

Eulersche Winkel

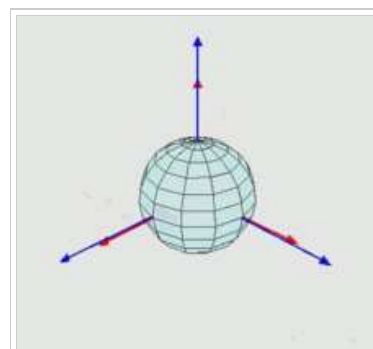
aus Wikipedia, der freien Enzyklopädie

Die **Eulerschen Winkel** (oder **Eulerwinkel**), benannt nach dem Mathematiker Leonhard Euler, sind ein Satz dreier unabhängiger Parameter, mit denen die Orientierung (Drehlage) eines festen Körpers im dreidimensionalen Raum beschrieben werden kann.^[1] Die Drehlage ist aus einer beliebigen anderen durch eine Abfolge dreier Drehungen um spezielle Achsen erzeugt, wobei die Drehwinkel die unabhängigen Parameter sind. Die erste Drehachse ist eine raumfeste, die beiden anderen sind vorher mitgedrehte Achsen.^{[1]:161} Die Drehungen des Körpers (*aktive Drehungen*) stellen eine geometrische Transformation dar.

Im Besonderen dienen eulersche Winkel dazu, um mit ihnen eine Koordinatentransformation durchzuführen. Die in einem kartesischen Koordinatensystem bekannten Koordinaten eines zu einem Körperpunkt führenden Ortsvektors werden in die zu einem anderen kartesischen Koordinatensystem, das zum ersten im Ursprungspunkt verdreht^[Anmerkungen 1] (*passive Drehungen*) ist, gehörenden Koordinaten umgerechnet. Gängige Bezeichnungen der beiden Koordinatensysteme sind raumfestes oder Labor-System und körperfestes oder Körper-System.

Inhaltsverzeichnis

- 1 Drehungen/Transformationen und Drehmatrizen
 - 1.1 Koordinatentransformation (*passive Drehungen*)
 - 1.2 Geometrische Transformation (*aktive Drehungen*)
- 2 Drehfolge-Kombinationen
 - 2.1 Standard-x-Konvention (z, x', z'')
 - 2.2 Standard-y-Konvention (z, y', z'')
 - 2.3 Drehfolgen in der Fahrzeugtechnik
 - 2.3.1 Gier-Nick-Roll: z, y', x''-Konvention
 - 2.3.1.1 Anwendungsbeispiel
 - 2.3.2 Roll-Nick-Gier: x, y', z''-Konvention
- 3 Matrix-Herleitung im allgemeinen Fall
- 4 Ergebnis, Interpretation
- 5 Mathematische Eigenschaften
- 6 Nachteile, Alternativen
- 7 Anwendungen
- 8 Literatur
- 9 Weblinks
- 10 Anmerkungen
- 11 Einzelnachweise



aktive Drehung:

Drehung eines Körpers als Folge von drei einzelnen Drehungen um seine Körperachsen (eigenes Koordinatensystem: **rot**)
festes Referenzsystem: **blau**

Drehungen/Transformationen und Drehmatrizen

Die Transformationen werden mit Hilfe von Drehmatrizen, deren Elemente Sinus- und Cosinus-Werte der Eulerwinkel sind, berechnet.

Koordinatentransformation (*passive Drehungen*)

Die Drehmatrix für die Koordinatentransformation sei M . Die körpereigenen XYZ-Koordinaten eines Ortsvektors zu einem Körperpunkt errechnen sich aus seinen raumfesten xyz-Koordinaten mit folgender Multiplikation.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

Der Vektor (Körper) bleibt am Ort. Das Koordinatensystem wird vordergründig mathematisch positiv gedreht.

Die transponierte Drehmatrix M^T drückt den umgekehrten Vorgang aus:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^T \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad .$$

Der Vektor (Körper) bleibt am Ort. Das Koordinatensystem wird vordergründig zurück gedreht(tatsächlich Übergang von altem zu neuem Koordinatensystem).

Geometrische Transformation (*aktive Drehungen*)

Die transponierte Drehmatrix M^T beschreibt auch die Drehung des Vektors (Körpers, geometrische Transformation).

