第 9 讲　区间估计与假设检验

知识梳理

一　枢轴量与抽样分布的上α分位数

1. 常用正态总体枢轴量

分布名称	待估参数	条件	枢轴量
单个正态总体	μ	σ^2 已知	$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$
	μ	σ^2 未知	$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$
	σ^2	——	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$
两个正态总体	$\mu_1-\mu_2$	σ^2 已知	$\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}} \sim N(0,1)$
	$\mu_1-\mu_2$	σ^2 未知	$\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}} \sim t(n_1+n_2-2)$
	σ_1^2/σ_2^2	σ^2 已知	$\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1,n_2-1)$

- 注：$S_w=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$

2. 上 α 分位数

- 设 Y 遵从某种分布（标准正态分布、t 分布、χ^2 分布、F 分布中的一种）
  若存在实数 a 使得 $P(Y>a)=\alpha$，则称 a 为该分布的上 α 分位数

分布	分位数符号	性质
$N(0,1)$	z_α	$z_{1-\alpha}=-z_\alpha$
$\chi^2(n)$	$\chi^2_\alpha(n)$	——
$t(n)$	$t_\alpha(n)$	$t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n)$
$F(n_1,n_2)$	$F_\alpha(n_1,n_2)$	$F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=\dfrac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$

- 相当于分布函数的反函数，已知概率反求取值

二　区间估计与参数假设检验的基本原理

1. 区间估计的基本原理

· 以估计 σ^2 未知下的 μ 为例

由于简单随机样本 $X_1,\cdots,X_n$ 的样本均值 $\overline{X}$ 和样本方差 S^2 都是随机变量

→ 枢轴量 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ 也是一个一元连续型随机变量，且满足 $t(n)$ 分布

→ $t(n)$ 分布函数完全已知，可以计算 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ 落入某个区间 (a,b) 的概率

→ 现在我们选择一个区间 (a,b)，使得 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ 落入 (a,b) 的概率为 95%， a 和 b 是完全确定的

→ 则有 $P(a<\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<b)=95\%$，变换内部的不等式得到 $P(\overline{X}-\dfrac{\sqrt{n}}{S}b<\mu<\overline{X}-\dfrac{\sqrt{n}}{S}a)=95\%$

也就是说，当我们随机取样获得样本统计值时，待估参数 μ 落在上述区间的概率为 95%

由于区间可以任意选择，因此我们通常会选择区间长度最短的 (a,b)

2. 参数假设检验的基本原理

· 以检验 σ^2 未知下的 μ 为例

原假设的 μ 已知的前提下，我们可以直接计算 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ 落入某个区间 (a,b) 的概率

比如通过计算，可以找到一个区间 (a,b)， $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ 落在区间 (a,b) 外的概率为 5%

显然这个概率非常小，如果我们取样统计，发现这个小概率事件发生了，那么我们就拒绝原假设

因此只要 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ 落在区间 (a,b) 外就拒绝原假设，这个外区间就是拒绝域

· $P\_$ 值的解释

原假设的 μ 已知的前提下，我们可以直接计算 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ 落入某个区间 (a,b) 的概率

现在我们取样统计，得到了一个枢轴量 T，这个 T 可能比较偏僻

按照原假设的分布，我们可以计算出枢轴量取值比现在这个 T 更偏僻更极端的概率

如果这个概率非常小（如小于规定的 5%），那我们也认为这次抽样属于小概率事件发生了

因此拒绝原假设

题型解析

十七　求待估参数的置信区间

1. 题型简述与解法

- 以填空题或大题的形式，求出某正态总体的待估参数的置信区间
- 按照如下步骤进行（考试直接写出置信区间的表达式即可，不用写推导过程）：

① **确定区间估计类型**（如 σ^2 未知求 μ），在下表中**选择对应的枢轴量** $G(\theta)$

这个 $G(\theta)$ 应当含有待估参数 θ，且不能含有其他未知参数

分布名称	待估参数	条件	枢轴量
单个正态总体	μ	σ^2 已知	$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$
	μ	σ^2 未知	$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$
	σ^2	——	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$
两个正态总体	$\mu_1-\mu_2$	σ^2 已知	$\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}} \sim N(0,1)$
	$\mu_1-\mu_2$	σ^2 未知	$\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}} \sim t(n_1+n_2-2)$
	σ_1^2/σ_2^2	σ^2 已知	$\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1,n_2-1)$

② **确认置信区间的类型**，写出对应的置信区间（此处用 $g_\alpha(n)$ 代表分位数）

检验类型	置信区间原始式
双侧置信区间	$\boxed{g_{1-\alpha/2}(n)<G(\theta)<g_{\alpha/2}(n)}$
单侧置信上限	$\boxed{G(\theta)>g_{1-\alpha}(n)}$
单侧置信下限	$\boxed{G(\theta)<g_\alpha(n)}$

