

Дополнительное задание: численные методы решения уравнений в частных производных

Требуется решить начально-краевую (примеры 1,2) или краевую (пример 3) задачи с использованием любой конечно-разностной схемы. Результат решения сравнить с аналитическим решением.

За решение каждого примера будет начислено 5 баллов.

Пример 1. Уравнение параболического типа

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, a > 0 \\ u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = \sin(2\pi x) \end{cases}$$

Аналитическое решение: $u(x, t) = \exp(-4\pi^2 at) \sin(2\pi x)$.

Пример 2. Уравнение гиперболического типа

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, a^2 > 0 \\ u(0, t) = -\sin(at) \\ u(\pi, t) = \sin(at) \\ u(x, 0) = \sin(x) \\ u_t(x, 0) = -a \cos(x) \end{cases}$$

Аналитическое решение: $u(x, t) = \sin(x - at)$.

Пример 3. Уравнение эллиптического типа

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(0, y) = y \\ u(1, y) = 1 + y \\ u(x, 0) = x \\ u(x, 1) = 1 + x \end{cases}$$

Аналитическое решение: $u(x, t) = x + y$.