1 du^2 + G_{21}^1 a^2 du^1 + G_{22}^1 a^2 du^2) + \\ &\quad + \mathbf{r}_2 (da^2 + G_{11}^2 a^1 du^1 + G_{12}^2 a^1 du^2 + G_{21}^2 a^2 du^1 + G_{22}^2 a^2 du^2). \end{aligned}$$

Абсолютный дифференциал  $Da$  получился прямо в разложении по координатным векторам  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ . Следовательно, выражения в круглых скобках суть координаты абсолютного дифференциала; их мы будем обозначать  $Da^1, Da^2$ . Итак,

$$\left. \begin{aligned} Da^1 &= da^1 + G_{11}^1 a^1 du^1, \\ Da^2 &= da^2 + G_{11}^2 a^1 du^1. \end{aligned} \right\} \quad (554)$$

В правой части мы использовали сокращенную запись суммирования, развернув которую, мы вернемся к прежним выражениям в круглых скобках. Итак, у нас получены координатные выражения абсолютного дифференциала.

В частности, если вектор  $a$  перенесен параллельно, т. е. если  $Da = 0$ , то и координаты  $Da$  обращаются в нуль, и из (554) мы получаем

$$\left. \begin{aligned} da^1 &= -G_{\alpha\beta}^1 a^\alpha du^\beta, \\ da^2 &= -G_{\alpha\beta}^2 a^\alpha du^\beta. \end{aligned} \right\} \quad (555)$$

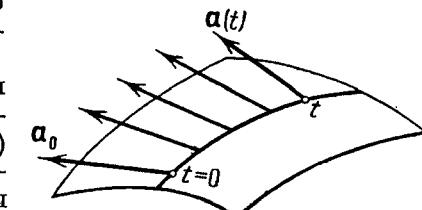
Такова аналитическая запись параллельного перенесения вектора  $a$  из  $M$  в бесконечно близкую точку  $M'$ . Дифференциалы координат вектора  $a$  при этом параллельном перенесении выражены через его координаты  $a^1, a^2$  в точке  $M$ , через величины  $G_{ij}^k$  в точке  $M$  и, наконец, через дифференциалы координат  $du^1, du^2$ , отвечающие бесконечно малому смещению из точки  $M$  в  $M'$  по поверхности.

### § 87\*. Свойства параллельного перенесения.

До сих пор мы рассматривали параллельное перенесение на поверхности лишь в бесконечно малом. Теперь нетрудно ввести это перенесение и в конечном, но при условии наперед заданного пути перенесения.

Пусть снова на поверхности задана кривая  $u^1(t), u^2(t)$ , в начальной точке которой  $u^1(0), u^2(0)$  построен какой-нибудь касательный к поверхности вектор  $a_0$ . Мы скажем, что совершенное параллельное перенесение вектора  $a_0$  вдоль кривой, если в каждой точке кривой  $t$  построен касательный к поверхности вектор  $a(t)$  так, что при переходе от точки  $t$  к  $t+dt$  вектор  $a + da$  есть параллельно перенесенный вектор  $a$ , т. е. при любом значении  $t$  дифференциал  $da(t)$  параллелен нормали  $\mathbf{m}$  в соответствующей точке поверхности; при этом в начальной точке  $t=0$  вектор  $a(t)$  совпадает с  $a_0$  (черт. 132).

Другими словами: вектор-функция  $a(t)$  должна быть построена таким образом, чтобы ее координаты  $a^1(t), a^2(t)$  удовлетворяли при любом переходе от  $t$  к  $t+dt$  условиям (555), выражающим параллельное перенесение на бесконечно малом участке; это значит, что функции  $a^1(t), a^2(t)$  должны удовлетворять



Черт. 132.

дифференциальным уравнениям, получающимся из (555) после деления на  $dt$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{da^1}{dt} &= -G_{\alpha\beta}^1 a^\alpha \frac{du^\beta}{dt}, \\ \frac{da^2}{dt} &= -G_{\alpha\beta}^2 a^\alpha \frac{du^\beta}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (556)$$

Мы имеем здесь нормальную систему двух линейных относительно  $a^1(t)$ ,  $a^2(t)$  дифференциальных уравнений. Действительно, производные от  $a^1$ ,  $a^2$  по  $t$  выражены, как показывают правые части, линейно относительно  $a^1$ ,  $a^2$ ; коэффициентами же при  $a^1$ ,  $a^2$  служат известные нам функции  $t$ ; вдоль кривой мы знаем  $u^1$ ,  $u^2$  (и их производные) как функции от  $t$ , что же касается величин  $G_{ij}^k$ , то они на данной поверхности — определенные функции от  $u^1$ ,  $u^2$ , следовательно, вдоль кривой — определенные функции от  $t$ .

Сверх того, при  $t=0$  искомые функции  $a^1$ ,  $a^2$  должны принимать наперед заданные значения  $a_0^1$ ,  $a_0^2$  координат вектора  $a_0$ .

Функции  $a^1(t)$ ,  $a^2(t)$  определяются однозначно из нормальной системы (556) и начальных условий (как доказывается в теории дифференциальных уравнений). Итак, параллельное перенесение данного вектора вдоль данной кривой на поверхности всегда можно осуществить и при этом однозначно.

Однако здесь есть существенная разница в сравнении с параллельным перенесением векторов в пространстве (или на плоскости). А именно, у нас нет никакой гарантии, что, перенося данный вектор  $a_0$  из точки  $M_0$  в точку  $M$  вдоль какого-нибудь пути, мы будем приходить в точку  $M$  с одним и тем же вектором независимо от выбора пути  $M_0M$ . Напротив, более детальное исследование покажет нам, что, за исключением развертывающихся поверхностей, на всех остальных результатах параллельного перенесения вектора на поверхности зависит не только от исходного значения вектора  $a_0$ , начальной точки  $M_0$  и конечной точки  $M$  пути перенесения, но и от выбора самого пути перенесения.

Выведем теперь одно весьма существенное свойство параллельного перенесения векторов на поверхности, сближающее это перенесение с обычным. А именно, если в начальной точке  $t=0$  задать не один вектор  $a_0$ , а рассмотреть всевозможные касательные к поверхности векторы и подвергнуть их затем все параллельному перенесению вдоль кривой на поверхности, то длины этих векторов и углы между ними сохраняются без изменения. Другими словами, если представлять себе, что касательная плоскость к поверхности в начальной точке  $t=0$  образована всевозможными векторами, касательными к поверхности в этой точке, то при параллельном перенесении этих векторов касательная плоскость перемещается как твердое тело (совпадая

последовательно с касательными плоскостями во всех точках пути перенесения).

Для доказательства достаточно показать, что скалярное произведение двух каких-нибудь векторов  $a$ ,  $b$ , касательных к поверхности в данной точке, сохраняет постоянное значение при параллельном перенесении этих векторов вдоль какого-нибудь пути на поверхности. Составим скалярное произведение  $ab$  и вычислим его дифференциал, отвечающий бесконечно малому смещению по пути параллельного перенесения:

$$d(ab) = da b + a db.$$

Так как  $a$  и  $b$  переносятся параллельно, то  $da$  и  $db$  направлены по нормали к поверхности (их касательные составляющие  $Da$ ,  $Db$  равны нулю). Следовательно,  $da$ ,  $db$  перпендикулярны касательным к поверхности векторам  $a$ ,  $b$ , и мы получаем

$$d(ab) = 0, \quad ab = \text{const.}$$

В частности, остаются постоянными скалярные произведения  $aa$ ,  $bb$ , а значит, и длины  $|a|$ ,  $|b|$ , а также  $\cos(\hat{ab})$ , равный  $\frac{ab}{|a| \cdot |b|}$ .

Каким образом при параллельном перенесении сохраняется длина переносимого вектора  $a$ , в то время как при каждом бесконечно малом смещении  $a$  оказывается проекцией  $a + da$  и, следовательно, «короче» его? Дело здесь в том, что  $da$  не есть точное приращение  $Da$  переносимого вектора  $a$ , а лишь главная часть этого приращения. Поэтому, хотя  $a$  и  $a + da$  действительно одинаковой длины,  $a + da$  отличается от них по длине («длиннее» их), но на бесконечно малую второго порядка.

В заключение параграфа докажем следующую важную теорему:

*Абсолютное дифференцирование и параллельное перенесение векторов на поверхности принадлежат к внутренней геометрии поверхности; другими словами, эти операции инвариантны относительно изгибаия поверхности.*

Эта теорема не только не самоочевидна, но представляется на первый взгляд даже маловероятной. Действительно, при абсолютном дифференцировании вектор-функции  $a(t)$ , как кажется, играет существенную роль форма поверхности в пространстве, меняющаяся при изгибаии. Мы хотим доказать, что вопреки этому абсолютное дифференцирование будет давать прежний результат. Более точно: при изгибаии поверхности  $S$  определенным образом преобразуются (§ 84\*) и заданные на ней векторы; в частности, векторы поля  $a(t)$ , заданного вдоль какой-нибудь кривой  $C$ , образуют после изгибаия поле  $a^*(t)$  вдоль соответствующей кривой  $C^*$  на преобразованной поверхности  $S^*$ . Аналогично и абсолютные дифференциалы  $Da$  поля  $a(t)$

преобразуются при изгиании  $S$  в какие-то векторы в соответствующих точках поверхности  $S^*$ .

Мы утверждаем теперь, — и в этом заключается сущность теоремы, — что при изгиании  $S$  абсолютные дифференциалы  $Da$  поля  $a(t)$  вдоль  $C$  преобразуются в соответствующие абсолютные дифференциалы  $D^*a^*$  поля  $a^*(t)$  вдоль  $C^*$ . Именно это мы понимаем под инвариантностью абсолютного дифференцирования относительно изгиания.

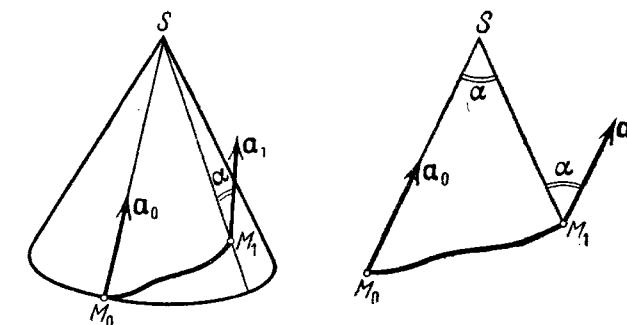
Переходя к доказательству, предположим, что при изгиании мы сохраняем прежние значения  $u^1, u^2$  у каждой точки, т. е. преобразованные точки на  $S^*$  имеют те же значения  $u^1, u^2$ , что и отвечающие им исходные точки на  $S$ . В этом случае, как доказано в § 84\*, координаты преобразованных векторов остаются прежними. Поэтому вектор-функция  $a^*(t)$ , заданная вдоль кривой  $C^*$ , имеет в разложении по  $r_1^*, r_2^*$  те же координаты  $a^1(t), a^2(t)$ , что и исходная вектор-функция  $a(t)$ , заданная вдоль  $C$  в разложении по  $r_1, r_2$ . Кроме того, как известно из § 77, в наших предположениях функциональная зависимость  $g_{ij}$  от  $u^1, u^2$  остается при изгиании поверхности прежней, следовательно, в соответствующих точках величины  $G_{ij}^k$  сохраняют прежние значения.

Это значит, что правые части (554) не изменятся, если вместо смещения по кривой  $C$  взять соответствующее смещение по кривой  $C^*$  и вместо поля  $a(t)$  вдоль  $C$  рассмотреть соответствующее поле  $a^*(t)$  вдоль  $C^*$ . Следовательно, и левые части сохраняют прежние значения, т. е. координаты  $Da$  не изменились от того, что  $Da$  вычислен не для поля  $a(t)$  вдоль  $C$  на  $S$ , а для поля  $a^*(t)$  вдоль  $C^*$  на изогнутой поверхности  $S^*$ . Но раз соответствующие абсолютные дифференциалы  $Da$  и  $D^*a^*$  на поверхностях  $S$  и  $S^*$  имеют одинаковые координаты, то в наших предположениях это означает, что  $Da$  при изгиании поверхности переходит в  $D^*a^*$ . Теорема доказана.

Итак, если сначала поле  $a(t)$  изогнуть вместе с  $S$  на поверхность  $S^*$  и там взять его абсолютный дифференциал, то результат  $D^*a^*$  будет тот же, как если взять сначала  $Da$  на поверхности  $S$ , а потом изогнуть  $Da$  вместе с  $S$  на поверхность  $S^*$ . В частности, отсюда следует, что если  $Da = 0$ , т. е. если вектор-функция  $a(t)$  выражает параллельное перенесение вектора вдоль кривой, то и  $D^*a^* = 0$ , т. е. после изгиания вместе с поверхностью  $S$  векторов  $a(t)$  они продолжают уже на поверхности  $S^*$  изображать параллельное перенесение вектора вдоль соответствующей кривой. *Параллельное перенесение инвариантно относительно изгиания.*

Приведем пример, где применяется эта теорема. Рассмотрим поверхность прямого круглого конуса (черт. 133); пусть требуется перенести параллельно вектор  $a_0$  из точки  $M_0$  в точку  $M_1$  по какому-нибудь пути  $M_0M_1$ . Для простоты возьмем  $a_0$  направлен-

ным по образующей и будем считать, что путь  $M_0M_1$  встречает каждую образующую конуса не более одного раза. Возьмем кусок конической поверхности  $SM_0M_1S$  и развернем его на плоскость; он примет вид треугольника  $SM_0M_1$  с криволинейной стороной  $M_0M_1$ . Перенося вектор  $a_0$  из  $M_0$  в  $M_1$  уже на плоскости, мы приходим в точку  $M_1$  с вектором  $a_1$ , который направлен к образующей  $M_1S$  под углом  $\alpha$ , где  $\alpha$  — угол  $M_0SM_1$ . Если теперь, обратно, навернуть плоский треугольник на конус, то по нашей теореме параллельно перенесенный вектор останется



Черт. 133.

параллельно перенесенным и, следовательно, вектор  $a_1$  уже на конусе, направленный под углом  $\alpha$  к образующей  $M_1S$ , будет играть роль параллельно перенесенного вдоль пути  $M_0M_1$  вектора  $a_0$ .

В частности, при обнесении вектора  $a_0$  вокруг основания конуса он вернется в прежнюю точку, повернувшись относительно образующей на угол, равный  $\frac{2\pi r}{l}$ , где  $r$  — радиус основания конуса, а  $l = SM_0$  — длина образующей.

Заметим еще следующее: пусть две поверхности  $S_1$  и  $S_2$  касаютсяся друг друга вдоль данной кривой  $C$  и имеют, следовательно, вдоль этой кривой общие нормали; тогда из определения параллельного перенесения вытекает без труда, что параллельное перенесение векторов вдоль кривой  $C$  на поверхности  $S_1$  будет служить в то же время и параллельным перенесением на поверхности  $S_2$ . Пользуясь этим соображением, легко осуществить, например, параллельное перенесение векторов вдоль параллели на какой-нибудь поверхности вращения.

Для этого достаточно построить прямой круглый конус с той же осью вращения, касающейся поверхности вращения по этой параллели, и осуществить искомое перенесение на конусе.

### § 88. Нормальная и геодезическая кривизна кривой на поверхности.

Пусть на поверхности  $S$  проведена произвольная кривая  $C$ . При изгибании поверхности  $S$  вместе с ней изгибаются и кривая  $C$ , и кривизна ее меняется. Оказывается, однако, что кривизну кривой  $C$  можно в известном смысле «разложить» на кривизну, зависящую от формы поверхности и меняющуюся при изгибании (нормальная кривизна), и кривизну, инвариантную при изгибании и принадлежащую к внутренней геометрии поверхности (геодезическая кривизна). В этих вопросах мы и должны сейчас разобраться.

Для произвольной кривой  $C$  в пространстве вектором кривизны [см. (258)] мы назвали вектор

$$\frac{dt}{ds} = k\mathbf{n}.$$

Пусть кривая  $C$  лежит на поверхности  $S$ . Построим в данной ее точке  $M$  единичный касательный к  $C$  вектор  $\mathbf{t}$ , единичный нормальный к  $S$  вектор  $\mathbf{m}$  и единичный вектор  $\mathbf{u} = [\mathbf{m}, \mathbf{t}]$ , касательный к  $S$  (так как он ортогонален к  $\mathbf{m}$ ) и нормальный к  $C$  (так как он ортогонален к  $\mathbf{t}$ ). Вектор кривизны  $k\mathbf{n}$  кривой  $C$  можно разложить по направлениям  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{u}$ , так как все три вектора лежат в одной плоскости — в нормальной плоскости кривой  $C$  (черт. 134):

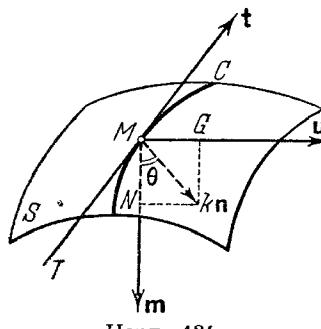
$$k\mathbf{n} = \overline{MN} + \overline{MG}.$$

Вектор  $\overline{MN}$ , совпадающий с проекцией вектора кривизны на нормаль к поверхности, мы будем называть *вектором нормальной кривизны кривой  $C$* , а вектор  $\overline{MG}$ , совпадающий с проекцией вектора кривизны на касательную плоскость к поверхности, *вектором геодезической кривизны кривой  $C$* .

Длину вектора  $\overline{MN}$  мы будем называть *нормальной кривизной*, а длину вектора  $\overline{MG}$  — *геодезической кривизной* кривой  $C$  на поверхности  $S$ .

Вектор нормальной кривизны  $\overline{MN}$  совпадает, как нетрудно заметить, с *вектором кривизны нормального сечения с той же касательной  $MT$* . Действительно, будем считать, как мы это делали в § 50, что  $\mathbf{m}$  направлен в положительную сторону главной нормали нормального сечения,  $\mathbf{m} = \mathbf{n}_0$ . Тогда имеет место формула (368)

$$k_0 = k \cos \theta.$$



Черт. 134.

### § 88] НОРМАЛЬНАЯ И ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ КРИВИЗНА КРИВОЙ

С другой стороны, как видно из черт. 134,

$$MN = k \cos \theta,$$

так как  $k$  есть длина вектора  $k\mathbf{n}$ . Итак,

$$MN = k_0,$$

т. е. вектор  $\overline{MN}$  по длине совпадает с кривизной нормального сечения. Кроме того, так как угол  $\theta$  острый, вектор  $\overline{MN}$  направлен в сторону вектора  $\mathbf{m} = \mathbf{n}_0$  и, следовательно, представляет собой вектор кривизны нормального сечения.

Таким образом, для всех кривых на поверхности с общей касательной  $MT$  в данной точке  $M$  вектор нормальной кривизны будет общим, так как он совпадает с вектором кривизны нормального сечения с той же касательной  $MT$ . Тем самым будет общая и нормальная кривизна, которая совпадет с кривизной этого же нормального сечения.

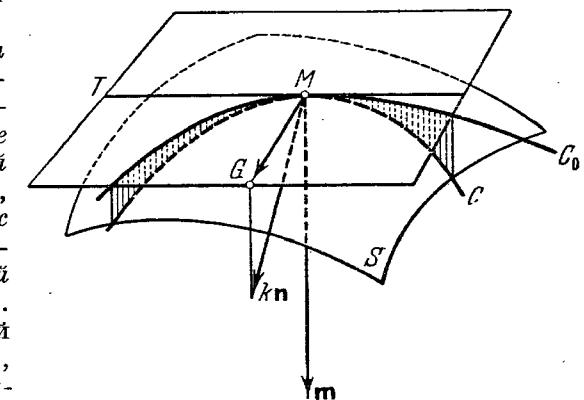
При изгибании поверхности нормальная кривизна кривой, вообще говоря, меняется.

Переходим к геодезической кривизне. Выясним прежде всего ее геометрический смысл.

Через кривую  $C$  на поверхности  $S$  проведем цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными нормали  $\mathbf{m}$ . Эта цилиндрическая поверхность в пересечении с касательной плоскостью к поверхности  $S$  в точке  $M$  даст некоторую кривую  $C_0$  (черт. 135). Очевидно,  $C_0$  есть ортогональная проекция кривой  $C$  на касательную плоскость в точке  $M$ .