Dabei bleibt das alte Koordinatensystem am Ort. Der Körper (Vektor) wird zusammen mit dem körpereigenen Koordinatensystem mathematisch negativ gedreht.

Drehfolge-Kombinationen

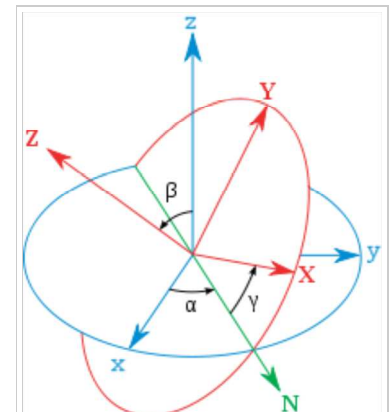
Eulerwinkel werden nicht für Drehungen um raumfeste Achsen, sondern immer für Drehungen um Achsen desjenigen Koordinatensystems angewendet, das schlussendlich das gedrehte System ist.

Es gibt sechs verschiedene Kombinationen für drei aufeinander folgende Drehungen um drei verschiedene Achsen. Sie bilden die Gruppe der sogenannten Tait-Bryan-Drehungen beziehungsweise *Tait-Bryan-Winkel*^{[2]:164} oder auch **Kardanwinkel**.^[3]

Da zwei Achsen bei der Drehung um die dritte Achse ihre Richtung ändern, darf die dritte Drehung wieder um die erste Achse mit neuer Richtung erfolgen. Das ergibt sechs weitere Drehfolgen, die als *klassische oder reine* Drehfolgen mit Eulerwinkeln bezeichnet werden. Von diesen werden die zwei im Folgenden näher vorgestellten vorzugsweise verwendet und als sogenannte *Standard-Konventionen* bezeichnet.

Standard-x-Konvention (z, x', z'')

Zuerst wird mit dem Winkel α um die z -Achse des Koordinatensystems in Ausgangslage gedreht (Kurzzeichen z). Es folgt eine Drehung mit dem Winkel β um die x -Achse in deren Lage nach der ersten Drehung (Kurzzeichen x') und schließlich eine Drehung mit dem Winkel γ um die z -Achse in deren Lage nach den beiden vorherigen Drehungen (Kurzzeichen z'').^[4]



KoordinatenTransformation,
Drehfolge in Standard-
„x-Konvention“
blau: Koordinatensystem in
Ausgangslage
grün: Schnittgerade der xy-Ebenen,
Zwischenlage der x-Achse
rot: Koordinatensystem in Ziellage

$$M_{zxz} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [5][2]:163$$

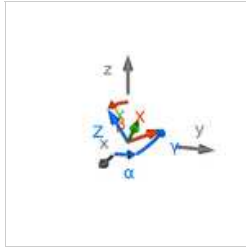
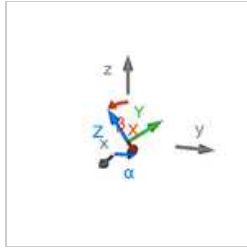
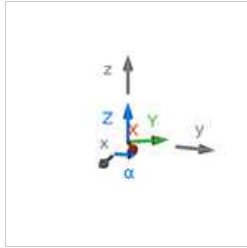
$$M_{zxz} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma & \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \sin \gamma \\ -\cos \alpha \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma & -\sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma & \sin \beta \cos \gamma \\ \sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$$

Die Teilmatrizen beschreiben je eine Drehung um eine Achse.^[Anmerkungen 2]

Die Zeilen von M_{zxz} bestehen aus den im Ausgangssystem xyz angegebenen Koordinaten der drei Einheitsvektoren des Zielsystems XYZ .