③ **对 P 内部的不等式进行变换**，将待估参数 θ 分离出来，得到置信区间表达式

④ **将统计值、n、g_α 或 $g_{1-\alpha}$ 代入**，就得到置信区间或单侧置信上下限

- 这种方法只需记住枢轴量以及置信区间类型对应的不等式形式，无需记忆大量的置信区间

2. 历年考试典型例题

例 1　设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,\cdots,X_n$ 为来自 X 的简单随机样本，设样本均值为 $\overline{x}$，样本标准差为 s，置信水平为 95%

（1）（**15—16 春夏**）若 $n=16$，$\overline{x}=5.098$，$s=1.200$，则 σ^2 的单侧置信上限为______________；

（2）（**15—16 秋冬**）若 $n=9$，$\overline{x}=2.15$，$s=0.9$，则 σ^2 的双侧置信区间为________________；

（3）（17－18 秋冬）若 $n=9$，$\overline{x}=1.8$，$\sum_{i=1}^{16}(x_i-\overline{x})^2=30.6$，则 μ 的置信区间为________。

解　（1）（2）　判断类型：求 σ^2，因此选择枢轴量 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

（1）　· 判断区间类型：单侧置信上限，选择 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}>\chi^2_{1-\alpha}(n)$

· 变换：$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}>\chi^2_{1-\alpha}(n)\Rightarrow\sigma^2<\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n)}$

· 代入数据，得单侧置信上限为 $\frac{15s^2}{\chi^2_{0.95}(16)}=2.975$

（2）　· 判断区间类型：双侧置信区间，选择 $\chi^2_{1-\alpha/2}(n)<\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\alpha/2}(n)$

· 变换：$\chi^2_{1-\alpha/2}(n)<\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\chi^2_{1-\alpha/2}(n)\Rightarrow\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}<\sigma^2<\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}$

· 代入数据，得置信区间为 $\left(\frac{8\times0.9^2}{17.5},\frac{8\times0.9^2}{2.18}\right)=(0.37,2.97)$

（3）　判断类型：σ^2 未知，求 μ，选择枢轴量 $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

· 判断区间类型：双侧置信区间，选择 $t_{1-\alpha/2}(n-1)<\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<t_{\alpha/2}(n-1)$

· 变换：$\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)<\mu<\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1)$

· 代入数据，得单侧置信上限为 $(1.8-\frac{\sqrt{30.6}}{16}\times2.13,1.8+\frac{\sqrt{30.6}}{16}\times2.13)$，即 $(1.04,2.56)$

例 2　（18－19 秋冬）为验证某汽车厂生产的汽车平均每公升汽油行驶里程是否达到 15km 以上，随机选取 16 辆车，记录下每辆车每公升汽油行驶的千米数，得到样本均值 $\overline{x}=14.22$，样本方差 $s^2=1.2^2$，假设数据来自正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$。

（2）现有另一汽车厂生产的同类型汽车，其每公升汽油行驶的千米数 $Y\sim N(\mu_Y,\sigma^2)$，随机选取该类型汽车 11 辆车，测得样本均值 $\overline{y}=14.97$，样本方差 $s_y^2=1.4^2$，求 $\mu-\mu_Y$ 的置信度为 95%的双侧置信区间。（保留两位小数）

解　· 判断类型：$\mu_1-\mu_2$（σ^2 均未知），因此选择 $\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}}\sim t(n_1+n_2-2)$

· 判断区间类型：双侧置信区间，选择 $t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)<\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}}<t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$

· 变换：$\left|\mu-\mu_Y-(\overline{X}-\overline{Y})\right|<+S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$

· 代入数据，解得置信区间为 $(-1.79,0.29)$

十八　求拒绝域并检验假设

1.题型简述与解法

· 实际上考试从来没有求过拒绝域，检验假设通常都会要求计算 $P\_$ 值， $P\_$ 值都算出来了谁还算拒绝域啊！

① **根据要检验的参数，选择对应的检验统计量 G**（下表以双边检验为例）

分布名称	原假设	条件	检验统计量
单个正态总体	$\mu=\mu_0$	σ^2 已知	$Z=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$
	$\mu=\mu_0$	σ^2 未知	$T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$
	$\sigma^2=\sigma_0^2$	——	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$
两个正态总体	$\mu_1=\mu_2$	σ^2 已知	$\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\sim N(0,1)$
	$\mu_1=\mu_2$	σ^2 未知	$\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}}\sim t(n_1+n_2-2)$
	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	σ^2 已知	$\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$

