第 17 章　光的衍射

一　单缝与光栅衍射

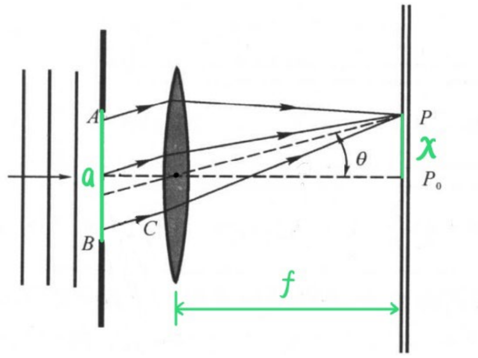
1. 单缝衍射

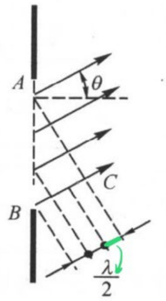
① 模型参数

平行光**垂直**入射单缝

- a ：缝宽
- θ ：光线相对缝面法线的偏转角
- f ：透镜焦距
- x ：条纹位置到中心的距离

$$\boxed{\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{x}{f}}$$





单个半波带宽度

② 明暗条纹位置

- **中央明纹中心**　$\boxed{\theta = 0}$　　光强最强
- **暗纹中心**　$\boxed{a\sin\theta = \pm k\lambda \qquad k = 1,2,3,\cdots}$　满足该方程的 θ 处可以为暗纹

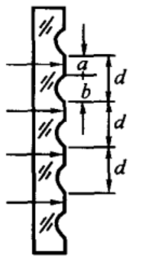
  明纹中心　$a\sin\theta = \pm(k+1/2)\lambda \qquad k = 1,2,3,\cdots$
- 若不是垂直入射，而是存在入射角 i ，则将 $\sin\theta$ 替换为 $\sin\theta + \sin i$

2. 光栅衍射

① **光栅参数**

- 光栅：任何能起周期性地分割波阵面作用的衍射屏，可视为多个规律排列的单缝
- a ：透光缝的宽度　b ：不透光刻痕的宽度　d ：**光栅常数**　N ：单缝数量

$$\boxed{d = a + b}$$



(a) 平面透射光栅

② **主极大**明纹的形成

- 光栅方程：$\boxed{d\sin\theta = \pm k\lambda \qquad k = 0,1,2,\cdots}$　满足该方程的 θ 处可以看到明纹

  由于 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$，因此 k 存在最大值和最小值，也就是<u>主极大个数是有限的</u>

③ **缺级**

某些衍射角 θ 同时满足光栅方程和单缝衍射的暗纹条件，此时原定的主极大就会变成暗纹 → 缺级

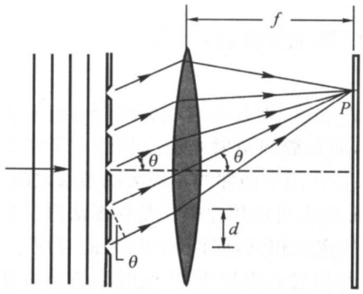
$$\begin{cases} a\sin\theta = k_1\lambda \\ d\sin\theta = k_2\lambda \end{cases} \rightarrow \boxed{k_2 = \frac{d}{a}k_1}$$

- k_1 取遍正整数时，若算出 k_2 也是正整数，那么这个 k_2 就会缺级

④ **光栅分辨本领** R

- 在某级恰好能分辨的两条谱线的平均波长 $\bar{\lambda}$ 与其波长差 $\Delta\lambda$ 的比值

$$\boxed{R = \frac{\bar{\lambda}}{\Delta\lambda} = kN}$$



常见题型

1. 单缝衍射

例 1　（例 17.1）用波长 λ 的平行光垂直入射宽度 a 的单缝，一焦距 f 的透镜紧靠缝后，观察屏置于焦平面处。求屏上中央明纹的宽度。

解　中央明纹的宽度为两条第一级暗纹间的距离，因此由暗纹方程 $a\sin\theta = k\lambda$，代入 $k=\pm1$：

$$\sin\theta = \pm\frac{\lambda}{a} \quad \text{又由几何关系有} \quad \sin\theta \approx \frac{x}{f}$$

因此有 $\Delta x = x_1 - x_{-1} = f(\sin\theta_1 - \sin\theta_{-1}) = 2\dfrac{\lambda f}{a}$