Die transponierte Matrix M_{zxx}^T wird durch Vertauschen von Zeilen und Spalten in der Matrix M_{zxx} ermittelt.

$$M_{zxx}^T = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma & -\cos \alpha \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma & -\cos \alpha \sin \beta \\ \sin \beta \sin \gamma & \sin \beta \cos \gamma & \cos \beta \end{pmatrix}$$



α : Drehung um z-Achse β : Drehung um x'-Achse

γ : Drehung um z''-Achse

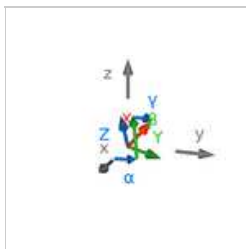
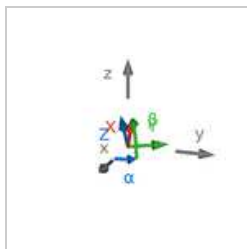
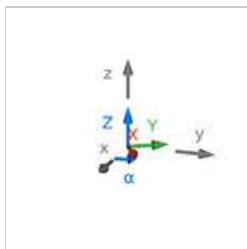
Standard-y-Konvention (z, y', z'')

Zuerst wird um den Winkel γ um die z-Achse des Koordinatensystems in Ausgangslage gedreht (Kurzzeichen z). Es folgt eine Drehung um den Winkel β um die y-Achse in deren Lage nach der ersten Drehung (Kurzzeichen y') und schließlich eine Drehung um den Winkel α um die z-Achse in deren Lage nach den beiden vorherigen Drehungen (Kurzzeichen z'').

$$M_{zyz} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{zyz} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma & \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma & -\sin \beta \cos \gamma \\ -\sin \alpha \cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma & \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \sin \gamma \\ \cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}^{[6][7]}$$

$$M_{zyz}^T = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma & -\sin \alpha \cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta \\ \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma & \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma & \sin \alpha \sin \beta \\ -\sin \beta \cos \gamma & \sin \beta \sin \gamma & \cos \beta \end{pmatrix}$$



α : Drehung um z-Achse β : Drehung um y'-Achse

γ : Drehung um z''-Achse

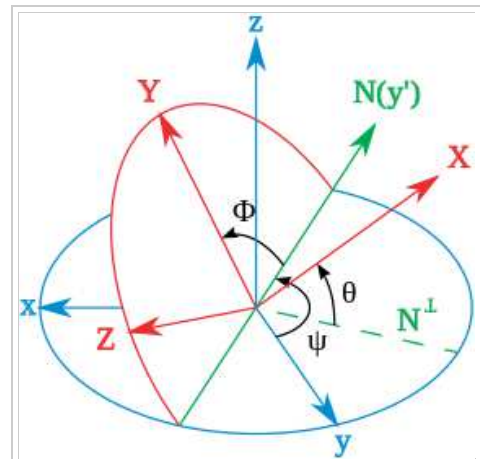
Drehfolgen in der Fahrzeugtechnik

Die in der Fahrzeugtechnik angewendeten und genormten (Luftfahrt: DIN 9300; Automobilbau: DIN 70000 (mittlerweile DIN 8855); Schifffahrt) Drehfolgen gehören in die Gruppe der Tait-Bryan-Drehungen (Drehung um die drei Koordinatenachsen). In den Normen sind die Verwendung der Formelzeichen Ψ , Θ und Φ und die Namen Gier-, Nick- und Roll-Winkel (engl. *yaw*, *pitch* and *roll angle*) für die drei Eulerwinkel vorgeschrieben.^[Anmerkungen 3] Durch die drei Drehungen wird das erdfeste System (engl. *world frame*) xyz in das körperfeste Koordinatensystem (engl. *body frame*) XYZ oder umgekehrt gedreht.

Gier-Nick-Roll: z, y', x''-Konvention

Die Drehfolge ist:

- Mit dem im erdfesten System gemessenen Gierwinkel Ψ (auch Steuerkurs oder Azimut genannt) wird um die z -Achse gedreht. Die y -Achse wird zur Knotenachse $N(y')$.
Hauptwertebereich: $-\pi < \Psi \leq \pi$
- Mit dem gegen die Erdoberfläche (x - y -Ebene) gemessenen Nickwinkel Θ wird um die Knotenachse $N(y')$ gedreht. Es entsteht die fahrzeugfeste X -Achse.
Hauptwertebereich: $-\frac{\pi}{2} \leq \Theta \leq \frac{\pi}{2}$
- Der Rollwinkel Φ (auch Wankwinkel genannt) beschreibt die Drehung um die fahrzeugfeste X -Achse. Es entstehen die fahrzeugfesten Achsen Y und Z .
Hauptwertebereich: $-\pi < \Phi \leq \pi$