Касательная плоскость к цилиндрической поверхности в точке  $M$  пройдет через образующую, направленную по  $\mathbf{m}$ , и через касательную  $MT$  к кривой  $C$ . Тем самым нормаль к цилиндрической поверхности пойдет по направлению  $\overline{MG}$ , ортогональному к  $\mathbf{m}$  и  $\overline{MT}$ . Касательная к кривой  $C_0$  в точке  $M$  лежит в ее плоскости и в то же время в касательной плоскости к цилиндрической поверхности, т. е. совпадает с  $MT$ .

Кривые  $C$  и  $C_0$ , лежащие на цилиндрической поверхности, имеют, таким образом, общую касательную  $MT$ . При этом  $C_0$



Черт. 135.

является нормальным сечением цилиндрической поверхности, так как плоскость кривой  $C_0$  проходит через нормаль цилиндрической поверхности  $MG$ .

С точки зрения цилиндрической поверхности вектор  $\overline{MG}$  есть вектор нормальной кривизны кривой  $C$ , так как он совпадает с проекцией вектора кривизны  $k_n$  на нормаль  $MG$  к цилиндрической поверхности. Следовательно, вектор  $\overline{MG}$  совпадает с вектором кривизны нормального сечения  $C_0$  с той же касательной  $Mt$ .

Теперь оставим в стороне цилиндрическую поверхность и вернемся к исходной поверхности  $S$ . Тогда последний результат можно формулировать так:

*Вектор геодезической кривизны  $MG$  кривой  $C$  на поверхности  $S$  совпадает с вектором кривизны ее ортогональной проекции  $C_0$  на касательную плоскость к поверхности  $S$  в данной точке  $M$ .*

Тем самым и геодезическая кривизна кривой  $C$  совпадает в данной точке  $M$  с кривизной ее проекции  $C_0$  на касательную плоскость в точке  $M$ .

### § 89. Вычисление геодезической кривизны.

По определению вектор геодезической кривизны  $\overline{MG}$  получается проектированием вектора кривизны  $k_n$  на касательную плоскость к поверхности, т. е. отсечением у него нормальной составляющей, направленной по  $m$ . Как мы знаем из 1-й формулы Френе,

$$kn = \dot{\mathbf{t}} = \ddot{\mathbf{r}}.$$

Так как кривая лежит на данной поверхности, то

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2),$$

причем текущие координаты  $u^1, u^2$  можно считать функциями параметра  $s$  на кривой. Вычислим первую и вторую производные  $\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}$  от полученной таким образом сложной функции:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{r}_1 \dot{u}^1 + \mathbf{r}_2 \dot{u}^2, \\ \ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{r}_{11} (\dot{u}^1)^2 + 2\mathbf{r}_{12} \dot{u}^1 \dot{u}^2 + \mathbf{r}_{22} (\dot{u}^2)^2 + \mathbf{r}_1 \ddot{u}^1 + \mathbf{r}_2 \ddot{u}^2. \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (557)$$

Эту формулу мы уже раз получали в виде (357); теперь она только переписана в новых обозначениях.

При сокращенной записи суммирования формула примет вид

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j + \mathbf{r}_1 \ddot{u}^1 + \mathbf{r}_2 \ddot{u}^2,$$

что нетрудно проверить, выполняя суммирование по  $i, j$ .

Вместо  $r_{ij}$  вставим их разложения согласно дифференциональным формулам (528). Получим

$$\ddot{\mathbf{r}} = G_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j \mathbf{r}_1 + G_{ij}^2 \dot{u}^i \dot{u}^j \mathbf{r}_2 + b_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j \mathbf{m} + \mathbf{r}_1 \ddot{u}^1 + \mathbf{r}_2 \ddot{u}^2.$$

При полученной записи вектора кривизны нетрудно отбросить его нормальную составляющую и оставить лишь его тангенциальную составляющую. Для этого достаточно откинуть член с  $\mathbf{m}$  и сохранить лишь касательные к поверхности члены с  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ . В результате получим вектор геодезической кривизны  $\overline{MG}$  в следующем виде:

$$\overline{MG} = (\ddot{u}^1 + G_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j) \mathbf{r}_1 + (\ddot{u}^2 + G_{ij}^2 \dot{u}^i \dot{u}^j) \mathbf{r}_2. \quad (558)$$

Чтобы найти геодезическую кривизну нашей кривой, теперь достаточно подсчитать длину вектора  $\overline{MG}$ . Наиболее удобно это сделать следующим путем. Единичный касательный вектор  $t$  к нашей кривой, согласно (557), имеет вид

$$\mathbf{t} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_1 \dot{u}^1 + \mathbf{r}_2 \dot{u}^2.$$

Перемножим векторно две последние формулы почленно. Получим

$$[\mathbf{t}, \overline{MG}] = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2] \cdot \dot{u}^1 (\ddot{u}^2 + G_{ij}^2 \dot{u}^i \dot{u}^j) - \dot{u}^2 (\ddot{u}^1 + G_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j). \quad (559)$$

В правой части мы воспользовались, конечно, тем, что

$$[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2] = -[\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1], [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1] = [\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2] = 0.$$

Приравняем модули обеих частей равенства (559). Так как  $t$  и  $\overline{MG}$  взаимно ортогональны, причем  $t$  — единичный вектор, то в левой части получим

$$|[\mathbf{t}, \overline{MG}]| = |\overline{MG}| = k_g,$$

где через  $k_g$  обозначена геодезическая кривизна. В правой же части, согласно (347),

$$|[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]| = \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}.$$

Получим

$$k_g = \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} | \dot{u}^1 (\ddot{u}^2 + G_{ij}^2 \dot{u}^i \dot{u}^j) - \dot{u}^2 (\ddot{u}^1 + G_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j) |. \quad (560)$$

Мы получили формулу геодезической кривизны. Из нее непосредственно видно, что геодезическая кривизна принадлежит внутренней геометрии поверхности и есть, следовательно, инвариант изгибаания. Действительно, если в процессе изгибаания в каждой точке поверхности сохранять без изменения значения криволинейных координат  $u^1, u^2$ , то, как мы знаем, величины  $G_{ij}^k$  тоже

не меняют своих значений; производные  $\dot{u}^i, \ddot{u}^i$  по дуге также не меняются, так как длина дуги в процессе изгибаия инвариантна. Следовательно, как видно из (560), геодезическая кривизна  $k_g$  тоже остается инвариантной.

Формулу (560) можно переписать, развертывая сокращенно записанные суммы.

Получаем

$$k_g = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} |\ddot{u}^2\dot{u}^1 - \dot{u}^2\ddot{u}^1 + G_{11}^2(\dot{u}^1)^3 + (2G_{12}^2 - G_{11}^1)(\dot{u}^1)^2\dot{u}^2 + (G_{22}^2 - 2G_{12}^1)\dot{u}^1(\dot{u}^2)^2 - G_{22}^1(\dot{u}^2)^3|. \quad (561)$$

Допустим, что кривая на поверхности задана уравнением

$$u^2 = f(u^1).$$

Тогда производные от  $u^2$  по  $u^1$  могут быть выражены через производные по  $s$ :

$$f'(u^1) = \frac{\dot{u}^2}{\dot{u}^1}, \quad f''(u^1) = \frac{d \frac{\dot{u}^2}{\dot{u}^1}}{du^1} = \frac{\ddot{u}^2\dot{u}^1 - \dot{u}^2\ddot{u}^1}{(\dot{u}^1)^3}.$$

Вынося  $|\dot{u}^1|^3$  за скобку из выражения (561), мы получим

$$k_g = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \left| \frac{du^1}{ds} \right|^3 |f''(u^1) + G_{11}^2 + (2G_{12}^2 - G_{11}^1)f'(u^1) + (G_{22}^2 - 2G_{12}^1)[f'(u^1)]^2 - G_{22}^1[f'(u^1)]^3|.$$

Так как

$$ds = \sqrt{g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}du^1du^2 + g_{22}(du^2)^2} = |du^1| \sqrt{g_{11} + 2g_{12}f'(u^1) + g_{22}[f'(u^1)]^2},$$

то окончательно выражение для  $k_g$  мы получаем в виде

$$k_g = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \frac{|f'' + G_{11}^2 + (2G_{12}^2 - G_{11}^1)f' + (G_{22}^2 - 2G_{12}^1)f'^2 - G_{22}^1f'^3|}{(g_{11} + 2g_{12}f' + g_{22}f'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (562)$$

Любопытно применить эту формулу в частном случае, когда наша поверхность есть плоскость, отнесенная к прямоугольным декартовым координатам  $x, y$ . Тогда  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ , т. е.  $g_{11} = g_{22} = 1$ ,  $g_{12} = 0$ , и все частные производные от  $g_{ij}$ , как от постоянных, равны нулю, вследствие чего обращаются в нуль все величины  $G_{ij}^k$ .

Формула (562) принимает вид

$$k_g = \frac{|f''|}{(1 + f'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Мы возвращаемся к хорошо известной формуле для кривизны кривой на плоскости.

### § 90. Геодезические линии на поверхности.

Геодезической линией на поверхности называется кривая, геодезическая кривизна которой в каждой точке равна нулю. Таким образом, смысл этого определения в том, что оно выделяет класс «прямейших» линий на поверхности. Действительно, если поверхность дана, то одна и та же нормальная кривизна навязывается, как мы знаем, всякой ее кривой, проходящей через данную точку по данному направлению, и избавиться от этой кривизны мы не можем. Напротив, геодезическая кривизна зависит от формы кривой на поверхности, и для определенного класса этих кривых можно заставить геодезическую кривизну обратиться в нуль.

Обращение в нуль геодезической кривизны равносильно обращению в нуль вектора геодезической кривизны  $\bar{MG}$  (см. черт. 135), длину которого она представляет. Но вектор  $\bar{MG}$  совпадает с проекцией вектора кривизны  $k_n$  на касательную плоскость. Таким образом, для того чтобы линия на поверхности была геодезической, необходимо и достаточно, чтобы проекция ее вектора кривизны  $k_n$  на касательную плоскость равнялась нулю. Это равносильно тому, что вектор кривизны  $k_n$  или направлен по нормали  $n$  к поверхности, или просто обращается в нуль,  $k=0$ .

Итак, для того чтобы линия на поверхности была геодезической, необходимо и достаточно, или чтобы ее главная нормаль во всех точках совпадала с нормалью к поверхности, или чтобы линия была прямой. Последний случай, естественно, встречается редко, в виде исключения (если не считать плоскости, на которой геодезические вообще совпадают с прямыми линиями).

Основываясь на формулированном признаке геодезических линий, в некоторых случаях их легко можно обнаружить. Так, очевидно, для сферы геодезическими служат окружности больших кругов, так как их главные нормали проходят через центр сферы и совпадают с нормалью к сфере.

Переходим к составлению дифференциальных уравнений геодезических и к выяснению вопроса о «количестве» этих кривых на поверхности, точнее о степени произвола в построении геодезической.

Пусть  $u^1, u^2$  — текущие координаты вдоль геодезической, рассматриваемые как функции длины дуги  $s$ . Обращение в нуль вектора геодезической кривизны можно записать, приравнивая нулю коэффициенты его разложения (558) по  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ :

$$\frac{d^2u^1}{ds^2} = -G_{\alpha\beta}^1 \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds}; \quad \frac{d^2u^2}{ds^2} = -G_{\alpha\beta}^2 \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds}. \quad (563)$$

Мы имеем нормальную систему двух дифференциальных уравнений 2-го порядка, где искомые функции суть  $u^1, u^2$ , а  $s$  — аргумент. Вторые производные искомых функций выражены здесь

определенным образом через сами искомые функции, входящие через величины  $G_{ij}^k(u^1, u^2)$ , и первые производные искомых функций. Исследование системы (563) несколько усложняется тем, что аргумент  $s$  должен здесь иметь геометрический смысл дуги, в силу чего, кроме уравнений (563), функции  $u^1(s)$ ,  $u^2(s)$  должны удовлетворять добавочному соотношению

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta.$$

Поэтому мы предпочтем искать уравнения геодезических, отнесенные не к дуге как к параметру, а к одной из текущих координат, например  $u^1$ . Пусть искомое уравнение геодезической будет

$$u^2 = f(u^1).$$

Пользуясь тогда для геодезической кривизны выражением (562) и приравнивая его нулю, мы приходим к дифференциальному уравнению 2-го порядка, очевидно, необходимому и достаточному для того, чтобы  $u^2 = f(u^1)$  определяло геодезическую линию:

$$f'' = -G_{11}^2 - (2G_{12}^2 - G_{11}^1) f' + (-G_{22}^2 + 2G_{12}^1) f'^2 + G_{22}^1 f'^3. \quad (564)$$

Вторая производная искомой функции  $f''$  выражена как многочлен третьей степени относительно первой производной, причем коэффициенты многочлена известным нам образом зависят от аргумента  $u^1$  и искомой функции  $u^2$ .

По теореме существования решения в применении к дифференциальному уравнению 2-го порядка можно произвольно выбрать начальные значения  $(u^1)_0$ ,  $(u^2)_0$ ,  $\left(\frac{du^2}{du^1}\right)_0$  и потребовать, чтобы при  $u^1 = (u^1)_0$  искомая функция  $u^2$  обратилась в  $(u^2)_0$ , а ее производная в  $\left(\frac{du^2}{du^1}\right)_0$ . Тогда существует одно и только одно решение уравнения (564), удовлетворяющее этим условиям [и определенное по крайней мере вблизи значения  $u^1 = (u^1)_0$ ].

То же самое геометрически означает, что *через каждую точку  $(u^1)_0$ ,  $(u^2)_0$  по каждому направлению  $\left(\frac{du^2}{du^1}\right)_0$  проходит одна и только одна геодезическая линия*, уравнение которой по крайней мере вблизи данной точки получается в виде  $u^2 = f(u^1)$ .

Заметим, что фактически геодезическую можно продолжать по поверхности или неограниченно, или вплоть до края поверхности, многократно применяя указанную теорему существования и принимая каждый раз за начальную точку и начальное направление конец уже построенного куска геодезической и касательное направление в нем. Вблизи тех точек, где  $\frac{du^2}{du^1}$  обращается в бесконечность (точнее, где  $\frac{du^1}{du^2}$  обращается в нуль), уравнение геодези-

ческой следует искать в виде  $u^1 = f(u^2)$ ; все будет обстоять совершенно аналогично, лишь значки 1, 2 поменяются ролями. Геодезическая в целом составится из кусков, в которых ее уравнение будет записываться в виде или  $u^2 = f(u^1)$  или  $u^1 = f(u^2)$ .

Мы видим, что множество геодезических на поверхности ведет себя в известном смысле так же, как множество прямых на плоскости: через каждую точку по каждому направлению можно проложить геодезическую. Это и не удивительно, так как прямые на плоскости есть, очевидно, частный случай геодезических на поверхности.

Подходя к вопросу несколько иначе, можно сказать, что, так как дифференциальное уравнение (564) 2-го порядка, то *семейство геодезических зависит от двух параметров* (ранее рассмотренные семейства кривых зависели обычно от одного параметра).

Геодезическая кривизна есть инвариант изгибаания поверхности. Следовательно, если для данной кривой на поверхности она равна нулю, то и после изгибаания поверхности она остается равной нулю. Это значит, что при изгибаании поверхности геодезические линии переходят снова в геодезические и, следовательно, понятие о геодезической линии принадлежит внутренней геометрии поверхности (чего нельзя сказать о линиях кривизны и асимптотических линиях).

В частности, при изгибаании развертывающихся поверхностей на плоскость их геодезические линии переходят в прямые.

Можно было бы показать, что в не слишком больших кусках поверхности геодезическая линия, соединяющая какие-нибудь две точки, всегда является не только «прямейшей», но и «кратчайшей» среди всех кривых, соединяющих эти точки.

#### Приимеры и упражнения.

1. Если материальная точка может свободно двигаться по поверхности, но не может от нее отрываться, то при отсутствии внешних сил (не считая сил реакции поверхности) точка описывает геодезическую траекторию.

Действительно, ускорение, испытываемое точкой, вызывается силой реакции поверхности, которая направлена по нормали к поверхности. Следовательно, вектор ускорения  $\mathbf{g}''(t)$ , где  $t$  — время, направлен по нормали к поверхности, так что она (нормаль) лежит в соприкасающейся плоскости траектории точки. Кроме того, нормаль к поверхности является нормалью и к траектории, а значит, совпадает с ее главной нормалью. Траектория, следовательно, геодезическая.

2. На поверхности лежит невесомая нить, которая может свободно передвигаться на поверхности, но не может отрываться от нее. Если эта нить с некоторой силой натянута между двумя точками поверхности и находится в состоянии равновесия, то она пролегает по геодезической линии (предполагается, что на нить не действуют никакие силы, кроме сил ее натяжения и реакции поверхности).

Действительно, если силу натяжения в данной точке нити обозначить через  $T$ , то вектор этой силы будет равен  $T\mathbf{t}$ , где  $\mathbf{t}$  — единичный касательный вектор к нити.

Тогда

$$d(Tt) = dTt + Tdt$$

выражает равнодействующую силы натяжения, приложенных к концам бесконечно малого отрезка нити (бесконечно малыми 2-го порядка мы пренебрегаем). Эта равнодействующая при наличии равновесия уничтожается реакцией поверхности, а значит, направлена по нормали к поверхности. В частности, она направлена ортогонально к  $t$ , а потому из двух ее составляющих,  $dTt \parallel t$  и  $Tdt \perp t$ , первая должна обратиться в нуль:

$$dT = 0, \quad T = \text{const.}$$

Оставшаяся составляющая  $Tdt$  должна быть направлена по нормали к поверхности, т. е.

$$\cdot dt \parallel m, \quad \frac{dt}{ds} \parallel m, \quad \text{а значит,} \quad kn \parallel m.$$

Главная нормаль совпадает с нормалью к поверхности, и нить пролегает по геодезической.

3. Пусть точка  $M$  описывает геодезическую линию на произвольной поверхности вращения. Обозначим через  $\rho$  расстояние от точки  $M$  до оси вращения и через  $\alpha$  — угол в точке  $M$  между данной геодезической линией и проведенной через точку  $M$  параллелью поверхности вращения.

Доказать, что *вдоль каждой геодезической линии на поверхности вращения*

$$\rho \cos \alpha = \text{const.}$$

**Указание.** Проверить сначала, что

$$\rho \cos \alpha = (l, r, t),$$

где  $l$  — единичный вектор, направленный по оси вращения,  $r$  — радиус-вектор точки  $M$ , отсчитываемый от начала  $O$ , выбранного на оси вращения,  $t$  — единичный касательный вектор геодезической. Затем проверить, что дифференциал полученного смешанного произведения равен нулю, учитывая, что

$$dl = 0, \quad dr \parallel t, \quad dt \parallel m \quad (\text{а } m \text{ компланарен с } l \text{ и } r).$$

4. Из соотношения

$$\rho \cos \alpha = C$$

можно вывести важные геометрические следствия. Будем считать  $C \neq 0$  (в случае  $C = 0$  геодезическая представляет собой меридиан поверхности вращения).

Когда мы движемся по геодезической, переходя из более «узкой» в более «широкую» часть поверхности вращения, т. е. когда  $\rho$  растет, то  $|\cos \alpha|$  убывает, направление геодезической удаляется от направления параллели и приближается к направлению меридиана. Если при этом  $\rho \rightarrow \infty$ , то  $\cos \alpha \rightarrow 0$ , т. е. направление геодезической неограниченно приближается к направлению меридиана.

Когда же мы переходим из более «широкой» в более «узкую» часть поверхности, т. е. когда  $\rho$  убывает, то  $|\cos \alpha|$  растет, и направление геодезической приближается к направлению параллели. Однако при движении по данной геодезической  $\rho$  не может убывать неограниченно, так как  $|\cos \alpha|$  не может стать больше 1. В связи с этим наименьшее значение, которого способно достигать  $\rho$ , равно  $|C|$ . Когда  $\rho = |C|$ , то  $|\cos \alpha| = 1$ ,  $\alpha = 0$  или  $\pi$ , геодезическая касается параллели и возвращается снова в более «широкую»

часть поверхности (располагаясь симметрично относительно плоскости меридиана, проходящего через точку  $\rho = |C|$ ).