② **根据检验类型，选取对应的拒绝域公式并计算**

检验类型	条件	拒绝域
左侧检验	$H_0:\ \theta\geq\theta_0$	$W=\{G_0<g_{1-\alpha}\}$
右侧检验	$H_0:\ \theta\leq\theta_0$	$W=\{G_0>g_\alpha\}$
双侧检验	$H_0:\ \theta=\theta_0$	$W=\{\lvert G_0\rvert>g_{\alpha/2}\}$（$\mu$ 相关） $W=\{G_0<g_{1-\alpha/2}\cup G_0>g_{\alpha/2}\}$（$\sigma^2$ 相关）

③ **计算枢轴量 G_0，如果落在了拒绝域内，就拒绝原假设**

2.历年考试典型例题

例 1　（19−20 春夏）为了解某县粮食产量情况，随机调查该县 64 个乡当年的粮食产量，得到样本均值为 1120 吨，样本方差 108900，设乡粮食产量（单位：吨） $X\sim N(\mu,\sigma^2)$， μ,σ^2 未知.
在显著水平 0.05 下检验假设 $H_0:\mu\leq 1000, H_1:\mu>1000$

解　· 确定类型： σ^2 未知，检验 μ，取枢轴量 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$

· 确定检验类型：右侧检验，取拒绝域 $W=\{T_0>t_\alpha(n-1)\}$ $T_0>t_\alpha(n-1)$

· 计算 $T_0=\dfrac{1120-1000}{\sqrt{108900}/\sqrt{64}}=2.909$， $t_{0.05}(63)=1.669$ → $T_0>t_{0.05}(63)$，拒绝原假设

十九　求 P 值并检验假设

1.题型简述与解法

· 以填空题或大题的形式，根据样本值求出某正态总体的 $P\_$，并判断是否拒绝原假设

① 根据要检验的参数，选择并计算对应的检验统计量 G

分布名称	原假设	条件	检验统计量
单个正态总体	$\mu=\mu_0$	σ^2 已知	$Z=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$
	$\mu=\mu_0$	σ^2 未知	$T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$
	$\sigma^2=\sigma_0^2$	——	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$
两个正态总体	$\mu_1=\mu_2$	σ^2 已知	$\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\sim N(0,1)$
	$\mu_1=\mu_2$	σ^2 未知	$\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}}\sim t(n_1+n_2-2)$
	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	σ^2 已知	$\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$

② 根据检验类型，选择对应的 $P\_$ 值公式并计算

检验类型	条件	P 值公式
左侧检验	$H_0:\ \theta\geq\theta_0$	$P\_=P(g<G_0)$
右侧检验	$H_0:\ \theta\leq\theta_0$	$P\_=P(g>G_0)$
双侧检验	$H_0:\ \theta=\theta_0$	$P\_=2P(g>\lvert G_0\rvert)$（$\mu$ 相关） $P\_=2\min\{P(g>G_0),P(g<G_0)\}$（$\sigma^2$ 相关）

具体方法：在试卷第一页抬头寻找 $g_A=G_0$，则 $P(g<G_0)=1-A$， $P(g>G_0)=A$

③ 如果 $P\_<\alpha$，则拒绝原假设

2.历年考试典型例题

例 1　（18－19 春夏）为调查某减肥药的疗效，随机选择 16 位服药一个疗程的使用者，记录他们的减肥重量 X（单位：公斤），假设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，已测得样本均值 $\bar{x}=1.18$，样本标准差 $s=1.6$.

（1）对于假设：$H_0:\mu\leq 0,H_1:\mu>0$，求 $P\_$ 值并进行检验（取 $\alpha=0.05$）;

解　（1）σ^2 未知检验 μ → 取检验统计量

$$T=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \to T_0=\frac{1.18-0}{1.6/\sqrt{16}}=2.95$$

右侧检验 $\to$ $P\_=P(t(15)>T_0)$

$\because$ $t_{0.005}(15)=2.95$ $\to$ $P\_=0.005<0.05$ $\to$ 拒绝原假设

例 2 （**14－15 春夏**）设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$， $X_1,\cdots,X_n$ 为来自 X 的简单随机样本，若取得容量是 9 的样本，计算得样本均值 $\overline{x}=1.896$，样本标准差为 $s=0.8$，则假设 $H_0:\mu=1,H_1:\mu\neq1$ 的 $P\_$ 值为_________，若显著水平为 0.05，则应该拒绝还是接受原假设_________________.