Koordinatentransformation in der Flugtechnik, Drehfolge z, y', x'' (Gier-Nick-Roll)

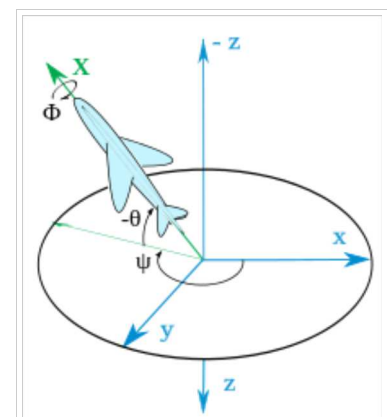
blau: raumfestes Koordinatensystem

(Ausgangslage)

grün: Zwischenlage der y -Achse (Knotenachse $N(y')$)

rot: körperfestes Koordinatensystem (Ziellage)

Anmerkung: z -Achse zeigt in Praxis der Flugtechnik nach unten zur Erde (s. nächstes Bild)

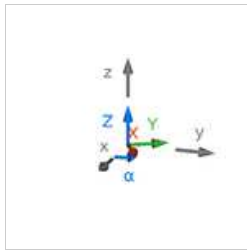


Gier-, Nick- und Rollwinkel (Ψ, Θ, Φ) als Lagewinkel eines Flugzeugs

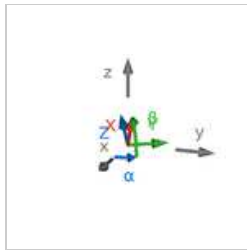
Gier- und Nickwinkel gegenüber erdfestem System, Rollwinkel gegenüber Flugzeug-Längsachse

$$M_{GNR} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi & \sin \Phi \\ 0 & -\sin \Phi & \cos \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Theta & 0 & -\sin \Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Psi & \sin \Psi & 0 \\ -\sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

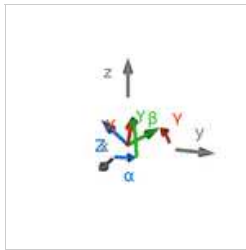
$$M_{GNR} = \begin{pmatrix} \cos \Theta \cos \Psi & \cos \Theta \sin \Psi & -\sin \Theta \\ \sin \Phi \sin \Theta \cos \Psi - \cos \Phi \sin \Psi & \sin \Phi \sin \Theta \sin \Psi + \cos \Phi \cos \Psi & \sin \Phi \cos \Theta \\ \cos \Phi \sin \Theta \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Psi & \cos \Phi \sin \Theta \sin \Psi - \sin \Phi \cos \Psi & \cos \Phi \cos \Theta \end{pmatrix}$$



Ψ : Drehung um
z-Achse



Θ : Drehung um
 y' -Achse



Φ : Drehung um
 x'' -Achse

Anwendungsbeispiel

Der Gewichtsvektor G_E hat im erdfesten Koordinatensystem xyz nur eine z -Komponente (in Richtung Erdmittelpunkt):

$$G_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix}$$

Die Transformation ins flugzeugfeste Koordinatensystem geschieht dann durch **Linksmultiplikation** des erdfesten Gewichtsvektors G_E mit der Transformationsmatrix M_{GNR} :

$$\begin{aligned} G_F &= M_{GNR} G_E \\ &= \begin{pmatrix} \cos \Theta \cos \Psi & \cos \Theta \sin \Psi & -\sin \Theta \\ \sin \Phi \sin \Theta \cos \Psi - \cos \Phi \sin \Psi & \sin \Phi \sin \Theta \sin \Psi + \cos \Phi \cos \Psi & \sin \Phi \cos \Theta \\ \cos \Phi \sin \Theta \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Psi & \cos \Phi \sin \Theta \sin \Psi - \sin \Phi \cos \Psi & \cos \Phi \cos \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dots & \dots & -\sin \Theta \\ \dots & \dots & \sin \Phi \cos \Theta \\ \dots & \dots & \cos \Phi \cos \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin \Theta \\ \sin \Phi \cos \Theta \\ \cos \Phi \cos \Theta \end{pmatrix} mg \end{aligned}$$

Physikalisch richtig wirkt das Gewicht G_E bei vorhandenem Nickwinkel Θ im Flugzeug beispielsweise auch nach hinten (in negative X -Richtung).