Исследовать с этой точки зрения ход геодезических на сфере и на прямом круглом конусе, рассматривая эти поверхности как поверхности вращения.

### § 91\*. Геодезические линии с точки зрения параллельного перенесения на поверхности.

Пусть на поверхности  $S$  дана какая-нибудь кривая  $C$ . В каждой ее точке имеется единичный касательный к ней вектор  $t$ , так что вдоль  $C$  возникает векторное поле  $t$ .

По определению вектора геодезической кривизны  $\overline{MG}$  он равен проекции вектора кривизны

$$kn = \frac{dt}{ds}$$

на касательную плоскость к поверхности.

Но проекция вектора  $dt$  на касательную плоскость равна, согласно (553), его абсолютному дифференциальному  $Dt$ . Следовательно,

$$\overline{MG} = \frac{Dt}{ds}.$$

Для того чтобы кривая  $C$  была геодезической, необходимо и достаточно, чтобы вектор геодезической кривизны во всех ее точках равнялся нулю:

$$\frac{Dt}{ds} = 0, \quad \text{т. е.} \quad Dt = 0.$$

Но обращение в нуль абсолютного дифференциала  $Dt$  означает, что вектор  $t$  переносится параллельно вдоль кривой  $C$ .

Итак, для того чтобы кривая  $C$  была геодезической на поверхности  $S$ , необходимо и достаточно, чтобы поле ее единичного касательного вектора  $t$  получалось его параллельным перенесением вдоль кривой  $C$  из какой-нибудь ее начальной точки.

### § 92\*. Полугеодезическая система координат на поверхности.

Допустим, что нам удалось выбрать такую специальную систему координат  $u^1 = u$ ,  $u^2 = v$  на поверхности, что координатные линии  $u$  суть геодезические и ортогональны к линиям  $v$ .

Такую координатную систему можно осуществить бесчисленным количеством способов; позже мы покажем, как подойти к этому строго, пока же ограничимся такими наглядными обозначениями: в качестве координатных линий  $u$  берем произвольное семейство геодезических от одного параметра, т. е. выбираем

$\infty^1$  геодезических из их общего количества  $\infty^2$ . Координатные же линии  $v$  мы строим как ортогональные траектории к линиям  $u$ .

Так как линии  $u$  суть геодезические, то вдоль них должно удовлетворяться уравнение (564). Но вдоль линии  $u$  мы имеем

$$v = u^2 = \text{const.},$$

следовательно,  $f(u^1) = \text{const.}$ ,  $f' = f'' = 0$ . Вставляя эти значения в (564), мы получаем вдоль линии  $u$

$$0 = -G_{11}^2.$$

Так как линия  $u$  может быть проведена через любую точку поверхности, то в нашей координатной системе мы имеем для любой точки поверхности

$$G_{11}^2 = 0. \quad (565)$$

К этому мы присоединим еще известное условие ортогональности координатной сети

$$F = g_{12} = 0. \quad (566)$$

Легко проверить, что условия (565) и (566) не только необходимы, но и достаточны, чтобы координатные линии  $u$  были геодезическими и чтобы сеть была ортогональной. Пользуясь теперь второй из формул (530) при  $i = j = 1$  и учитывая, что  $g_{12} = 0$ , получим

$$G_{2,11} = G_{11}^2 g_{22}.$$

Отсюда мы видим, что условие (565) равносильно обращению в нуль  $G_{2,11}$ , так что окончательно условия (565) и (566) можно переписать в виде

$$G_{2,11} = 0, \quad g_{12} = 0. \quad (567)$$

Но для величин  $G_{k,i,j}$  у нас имеется выражение (535), которое дает при  $k = 2$ ,  $i = j = 1$

$$G_{2,11} = \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}. \quad (567')$$

Так как  $g_{12} = 0$ , то обращение  $G_{2,11}$  в нуль равносильно, очевидно, обращению в нуль  $\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}$ , так что условия (567) перепишутся в виде

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} = 0, \quad g_{12} = 0. \quad (568)$$

Мы видим, что  $g_{11}$  от  $u^2$  не зависит и может быть функцией лишь одного  $u^1$ . Рассмотрим первую квадратичную форму, возвращаясь к обозначению  $u^1 = u$ ,  $u^2 = v$ ,  $g_{11} = E$ ,  $g_{12} = F$ ,  $g_{22} = G$ . Имеем

$$ds^2 = E(u) du^2 + G(u, v) dv^2.$$

Это выражение можно еще упростить, введя в качестве первой координаты  $u$  новое переменное (у нас всегда  $E > 0$ ,  $G > 0$ ):

$$\int \sqrt{E(u)} du. \quad (569)$$

Так как новая координата  $u$  есть функция старой, то линии  $v$ , т. е. линии, вдоль которых  $u$  сохраняет постоянное значение, останутся прежними. То же относится и к линиям  $u$ , так как координату  $v$  мы не меняем. В результате перехода к новым криволинейным координатам  $u$ ,  $v$  [где  $v$  прежнее, а новое  $u$  выражается через прежнее  $u$  посредством (569)], мы можем, очевидно, переписать первую квадратичную форму в виде

$$ds^2 = du^2 + G(u, v) dv^2. \quad (570)$$

Систему координат, где  $ds^2$  имеет такой вид, т. е. где

$$E = g_{11} = 1, \quad F = g_{12} = 0, \quad (570')$$

мы будем называть полугеодезической. Так как условия (568) в этом случае, очевидно, имеют место, то линии  $u$  геодезические, а линии  $v$  им ортогональны.

Кривые однопараметрического семейства, образующего ортогональную сеть совместно с каким-нибудь однопараметрическим семейством геодезических, называются *геодезическими параллелями* друг по отношению к другу. Таким образом, линии  $v$  образуют семейство геодезических параллелей.

В полугеодезической системе координат легко обнаружить интересное свойство геодезических параллелей. А именно, двигаясь вдоль какой-нибудь линии  $u$ , мы имеем  $dv = 0$ , и (570) принимает вид  $ds = du$ . Отсюда следует, что вдоль линии  $u$  параметр  $u$  играет роль длины дуги, и длина отрезка линии  $u$  между точками  $u=a$  и  $u=b$  равна  $b-a$ . Возьмем теперь две какие-нибудь геодезические параллели, т. е. две линии  $v$ :  $v=a$ ,  $v=b$ . Тогда заключенные между ними отрезки ортогональных к ним геодезических, т. е. линий  $u$ , имеют все одну и ту же длину, именно  $b-a$ .

В полугеодезической координатной системе сильно упрощаются выражения для основных величин, связанных с поверхностью. Вычислим прежде всего величины  $G_{k,i,j}$ . Пользуясь формулами (535) и учитывая, что сейчас у нас  $g_{11}=1$ ,  $g_{12}=0$ ,  $g_{22}=G$ , получим

$$G_{1,11} = 0, \quad G_{1,12} = 0, \quad G_{1,22} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} = -\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u},$$

$$G_{2,11} = 0, \quad G_{2,12} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u}, \quad G_{2,22} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial v}.$$

Далее, формулы (531) дают

$$g^{11} = 1, \quad g^{12} = 0, \quad g^{22} = \frac{1}{g_{22}} = \frac{1}{G}. \quad (571)$$

Пользуясь теперь формулами (532), получим

$$\left. \begin{aligned} G_{11}^1 &= 0, & G_{12}^1 &= 0, & G_{22}^1 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u}, \\ G_{11}^2 &= 0, & G_{12}^2 &= \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial u}, & G_{22}^2 &= \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial v}. \end{aligned} \right\} \quad (571')$$

Вычислим полную кривизну  $K$ , пользуясь формулами (544) и (545):

$$K = \frac{-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} + \left( \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial u} \right)^2 G}{G}$$

В числителе здесь стоит выражение (544), в котором уцелели только члены

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1} + G_{12}^2 G_{12}^2 g_{22},$$

а остальные слагаемые—нули, так как  $G_{12}^1 = G_{11}^2 = 0$ . Окончательно можно написать

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}. \quad (572)$$

Запишем, далее, дифференциальное уравнение геодезических (564). Учитывая формулы (571'), получаем

$$f'' = -\frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial u} f' - \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial v} f'^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} f'^3, \quad (573)$$

где уравнение геодезической ищется в виде  $v = f(u)$ .

Укажем, наконец, аналитический подход к построению полу-геодезических координат: пусть в полу-геодезических координатах  $u, v$  задано скалярное поле на поверхности,  $\varphi(u, v)$ ; тогда скалярный квадрат его градиента (первый дифференциальный параметр)  $\nabla(\varphi)$ , выражющийся по формуле (552'), в силу (571), примет вид

$$\nabla(\varphi) = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 + \frac{1}{G} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2.$$

Аналогичным образом вычисляем  $\nabla(\varphi, \psi)$  для двух скалярных полей на поверхности [см. (552')]:

$$\nabla(\varphi, \psi) = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{1}{G} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial v}.$$

Если взять скалярные функции  $\varphi(u, v)$  и  $\psi(u, v)$  частного вида, а именно,

$$\varphi(u, v) = u, \quad \psi(u, v) = v,$$

то, очевидно, мы получим

$$\nabla(u) = 1, \quad \nabla(u, v) = 0. \quad (574)$$

Допустим, что мы находимся в произвольных координатах  $u^1, u^2$ , а полу-геодезические координаты  $u, v$  ищем как функции  $u^1, u^2$ . Мы имеем тогда право переписать уравнения (574), выразив их левые части  $\nabla(u)$  и  $\nabla(u, v)$  по формулам (552') и (552) уже в координатах  $u^1, u^2$ , так как значения  $\nabla(u), \nabla(u, v)$  не зависят от выбора системы координат на поверхности. Получаем дифференциальные уравнения в частных производных для искомых функций  $u(u^1, u^2), v(u^1, u^2)$ ,

$$g^{a\beta}(u^1, u^2) \frac{\partial u}{\partial u^a} \frac{\partial u}{\partial u^\beta} = 1, \quad g^{a\beta}(u^1, u^2) \frac{\partial u}{\partial u^a} \frac{\partial v}{\partial u^\beta} = 0. \quad (574')$$

Мы пришли к аналитическому методу отыскания полу-геодезических координат  $u, v$  как решений этих уравнений. В самом деле, уравнения (574) не только необходимы, но и достаточны для того, чтобы функции  $u(u^1, u^2), v(u^1, u^2)$  (в той области, где к ним вообще можно перейти как к координатам на поверхности) служили там полу-геодезическими координатами.

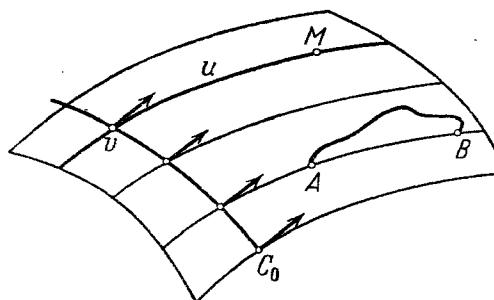
Чтобы убедиться в этом, достаточно записать уравнения (574), которым удовлетворяют  $u, v$ , приняв в то же время  $u, v$  за координаты  $u^1, u^2$ . Мы получаем, как легко подсчитать,  $g^{11} = 1, g^{12} = 0$  (так как теперь  $\frac{\partial u}{\partial u^1} = 1, \frac{\partial v}{\partial u^1} = 0, \frac{\partial u}{\partial u^2} = 0, \frac{\partial v}{\partial u^2} = 1$ ), откуда сейчас же следует, что  $g_{11} = 1, g_{12} = 0$ , т. е. система действительно полу-геодезическая.

### § 93\*. Экстремальное свойство геодезических.

В этом параграфе мы докажем экстремальное свойство геодезических: по крайней мере в некоторой окрестности каждой обычной точки на поверхности любой отрезок геодезической линии короче всякой другой кривой, соединяющей те же точки.

Покажем прежде всего способ построения полу-геодезических координат на поверхности; одновременно выяснится и степень произвола в их выборе. Мы утверждаем следующее: любая кривая  $C_0$  на поверхности, если ограничиться достаточно малым куском поверхности около какой-нибудь обыкновенной точки, может быть включена в семейство геодезически параллельных ей кривых  $C$ , причем существует полу-геодезическая система координат  $u, v$ , в которой эти кривые служат линиями  $v$ . Таким образом, в малых кусках поверхности геодезические параллели всегда можно рассматривать как линии  $v$  некоторой полу-геодезической системы.

Переходя к доказательству, отнесем кривую  $C_0$  к какому-нибудь параметру  $v$ . В каждой точке  $v$  кривой  $C_0$  берем направление на поверхности, ортогональное к направлению  $C_0$  (черт. 136), и проводим через точку  $v$  в этом направлении геодезическую линию. Это, как мы знаем, можно выполнить и притом единственным образом. Отложим на построенной геодезической линии дугу, длину которой обозначим через  $u$  (снабжая  $u$  знаком  $\pm$  в зависимости от того, в какую сторону от  $C_0$  отложена дуга). В результате мы приходим в некоторую точку  $M$  на поверхности, положение которой вполне определяется значениями  $u, v$ .



Черт. 136.

Считая, что поверхность отнесена к каким-то координатам  $u^1, u^2$ , мы получим значения  $u^1, u^2$  для точки  $M$  как функции  $u, v$ :

$$u^1 = u^1(u, v), \quad u^2 = u^2(u, v).$$

Ссылаясь на теоремы анализа, можно было бы показать, что эти функции непрерывно дифференцируемы и что в любой точке  $v_0$  кривой  $C_0$  ( $u=0, v=v_0$ ) якобиан  $\frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(u, v)}$  отличен от нуля. Этого достаточно, чтобы утверждать, что в достаточно малой окрестности точки  $u=0, v=v_0$  наши функции допускают обращение

$$u = u(u^1, u^2), \quad v = v(u^1, u^2)$$

и, следовательно,  $u, v$  можно принять в этой окрестности за криволинейные координаты (так как налицо взаимно однозначное соответствие точек окрестности с парами значений  $u, v$ ). Из самого построения ясно, что линии  $u$  будут геодезическими, причем вдоль них параметр  $u$  играет роль дуги, и что линия  $C_0$  принадлежит к числу линий  $v$  (именно, при  $u=0$ ). Покажем, что  $ds^2$  имеет вид (570); тем самым наше утверждение будет доказано, так как тогда  $C_0$  совместно с остальными линиями  $v$  образует семейство геодезических параллелей.

Рассматривая  $u$  как  $u^1$  и  $v$  как  $u^2$ , мы приходим снова к условию (565)

$$G_{11}^2 = 0,$$

выражающему, что линии  $u$  суть геодезические. Последнее из уравнений (530) дает нам теперь (при  $i=j=1$ )

$$G_{2,11} = g_{12} G_{11}^1 \quad (575)$$

(мы еще не знаем, будет ли  $g_{12}$  обращаться в нуль). Так как вдоль линии  $u^1$  дифференциал дуги всегда выражается формулой

$$\sqrt{g_{11}} du^1$$

и так как в нашем случае он совпадает с  $du^1$  ( $u=u^1$  играет роль дуги вдоль линии  $u$ ), то мы заключаем

$$g_{11} = 1. \quad (576)$$

Формула (567') принимает теперь вид

$$G_{2,11} = \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1}. \quad (577)$$

Сравнивая (575) и (577), мы получаем

$$\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} = g_{12} G_{11}^1, \quad \text{или} \quad \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} \cdot \frac{1}{g_{12}} = G_{11}^1.$$

Интегрируя это уравнение по аргументу  $u^1$  при фиксированном  $u^2$ , получим

$$g_{12}(u^1, u^2) = g_{12}(0, u^2) e^{\int_0^{u^1} G_{11}^1 du^1}; \quad (578)$$

здесь  $g_{12}(0, u^2)$  — значение  $g_{12}$  в некоторой точке  $u^2$  на кривой  $C_0$  ( $u^1=0$ ). В правильности формулы (578) легко убедиться непосредственной проверкой. Но так как геодезические линии  $u$  проводились у нас ортогонально к кривой  $C_0$ , то  $g_{12}(0, u^2)$ , т. е.  $g_{12}$  в точках кривой  $C_0$ , равны нулю; в силу (578) получаем

$$g_{12} = 0. \quad (579)$$

Формулы (576) и (579) показывают, что  $ds^2$  у нас действительно имеет вид (570). Этим наше утверждение доказано, и мы умеем строить полугеодезическую систему, исходя из произвольной кривой  $C_0$ .

Поясним наглядно, почему при доказательстве нам пришлось ограничиться лишь достаточно малым куском около какой-нибудь точки  $v_0$  на кривой  $C_0$ . Ортогональные к  $C_0$  геодезические, проведенные нами, начнут, возможно, пересекаться, если мы их продолжим слишком далеко, и не смогут тогда служить координатными линиями искомой полугеодезической системы.

Из доказанной теоремы легко вытекает такое следствие: всякая геодезическая линия в достаточно малой окрестности данной своей точки  $M_0$  может быть включена в полугеодезическую систему координат в качестве линии  $u$ . Действительно, для этого достаточно через точку  $M_0$  ортогонально к геодезической провести произвольную кривую  $C_0$ , а затем, исходя из  $C_0$ , построить вблизи  $M_0$  только что указанным методом полугеоде-

зическую систему координат. Исходная геодезическая автоматически окажется в числе линий и этой системы.

Теперь мы можем доказать следующее экстремальное свойство геодезических. Отрезок геодезической  $AB$  между точками  $A$  и  $B$  на ней дает кратчайшее расстояние между  $A$  и  $B$  по сравнению со всеми другими кривыми  $AB$  на поверхности, соединяющими эти точки, при условии, что точка  $B$  берется в достаточно малой окрестности точки  $A$ .

В силу сказанного выше мы можем считать рассматриваемую геодезическую в достаточно малой окрестности около  $A$  линией и некоторой полугеодезической системы. Пусть  $AB$  (черт. 136)— отрезок линии  $u$  и пусть значения  $u$  в точках  $A$  и  $B$  суть соответственно  $a$  и  $b$ . Тогда, как мы знаем, длина  $AB$  равна  $b - a$  (считая  $b > a$ ).

С другой стороны, соединим  $A$  и  $B$  произвольной кривой  $AB$ . Ее длина, в силу (570), выражается взятым вдоль нее интегралом

$$\int_A^B \sqrt{du^2 + G(u, v) dv^2}.$$

Этот интеграл не меньше, чем интеграл  $\int_A^B |du|$ , взятый вдоль той же кривой (достаточно сравнить подинтегральные выражения, помня, что  $G > 0$ ); но интеграл от модуля не меньше модуля интеграла  $u$ , следовательно,

$$\int_A^B |du| \geq \int_A^B du = b - a.$$

Знак  $=$  имеет место, если  $du$  все время положительно, т. е. если  $u$  вдоль кривой  $AB$  от значения  $a$  до  $b$  растет монотонно. Если же  $u$  при этом колеблется, то имеет место знак  $>$ .

Итак, во всяком случае

$$\int_A^B \sqrt{du^2 + G(u, v) dv^2} \geq b - a.$$

Этим наше утверждение доказано. Заметим, что оговорка о том, что геодезическая берется в достаточно малом куске, является существенной. В самом деле, рассмотрим геодезическую на сфере, т. е. окружность большого круга. Две точки  $A$  и  $B$  на этой окружности разбивают ее на два куска; один из них больше, а другой меньше половины этой окружности (если точки  $A$  и  $B$  не диаметрально противоположны). Если соединить  $A$  и  $B$  меньшим куском, то это будет действительно кратчайшее расстояние

между  $A$  и  $B$  по сфере; если же их соединить большим куском, то этого, очевидно, не будет, хотя  $A$  и  $B$  соединены отрезком геодезической. Таким образом, для того чтобы доказанное свойство имело место для геодезических на сфере, их тоже нужно брать в кусках «достаточно малых», а именно меньших полуокружности.