解 σ^2 未知检验 μ $\to$ 取检验统计量

$$T=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \to T_0=\frac{1.896-1}{0.8/\sqrt{9}}=3.36$$

双侧检验 $\to$ $P\_=P(t(8)>T_0)$

$\because$ $t_{0.005}(8)=3.36$ $\to$ $P\_=0.005<0.05$ $\to$ 拒绝原假设

例 3 （**19－20 秋冬**） 为了解某市两所高校学生的消费情况，在两所高校各随机调查 100 人，调查结果为甲校学生月平均消费 2583 元，样本方差 882669，乙校学生月平均消费 2439 元，样本方差 678976，设甲校学生月平均消费额 $X\sim N(\mu,\sigma_1^2)$，乙校学生月平均消费额 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2$ 未知，两个样本独立.

（1）在显著水平 0.05 下检验假设 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2,H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$，并计算相应的 $P\_$ 值；

解 检验 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ $\to$ 取检验统计量

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(99,99) \to F_0=1.30$$

双侧检验 $\to$ $P(F(99,99)\geq1.30)=0.1$ $\to$ $P\_=2P(F(99,99)\geq1.30)=0.2>0.05$ $\to$ 接受

例 4 （**17－18 秋冬**）设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$， μ,σ^2 均未知， $X_1,\cdots,X_{16}$ 是总体 X 的简单随机样本， $\overline{X}$ 是样本均值，若计算得 $\overline{x}=1.8$， $\sum_{i=1}^{16}(x_i-\overline{x})^2=30.6$，为检验假设 $H_0:\sigma^2\leq1,H_1:\sigma^2>1$，$P_=$_______,若显著水平 $\alpha=0.05$,应该拒绝还是接受原假设？答:______________________.

解 检验 σ^2 $\to$ 取检验统计量

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1) \to \chi_0^2=30.6$$

右侧检验 $\to$ $P\_=P(\chi^2>\chi_0^2)$，由 $\chi_{0.01}^2(15)=30.6$ $\to$ $P\_=0.01<0.05$ $\to$ 拒绝原假设

二十　拟合优度检验

1.题型简述与解法

· 已知总体 X 的大量样本数据，使用拟合优度检验判断 X 是否服从指定分布

① **将 X 的取值范围划分为 k 个区间，获得各个区间内数据数量 n_i（实际频数）**

· 如果 X 是连续型，则要将将 X 的取值范围划分为 k 个区间（题目已经划分好了）

② **假设 X 服从该分布，计算 X 在各个区间内的理论频数 np_i**

· n 为样本数，p_i 为 X 落在区间 i 的概率

· 如果分布含有未知参数，则先用极大似然法估出参数（这种情况题目一般会设两问）

③ **计算统计量 χ^2，若 $\chi^2 \le \chi^2_\alpha(k-1)$，则接受原假设，否则拒绝原假设**

拟合优度统计量

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(n_i-np_i)^2}{np_i}$$

2.历年考试典型例题

例 1　（18—19 春夏）设总体 X 取值 0，1，2，3，4，5，对总体进行 100 次观察，其中 0，1，2，3，4，5 分别观察到 11，18，19，21，16，15 次.

（1）若总体的分布律如下表所示，未知参数 $p\in(0,1)$，求参数 p 的极大似然估计值 $\hat{p}$；

X	0	1	2	3	4	5
概率	$0.25p$	$0.5p(1-p)$	$0.5p(1-p)$	$(1-p)^2$	$0.5p$	$0.25p$

（2）在显著水平 0.05 下，用 χ^2 拟合优度检验法检验假设：H_0: X 的分布律如上表所示.

解　（1）$L(p)=(0.25p)^{20}[0.5p(1-p)]^{37}(1-p)^{42}(0.5p)^{36}$

$\to$ $\ln L(p)=79\ln p+79\ln(1-p)+C$

$\to$ $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(p)}{\mathrm{d}p}=79(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{1-p})=0\Rightarrow p=\dfrac{1}{2}$

$\to$ 当 $p=\dfrac{1}{2}$ 时，$L(p)$ 取极大值 $\to$ $\hat{p}=\dfrac{1}{2}$

（2）取 $\hat{p}=\dfrac{1}{2}$，计算理论频数如下表所示

X	0	1	2	3	4	5
理论频数	12.5	12.5	12.5	25	25	12.5
实际频数	11	18	19	21	16	15

$$\chi^2=\frac{(12.5-11)^2}{12.5}+\frac{(12.5-18)^2}{12.5}+\frac{(12.5-19)^2}{12.5}+\frac{(25-21)^2}{25}+\frac{(25-16)^2}{12.5}+\frac{(12.5-15)^2}{12.5}$$

$=10.36>9.49=\chi^2_{0.05}(5-1)$ $\to$ 拒绝原假设