Roll-Nick-Gier: x, y', z'' -Konvention

Mit Hilfe der transponierten Drehmatrix $M_{GNR}^T = M_{RNG}$ können die im Flugzeug gemessenen, auf das bordeigene Koordinatensystem bezogenen vektoriellen Größen (z. B. Beschleunigungen) in ein erdfestes Koordinatensystem umgerechnet werden.

$$M_{GNR}^T = M_{RNG} = \begin{pmatrix} \cos \Theta \cos \Psi & \sin \Phi \sin \Theta \cos \Psi - \cos \Phi \sin \Psi & \cos \Phi \sin \Theta \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Psi \\ \cos \Theta \sin \Psi & \sin \Phi \sin \Theta \sin \Psi + \cos \Phi \cos \Psi & \cos \Phi \sin \Theta \sin \Psi - \sin \Phi \cos \Psi \\ -\sin \Theta & \sin \Phi \cos \Theta & \cos \Phi \cos \Theta \end{pmatrix}$$

Matrix-Herleitung im allgemeinen Fall

Für eine beliebige Wahl der Drehachsenreihenfolge kann die sich ergebende Drehmatrix durch die Zuhilfenahme des folgenden Zusammenhangs einfach hergeleitet werden:^[8]

Die Drehmatrizen um die globalen Achsen sind bekannt. Wenn nun um eine bereits gedrehte Achse erneut gedreht werden soll, dann entspricht das der Drehmatrix um die entsprechende globale Achse, allerdings in einer transformierten Vektorbasis. Die Transformationsmatrix (Basiswechselmatrix) ist dabei gerade die vorhergehende Drehung.

Seien A und B zwei Drehmatrizen um die beiden globalen Achsen G und H . Zur Berechnung der Drehmatrix zu der Reihenfolge (G, H') beobachtet man, dass die Drehmatrix für die zweite Drehung um H der basistransformierten Matrix $\tilde{B} = ABA^{-1}$ entsprechen muss. Dadurch erhält man für die resultierende Gesamtdrehmatrix $C = \tilde{B}A = ABA^{-1}A = AB$. Für eine größere

Anzahl von Drehungen erfolgt der Nachweis analog.

Durch diese Darstellung ergibt sich, dass sich die Drehmatrix für eine beliebige Drehreihenfolge in nacheinander gedrehten Achsen durch die einfache Multiplikation von Drehmatrizen um globale Koordinatenachsen ergibt – allerdings in umgekehrter Reihenfolge.

Ergebnis, Interpretation

Das erhaltene Koordinatensystem mit den Achsen X'' , Y'' und Z'' ist das sogenannte körperfeste System. Die Winkel ϕ und θ geben dabei die Lage der Z'' -Achse gegenüber dem körperfesten System an („Drehung“ und „Kippung“); der Winkel ψ beschreibt die Eigendrehung des Körpers um sie. Dem entsprechen folgende Namenskonventionen:

- Flugsteuerung (Rollwinkel, Nickwinkel, Gierwinkel)
- Kreiseltheorie: *Präzession*, *Nutation* und *Spin* oder *Eigenrotation*
- *Azimet*, *Höhenwinkel* oder *Elevation* und *Rotation*

Mathematische Eigenschaften

Die Abbildung, die den Euler-Winkeln die zugehörige Drehmatrix zuordnet, besitzt kritische Punkte, in denen diese Zuordnung nicht lokal umkehrbar ist und man von einer kardanischen Blockade (englisch *gimbal lock*) spricht. Im Fall der og. x- oder y-Konvention tritt dieser stets dann auf, wenn der zweite Rotationswinkel gleich null wird und der Drehvektor der ersten Drehung damit derselbe ist wie der Drehvektor der zweiten Drehung. Das aber bedeutet, dass es für eine Rotation um die z -Achse beliebig viele Eulerwinkel mit $\alpha = Z + Z'$ gibt.