Доказанное экстремальное свойство не только необходимо, но и достаточно для того, чтобы кривая была геодезической. Чтобы это обнаружить, нужно заняться вариационной задачей на определение минимума интеграла

$$\int_A^B \sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2},$$

взятого по какой-нибудь кривой на поверхности, соединяющей две данные точки  $A$ ,  $B$ . Тогда мы приходим к дифференциальному уравнению геодезической в качестве уравнения Эйлера-Лагранжа для этой вариационной задачи.

#### § 94\*. Об изгиблении поверхностей непостоянной кривизны.

В основу всей этой главы у нас было положено понятие изгиблания. Уже говорилось, что, разумеется, не всякие две поверхности изгибаются одна в другую. Между тем мы не имеем еще ответа на естественно возникающий вопрос:

Даны две поверхности,  $S$  и  $S^*$ . Как узнать, изгибаются ли они одна в другую?

Этой задачей мы сейчас и будем заниматься. Отметим прежде всего, что при изгиблении поверхности полная кривизна  $K$  в каждой точке остается прежней (§ 82). Поэтому, если во всех точках поверхности  $K$  имела одно и то же значение, то и после изгиблания  $K$  сохраняет во всех точках то же значение. Другими словами, поверхности постоянной полной кривизны при изгиблении переходят только в поверхности постоянной полной кривизны (с тем же ее значением). Следовательно, поверхность с непостоянной полной кривизной может изгибаться только в поверхность с непостоянной полной кривизной. В этом параграфе мы займемся поставленной выше задачей только для случая, когда  $S$  и  $S^*$  обладают непостоянной полной кривизной.

Рассмотрим на поверхности  $S$  скалярное поле  $K$  ( $u^1, u^2$ ), обозначаемое полной кривизной. Составим для этого поля первый дифференциальный параметр (552')

$$\nabla(K) = g^{ab} \frac{\partial K}{\partial u^a} \frac{\partial K}{\partial u^b}. \quad (580)$$

Получаем два скалярных поля; другими словами,  $K$  и  $\nabla K$  суть

функции от  $u^1, u^2$ , причем значения их в данной точке не зависят от выбора координатной системы  $u^1, u^2$ . Итак,

$$K = f_1(u^1, u^2), \quad \nabla(K) = f_2(u^1, u^2). \quad (581)$$

Будем различать теперь два возможных случая.

1.  $\nabla(K)$  функционально независимо от  $K$ . В таком случае якобиан  $\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u^1, u^2)}$  не обращается тождественно в нуль. Будем рассматривать поверхность  $S$  вблизи какой-нибудь ее точки  $M_0$ , где

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u^1, u^2)} \neq 0.$$

Как известно из анализа, в этом случае вблизи точки  $M_0$  можно выразить, обратно,  $u^1, u^2$  как функции от  $K, \nabla K$ . Следовательно,  $K, \nabla K$  можно принять за криволинейные координаты на поверхности по крайней мере в некоторой окрестности  $M_0$ , так как там будет иметь место взаимно однозначное соответствие между точками поверхности и значениями  $K, \nabla K$ .

Допустим теперь, что поверхность  $S$  (хотя бы в некоторой окрестности точки  $M_0$ ) изгибаются в какую-то другую поверхность  $S^*$  в окрестности точки  $M_0^*$ . При изгибиании поверхности кривизна  $K$  остается в каждой точке прежней, другими словами, вид функции  $K(u^1, u^2)$  не меняется, если сохранить у каждой точки ее прежние координаты  $u^1, u^2$ . Но при этом и значения  $g_{11}, g_{12}, g_{22}$  тоже сохраняются без изменения, а следовательно, и  $\nabla K$  [см. (580)] после изгибаания сохранит прежнее значение.

Итак, каждая точка поверхности  $S$  переходит при изгибиании в некоторую точку поверхности  $S^*$  (в частности, точка  $M_0$  в  $M_0^*$ ) с теми же значениями  $K$  и  $\nabla K$ . Можно сказать, что, приняв  $K$  и  $\nabla K$  за криволинейные координаты, мы сохраняем в каждой точке прежние значения координат после изгибаания. Но в таком случае значения  $g_{11}, g_{12}, g_{22}$  должны также оставаться без изменения.

Итак, для изгибаания окрестности точки  $M_0$  на поверхности  $S$  в поверхность  $S^*$  необходимо, чтобы на поверхности  $S^*$  имелась точка  $M_0^*$  с теми же значениями  $K$  и  $\nabla K$ , что и в  $M_0$ , причем, если в окрестности  $M_0^*$  принять  $K$  и  $\nabla K$  за криволинейные координаты (что должно быть возможно), то  $g_{11}, g_{12}, g_{22}$  в этих координатах должны быть такими же функциями координат, как и в окрестности  $M_0$ , когда за координаты приняты тоже  $K$  и  $\nabla K$ .

Теперь очевидно, что это условие не только необходимо, но и достаточно: можно осуществить изгибаание, поставив в соответствие каждой точке окрестности  $M_0$  на  $S$  точку окрестности  $M_0^*$  на  $S^*$  с теми же значениями  $K$  и  $\nabla K$  (предполагается, конечно, что область изменения  $K$  и  $\nabla K$  берется одинаковой для обеих окрестностей). В таком случае  $g_{11}, g_{12}, g_{22}$ , взятые в координатах  $K, \nabla K$ , будут в соответствующих точках одинаковы, а сле-

## § 94]

## ОБ ИЗГИБАНИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

## 393

довательно, и  $ds^2$  будет для соответствующих бесконечно малых смещений иметь одно и то же значение.

2. Рассмотрим теперь второй случай, когда на поверхности  $K$  и  $\nabla K$  функционально зависимы,

$$\nabla(K) = F(K). \quad (582)$$

Согласно (552')  $\nabla(K)$  есть скалярный квадрат вектора градиента от  $K$ . Следовательно,  $\nabla(K) \geq 0$ , причем тождественное обращение  $\nabla(K)$  в нуль означает тождественное обращение в нуль и вектора-градиента, т. е. обеих частных производных  $\frac{\partial K}{\partial u^1}, \frac{\partial K}{\partial u^2}$ . Этот случай — поверхности с постоянным значением  $K$  — оставлен пока в стороне.

Будем рассматривать поверхность  $S$  вблизи какой-нибудь ее точки  $M_0$ , где  $\nabla(K) \neq 0$  и где, следовательно,  $\nabla(K) > 0$ .

Построим новую функцию от  $K$

$$u(K) = \sqrt{\frac{dK}{F(K)}}. \quad (583)$$

Здесь под  $K_0$  мы понимаем значение  $K$  в точке  $M_0$ . Очевидно, что

$$\frac{\partial u}{\partial u^i} = \frac{\partial K}{\partial u^i} \frac{1}{\sqrt{F(K)}}.$$

Теперь (582) может быть переписано в виде

$$\nabla(u) = g^{ab} \frac{\partial u}{\partial u^a} \frac{\partial u}{\partial u^b} = 1. \quad (584)$$

Итак, нами построено скалярное поле  $u$ , удовлетворяющее первому из уравнений (574'). Построим теперь скалярное поле  $v(u^1, u^2)$ , где  $v(u^1, u^2)$  — какое-нибудь из решений второго уравнения (574'). Это уравнение относительно  $v(u^1, u^2)$  есть однородное линейное уравнение в частных производных 1-го порядка. Поэтому, если  $v(u^1, u^2)$  есть решение, то и любая функция от  $v$  тоже будет решением<sup>1)</sup>. При этом всегда можно  $v(u^1, u^2)$  подобрать так, что в точке  $M_0 \frac{\partial v}{\partial u^1}, \frac{\partial v}{\partial u^2}$  не обращаются обе в нуль. Следовательно, в точке  $M_0$ ,

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(u^2, u^2)} \neq 0,$$

так как в противном случае  $\frac{\partial u}{\partial u^1}, \frac{\partial u}{\partial u^2}$  были бы пропорциональны  $\frac{\partial v}{\partial u^1}, \frac{\partial v}{\partial u^2}$  и из второго уравнения (574') следовало бы, что левая

<sup>1)</sup> Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, гл. VIII, § 2.

часть (584) равна нулю. Следовательно, в некоторой окрестности точки  $M_0$  можно установить взаимно однозначное соответствие между парами значений  $u^1, u^2$  и  $u, v$ . Принимаем теперь  $u, v$  за криволинейные координаты. Так как условия (574) выполнены, то это будет полугеодезическая система координат. При этом линии  $v$  — геодезические параллели — будут в то же время линиями уровня полной кривизны. Действительно, обращая функцию (583) [что всегда можно сделать, так как  $\frac{du}{dK} = \frac{1}{\sqrt{F(K)}} > 0$ , т. е.  $u(K)$  — монотонная функция], запишем

$$K = \varphi(u) \quad (585)$$

и, следовательно, вдоль линии  $v$ , т. е. при  $u = \text{const.}$ ,  $K$  тоже сохраняет постоянное значение.

В полугеодезической системе первая квадратичная форма имеет вид (570)

$$ds^2 = du^2 + G(u, v) dv^2,$$

а полная кривизна выражается формулой (572)

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}.$$

Но так как в рассматриваемом сейчас случае  $K = \varphi(u)$ , то мы получаем

$$-\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} = \varphi(u).$$

Другими словами,  $\sqrt{G}$  должен удовлетворять линейному дифференциальному уравнению 2-го порядка относительно аргумента  $u$ :

$$\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} + \varphi(u) \nabla \bar{G} = 0. \quad (586)$$

Общее решение такого уравнения имеет вид

$$\sqrt{G} = A_1(v) \psi_1(u) + A_2(v) \psi_2(u), \quad (587)$$

где  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , определенные линейно независимые частные решения, — функции от  $u$ , а  $A_1, A_2$  — произвольные коэффициенты, не зависящие от аргумента  $u$  и, следовательно, могущие зависеть только от  $v$ .

Итак,

$$ds^2 = du^2 + [\psi_1(u) A_1(v) + \psi_2(u) A_2(v)]^2 dv^2. \quad (588)$$

Допустим теперь, что рассматриваемая поверхность  $S$  изгибаются в некоторую другую поверхность  $S^*$ . Так как  $K$  и  $\nabla(K)$  при изгибаии сохраняют свои значения, то функциональная зависимость

(582) необходимо имеет место и на  $S^*$ . Поэтому, переходя на  $S^*$  в полугеодезические координаты, построенные аналогичным образом, мы получим функциональную зависимость  $u$  от  $K$  (583) и  $K$  от  $u$  (585) совершенно такой же, как и на поверхности  $S$ , сохраняя прежнее значение постоянного  $K_u$ . Частные решения  $\psi_1(u)$ ,  $\psi_2(u)$  можно взять такие же, как и на поверхности  $S$ , так как уравнение (586) сохранит в точности прежний вид. Но вид функций  $A_1(v)$  и  $A_2(v)$  может оказаться теперь иным, так что на  $S^*$  мы получаем

$$ds^2 = du^{*2} + [\psi_1(u^*) A_1^*(v^*) + \psi_2(u^*) A_2^*(v^*)]^2 dv^{*2}. \quad (589)$$

Так как при изгибаии  $S$  в  $S^*$  значения  $K$  сохраняются, то, в силу (583), сохраняются и значения  $u$ . Итак, в соответствующих точках обеих поверхностей

$$u^* = u. \quad (590)$$

Следовательно, линии  $v$  ( $u = \text{const.}$ ), образующие семейство геодезических параллелей на  $S$ , перейдут после изгибаии в линии  $v^*$ , образующие аналогичное семейство на  $S^*$ . Линии  $u$  ( $v = \text{const.}$ ) — ортогонально секущие линии  $v$  — ввиду сохранения углов при изгибаии продолжают служить ортогональными траекториями линий  $v^*$  после изгибаии  $S$  в  $S^*$ . Следовательно, всякая линия  $u$  перейдет после изгибаии в некоторую линию  $u^*$ , т. е. из  $v = \text{const.}$  следует  $v^* = \text{const.}$  А это значит, что при изгибаии  $S$  в  $S^*$  значения  $v^*$  в преобразованных точках зависят только от значений  $v$  в исходных точках:

$$v^* = v^*(v). \quad (591)$$

Итак, в специфических координатах, которые мы ввели на обеих поверхностях, аналитическая запись изгибаии необходимо имеет вид (590), (591). Необходимо, кроме того, совпадение  $ds^2$  для соответствующих бесконечно малых смещений, т. е. необходимо тождество квадратичных форм (588) и (589) при условиях (590), (591). Очевидно, это тождество сводится к следующему:

$$\psi_1(u) A_1^* dv^* + \psi_2(u) A_2^* dv^* = \pm (\psi_1(u) A_1 dv + \psi_2(u) A_2 dv)$$

или

$$\psi_1(u) (A_1^* dv^* \mp A_1 dv) + \psi_2(u) (A_2^* dv^* \mp A_2 dv) = 0.$$

Здесь коэффициенты при  $\psi_1(u)$  и  $\psi_2(u)$  не зависят от  $u$  и мы вынуждены приравнять их нулю, так как в противном случае мы имели бы линейную зависимость между  $\psi_1$  и  $\psi_2$ . Получим

$$\left. \begin{aligned} A_1^* dv^* \mp A_1 dv &= 0, \\ A_2^* dv^* \mp A_2 dv &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (592)$$

откуда

$$\frac{A_2^*(v^*)}{A_1^*(v^*)} = \frac{A_2(v)}{A_1(v)}. \quad (593)$$

(Так как  $A_1, A_2$  одновременно не обращаются в нуль, — иначе  $G=0$ , — считаем для определенности  $A_1 \neq 0$ .) Внутренняя геометрия поверхности  $S$  в рассматриваемом втором случае может оказаться двух типов. Рассмотрим их отдельно.

### Случай 2а.

$A_1$  и  $A_2$  — линейно независимые функции от  $v$ . Тогда правая часть — непостоянная функция от  $v$ . В таком случае левая часть тоже должна быть непостоянной функцией от  $v^*$ , и уравнение (593) дает нам в неявной форме функциональную зависимость между  $v$  и  $v^*$ . Итак, необходимо, чтобы в рассматриваемой области изменения  $v$  существовала функция  $v^*(v)$  (взаимно однозначно отображающая область изменения  $v$  на область изменения  $v^*$ ), удовлетворяющая конечному соотношению (593) и дифференциальным соотношениям (592) (точнее одному из них, — другое будет следствием).

Перечислим необходимые условия изгибаемости поверхности  $S$  в  $S^*$ .

На  $S^*$  должна иметь место та же самая функциональная зависимость  $\nabla(K)$  от  $K$ , что и на  $S$ ; можно определить из (593) функциональную зависимость  $v^*$  от  $v$  так, что условия (592) удовлетворяются.

Нетрудно видеть, что перечисленное не только необходимо, но и достаточно. Действительно, если все это соблюдается, то преобразование  $S$  в  $S^*$ , определяемое формулами (590), (591), осуществляет изгибание  $S$  в  $S^*$ . Из предыдущих выкладок видно, что  $ds^2$  для соответствующих бесконечно малых смещений сохраняет свое значение.

### Случай 2б.

$A_1, A_2$  — линейно зависимые функции  $v$ :

$$A_2 = CA_1.$$

Тогда из (593) следует, что  $A_2^* = CA_1^*$ . В таком случае (588) можно переписать в виде

$$ds^2 = du^2 + \psi(u)^2 A_1(v)^2 dv^2, \quad (594)$$

где

$$\psi(u) = \psi_1(u) + C\psi_2(u).$$

Очевидно,  $\psi(u)$  также является решением уравнения (586). Совершенно аналогично, (589) приведется к виду

$$ds^2 = du^{*2} + \psi(u^*)^2 A_1^*(v^*)^2 dv^{*2}, \quad (595)$$

где

$$\psi(u^*) = \psi_1(u^*) + C\psi_2(u^*).$$

Так как  $A_2 : A_1 = A_2^* : A_1^* = C$ , то нижнее из условий (592) есть следствие верхнего, так что, ограничиваясь одним верхним, получим

$$A_1^*(v^*) dv^* = \pm A_1(v) dv,$$

откуда после интегрирования получаем в неявной форме функциональную зависимость между  $v^*$  и  $v$ :

$$\int A_1^*(v^*) dv^* = \pm \int A_1(v) dv. \quad (596)$$

Перечислим теперь необходимые условия изгибаемости  $S$  в  $S^*$  в исследуемом случае.

На  $S^*$  должна иметь место та же самая функциональная зависимость  $\nabla(K)$  от  $K$ , что и на  $S$ ; отношение  $A_2^* : A_1^*$  должно быть равно той же постоянной  $C$ , что и отношение  $A_2 : A_1$ .

Нетрудно видеть, что эти условия не только необходимы, но и достаточны. В самом деле, устанавливая зависимость  $v^*$  от  $v$  при помощи (596) и полагая  $u^* = u$ , мы осуществляем изгибание поверхности  $S$  в  $S^*$ . Чтобы убедиться в этом, достаточно сравнить квадратичные формы (594) и (595) для соответствующих смещений, т. е. при  $u^* = u$ ,  $du^* = du$  и при условии (596). Очевидно, оба выражения будут тождественны. Задача, поставленная нами в этом параграфе, разрешена.

### § 95\*. Случай поверхностей, изгибаемых в поверхности вращения.

Рассмотрим теперь ближе внутреннюю геометрию поверхности  $S$  в случае 2б § 94. Этот случай характеризовался тем, что в специальной координатной системе квадратичная форма приняла вид (594). Сюда можно внести дополнительное упрощение, приняв в качестве координаты  $v$  функцию от  $v$

$$\int A_1(v) dv,$$

которая будет монотонной, так как  $A_1(v)$  сохраняет постоянный знак (обращение  $A_1$  в нуль повлекло бы  $G=g_{22}=0$ ). При этом новом выборе координаты  $v$  (594) принимает вид

$$ds^2 = du^2 + \psi(u)^2 dv^2. \quad (597)$$

Чтобы выяснить геометрический смысл случая 2б, докажем следующую теорему:

Для того чтобы поверхность  $S$  была изгибаема в некоторую поверхность вращения, необходимо и достаточно, чтобы  $ds^2$  в специально подобранных координатах приводилось к виду (597).

Рассмотрим прежде всего какую-нибудь поверхность вращения, образованную вращением около оси  $Z$  некоторой кривой  $C$ , про-

веденной в плоскости  $XZ$  и не пересекающей оси  $Z$ . Эту кривую  $C$  мы зададим параметрическим представлением

$$z = \psi(u), \quad x = \phi(u) > 0,$$

где  $u$ —длина дуги вдоль  $C$ . Обозначим через  $v$  угол поворота кривой  $C$  около оси  $Z$ ; тогда положение любой точки на поверхности определяется значениями  $u, v$ ;  $v$  определяет положение кривой  $C$ , а  $u$ —определенную точку на ней. Линии  $u$  служат меридианами, а  $v$ —параллелями поверхности; они образуют, очевидно, ортогональную сеть, следовательно, средний коэффициент  $F=g_{12}$  в квадратичной форме  $ds^2$  обращается в нуль:

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2.$$

Но если мы движемся вдоль линии  $u$ , т. е. по меридиану, то  $dv=0$  и

$$ds^2 = E du^2.$$

Но, с другой стороны, вдоль меридианов  $u$  имеет геометрический смысл длины дуги, так что  $ds=du$ , и мы получаем  $E=1$ . Итак,  $ds^2$  принимает вид (570)

$$ds^2 = du^2 + G dv^2. \quad (598)$$

Отсюда следует, что система координат у нас полугеодезическая, значит, параллели (линии  $v$ ) суть геодезические параллели, меридианы (линии  $u$ )—геодезические линии, к ним ортогональные. То, что меридианы—геодезические линии, можно видеть и непосредственно из того, что их главные нормали (т. е. нормали к меридианам, лежащие в их плоскостях) совпадают с нормалью к поверхности.

Вычислим теперь  $G$ . При вращении кривой  $C$  около оси  $Z$  каждая точка  $x=\phi(u)$ ,  $z=\psi(u)$  кривой  $C$  описывает параллель поверхности вращения, т. е. линию  $v$ . Так как  $v$  есть угол поворота, а  $x=\phi(u)$  есть, очевидно, радиус описываемой окружности, то путь, пройденный точкой, равен  $v\phi(u)$ . Следовательно, вдоль линии  $v$  (т. е. при  $u$  постоянном)

$$ds = \psi(u) dv, \quad ds^2 = \psi(u)^2 dv^2.$$

Формула (598) при тех же условиях дает  $ds^2 = G dv^2$ , откуда  $G = \psi(u)^2$ .

