第3章 复变函数的积分

3.1 复积分的定义与性质

1 复积分定义

设有向曲线 $C: z=z(t)$ $(\alpha\leq t\leq\beta)$ 以 $a=z(\alpha)$ 与 $b=z(\beta)$ 为起终点

$f(z)$ 在 C 上有定义。把曲线任意分割成 n 个子弧段，分点 $a=z_0, z_1, \cdots, z_n=b$

再在每个子弧段 $C_k=\widehat{z_{k-1}z_k}$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 上任取一点 ζ_k，作和式 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$

其中 $\Delta_k = z_k - z_{k-1}$。

如果记 ΔS_k 是子弧段 C_k 的长度，令 $\delta=\max\limits_{1\leq k\leq n}\Delta S_k$，当分点无限增多 $(n\to\infty)$ 而 $\delta\to 0$ 时，S_n

趋于极限 S，则称函数 $f(z)$ 沿曲线 C 可积。极限 S 称为函数 $f(z)$ 沿曲线 C（自 a 至 b）

的积分，记作 $\int_C f(z)\,dz$（C为闭曲线时也表示为 $\oint_C f(z)\,dz$）

2 复积分基本定理

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在曲线 C 上连续，则

$\int_C f(z)\,dz = \int_C u\,dx - v\,dy + i\int_C v\,dx + u\,dy$ （第二类曲线积分）

定理 若 $C: z(t)=x(t)+iy(t)$，$z'(t)=x'(t)+iy'(t)$

则 $\int_C f(z)\,dz=\int_\alpha^\beta f[z(t)]\,z'(t)\,dt$

3 复积分的性质

① 线性 $\int_C [k_1 f(z)+k_2 g(z)]\,dz = k_1\int_C f(z)\,dz + k_2\int_C g(z)\,dz$

② 区间可加 $\int_{C_1+C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz$

③ 反向 $\int_{C^-} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz$

④ 不等式 $\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leq \int_C |f(z)|\,ds \leq M\ell$

3.2 柯西积分定理

1 定理

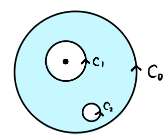
设函数 $f(z)$ 在封闭曲线 C 上及其所包围的单连通区域 D 内解析，则

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

2 推论

① $f(z)$ 在 D 内任意分段光滑曲线 C 上的积分与路径无关

② $f(z)$ 在多连通区域 D 及其边界 C 上解析 $\Rightarrow \int_C f(z)\,dz = 0$



不止1条

此时 $C = C_0 + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-$

$$\Rightarrow \oint_{C_0} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\,dz$$

3.3 原函数定理

1 定义

① 积分上限函数 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$

② 原函数 $G'(z) = f(z)$

2 定理

设函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，则 $F(z)$ 在 D 内也解析，且 $F'(z) = f(z)$

3 推论

① $f(z)$ 的任意原函数 $G(z)$ 在 D 内都可以写成 $G(z) = F(z) + C$

② 若 $G(z)$ 为 $f(z)$ 在单连通区域内的任一原函数，则

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = G(z_1) - G(z_0)$$

3.4 常用积分

1 柯西积分公式

$f(z)$ 在有界闭区域 $\bar{D} = D + C$ 上解析，$z_0 \in D$，则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

推论：C是圆周 $z = z_0 + Re^{i\theta}$ 时

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta$$

2 高阶柯西公式

设函数 $f(z)$ 在闭区域 $\bar{D}$ 上解析，则 $f(z)$ 在D内的任意阶导数存在，且

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

总结：积分计算方法

曲线段积分 $\begin{cases} \text{参数化法 （不解析）} \\ \text{原函数定理 （解析）} \end{cases}$

闭合曲线积分　各种换路，用公式

（肯定有奇点 → 求留数就行了）