Bei der Definition der Lagewinkel nach der Luftfahrtnorm liegen die kritischen Punkte bei $\Theta = \pm \frac{\pi}{2}$.

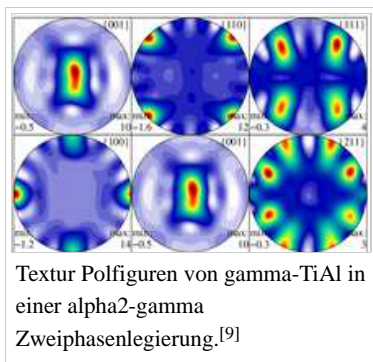
Nachteile, Alternativen

Zur Darstellung von Drehungen haben Eulerwinkel mehrere Nachteile:

- Die oben erwähnte Singularität führt dazu, dass eine einzige Drehung durch unterschiedliche Eulerdrehungen ausgedrückt werden kann. Dies führt zu einem Phänomen, das als Gimbal Lock bekannt ist.
- Die korrekte Kombination von Drehungen im Euler-System ist nicht intuitiv anzugeben, da sich die Drehachsen verändern.

Eine andere Möglichkeit, die Orientierung zu beschreiben und teils diese Nachteile zu umgehen, sind Quaternionen.

Anwendungen



In der Theoretischen Physik werden die eulerschen Winkel zur Beschreibung des Starren Körpers benutzt. Eine praktische Anwendung ergibt die bekannte kardanische Aufhängung^[10] der technischen Mechanik.

Bei Fahrzeugen bezeichnet man die Eulerwinkel der Hauptlagen als Roll-Nick-Gier-Winkel

In der Kristallographie werden die eulerschen Winkel zur Beschreibung der Kreise des Einkristalldiffraktometers und zur

Beschreibung der Orientierungsdichteverteilungsfunktion von Texturen verwendet.

In der Astronomie sind die eulerschen Winkel unter anderen Bezeichnungen als *Bahnelement* eines Objekts geläufig.

In der Computergrafik werden die eulerschen Winkel zur Beschreibung der Orientierung eines Objektes verwendet.

In der Festkörper-NMR werden die eulerschen Winkel zur theoretischen Beschreibung und zur Simulation von Spektren benutzt.

Literatur

- Georg Rill, Thomas Schaeffer: *Grundlagen und Methodik der Mehrkörpersimulation*. (http://homepages.fh-regensburg.de/~rig39165/skripte/MKD_Lehrbuch_Kapitel_1_und_2.pdf) (PDF; 448 kB) Vieweg + Teubner, Wiesbaden 2010, ISBN 978-3-8348-0888-2.

Roll-Nick-Gier-Winkel (Eulerwinkel)	
Rotationsachsen:	Bewegung:
✓ Längsachse (Roll-/Wankachse):	Rollen, Wanken
↖ Querachse (Nickachse):	Nicken, Stampfen
↓ Vertikalachse (Gierachse):	Gieren (Schlingern)

Weblinks

Commons: Euler angles (https://commons.wikimedia.org/wiki/Euler_angles?uselang=de) – Album mit Bildern, Videos und Audiodateien

Wikibooks: Die Mechanik starrer Körper, Die eulerschen Winkel – Lern- und Lehrmaterialien

- Eric W. Weisstein: *Euler Angles* (<http://mathworld.wolfram.com/EulerAngles.html>). In: *MathWorld* (englisch).

Anmerkungen

- Im Folgenden werden die allgemein verwendeten Begriffe *gedreht* bzw. *Drehung* und *Drehen* verwendet, obwohl es sich genauer immer um *Verdrehungen* zwischen zwei Drehlagen handelt.
- Die Drehmatrizen um je eine kartesische Koordinatenachse lassen sich durch zyklisches Vertauschen auseinander herleiten.
- Gier-, Nick- und Roll-Winkel werden in der Regel für Drehungen um raumfeste Achsen angewendet. Beim Gebrauch als Eulerwinkel wird davon abgewichen: Mindestens der Rollwinkel gibt eine Drehung um eine Körperachse an.