Итак, окончательно (598) принимает вид

$$ds^2 = du^2 + \psi(u)^2 dv^2, \quad \psi(u) > 0. \quad (599)$$

Этим первая половина теоремы (необходимость) доказана. Действительно, пусть поверхность  $S$  изгибаются на поверхность вращения, на которой, как мы знаем, первая квадратичная форма  $ds^2$  в координатах  $u, v$  приводится к виду (599). Припишем каждой точке поверхности  $S$  в качестве координат те же значения  $u, v$ , что и в соответствующей точке поверхности вращения. Так как для соот-

ветствующих смещений  $ds^2$  должно иметь одинаковое значение на обеих поверхностях,  $ds^2$  будет выражаться и на поверхности  $S$  формулой (599).

Обратно, пусть на некоторой поверхности  $S$  удалось подобрать координаты  $u, v$ , ограниченные односвязной областью изменения, так, что  $ds^2$  принимает вид (599). Покажем, что можно построить такое семейство поверхностей вращения от одного параметра, что поверхность  $S$  изгибаются на любую из поверхностей этого семейства.

В самом деле, построим в плоскости  $XZ$  кривую  $C$ , вдоль которой

$$x = a\psi(u^*),$$

где  $u^*$ —длина дуги вдоль кривой, а  $a>0$ —произвольно выбранное постоянное. Следовательно,  $dx=a\psi'(u^*) du^*$ , а так как, кроме того,  $du^{*2} = ds^2 = dx^2 + dz^2$ , то

$$\frac{dz}{du^*} = \sqrt{1 - \left(\frac{dx}{du^*}\right)^2} = \sqrt{1 - a^2 \psi'(u^*)^2}, \quad z = \int \sqrt{1 - a^2 \psi'(u^*)^2} du^*.$$

Итак, кривая  $C$  получена в параметрическом представлении через длину дуги  $u^*$ . Произвольное постоянное интегрирования не играет никакой роли для формы поверхности вращения, так как означает лишь смещение кривой  $C$  параллельно оси  $Z$ . Что же касается постоянной  $a$ , то мы ее ограничим сверху:

$$a^2 < A,$$

где  $A$  равно минимальному значению  $\frac{1}{\psi'(u)^2}$  в интервале изменения  $u$  на поверхности  $S$ . Этим мы обеспечиваем положительное значение подкоренного выражения, если  $u^*$  мы будем рассматривать в том же интервале изменения, что и  $u$ . Рассмотрим теперь поверхность, образованную вращением кривой  $C$  около оси  $Z$ . Обозначая через  $v^*$  угол поворота, мы получаем на этой поверхности криволинейные координаты  $u^*, v^*$ . Мы знаем, что  $ds^2$  при этом примет вид

$$ds^2 = du^{*2} + a^2 \psi(u^*)^2 dv^{*2}. \quad (600)$$

Установим теперь между данной поверхностью  $S$  с первой квадратичной формой (599) и построенной нами поверхностью вращения с первой квадратичной формой (600) взаимно однозначное соответствие таким образом:

$$u^* = u, \quad v^* = \frac{v}{a}. \quad (601)$$

Мы получим, очевидно, изгибание, так как формы (599) и (600) для соответствующих смещений будут принимать на обеих поверхностях одно и то же значение, и длина дуги вдоль соответствующих кривых будет одна и та же. Заметим, что  $v^*$  на поверхности вращения имеет смысл рассматривать в интервале изменения не более

$2\pi$ , так как значения угла поворота  $v^*$ , отличающиеся на  $2\pi$ , приводят нас в одну и ту же точку. Если область изменения  $v$  на поверхности  $S$  такова, что (601) дает значения  $v^*$ , меняющиеся в более широком интервале, чем  $2\pi$ , то мы будем представлять себе, что поверхность  $S$  при изгибании на поверхность вращения «навита» на нее несколько раз. Однозначность отображения будет иметь место лишь в одну сторону, именно с поверхности  $S$  на поверхность вращения; взаимную же однозначность можно обеспечить, ограничиваясь кусками поверхности  $S$ , в которых интервал изменения  $v$  меньше  $2\pi$ .

Формулы (601), как легко проверить, определяют изгибание и в том случае, если вторую из них переписать в виде

$$v^* = \frac{v}{a} + b,$$

где  $b$ —произвольное постоянное. Действительно, геометрически это означает, что после изгибания  $S$  на поверхность вращения мы, увеличив все  $v^*$  на постоянное  $b$ , повернули ее около ее оси на угол  $b$ . В результате мы получим, конечно, прежнюю поверхность вращения, на которую снова изогнута поверхность  $S$ , только точки, отвечающие на поверхности вращения точкам  $S$ , повернулись по сравнению с прежними своими положениями на угол  $b$  около оси вращения. Отметим, что неопределенное постоянное интегрирования в формуле (596) имеет аналогичный геометрический смысл: в случае 2б после изгибания  $S$  на  $S^*$  последняя может еще «скользить» по себе самой вдоль линий  $v$ .

Мы получили целое семейство поверхностей вращения, на которые изгибаются  $S$ . Вид этих поверхностей зависит от произвольного параметра  $a$ . Все они изгибаются друг на друга. Постараемся по возможности яснее представить себе характер этого изгибаия. Возьмем поверхность, отвечающую данному значению  $a$ , и вырежем из нее кусок  $ABCD$ , ограниченный двумя параллелями и двумя меридианами  $u_1 \leq u \leq u_2$ ,  $v_1 \leq v \leq v_2$ . На этой поверхности  $ds^2$  имеет вид (600)

$$ds^2 = du^2 + a^2 \psi(u)^2 dv^2.$$

Возьмем теперь другую из наших поверхностей, где  $a$  имеет другое значение  $a^*$ , и  $ds^2$  можно записать в виде

$$ds^2 = du^{*2} + a^{*2} \psi(u^*)^2 dv^{*2}.$$

Вырежем из нее кусок, ограниченный двумя параллелями и двумя меридианами  $u_1 \leq u^* \leq u_2$ ,  $v_1 \frac{a}{a^*} \leq v^* \leq v_2 \frac{a}{a^*}$ . Очевидно, что формулы  $u^* = u$ ,  $v^* = v \frac{a}{a^*}$  устанавливают между этими двумя кусками взаимно однозначное соответствие, являющееся изгиблением

### § 95] ПОВЕРХНОСТИ, ИЗГИБАЕМЫЕ В ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ 401

(соответствующие  $ds^2$  имеют одинаковые значения). Пусть  $a^* < a$ ; тогда для кривых  $C$  и  $C^*$  в плоскости  $XZ$ , вращением которой образованы наши поверхности, мы имеем

$$x = a \psi(u), \quad x^* = a^* \psi(u^*)$$

и, следовательно, в соответствующих точках (где  $u^* = u$ ) мы имеем  $|x^*| < |x|$ . Таким образом, изгибая кусок первой поверхности, мы теснее окружили им ось вращения, навив его на более «узкую», вторую, поверхность вращения. Это уменьшение (в отношении  $a^*: a$ ) расстояний от

оси вращения компенсировано увеличением (в отношении  $a^*: a$ ) интервала  $v_2 - v_1$ , в котором изменяется  $v$ . В результате (черт. 137)  $\overline{A^*B^*} = \overline{AB}$ , причем меньший радиус дуги  $\overline{A^*B^*}$  компенсирован большим центральным углом, в пределах которого изменяется  $v$ .

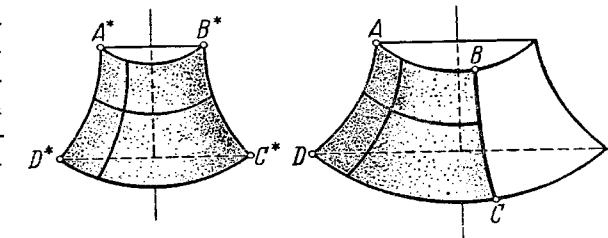
Заметим, что при достаточном уменьшении  $a^*$  этот центральный угол становится  $> 2\pi$ , т. е., навивая на достаточно узкую вторую поверхность кусок  $ABCD$ , мы покроем ее более одного раза. Более тесно окружая ось  $Z$ , вторая поверхность в то же время «выпрямляется» в вертикальном направлении; точнее, хотя  $\overline{AD} = \overline{A^*D^*}$ , но проекция  $A^*D^*$  на ось вращения больше, чем проекция  $AD$ . Это легко получить, сравнивая формулы

$$z = \int \sqrt{1 - a^2 \psi'(u)^2} du, \quad z^* = \int \sqrt{1 - a^{*2} \psi'(u^*)^2} du^* \text{ при } a^* < a.$$

Если теперь взять для второй поверхности, наоборот,  $a^* > a$ , то поверхности, очевидно, поменяются ролями: вторая отойдет дальше от оси и укоротится «по вертикали». Следует только помнить, что, увеличивая  $a^*$ , мы можем притти к мнимым значениям  $z^*$ ; поэтому при слишком больших  $a^*$  мы или совсем не получим поверхности вращения, или сумеем отобразить на полученную поверхность лишь часть  $ABCD$  (именно ту, в которой  $a^{*2} \psi'(u)^2$  остается  $< 1$ ).

В следующем параграфе нам встретятся конкретные примеры такого рода изгибаия поверхностей вращения.

Покажем еще, что для поверхностей, изгибаемых на поверхности вращения, интегрирование дифференциального уравнения геодезических сводится к квадратурам. Будем интегрировать дифференци-



Черт. 137.

альное уравнение геодезических в виде (573). Такой вид оно принимает, когда поверхность отнесена к полугеодезическим координатам  $u, v$ , и геодезическая ищется в виде  $v = f(u)$ . Но так как в нашем случае  $ds^2$  имеет вид (597) (изгибаляемость на поверхность вращения), то налицо добавочное упрощение, именно

$$G = \psi(u)^2,$$

т. е.  $G$  — функция одного только  $u$ . Поэтому (573) перепишется теперь в виде

$$f'' = -\frac{1}{G} G_u f' - \frac{1}{2} G_{uu} f'^3$$

или

$$f'' = -\frac{2\psi'}{\psi} f' - \psi' \psi f'^3,$$

где  $f(u)$  — искомая, а  $\psi(u)$  — данная функция от  $u$ . Умножим на  $\psi^3$ :

$$\psi^2 f'' + 2\psi \psi' f' = -\psi' \psi^3 f'^3$$

или

$$(\psi^2 f')' + (\psi^2 f')^3 \frac{\psi'}{\psi^3} = 0, \text{ т. е. } \frac{d(\psi^2 f')}{(\psi^2 f')^3} + \frac{d\psi}{\psi^3} = 0.$$

Интегрируя почленно и умножая на  $-2$ , приходим к первому интегралу нашего уравнения:

$$\frac{1}{(\psi^2 f')^2} + \frac{1}{\psi^2} = C^2, \quad (602)$$

где  $C^2$  — неопределенная постоянная, очевидно, заведомо положительная. Отсюда

$$f' = \pm \frac{1}{\psi \sqrt{C^2 \psi^2 - 1}}.$$

Следовательно, отыскание  $v$  как функции  $f(u)$  сводится к квадратуре

$$v = \pm \int_0^u \frac{du}{\psi \sqrt{C^2 \psi^2 - 1}} + C_1.$$

Получаем уравнение семейства геодезических, содержащее две произвольные постоянные  $C$  и  $C_1$ . Чтобы установить весьма интересный геометрический смысл постоянной  $C$ , вычислим вдоль геодезической линии косинус угла  $\alpha$ , под которым она встречает линии  $v$ , т. е. параллели поверхности вращения. Пусть дифференциалы координат вдоль геодезической будут  $du > 0$ ,  $dv$ , а вдоль линии  $v$  соответственно  $\delta u = 0$ ,  $\delta v > 0$ .

### § 96] ИЗГИБАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ 403

По формуле (346) получаем, сократив  $\delta v$  в числителе и знаменателе:

$$\cos \alpha = \frac{F du + G dv}{\sqrt{G(E du^2 + 2F du dv + G dv^2)}}.$$

Так как у нас

$$E = 1, F = 0, G = \psi^2,$$

то

$$\cos \alpha = \frac{\psi^2 dv}{\sqrt{\psi^2 (du^2 + \psi^2 dv^2)}} = \frac{\psi f'}{\sqrt{1 + \psi^2 f'^2}},$$

где  $f' = \frac{dv}{du}$ .

Очевидно,

$$\psi \cos \alpha = \frac{\psi^2 f'}{\sqrt{1 + \psi^2 f'^2}}.$$

Сравнивая с (602), мы замечаем, что  $\psi \cos \alpha = \frac{1}{C}$ .

Итак, вдоль геодезической на поверхности вращения произведение расстояния от оси вращения [т. е.  $\psi(u)$ ] на косинус угла между геодезической и параллелью остается постоянным (см. § 90, пример 3).

При изменении постоянной  $C_1$  геодезическая, очевидно, скользит по поверхности, вращаясь около ее оси вращения.

### § 96\*. ОБ ИЗГИБАНИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПОСТОЯННОЙ ПОЛНОЙ КРИВИЗНЫ.

Рассмотрим поверхность  $S$  постоянной полной кривизны:

$$K = \text{const.} \quad (603)$$

Возьмем на  $S$  произвольную точку  $M_0$  и выберем в  $M_0$  произвольное касательное к поверхности направление  $t_0$ . Проведем по этому направлению через точку  $M_0$  геодезическую линию и используем ее в качестве кривой  $C_0$ , определяющей вблизи точки  $M_0$  полугеодезическую систему координат (см. начало § 93). Мы относили в общем случае кривую  $C_0$  к произвольному параметру  $v$ ; теперь мы примем в качестве  $v$  длину дуги кривой  $C_0$ , отсчитываемую от точки  $M_0$ .

Мы получим полугеодезическую систему координат  $u, v$  с той особенностью, что наперед заданная точка  $M_0$  имеет координаты  $(0,0)$ , координатная линия  $u=0$  будет геодезической и параметр  $v$  вдоль нее играет роль дуги (остальные линии  $u=\text{const.}$  будут, как и в общем случае, геодезическими параллелями к ней, но сами геодезическими быть не обязаны). Как и в общем случае,

$$ds^2 = du^2 + G dv^2. \quad (604)$$

В начале § 92 мы вывели условие (565)  $G_{11}^1 = 0$ , исходя из того, что линии  $u$  (т. е.  $u^1$ ) служат геодезическими. Так как сейчас у нас одна из линий  $v$  (т. е.  $u^2$ ) служит геодезической, мы получим совершенно аналогичным образом, что в точках этой линии

$$G_{22}^1 = 0.$$

Пользуясь формулами (571'), имеющими место в полугеодезической системе координат, мы можем переписать это условие в виде

$$\frac{dG}{du} = 0 \text{ при } u=0 \text{ (т. е. вдоль линии } C_0). \quad (605)$$

Далее, так как вдоль линии  $C_0$  роль дуги играет параметр  $v$ ,  $ds = dv$ , а  $du = 0$ , то (604) показывает нам, что

$$G = 1 \text{ при } u=0 \text{ (т. е. вдоль линии } C_0). \quad (606)$$

Перепишем теперь формулу (572) для полной кривизны

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}$$

или

$$\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} + K\sqrt{G} = 0, \quad (607)$$

где  $K$  — постоянное. Мы видим, что  $\sqrt{G}$  по отношению к  $u$  удовлетворяет простому линейному дифференциальному уравнению 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Решения такого уравнения хорошо известны:

$$\sqrt{G} = \begin{cases} A \cos(\sqrt{K}u) + B \sin(\sqrt{K}u), & \text{если } K > 0, \\ A + Bu, & \text{если } K = 0, \\ A \cosh(\sqrt{-K}u) + B \sinh(\sqrt{-K}u), & \text{если } K < 0, \end{cases} \quad (608)$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные, не зависящие от  $u$  величины; в нашем случае они могут зависеть только от  $v$ . Положим здесь  $u=0$  и используем условие (606). Получим во всех трех случаях

$$1 = A.$$

Далее, дифференцируя (608) по  $u$ :

$$\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = \begin{cases} -A\sqrt{K} \sin(\sqrt{K}u) + B\sqrt{K} \cos(\sqrt{K}u), \\ B, \\ A\sqrt{-K} \sinh(\sqrt{-K}u) + B\sqrt{-K} \cosh(\sqrt{-K}u) \end{cases}$$

и используя условие (605), получим во всех трех случаях  $B = 0$ .

Теперь (608) принимает вид

$$\sqrt{G} = \begin{cases} \cos(\sqrt{K}u), & \text{если } K > 0, \\ 1, & \text{если } K = 0, \\ \cosh(\sqrt{-K}u), & \text{если } K < 0 \end{cases}$$

и, следовательно,

$$ds^2 = \begin{cases} du^2 + [dv \cos(\sqrt{K}u)]^2, & \text{если } K > 0, \\ du^2 + dv^2, & \text{если } K = 0, \\ du^2 + [dv \cosh(\sqrt{-K}u)]^2, & \text{если } K < 0. \end{cases} \quad (609)$$

До сих пор мы рассматривали одну поверхность  $S$  постоянной полной кривизны  $K$  в полугеодезических координатах  $u$ ,  $v$ . При этом точка  $(0, 0)$  и направление координатной линии  $u=0$  в этой точке совпадали с наперед заданными точкой  $M_0$  и направлением  $t_0$  в ней.

Возьмем теперь другую поверхность  $S^*$  той же постоянной кривизны  $K$  и на ней произвольно точку  $M_0^*$  с направлением  $t_0^*$  в ней. Повторяя предыдущее построение и получаем вблизи  $M_0^*$  полу-геодезическую систему координат  $u^*$ ,  $v^*$ , причем

$$ds^2 = \begin{cases} du^{*2} + [dv^* \cos(\sqrt{K}u^*)]^2, \\ du^{*2} + dv^{*2}, \\ du^{*2} + [dv^* \cosh(\sqrt{-K}u^*)]^2. \end{cases} \quad (610)$$

Установим между  $S$  и  $S^*$  взаимно однозначное соответствие (по крайней мере в окрестностях точек  $M_0$  и  $M_0^*$ , где имеют место построенные полу-геодезические системы координат)

$$u^* = u, \quad v^* = v. \quad (611)$$

Сравнивая (609) и (610), мы видим, что соответствующие дифференциалы дуг на обеих поверхностях равны между собой и, следовательно, налицо изгибание  $S$  в  $S^*$ . При этом из (611) видно, что точке  $(0, 0)$  и линии  $u=0$  отвечает точка  $(0, 0)$  и линия  $u^*=0$ . Следовательно, точка  $M_0$  с направлением  $t_0$  переходит в точку  $M_0^*$  с направлением  $t_0^*$ .

Итак, две поверхности  $S$  и  $S^*$  одной и той же постоянной полной кривизны  $K$  всегда можно изогнуть одна в другую так, что наперед заданная на  $S$  точка  $M_0$  с направлением  $t_0$  в ней переходит на  $S^*$  в любую наперед заданную точку  $M_0^*$  с направлением  $t_0^*$  в ней (подразумевается, что речь идет об изгибании поверхности  $S$  не обязательно в целом, а хотя бы в некоторой окрестности точки  $M_0$  на некоторую окрестность точки  $M_0^*$ ). Следовательно, все поверхности данной постоянной кривизны  $K$  имеют в малом одну и ту же внутреннюю геометрию.

Фиксируя  $M_0, t_0$  на  $S$ , можно произвольно выбирать  $M_0^*, t_0^*$  на  $S^*$  и изгибать, таким образом, один и тот же кусок поверхности  $S$  на всевозможные места поверхности  $S^*$  с теми же тремя степенями свободы, как и при наложении куска одной плоскости на другую плоскость (два произвольных параметра — координаты точки  $M^*$  и один произвольный параметр характеризует выбор направления  $t_0^*$ ).