Einzelnachweise

- Herbert Goldstein, Charles P. Poole Jr., John L. Safko: *Klassische Mechanik*. 3., vollständig und erweiterte Auflage. WILEY-VCH, 2006, ISBN 3-527-40589-5, S. 161 ff (eingeschränkte Vorschau (<https://books.google.de/books?id=bbsCZN1U17cC&pg=PA161#v=onepage>) in der Google-Buchsuche).: „Wir können die Transformation von einem kartesischen Koordinatensystem auf ein anderes mittels dreier aufeinander folgender Drehungen durchführen, die in einer bestimmten Reihenfolge erfolgen müssen.“
- Herbert Goldstein u. A.: *Klassische Mechanik*. WILEY-VCH-Verlag, Weinheim 2006, S. 164, ISBN 3-527-40589-5, Google Books (<http://books.google.ch/books?id=bbsCZN1U17cC&pg=PA164&lpg=PA164&dq=eulerwinkel+Tait+Bryan&source=bl&ots=zae95ezL&sig=36oinVdVhZG2XyiMTIE8IImlegY&>)
- Martin Meywerk: *CAE-Methoden in der Fahrzeugtechnik*. Springer Science & Business Media, 19. Februar 2007, ISBN 978-3-540-49866-7, S. 85 (online (<http://books.google.com/books?id=qYB8KJb-BDAC&pg=PA85>)).
- Georg Rill, Thomas Schaeffer: *Grundlagen und Methodik der Mehrkörpersimulation*. (https://hps.hs-regensburg.de/~rig39165/skripte/MKD_Lehrbuch_Kapitel_1_und_2.pdf) (PDF; 459 kB) Vorabdruck des gleichnamigen Vieweg+Teubner Lehrbuchs. Nur zum persönlichen Gebrauch. SS 2010, S. 8
- Euler Angles*. (<http://mathworld.wolfram.com/EulerAngles.html>) mathworld.wolfram.com, Gleichungen (3) bis (14)
- Euler Angles*. (<http://mathworld.wolfram.com/EulerAngles.html>) mathworld.wolfram.com, Gleichungen (39) bis (47)
- Herbert Goldstein u. A.: *Klassische Mechanik*, WILEY-VCH-Verlag, Weinheim 2006, ISBN 3-527-40589-5, S. 652, Google Books (<http://books.google.ch/books?id=bbsCZN1U17cC&pg=PA161&lpg=PA164&dq=eulerwinkel+Tait+Bryan&source=bl&ots=zae95ezL&sig=36oinVdVhZG2XyiMTIE8IImlegY&>)
- Ein ausführlicher Beweis findet sich in: G. Fischer: *Lernbuch Lineare Algebra und Analytische Geometrie*. 2. Auflage 2012, in 5.3.6
- Liss KD, Bartels A, Schreyer A, Clemens H: *High energy X-rays: A tool for advanced bulk investigations in materials science and physics*. In: *Textures Microstruct.*. 35, Nr. 3/4, 2003, S. 219–52. doi:10.1080/07303300310001634952 (<https://dx.doi.org/10.1080%2F07303300310001634952>).
- Der Zusammenhang zwischen den eulerschen Winkeln und der kardanischen Aufhängung ist u. a. in Kapitel 11.7 des folgenden Buches dargestellt: U. Krey, A. Owen: *Basic Theoretical Physics – A Concise Overview*. Springer-Verlag, Berlin 2007.

Von „https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Eulersche_Winkel&oldid=148904377“

Kategorien: Analytische Geometrie | Kristallographie | Klassische Mechanik | Winkel

- Diese Seite wurde zuletzt am 9. Dezember 2015 um 17:09 Uhr geändert.
- Abrufstatistik

Der Text ist unter der Lizenz „Creative Commons Attribution/Share Alike“ verfügbar; Informationen zu den Urhebern und zum Lizenzstatus eingebundener Mediendateien (etwa Bilder oder Videos) können im Regelfall durch Anklicken dieser abgerufen werden. Möglicherweise unterliegen die Inhalte jeweils zusätzlichen Bedingungen. Durch die Nutzung dieser Website erklären Sie sich mit den Nutzungsbedingungen und der Datenschutzrichtlinie einverstanden.

Wikipedia® ist eine eingetragene Marke der Wikimedia Foundation Inc.