Можно не брать двух различных поверхностей, а ограничиться одной поверхностью  $S$  постоянной кривизны  $K$ . Тогда те же рассуждения позволяют нам изгибать окрестность любой точки  $M_1$  на ней в окрестность любой другой точки  $M_2$  так, чтобы  $M_1$  попадало в  $M_2$  и чтобы наперед заданное направление в  $M_1$  перешло в любое направление в  $M_2$ . В частности, оставляя точку  $M_1$  на месте, можно «повернуть» около нее ее окрестность, т. е. так отобразить окрестность на себя, чтобы все длины остались без изменения. Все направления, выходящие из  $M_1$ , повернутся при этом на один и тот же угол.

Так как при изгибаии длины и углы остаются без изменения, то мы видим, что во внутренней геометрии поверхностей постоянной кривизны возможно «передвигать» фигуры с теми же тремя степенями свободы, как и на обыкновенной плоскости. Точнее, имея в окрестности данной точки какую-нибудь фигуру, мы можем (путем изгибаии окрестности в другую окрестность) отобразить эту фигуру с тремя степенями свободы в любое другое место поверхности с сохранением всех длин и углов. А в этом и состоит сущность понятия движения.

Итак, особенностью поверхностей постоянной кривизны является полная однородность их внутренней геометрии, столь же полная, как и для обыкновенной плоскости (самоналожение с тремя степенями свободы). Естественно ожидать, что эта внутренняя геометрия обладает интересными свойствами.

И, действительно, в случае  $K = 0$  мы получаем, согласно (609), такую же внутреннюю геометрию в малом, как и на плоскости, так как  $ds^2$  имеет вид  $du^2 + dv^2$  (как на плоскости, отнесенной к прямоугольным координатам  $u, v$ ). Этого нужно было ожидать, так как условие  $K = 0$  равносильно тому, что поверхность развертывающаяся, т. е. изгибаемая на плоскость (см. конец § 82).

В случае  $K > 0$ , как видно из (609), мы получаем внутреннюю геометрию, в малом такую же, как на сфере, так как  $ds^2$  имеет вид  $du^2 + [dv \cos(\sqrt{K}u)]^2$ , т. е. совпадает с первой квадратичной формой на сфере радиуса  $\frac{1}{\sqrt{K}}$ , причем  $\sqrt{K}$  и служит широтой,

а  $\sqrt{K}v$  — долготой (см. § 47, упражнения). Такова же (в малом) внутренняя геометрия на так называемой эллиптической плоскости.

Наконец, в случае  $K < 0$  мы получаем внутреннюю геометрию плоскости Лобачевского.

Геометрия Лобачевского, исторически первая и наиболее интересная из неевклидовых геометрий, была первоначально построена им синтетическим путем в результате замены постулата параллельности Евклида новым постулатом, согласно которому в данной плоскости через данную точку можно провести сколько угодно прямых, не пересекающих данную прямую. Геометрия плоскости Лобачевского реализуется на поверхностях постоянной отрицательной кривизны в следующем смысле.

Односвязный кусок такой поверхности всегда можно взаимно однозначно отобразить на кусок плоскости Лобачевского с сохранением длин всех кривых, углов между ними, площадей всех фигур и т. д. Геодезические линии поверхности отображаются при этом в прямые плоскости Лобачевского. Однако доказано, что нельзя построить всюду «гладкую» поверхность постоянной отрицательной кривизны, которая была бы способна развертываться таким образом на плоскость Лобачевского в целом.

### § 97\*. Поверхности вращения постоянной кривизны.

В этом параграфе мы рассмотрим те поверхности постоянной кривизны  $K$ , которые являются в то же время поверхностями вращения. Хотя это — весьма частный случай, но зато он очень нагляден и интересен геометрически. Будем считать  $K \neq 0$ , оставляя в стороне развертывающиеся поверхности, строение которых уже выяснено.

Будем искать в плоскости  $XZ$  кривые  $C$ , вращением которых около оси  $Z$  образуется поверхность данной постоянной кривизны  $K$ . Пусть уравнение кривой  $C$  (не пересекающей оси  $Z$ ) будет

$$x = \psi(u) > 0, \quad z = \varphi(u),$$

где  $u$  — длина дуги вдоль  $C$ . Тогда, согласно (599), мы получаем для поверхности вращения

$$ds^2 = du^2 + \psi(u)^2 dv^2,$$

где вторая координата  $v$  — угол поворота кривой  $C$  около оси  $Z$ . Найдем полную кривизну  $K$  нашей поверхности вращения по формуле (572):

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}.$$

Так как в нашем случае  $\sqrt{G} = \psi(u)$ , то

$$K = -\frac{1}{\psi(u)} \psi''(u).$$

Потребуем теперь, чтобы  $K$  имело наперед заданное постоянное значение; тогда для  $\psi(u)$  получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\psi''(u) + K\psi(u) = 0.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\left. \begin{array}{l} \psi(u) = a \cos \sqrt{K}u + b \sin \sqrt{K}u, \text{ если } K > 0, \\ \psi(u) = ae^{\sqrt{-K}u} + be^{-\sqrt{-K}u}, \quad \text{если } K < 0. \end{array} \right\} \quad (612)$$

К этому нужно добавить, что, так как

$$du^2 = dx^2 + dz^2,$$

то

$$\begin{aligned} dz &= \sqrt{du^2 - dx^2} = \sqrt{1 - \psi'(u)^2} du, \\ z &= \varphi(u) = \int_0^u \sqrt{1 - \psi'(u)^2} du. \end{aligned} \quad (612')$$

Здесь мы берем радикал со знаком  $+$ , предполагая, что дуга  $u$  отсчитывается в сторону возрастания  $z$ . Кроме того, мы предполагаем здесь, что  $z=0$  при  $u=0$ , т. е. что кривая  $C$  передвинута параллельно оси  $Z$  так, что точка  $u=0$  попала на ось  $X$ . Все это, не сужая геометрического решения задачи, позволяет более просто записать формулы.

Рассмотрим сначала случай  $K > 0$ . Меняя точку отсчета дуги  $u$  вдоль кривой  $C$ , т. е. заменивая  $u$  через  $u+u_0$ , можно подобрать  $u_0$  так, что  $\psi(u)$  примет упрощенный вид

$$x = \psi(u) = a \cos \sqrt{K}u, \quad (613)$$

где  $a$ —постоянное  $> 0$ , имеющее теперь, разумеется, другое значение. В самом деле, подставляя в первую из формул (612)  $u+u_0$  вместо  $u$ , получаем в правой части

$$(a \cos \sqrt{K}u_0 + b \sin \sqrt{K}u_0) \cos \sqrt{K}u + (b \cos \sqrt{K}u_0 - a \sin \sqrt{K}u_0) \sin \sqrt{K}u,$$

и достаточно взять

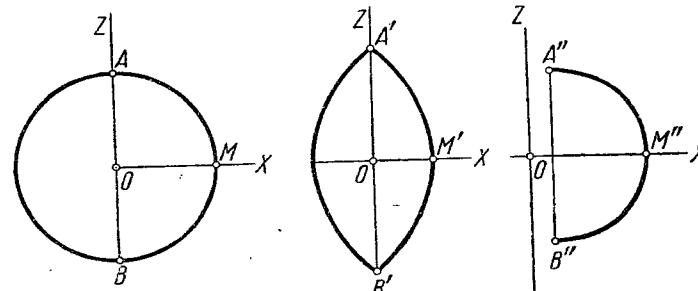
$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{K}} \operatorname{arctg} \frac{b}{a}.$$

Формула (612') принимает вид

$$z = \int_0^u \sqrt{1 - a^2 K \sin^2 \sqrt{K}u} du. \quad (614)$$

Меняя  $u$  от значения нуль, мы должны ограничиться интервалом его изменения не более чем от  $-\frac{\pi}{2\sqrt{K}}$  до  $+\frac{\pi}{2\sqrt{K}}$ , так как при этих значениях  $x$  обращается в нуль, и мы попадаем на ось  $Z$ . Здесь мы должны закончить кривую  $C$ , так как не хотим пересекать ось вращения.

Если  $a < \frac{1}{\sqrt{K}}$ , то для каждого значения  $u$  в этих пределах мы получаем значение  $z$  согласно (614), причем подкоренное выражение остается положительным. Чем меньше брать  $a$ , тем меньше будет  $x$  и тем больше будет  $z$  при тех же значениях  $u$ , как легко



Черт. 138.

видеть из (613) и (614). Геометрически это значит, что дуга  $C$ , упираясь концами в ось вращения, все более приближается к ней, вытягиваясь в то же время вдоль нее (исохраняя неизменную длину  $\frac{\pi}{\sqrt{K}}$ , равную интервалу изменения дуги  $u$ ). В частности, при  $a = \frac{1}{\sqrt{K}}$  интеграл (614) легко берется, и мы получаем

$$z = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \sqrt{K}u, \quad x = \frac{1}{\sqrt{K}} \cos \sqrt{K}u,$$

т. е.  $C$  становится полуокружностью радиуса  $\frac{1}{\sqrt{K}}$ , упирающейся концами в ось вращения (черт. 138). При уменьшении же параметра  $a$  дуга  $C$  вытягивается вдоль оси  $Z$ , сохраняя прежнюю длину  $\frac{\pi}{\sqrt{K}}$ . В точке  $B'$ , где  $u = -\frac{\pi}{2\sqrt{K}}$ , как легко подсчитать,

$$\begin{aligned} dx &= +a \sqrt{K} du, \\ dz &= \sqrt{1 - a^2 K} du, \end{aligned}$$

так что

$$\frac{dz}{dx} = +\sqrt{\frac{1}{a^2 K} - 1}.$$

Таков  $\operatorname{ctg}$  угла, под которым кривая  $C$  в точке  $B'$  (и, в силу симметрии, в  $A'$ ) встречает ось вращения.

При вращении случай  $a = \frac{1}{\sqrt{K}}$  дает сферу радиуса  $\frac{1}{\sqrt{K}}$ , а случай  $a < \frac{1}{\sqrt{K}}$  — веретенообразную фигуру, более вытянутую вдоль оси  $Z$  и более узкую, чем сфера (с коническими особыми точками в  $A'$  и  $B'$ ). Нетрудно показать, что полученная фигура после разреза по меридиану может быть изогнута в кусок сферы радиуса  $\frac{1}{\sqrt{K}}$ , заключенный между двумя ее меридианами.

Теперь рассмотрим случай  $a > \frac{1}{\sqrt{K}}$ . В этом случае приходится сузить интервал изменения  $u$ , чтобы под интегралом в (614) не получалось мнимости. А именно, нужно потребовать, чтобы было

$$a^2 K \sin^2 \sqrt{K} u \leq 1, \text{ или } -\frac{1}{a \sqrt{K}} \leq \sin \sqrt{K} u \leq +\frac{1}{a \sqrt{K}}.$$

Итак, теперь  $u$  может меняться от нуля лишь в этом суженном интервале. При крайних значениях  $u$ , когда  $\sin \sqrt{K} u = \pm \frac{1}{a \sqrt{K}}$ , мы получаем из (613), очевидно, наименьшие возможные значения  $x$

$$x_{A''} = x_{B''} = a \sqrt{1 - \sin^2 \sqrt{K} u} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{K}}.$$

Это значение положительно, т. е. теперь дуга  $C$  кончается, не доходя до оси вращения на это расстояние (черт. 138). Наибольшее значение  $x$  достигается при  $u=0$ ; оно во всех трех случаях равно  $a$ . В конечных точках  $A'', B''$ , как легко видеть из (614),  $dz=0$ ; следовательно, касательные к дуге  $C$  перпендикулярны к оси  $Z$ .

Вращением дуги  $C$  получается некоторый «пояс», окружающий ось  $Z$ . Нетрудно показать, что, разрезав этот «пояс» по меридиану, его можно изогнуть на поверхность сферы радиуса  $\frac{1}{\sqrt{K}}$ , причем он опояшет сферу по кольцу (идущему вокруг сферы по обе стороны экватора симметрично) один раз, начнет навертываться на нее по тому же кольцу вторично и т. д., пока не исчерпается его длина, экватория по экватору равна  $2\pi a$  и больше, следовательно, экватора сферы, равного по длине  $\frac{2\pi}{\sqrt{K}}$ .

Теперь рассмотрим случай  $K < 0$ . Здесь во второй формуле (612) придется различать три возможности.

1)  $a$  и  $b$  одинаковых знаков. Тогда, меняя точку отсчета  $u$ , т. е. заменяя  $u$  через  $u+u_0$ , мы замечаем, что коэффициент  $a$  умножится

на  $e^{V-Ku_0}$ , а  $b$  разделится на это же положительное число. Очевидно,  $u_0$  можно подобрать так, что  $a$  и  $b$  сравняются (достаточно взять  $e^{2V-Ku_0} = \frac{b}{a}$ ). Мы получим

$$x = \psi(u) = \frac{a}{2} (e^{+V-Ku} + e^{-V-Ku}) = a \operatorname{ch} \sqrt{-K} u, \quad (615)$$

где  $a$  — постоянное  $> 0$ , имеющее новое значение. Согласно (612')

$$z = \varphi(u) = \int_0^u \sqrt{1 + a^2 K \operatorname{sh}^2 \sqrt{-K} u} du. \quad (616)$$

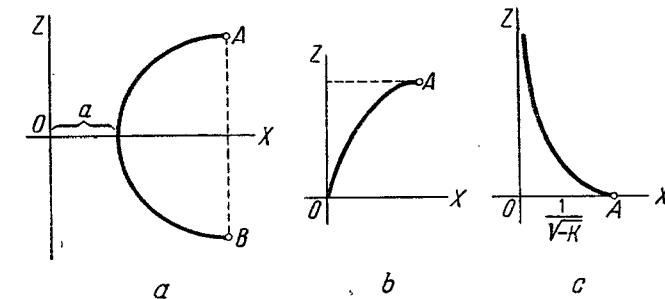
Чтобы избежать мнимости, приходится ограничить интервал изменения  $u$ :

$$1 + a^2 K \operatorname{sh}^2 \sqrt{-K} u \geq 0,$$

или

$$-\frac{1}{a \sqrt{-K}} \leq \operatorname{sh} \sqrt{-K} u \leq +\frac{1}{a \sqrt{-K}}.$$

Очевидно, что при крайних значениях  $\operatorname{sh} \sqrt{-K} u = \pm \frac{1}{a \sqrt{-K}}$  будут достигаться, согласно (615), наибольшие значения  $x$ , наименьшее же будет равно  $a$  и достигается при  $u=0$  (черт. 139, а).



Черт. 139.

Дуга  $C$  обращена выпуклостью к оси вращения; в конечных точках  $A, B$ , как легко проверить,  $dz=0$  и, следовательно, касательные перпендикулярны к оси вращения. При увеличении  $a$  дуга  $C$  удаляется от оси  $Z$ , а интервал изменения  $u$ , т. е. длина дуги  $C$ , уменьшается. Наоборот, при уменьшении  $a$  длина дуги  $C$  неограниченно увеличивается, причем  $C$  все теснее сближается с осью  $Z$ .

2)  $a$  и  $b$  разных знаков. Аналогичным приемом можно добиться (если взять  $e^{2V-Ku_0} = -\frac{b}{a}$ ) того, что  $a$  и  $b$  будут отличаться лишь знаком.

Получим

$$x = \psi(u) = \frac{a}{2} (e^{+V-Ku} - e^{-V-Ku}) = a \operatorname{sh} \sqrt{-K} u. \quad (617)$$

Возьмем для определенности  $a > 0$ ; тогда  $u$  можно менять от нуля лишь в положительную сторону (чтобы  $x$  был  $> 0$ ). Так как (612') дает

$$z = \varphi(u) = \int_0^u \sqrt{1 + a^2 K \operatorname{ch}^2 \sqrt{-K} u} du, \quad (618)$$

то, чтобы избежать мнимости, интервал изменения  $u$  следует ограничить условием

$$1 + a^2 K \operatorname{ch}^2 \sqrt{-K} u \geq 0,$$

или

$$\operatorname{ch} \sqrt{-K} u \leq \frac{1}{a \sqrt{-K}},$$

причем  $u \geq 0$ .

Так как  $\operatorname{ch}$  вещественного аргумента всегда  $> 1$ , то здесь  $a$  нельзя брать каким угодно; допустимы лишь значения  $a < \frac{1}{\sqrt{-K}}$ .

Когда  $u$  меняется от 0 до крайнего значения ( $\operatorname{ch} \sqrt{-K} u = \frac{1}{a \sqrt{-K}}$ ), то  $x$  растет от 0 до  $a \sqrt{\frac{-1}{K a^2} - 1} = \sqrt{\frac{-1}{K} - a^2}$ , причем дуга  $C$  наклонена к оси  $X$  в точке  $O$  под определенным углом, который все время уменьшается и в крайней точке  $A$  доходит до нуля (черт. 139, б).

3) Наиболее интересен случай, пограничный между этими двумя — когда один из коэффициентов равен нулю. Геометрически  $a = 0$  или  $b = 0$  дает одно и то же, так что ограничимся случаем  $a = 0$ .

Тогда

$$x = \psi(u) = b e^{-V-Ku},$$

где  $\psi(u) > 0$ , следовательно,  $b > 0$ . Меняя точку отсчета дуги  $u$ , т. е. заменяя  $u$  через  $u + u_0$ , мы добиваемся обращения  $b$  в  $\frac{1}{V-K}$  (нужно взять  $u_0$  так, чтобы  $b e^{-V-Ku_0} = \frac{1}{V-K}$ ).

Теперь

$$x = \psi(u) = \frac{1}{V-K} e^{-V-Ku},$$

$$z = \varphi(u) = \int_0^u \sqrt{1 - e^{-2V-2Ku}} du. \quad (619)$$

Мы видим, что подкоренное выражение положительно при любых  $u \geq 0$ , так что  $u$  меняется от 0 до  $\infty$ . При этом  $x$  уменьшается от значения  $\frac{1}{\sqrt{-K}}$ , стремясь к нулю при  $u \rightarrow \infty$ ;  $z$  монотонно растет.

Кривая начинается в точке  $A$  (где касательная к ней совпадает с осью  $X$ , так как  $dz = 0$  при  $u = 0$ ) и асимптотически приближается к оси  $Z$  в положительном направлении (черт. 139, с). Кривая эта называется *трактисой* и обладает многими интересными свойствами. Так, отрезки ее касательных от точки касания до оси  $Z$  имеют одну и ту же длину  $\frac{1}{\sqrt{-K}}$ ; она служит эвольвентой цепной линии

$$x = \frac{1}{\sqrt{-K}} \operatorname{ch} z \sqrt{-K}$$

(именно той из эвольвент, которая встречается с цепной линией в ее вершине).

Интеграл, через который выражается  $z$ , в этом случае может быть вычислен в элементарных функциях. А именно,

$$z = \frac{1}{\sqrt{-K}} \left\{ \ln(e^{V-Ku} + \sqrt{e^{2V-Ku} - 1}) - \sqrt{1 - e^{-2V-Ku}} \right\}.$$

При вращении трактисы около ее асимптоты (оси  $Z$ ) получается поверхность постоянной отрицательной кривизны  $K$ , уравнение которой, как мы видим, можно представить в элементарных функциях. Поверхность эта называется *псевдосферой*.

### § 98\*. Обнесение вектора по замкнутому контуру.

Вводя параллельное перенесение векторов на поверхности, мы упоминали о той его особенности, что, вообще говоря, перенесение одного и того же вектора  $\mathbf{a}$  из данной точки  $A$  в данную точку  $B$  будет давать различные результаты в зависимости от выбора пути перенесения. Мы должны теперь отдать себе ясный отчет, каким образом изменение пути  $AB$  при сохранении конечных точек  $A, B$  влияет на результат параллельного перенесения из  $A$  в  $B$ . Так как длина вектора  $\mathbf{p}$  при параллельном перенесении не меняется, то разница в результате может оказаться только на направлении перенесенного вектора.

Пусть вектор  $\mathbf{p}$ , перенесенный из  $A$  в  $B$  по пути  $AMB$ , занял положение  $\mathbf{p}_1$ , а перенесенный по другому пути  $ANB$  — занял положение  $\mathbf{p}_2$  (черт. 140). Спрашивается, на какой угол вектор  $\mathbf{p}_2$  повернется по сравнению с  $\mathbf{p}_1$ . Этой задачей мы и займемся в настоящем параграфе. Сведем ее к эквивалентной задаче, технически более удобно формулируемой. А именно, совершим параллельное

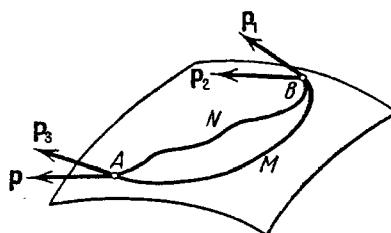
перенесение векторов  $\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1$  по пути  $BNA$  в точку  $A$ . Тогда  $\mathbf{p}_2$  вернется в исходное положение  $\mathbf{p}$ , а  $\mathbf{p}_1$  придет в точку  $A$  в виде некоторого вектора  $\mathbf{p}_3$ . Угол между  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}_3$  будет как раз равен искомому углу между  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$ , так как при параллельном перенесении углы не меняются. Но вектор  $\mathbf{p}_3$  можно рассматривать как вектор  $\mathbf{p}$ , обнесенный по замкнутому контуру  $AMBNA$  и вернувшийся в точку  $A$  с новым направлением (черт. 140). Поэтому поставленная нами задача сводится к такой:

*На поверхности дан замкнутый контур. Возьмем в какой-нибудь его точке  $M_0$  вектор  $\mathbf{p}$  и совершим параллельное перенесение этого вектора вдоль контура. Мы вернемся в точку  $M_0$  с вектором  $\mathbf{p}$ , повернутым на некоторый угол  $\Delta\varphi$  по сравнению с его исходным положением. Требуется найти угол  $\Delta\varphi$ .*

Как везде, где говорится о параллельном перенесении векторов на поверхности, мы имеем в виду вектор  $\mathbf{p}$ , касательный к поверхности.

За положительное направление отсчета углов на поверхности мы принимаем направление вращения от  $\mathbf{r}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}$  к  $\mathbf{r}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}$  и обходить контур будем в положительном направлении. Единичная нормаль  $\mathbf{m}$  выбирается в сторону векторного произведения  $[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]$ . Контур мы рассмотрим простой, ограничивающий односвязную область на поверхности. Контур этот, разумеется, непрерывный, но на нем допускается конечное число угловых точек; другими словами, он составлен из конечного числа дуг, каждая с непрерывно вращающейся касательной; но в точках примыкания соседних дуг их касательные могут встречаться под углом.

Построим на поверхности поле единичного вектора  $\mathbf{a}$ , т. е. в каждой точке  $u^1, u^2$  на поверхности зададим касательный к поверхности вектор  $\mathbf{a}$  ( $u^1, u^2$ ) длиной единицы. Пусть  $\mathbf{a}_0$  будет значение этого вектора в некоторой точке  $M_0$  нашего контура. В этой же точке возьмем какой-нибудь касательный к поверхности вектор  $\mathbf{p}_0$ , для простоты тоже единичный, который мы затем будем параллельно обносить в положительном направлении по контуру. Пусть  $\varphi_0$  будет угол  $\widehat{\mathbf{a}_0 \mathbf{p}_0}$  (учитывая и знак). В каждой точке контура  $M$  мы можем составить угол  $\varphi = \widehat{\mathbf{a} \mathbf{p}}$ , т. е. угол, образованный вектором  $\mathbf{a}$  в этой точке с вектором  $\mathbf{p}_0$ , параллельно перенесенным в эту точку и занявшим там положение  $\mathbf{p}$  (черт. 141). После того как мы обойдем контур и вернемся в  $M_0$ , вектор  $\mathbf{p}$  займет положение  $\mathbf{p}_1$ , и угол  $\varphi$  примет некоторое



Черт. 140.

значение  $\varphi_1$ , равное  $\widehat{\mathbf{a}_0 \mathbf{p}_1}$ . Очевидно,

$$\widehat{\mathbf{a}_0 \mathbf{p}_1} = \widehat{\mathbf{a}_0 \mathbf{p}_0} + \widehat{\mathbf{p}_0 \mathbf{p}_1}$$

или

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \Delta\varphi,$$

где  $\Delta\varphi$  — угол, образованный обнесенным вектором  $\mathbf{p}_1$  с его исходным положением  $\mathbf{p}_0$ . Итак,  $\Delta\varphi$  равно  $\varphi_1 - \varphi_0$  и совпадает с приращением угла  $\varphi$  за время обхода контура. На этом основании можно записать

$$\Delta\varphi = \oint d\varphi, \quad (620)$$

где интеграл взят по контуру, начиная от точки  $M_0$  и кончая этой же точкой (под таким интегралом мы понимаем, конечно, сумму интегралов по дугам, составляющим контур). Под знаком интеграла стоит  $d\varphi$ , т. е. дифференциал угла  $\varphi$ , образованного параллельно переносимым вектором  $\mathbf{p}$  с вектором поля  $\mathbf{a}$ .

Так как векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{p}$  — единичные, то

$$\cos \varphi = \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}.$$

Дифференцируя, получим

$$-\sin \varphi \cdot d\varphi = d(\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}) + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{p}. \quad (621)$$

Вектор  $\mathbf{p}$  параллельно переносится и, следовательно (<§ 86>),

$$d\mathbf{p} \parallel \mathbf{m},$$

а значит,

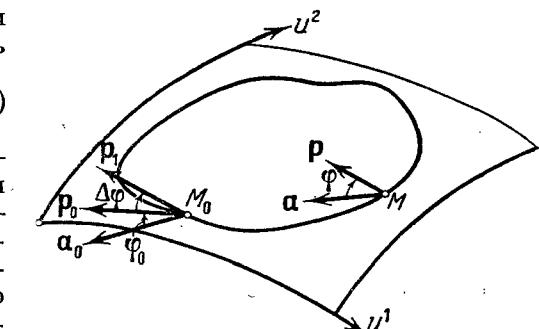
$$\mathbf{a} \cdot d\mathbf{p} = 0,$$

так как  $\mathbf{a}$  направлен по касательной плоскости, а  $\mathbf{p}$  — по нормали.

Теперь (621) принимает вид

$$-\sin \varphi d\varphi = d(\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}). \quad (621')$$

Если брать вместо  $\mathbf{p}$  другие параллельно переносимые по данному пути векторы, то углы  $\varphi$ , образуемые ими с вектором  $\mathbf{a}$ , будут отличаться друг от друга всегда на константу, так как параллельно переносимые векторы образуют между собой постоянные



Черт. 141.

углы. А следовательно,  $d\varphi$  при любом выборе параллельно переносимого вектора будет иметь одно и то же значение.

Обозначим через  $\mathbf{b}$  вектор  $\mathbf{a}$ , повернутый в касательной плоскости на  $+90^\circ$ , так что  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{m}$  образуют в каждой точке поверхности правую тройку ортов. Заменим (на один момент) параллельно переносимый нами вектор  $\mathbf{r}$  другим параллельно переносимым вектором, который в данной точке пути совпадает с вектором  $\mathbf{b}$ . Тогда формула (621'), примененная к новому вектору, дает

$$-d\varphi = d\mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$

так как в данной точке пути для нового вектора  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . А так как  $d\varphi$  не изменяется при переходе к новому параллельно переносимому вектору, то полученная формула справедлива и для прежнего параллельно переносимого вектора  $\mathbf{r}$ . Итак,

$$d\varphi = -\mathbf{b} \cdot d\mathbf{a}. \quad (621'')$$

Теперь (620) можно переписать в виде

$$\Delta\varphi = -\oint \mathbf{b} \cdot d\mathbf{a}.$$

Так как  $d\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 du^1 + \mathbf{a}_2 du^2$ , где  $\mathbf{a}_1 = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u^1}$ ,  $\mathbf{a}_2 = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u^2}$ , то

$$\Delta\varphi = -\oint (\mathbf{a}_1 \mathbf{b} du^1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{b} du^2). \quad (622)$$

Воспользуемся здесь известной формулой для преобразования криволинейного интеграла по замкнутому контуру:

$$\oint (P dx + Q dy) = \iint \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Двойной интеграл справа берется по области, ограниченной контуром. В левой части предполагается, что контур обходится в положительном направлении, т. е. в направлении вращения от положительного направления оси  $X$  к положительному направлению оси  $Y$ . Но в интеграле (622) мы имеем именно такое направление обхода, если считать, что  $u^1$  соответствует  $x$ , а  $u^2$  соответствует  $y$ <sup>1</sup>). Формулу (622) можно переписать теперь в виде

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= -\iint \left\{ \frac{\partial(\mathbf{a}_2 \mathbf{b})}{\partial u^1} - \frac{\partial(\mathbf{a}_1 \mathbf{b})}{\partial u^2} \right\} du^1 du^2 = \\ &= -\iint (\mathbf{a}_2 \mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_2) du^1 du^2, \end{aligned} \quad (623)$$

<sup>1)</sup> Наши рассуждения в части, касающейся направления обхода контура, основаны на наглядных представлениях; можно было бы сделать их вполне строгими путем формального определения положительного направления обхода как такого, когда  $\oint u^1 du^2 > 0$ .

где двойной интеграл взят по области, вырезаемой на поверхности нашим контуром (в фигурной скобке мы выполнили дифференцирование скалярных произведений, причем члены  $\pm \mathbf{a}_{12} \mathbf{b}$  взаимно уничтожились).

При смещении точки по поверхности трехгранник, образованный единичными взаимно ортогональными векторами  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{m}$ , испытывает вращение. Пусть смещение точки происходит по координатной линии  $u^1$ . Обозначим через  $\omega_1$  вектор мгновенной угловой скорости трехгранника, вычисленный по отношению к переменному  $u^1$ . Тогда в точном соответствии с формулами (263) получим

$$\mathbf{a}_1 = [\omega_1, \mathbf{a}], \quad \mathbf{b}_1 = [\omega_1, \mathbf{b}], \quad \mathbf{m}_1 = [\omega_1, \mathbf{m}].$$

Здесь  $\mathbf{a}_1 = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u^1}, \dots$ . Подставим сюда вместо  $\omega_1$  его разложение по ортам  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{m}$ :

$$\omega_1 = \alpha_1 \mathbf{a} + \beta_1 \mathbf{b} + \gamma_1 \mathbf{m},$$

где  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$  — коэффициенты разложения. Получим

$$\mathbf{a}_1 = -\beta_1 \mathbf{m} + \gamma_1 \mathbf{b}, \quad \mathbf{b}_1 = -\gamma_1 \mathbf{a} + \alpha_1 \mathbf{m}, \quad \mathbf{m}_1 = -\alpha_1 \mathbf{b} + \beta_1 \mathbf{a}. \quad (624)$$

Совершенно аналогично смещение по координатным линиям приводит нас к формулам

$$\mathbf{a}_2 = -\beta_2 \mathbf{m} + \gamma_2 \mathbf{b}, \quad \mathbf{b}_2 = -\gamma_2 \mathbf{a} + \alpha_2 \mathbf{m}, \quad \mathbf{m}_2 = -\alpha_2 \mathbf{b} + \beta_2 \mathbf{a}. \quad (624')$$

Из (624) и (624') немедленно следует, что

$$\mathbf{a}_2 \mathbf{b}_1 = -\alpha_1 \beta_2, \quad \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_2 = -\alpha_2 \beta_1,$$

так что

$$\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_1 = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1.$$

Таким образом, (623) принимает вид

$$\Delta\varphi = \iint (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) du^1 du^2. \quad (625)$$

Сошлемся теперь на формулу (455)

$$[\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2] = K [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2].$$

Так как у нас единичная нормаль  $\mathbf{m}$  направлена в сторону  $[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]$ , то

$$[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2] = \mathbf{m} |[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]|$$

и, следовательно,

$$[\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2] = K |[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]| \mathbf{m}.$$

Так как, в силу формулы (347),

$$|[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]| = \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2},$$

то

$$[\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2] = K \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \mathbf{m}.$$

Но, с другой стороны, пользуясь (624) и (624'), без труда получаем

$$[\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2] = -\alpha_1\beta_2 [\mathbf{b}, \mathbf{a}] - \beta_1\alpha_2 [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) \mathbf{m}.$$

Сравнивая две последние формулы, мы видим, что

$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = K \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}. \quad (626)$$

Следовательно, (625) можно переписать в виде

$$\Delta\varphi = \iint K \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du^1 du^2. \quad (627)$$

Можно придать этому результату более отчетливый геометрический смысл, если вспомнить, что, согласно (350), элемент площади  $d\sigma$  имеет вид

$$d\sigma = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du^1 du^2,$$

т. е. после интегрирования этого выражения по области изменения  $u^1, u^2$  получается площадь соответствующей области на поверхности. Тогда (627) можно переписать в окончательном виде

$$\Delta\varphi = \iint K d\sigma. \quad (628)$$

Таким образом, угол поворота вектора, параллельно обнесенного по замкнутому контуру на поверхности, равен интегралу от произведения элемента площади на полную кривизну, распространенному по области, охваченной контуром.

Если  $K=0$ , т. е. поверхность — развертывающаяся, то и  $\Delta\varphi$  равен нулю. И действительно, мы знаем, что развертывающаяся поверхность изгибается на плоскость и имеет одинаковую с ней внутреннюю геометрию; в частности, значит, после параллельного перенесения вектора по любому контуру (охватывающему односвязную область без особых точек в ней) он возвращается в исходную точку с прежним направлением.

Если  $K > 0$ , то  $\Delta\varphi > 0$  — обнесенный вектор повернулся в положительном направлении, т. е. в том самом, в каком мы обходили контур; если же  $K < 0$ , то в обратном.

В случае поверхности постоянной кривизны  $K$  можно вынести из-под знака интеграла, и мы получаем

$$\Delta\varphi = K\sigma, \quad (629)$$

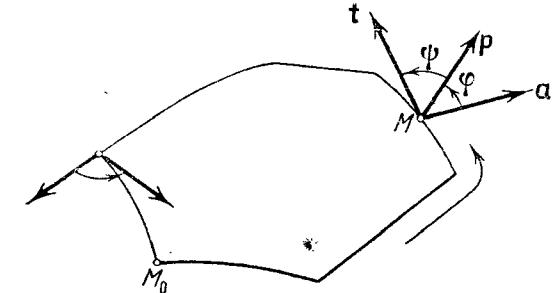
где  $\sigma$  — площадь, охваченная контуром. Итак, угол поворота  $\Delta\varphi$  просто пропорционален площади обхода, причем коэффициентом пропорциональности служит полная кривизна.

Возвращаясь к общему случаю, придадим полученному результату несколько иную форму.

Рассмотрим тот же контур, с тем же полем  $\mathbf{a}$  и параллельно обносимым вектором  $\mathbf{p}$ ; проследим, кроме того, поведение направленного по касательной к контуру вектора  $\mathbf{t}$ . Вектор  $\mathbf{t}$  непрерывно меняет свое направление, за исключением угловых точек (например,  $M_0$  на черт. 142), где он скачком поворачивается на некоторый угол.

Обозначим, как и раньше, через  $\varphi$  угол  $\widehat{\mathbf{a}\mathbf{p}}$  и через  $\psi$  — угол  $\widehat{\mathbf{p}\mathbf{t}}$ . Таким образом,

$$\widehat{\mathbf{a}\mathbf{t}} = \varphi + \psi.$$



Черт. 142.

Проследим изменение всех этих углов при обходе контура. Так как после обхода векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{t}$  возвращаются в свои прежние положения, то угол  $\varphi + \psi$  в процессе обхода может получить приращение только лишь вида  $2\pi k$ , где  $k$  — целое. Мы утверждаем, что в наших предположениях это приращение равно  $2\pi$ . Действительно, будем непрерывно деформировать нашу поверхность так, чтобы она в конце концов превратилась в плоскость, затем непрерывной деформацией контура переведем его в круг и непрерывной деформацией поля  $\mathbf{a}$  переведем его в поле векторов, параллельных между собою. В силу непрерывности деформации приращение угла  $\varphi + \psi$  будет тоже изменяться непрерывно, но так как оно может меняться лишь скачком на  $2\pi$ , то вообще будет оставаться без изменения. Так как для окружности поворот вектора  $\mathbf{t}$  по сравнению с постоянным вектором  $\mathbf{a}$  при обходе в положительном направлении равен  $+2\pi$ , то таким было приращение угла  $\varphi + \psi$  и для исходного контура на поверхности (черт. 142)<sup>1</sup>.

Итак,

$$\Delta(\varphi + \psi) = 2\pi, \quad \Delta\varphi + \Delta\psi = 2\pi. \quad (630)$$

Зайдем теперь приращением  $\Delta\varphi$  угол  $\psi$ . Оно составится из непрерывного изменения  $\psi$  вдоль дуг, составляющих контур, и из скачков в угловых точках. Мы можем, следовательно, записать

$$\Delta\psi = \oint d\psi + \sum_{i=1}^n \Delta_i \psi. \quad (631)$$

<sup>1)</sup> Разумеется, чтобы стать вполне строгим, это место доказательства нуждается в уточнении.

Здесь под интегралом мы понимаем сумму интегралов по  $n$  дугам, составляющим наш  $n$ -угольный контур, а под  $\Delta_i\psi$  — скачок угла  $\psi$  (т. е. поворот вектора  $t$ ) в  $i$ -й угловой точке.

Так как  $\psi = \hat{pt}$ , т. е.  $-\psi = \hat{tp}$ , то совершенно аналогично (621'') получаем

$$d(-\psi) = -u dt,$$

где  $u$  получается из  $t$  поворотом на  $+90^\circ$  в касательной плоскости. Деля обе части равенства на  $ds$  и учитывая, что

$$\frac{dt}{ds} = kn,$$

получим

$$\frac{d\psi}{ds} = u kn.$$

Скалярное произведение в правой части дает нам проекцию вектора кривизны нашего контура на вектор  $u$  и совпадает с геодезической кривизной контура (т. е. с длиной вектора  $\overline{MG}$ , см. черт. 143). Однако в отличие от предыдущего геодезическая кривизна  $k_g$  будет получаться здесь со знаком  $\pm$ , а именно, в зависимости от того, будет ли контур в данной точке отклоняться от своей касательной в сторону вектора  $u$  или  $-u$ . Итак,

$$\frac{d\psi}{ds} = k_g.$$

Вставляя теперь выражения (628) и (631) в формулу (630) и заменяя  $d\psi$  через  $k_g ds$ , получим теорему Гаусса-Бонне

$$\iint K d\sigma + \oint k_g ds + \sum_{i=1}^n \Delta_i \psi = 2\pi. \quad (632)$$

Отметим интересные частные случаи. Во-первых, пусть контур будет гладким (без угловых точек). Тогда формулу можно переписать в виде

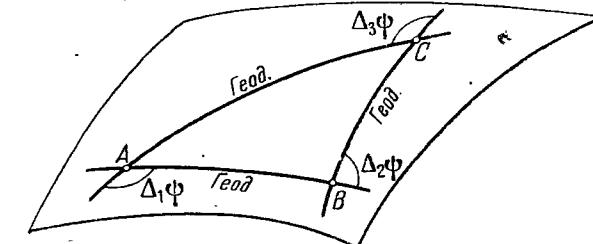
$$\iint K d\sigma + \oint k_g ds = 2\pi. \quad (633)$$

Формула (633) связывает, таким образом, длину контура и геодезическую кривизну вдоль него с охваченной им площадью и полной кривизной на ней.

Во-вторых, пусть контур —  $n$ -угольный и образован дугами геодезических. В этом случае  $k_g = 0$ . Формула (632) принимает вид

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i \psi = 2\pi - \iint K d\sigma. \quad (634)$$

Мы имеем здесь обобщение теоремы планиметрии о сумме внешних углов многоугольника. Роль этих углов играют  $\Delta_i\psi$ , а роль прямолинейных сторон — отрезки геодезических. В случае  $K = 0$ , когда внутренняя геометрия поверхности совпадает с геометрией плоскости, мы получаем эту теорему в точности.



Черт. 143.

Применим (634), в частности, к геодезическому треугольнику ( $n = 3$ ) (черт. 143). Так как каждый из углов  $\Delta_i\psi$  равен  $\pi$  минус соответствующий внутренний угол, то

$$\Delta_1\psi + \Delta_2\psi + \Delta_3\psi = 3\pi - (\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}).$$

Вставляя в (634), получим

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi + \iint K d\sigma. \quad (635)$$

Сумма углов геодезического треугольника равна двум прямым плюс некоторая поправка, положительная в случае  $K > 0$  (избыток) и отрицательная в случае  $K < 0$  (недостаток). В частности, в случае постоянной полной кривизны эта поправка имеет вид

$$K\sigma$$

и пропорциональна площади треугольника  $\sigma$ .

## КРАТКИЕ ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ.

На первоначальных этапах своего развития дифференциальная геометрия почти неотделима от анализа бесконечно малых.

Дифференциальное и интегральное исчисление возникли в XVII веке в связи с потребностями естествознания и техники. Само открытие дифференциального и интегрального исчислений было теснейшим образом связано с механическими и геометрическими представлениями; так, дифференцирование данной функции трактовалось обычно как задача проведения касательной к данной кривой. В XVII и в первой половине XVIII века, одновременно с зарождением и развитием анализа бесконечно малых, делала свои первые шаги и дифференциальная геометрия: за это время была построена в основном теория плоских кривых, однако дифференциальная геометрия в пространстве находилась лишь в зародыше.

Крупный сдвиг в этом направлении (как и вообще почти во всех отделах математики) был произведен работами знаменитого математика Л. Эйлера (1707—1783), члена петербургской Академии наук. В 1760 г. он опубликовал работу, в которой были исследованы кривизны нормальных сечений поверхности в данной точке, были введены главные направления на поверхности и дана формула, носящая и сейчас его имя. Эйлер исследовал также развертывающиеся поверхности; при этом он впервые рассматривал криволинейные координаты на поверхности.

Из большого числа других результатов Эйлера упомянем введение им параметрического представления пространственных кривых (причем за параметр принималась дуга); натуральных уравнений плоских кривых; величин по существу совпадающих с коэффициентами  $E, F, G$  первой квадратичной формы (и установление их инвариантности при изгибаии).

Дальнейший вклад в развитие дифференциальной геометрии в конце XVIII и начале XIX века внесен школой Гаспара Монжа (1746—1818), крупного математика, инженера и деятеля французской буржуазной революции. Между прочим, к этому периоду относятся излагаемые в курсе теорема Менье (§ 50) и формулы Родрига (§ 55).

Несмотря на большое число сложных и тонких построений, которыми дифференциальная геометрия обладала уже в начале XIX века, такие фундаментальные понятия, как кривизна и кручение пространственной кривой были явно сформулированы лишь в 1826 г., а формулы Френе были получены еще значительно позже (1847). Между прочим, эти формулы, как и все формулы дифференциальной геометрии в XIX веке, имели координатную запись; векторное изложение вошло в обиход лишь в XX веке.

Идеи внутренней геометрии поверхности принадлежат Гауссу (1777—1855), который пришел к ним в результате своей практической деятельности в области геодезии. Свои исследования, в том числе и известную теорему об инвариантности полной кривизны  $K$  при изгибаии, он опубликовал в 1827 г.

Большой вклад в развитие дифференциальной геометрии в XIX в. внесли русские геометры.

Выдающийся геометр Ф. Миндинг (1806—1885), профессор университета в Дерпте (Тарту) и член-корреспондент Петербургской Академии наук, рассмотрел геодезическую кривизну кривой на поверхности и показал ее инвариантность при изгибаии.

Далее им были изучены поверхности постоянной полной кривизны  $K = \text{const.}$ ; на них, по существу, была установлена тригонометрия, рассмотрено изгибание поверхностей и те частные случаи, когда они являются в то же время поверхностями вращения.

Московская школа дифференциальной геометрии ведет свое начало от замечательного геометра К. М. Петерсона (1828—1881). Ученик Миндинга К. М. Петерсон получил образование в Дерптском университете, а затем работал преподавателем математики в Москве. Он был одним из основателей Московского математического общества (1867). В области дифференциальной геометрии ему принадлежит ряд крупных результатов, многие из которых были затем несправедливо приписаны иностранным ученым.

Так, условия (546), связывающие коэффициенты первой и второй квадратичных форм и известные под названием формул Майнарди—Кодаци, по существу, впервые были получены К. М. Петерсоном в его неопубликованной диссертации (за 4 года до Майнарди и за 15 лет до Кодаци, придавшего им современную форму). Там же была доказана теорема, приписываемая Бонне, об определении поверхности заданием первой и второй квадратичных форм (за 14 лет до Бонне).

Далее, в 1868 г. К. М. Петерсон опубликовал книгу «О кривых и поверхностях», в которой, между прочим, содержалось решение вопроса об изгибаии минимальных поверхностей и поверхностей переноса. Первый из этих результатов неправильно приписывался Шварцу, а второй — Бианки.

Из разнообразных исследований, принадлежащих К. М. Петерсону, мы отметим еще только одно. А именно, им было введено

понятие об изгибании на главном основании, т. е. о таком (непрерывном) изгибании поверхности, при котором некоторая сеть на поверхности остается все время сопряженной.

Ряд частных случаев изгибания на главном основании был исследован самим К. М. Петерсоном; в дальнейшем же эта тема оказалась весьма плодотворной и вызвала к жизни значительную научную литературу.

Из последующих ученых Московской школы необходимо указать прежде всего Д. Ф. Егорова (1869—1930), весьма разностороннего математика, которому принадлежит, в частности, ряд крупных результатов и в области дифференциальной геометрии. Среди них наибольшее значение имеет его докторская диссертация, посвященная так называемым триортогональным  $E$ -системам.

Большую роль в воспитании новых кадров дифференциальных геометров сыграла блестящая педагогическая деятельность другого геометра Московской школы, Б. К. Младзеевского (1858—1923).

Великая Октябрьская социалистическая революция дала мощный толчок развитию дифференциальной геометрии, как и всех других отраслей науки в нашей стране. Дифференциальная геометрия перестает быть достоянием одиночек; образуются значительные научные школы, втягивающие в свои орбиты многих участников.

К старым московским традициям в области дифференциальной геометрии наиболее близко примыкает направление, возглавляемое С. П. Финиковым. Эта школа в основном попрежнему изучает специальные конструкции в трехмерном пространстве, хотя методы исследования сильно модернизированы (метод внешних форм Картана<sup>1</sup>). В этом направлении получено большое число ценных результатов, прежде всего, самим руководителем школы, которому принадлежит также ряд учебников и монографий.

Примерно в середине двадцатых годов в Советском Союзе появилось и быстро развилось другое дифференциально-геометрическое направление — тензорная дифференциальная геометрия, в основном многомерная. Ее отличительной особенностью является тензорный аппарат, позволяющий закономерно изучать геометрические свойства пространства, независимо от выбора криволинейных координат в нем<sup>2</sup>). Наибольшее значение этот аппарат имеет в случае многомерных пространств, к которым большей частью и применяется. Широкое развитие тензорных методов было вызвано потребностями физики, в первую очередь теории относительности.

<sup>1)</sup> См. С. П. Фиников, Метод внешних форм Картана, Гостехиздат, 1948.

<sup>2)</sup> См. В. Ф. Каган, Основы теории поверхностей в тензорном изложении, Гостехиздат, ч. I, 1947, ч. II, 1948. П. К. Рашевский, Введение в риманову геометрию и тензорный анализ, ОНТИ, 1936.

Основателем и руководителем тензорной дифференциально-геометрической школы в СССР является В. Ф. Каган. Возглавляемый им научно-исследовательский семинар регулярно выпускает свои труды, в которых публикуются работы советских дифференциальных геометров данного направления. Многие из этих работ представляют собой крупные научные достижения. Труды семинара являются единственным в мире изданием с такого рода тематикой.

Наконец, в последние годы оформляется новая, совершенно своеобразная дифференциально-геометрическая школа, возглавляемая А. Д. Александровым. Работы этой школы посвящены дифференциальной геометрии «в целом», т. е., например, изучению свойств поверхности не только в достаточно малых ее кусках, но и всей в целом. В частности, А. Д. Александрову и его ученикам принадлежат крупнейшие результаты по теории выпуклых поверхностей<sup>1</sup>.

Советская дифференциальная геометрия интенсивно и разносторонне развивается и во многих отношениях играет в настоящее время ведущую роль в мире.

<sup>1)</sup> См. А. Д. Александров, Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, Гостехиздат, 1948.

## АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.

Александров А. Д. 425  
 Архимедова спираль 31  
 Асимптота кривой 64, 67  
 —, необходимый и достаточный признак 65  
 —, правило отыскания 66  
 Асимптотическая линия на поверхности 277, 282, 325  
 —, необходимый и достаточный признак 277  
 —, характеристическое свойство 279  
 — сеть на поверхности 278, 279  
 Асимптотическое направление в точке поверхности 241, 265, 276, 340  
 Асимптоты алгебраических кривых 69  
 Астроида 51  
 Бинормаль 166, 194  
 Вектор геодезической кривизны кривой на поверхности 374, 376, 377  
 — кривизны нормального сечения 374  
 — пространственной кривой 177, 374  
 — на поверхности 361, 366  
 —, геометрическое определение 364  
 — нормальной кривизны кривой на поверхности 374  
 Векторное поле на поверхности 363  
 Вектор-функция 73, 74  
 —, геометрическое истолкование 77, 78  
 —, основная 252  
 —, правила перехода к пределу 75  
 —, разложение в ряд Тейлора 89, 91  
 —, техника дифференцирования 77  
 Внутренняя геометрия на сфере 406  
 — на эллиптической плоскости 406  
 — плоскости Лобачевского 407  
 — поверхности 233, 342, 355

Гаусс 423  
 Геодезическая линия на поверхности 379, 381  
 —, необходимые и достаточные признаки 383, 391  
 —, экстремальное свойство 387, 390  
 Геодезические параллели 385, 387  
 Геометрия Лобачевского 407  
 Геометрическое место касательных к кривой 305  
 Гипоциклоиды 50, 102, 138, 148  
 Главная нормаль 166, 194  
 Главные направления в точке поверхности 253, 257, 259, 260  
 — сечения в точке поверхности 256

Градиентное векторное поле на поверхности 363, 365  
 Градиент функции 151  
 Деривационные формулы второй группы 319, 350  
 — первой группы 345, 346, 349  
 —, условия интегрируемости 355, 360  
 Дифференциал вектора абсолютный 367, 368, 372  
 — вектор-функции 86, 87  
 — длины дуги 100  
 Дифференциальная геометрия «в целом» 425  
 Дифференциальный параметр первый 366  
 Дифференцирование вектор-функции, геометрический смысл 82  
 Дифференцируемость вектор-функции 74, 77  
 Длина дуги 96, 98  
 — в полярных координатах 101  
 — касательной 22  
 — нормали 22  
 Егоров Д. Ф. 424  
 Изгибаемость поверхности, необходимый и достаточный признак 396, 397  
 Изгибание поверхности 341, 342, 391, 401  
 — неизменной кривизны 391  
 — постоянной полной кривизны 403  
 Изометрическое соответствие 341  
 Ивариант изгибания 366  
 Индексные обозначения 343  
 Кардиоида 51  
 Касание кривой с поверхностью  $n$ -го порядка 158, 162  
 — — 1-го порядка 159  
 — — — точно  $n$ -го порядка 158, 162  
 — кривых 102, 104  
 —  $n$ -го порядка 106  
 — точно  $n$ -го порядка 106  
 Касательная к кривой 16, 84, 93  
 — к пространственной кривой 153, 194  
 — плоскость к кривой 163  
 — к поверхности 150, 152, 224, 225  
 Катеноид 268, 283  
 Координатная сеть кривых на поверхности 222, 223, 273, 279  
 Координатные линии на поверхности 222  
 Координаты вектора 80  
 — криволинейные на плоскости 221  
 — — на поверхности 219, 220  
 — полугеодезические на поверхности 387

Кривая 12  
 — Бертрана 215  
 — дискриминантная 56, 57  
 — параметрически заданная, строение в окрестности произвольной точки 92  
 — пересечения двух поверхностей 153  
 — плоская в параметрическом представлении 25  
 —, необходимый и достаточный признак 183  
 — пространственная в параметрическом представлении 79  
 — в векторном параметрическом представлении 79  
 — Рибо кура 122  
 — сферическая, необходимый и достаточный признак 202, 203  
 Кривизна в точке плоской кривой 125, 127, 128, 378  
 — — пространственной кривой 174, 176  
 — геодезическая кривой на поверхности 374, 375, 377, 381  
 — кривой на поверхности 239, 240  
 — нормальная кривой на поверхности 374, 375  
 — нормального сечения в точке поверхности 241, 242, 253, 254, 256, 258  
 — полная линейчатой поверхности 323  
 — — поверхности 262, 355, 356, 394  
 — — поверхности, геометрическое истолкование 289, 292  
 — средняя дуги 125, 126  
 Кривизны главные в точке поверхности 256, 257, 261  
 Кручение асимптотических линий 280, 281  
 — геометрический смысл 181, 182  
 — кривой в точке 177, 181, 189  
 Лемниската 35  
 Линейная вектор-функция 245, 246  
 — — симметрическая 246, 247  
 — — —, собственное значение 247  
 — — —, направление 247, 249, 250  
 — — —, собственный вектор 242  
 Линия винтовая 190  
 — горловая 301  
 — —, геометрический смысл 301, 302  
 — —, параметрическое уравнение 301  
 — кривизны на поверхности 333  
 — — —, геометрическое свойство 332  
 — — —, необходимые и достаточные признаки 271, 332  
 — на сфере 334  
 — на центральных поверхностях второго порядка 275  
 — откоса 213, 214  
 — тени 338  
 Лобачевского геометрия 407  
 Минкин Ф. 423  
 Минимальный геликоид 297  
 Младзеевский Б. К. 424  
 Монж Г. 422  
 Направляющая 294  
 Натуральное уравнение плоской кривой 141, 143, 144, 145  
 Натуральные уравнения зеркально-симметрических кривых 213  
 — — плоской кривой 213  
 — — пространственной кривой 204, 209  
 — — —, геометрическая роль 206, 207  
 — — —, основная теорема 207  
 Непрерывность вектор-функции 74, 83  
 Нормаль к кривой 20  
 — к поверхности 152, 225  
 — к пространственной кривой 150  
 Нормальная плоскость к пространственной кривой 150, 153, 166  
 Нормальное сечение поверхности 241, 244  
 Обнесение вектора по замкнутому контуру 413, 418  
 Образующая 294  
 Огибающая семейства кривых 52, 58, 63  
 — — плоскостей 315, 320, 337  
 — — — поверхностью от одного параметра 310, 312—314  
 Огибающий отрезок 53, 56  
 Окружность косая 216  
 Ориентация поверхности 293  
 Ортогональная матрица 211  
 — траектория развертывающейся поверхности 326, 328  
 Основная квадратичная форма на поверхности второго порядка 238, 284, 288, 351  
 — — — первая 227, 228, 229, 233, 284, 288, 343, 394, 397  
 — — — третья 284, 287, 288  
 Ось кривизны пространственной кривой 201, 321  
 Отрезок дискриминантной кривой 56  
 — особых точек 55, 56  
 Параллельное перенесение вектора на поверхность 366, 368—373, 413, 414  
 Параметр распределения линейчатой поверхности 309, 310  
 Петерсон К. М. 423  
 Площадь области на поверхности 229, 231, 233  
 Поверхность в параметрическом представлении 218  
 Поверхность вращения 234, 244, 266, 274, 282, 334, 373, 401, 403, 405  
 — — постоянной кривизны 407  
 — дважды линейчатая 302  
 — дискриминантная 312, 313  
 — изгибающаяся в поверхность вращения 397, 399, 401  
 — каналовая 314  
 —, необходимый и достаточный признак 335  
 — коническая 304  
 — линейчатая 294, 309, 329  
 — — косая 296, 302, 321, 322  
 — —, параметрическое представление 295  
 — минимальная 267  
 — постоянной полной кривизны 391, 406  
 — развертывающаяся 297, 303—306, 316, 326, 328, 330, 370  
 — — как огибающая семейства плоскостей 315, 337  
 — — как поверхность нулевой полной кривизны 324  
 — — необходимые и достаточные признаки 309, 325, 329, 336, 358  
 — центров 333  
 — цилиндрическая 305, 376  
 Подкасательная 21, 30  
 Поднормаль 21, 30  
 Полугеодезическая система координат 385, 394  
 Полос 27  
 Полярная ось 27  
 — подкасательная 30  
 — поднормаль 30  
 Полярный радиус 27  
 — угол 27  
 Предел вектор-функции 73  
 Производная вектор-функции 74, 84

- Простой кусок поверхности 152  
 — отрезок плоской кривой 11  
 — пространственной кривой 81  
 Псевдосфера 24, 413
- Радиус кривизны главный 333  
 — — плоской кривой 118, 127  
 — — пространственной кривой 173, 174  
 — соприкасающейся сферы 201
- Ребро возврата 304  
 — — огибающей семейства плоскостей 316  
 — — развертывающейся поверхности 326, 328
- Семейство геодезических линий на поверхности, дифференциальное уравнение 379, 380  
 — кривых  $n$ -параметрическое 112  
 — — однопараметрическое 51  
 — — нормальных плоскостей 321  
 — спрямляющих плоскостей 321  
 — соприкасающихся плоскостей 320
- Сеть линий кривизны на поверхности 272, 273
- Символы Христоффеля второго рода 349  
 — — первого рода 349
- Синус-спирали 120, 121
- Скорость вращения вектор-функции 88
- Соприкасающаяся окружность 114, 116  
 — 123, 172, 173  
 — плоскость 164—166  
 — сфера 198
- Сопровождающий трехгранник кривой 166
- Сопряженность, геометрическое истолкование 286, 337  
 — двух направлений 287  
 — координатной сети 287
- Сопряженные направления 285, 286  
 — сети на поверхности 337, 338
- Сpirаль архимедова 31  
 — гиперболическая 32, 72  
 — логарифмическая 31
- Спрямляющая плоскость 166  
 — поверхность 321
- Сферическое отображение поверхности 288
- Теорема Бельтрами-Эннепера о кручении асимптотических линий 280  
 — Гаусса-Бонне 420  
 — Диопена 274  
 — Ненигса 337  
 — Менье 243, 244, 423
- Точка возврата второго рода 36, 95  
 — — первого рода 36, 49, 95  
 — обыкновенная 12, 95  
 — — достаточный признак 12, 79, 80  
 — гиперболическая 264  
 — горловая 301, 302  
 — заведомо обыкновенная 14, 82
- Точка закругления (омбилическая точка) 258, 260, 265  
 — основного типа 95  
 — особая 12, 26, 54, 95  
 — — двойная 32, 33, 40  
 — — изолированная 34  
 — — необходимый признак 13  
 — —  $n$ -кратная 33, 37  
 — — тройная 32, 37  
 — параболическая 265  
 — перегибов 18, 19, 95  
 — поверхности заведомо обыкновенная 153  
 — — обыкновенная 152, 153  
 — — распрямления 17, 114, 160  
 — — самопересечения 35  
 — — самоприкоснения 36  
 — — узловая 35  
 — характеристическая семейства кривых 61, 63  
 — эллиптическая 263
- Трактиса 24, 137, 413
- Триортогональная система 274
- Угол между кривыми 20, 228  
 — поворота 29
- Фиников С. П. 424
- Формула Гаусса, геометрический смысл 355, 357—360  
 — геодезической кривизны 377  
 — Эйлера для кривизны произвольного сечения 256
- Формулы Петерсона-Кодаджи 358—360  
 — Родрига 258, 423  

Френе формулы для плоской кривой 132, 133  
 — — для пространственной кривой 176—178, 423  
 — — — кинематический смысл 180

Характеристика 314, 320

Центр кривизны в полярных координатах 120  
 — — в точке плоской кривой 118, 129  
 — — — пространственной кривой 173, 189  
 — соприкасающейся сферы 201

Цепная линия 16, 147, 268, 413

Циклоида 51, 102, 138, 148

Эвольвента 139—141, 326, 328, 330  
 Эволюта 138, 136, 137, 141, 326, 328, 330, 331  
 —, геометрические свойства 134  
 Эволюты плоской кривой 331  
 Эпициклоида 50, 102, 138, 148

Эйлер Л. 422