2. 光栅衍射

① **基本问题**

描述：已知入射角、波长、光栅参数，求出可见的主极大，（可能还会包含 N 与分辨本领）

思路：列出光栅方程，根据角度限制，得到可能的 k

再根据 d/a，依次代入 $k_1 = 1, 2, \cdots$，检查结果会涉及哪些 k

最后得出可见的主极大

例 2　（例 17.2）以每毫米 500 条栅纹的衍射光栅观察钠光谱线（$\lambda = 590\text{nm}$），缝宽 a 与刻痕宽度 b 之比为 1：2。（1）平行光垂直入射于光栅时能看到哪些光谱线？（2）平行光以 30°斜入射时又如何？

解　由题意，光栅常数 $d = 1\text{mm}/500 = 2\mu\text{m}$。

（1）由光栅方程 $d\sin\theta = k\lambda$，由 θ 的范围，得 $-1 < \dfrac{k\lambda}{d} < 1$

$\rightarrow \; -\dfrac{d}{\lambda} < k < \dfrac{d}{\lambda} = 3.39$　向下取整得 $k_{\max} = 3$，因此最高可能会看见第 3 级主极大

由单缝暗纹方程与光栅方程联立：$k_2 = \dfrac{d}{a}k_1 = \dfrac{a+b}{a}k_1 = 3k_1$

因此 $k_2 = \pm3, \pm6, \pm9\cdots$ 缺级，结合对可能看见的 k 的考察：

能够看到的光谱线为 $0, \pm1, \pm2$，共 5 条

（2）斜入射时，将光栅方程改写为 $d(\sin\theta + \sin i) = k\lambda$，同样可以得到 $d\dfrac{-1+\sin i}{\lambda} < k < \dfrac{1+\sin i}{\lambda}d$

因此 $-1.69 < k < 5.08$　可能看到的是 −1，0，1，2，3，4，5 级

单缝暗纹方程与光栅方程联立依然为 $k_2 = 3k_1$，因此第 3 级不可见

∴ 可见的是 −1，0，1，2，4，5 级

② **逆向问题**

已知主极大可见情况或缺项情况，反求光栅参数、波长；若结果有多种可能或范围，求出最值

例 3　某种单色光垂直入射到每厘米有 8000 条刻线的光栅上，若用白光垂直照射，哪些波长的光能够观

察到第二级谱线？

解 · 由光栅方程 $d\sin\theta = k\lambda$，代入 $k=2$，$d = 1\text{cm}/8000 = 1.25\mu\text{m}$，$\sin\theta < 1$：

$$\lambda < \frac{d}{k} = \frac{1.25\mu\text{m}}{2} = 625\text{nm}$$

· 根据可见光波长的范围，能观察到二级谱线的波长范围是 400nm ～ 625nm

例 4 设有一光栅，当白光垂直照射时，波长为 720nm 的红光在衍射角为 30°的方向上存在第二级主极大，且该级能分辨 720nm 红光附近的最小波长差 $\Delta\lambda$ 为 0.05nm。此外在 30°的方向上不存在可见光谱线的其它主极大。求该光栅的（1）光栅常数；（2）总缝数；（3）可能及最小缝宽

解 （1）关键句为“波长为 720nm 的红光在衍射角为 30°的方向上存在第二级主极大”

由光栅方程 $d\sin\theta = k\lambda$，此时 $k=2$，$\theta = 30°$，$\lambda = 720\text{nm}$，因此得到 $d = 2.88\mu\text{m}$

（2）关键句为“该级能分辨 720nm 红光附近的最小波长差 $\Delta\lambda$ 为 0.05nm”

由分辨本领的公式 $R = \dfrac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN$，代入 $k=2$，$\lambda = 720\text{nm}$，$\Delta\lambda = 0.5\text{nm}$，得 $N = 7200$

（3）关键句为“在 30°的方向上不存在可见光谱线的其它主极大”

① 首先要搞清楚在该方向上可能出现的主极大：

由光栅方程 $d\sin\theta = k\lambda \rightarrow \lambda = \dfrac{d\sin\theta}{k} = \dfrac{1440\text{nm}}{k}$，依次取 $k = 1, 2, 3\cdots$，算出对应的 λ

→ 这意味着在 30°的方向上，会出现这些波长的主极大

其中只有 $k=2$，$k=3$ 对应的 λ 落在可见光范围，因此可能出现的其它主极大只有 $k=3$

② 然后搞明白为什么看不见 → 缺级了

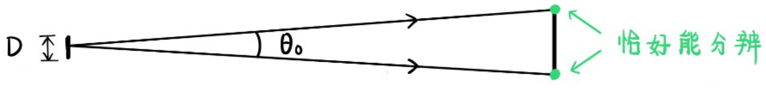
由“缺级方程” $k_2 = \dfrac{d}{a}k_1$，可得到 $a = \dfrac{k_1}{k_2}d$，其中 $k_2 = 3$，$d = 2.8\mu\text{m}$

· k_1 为正整数，且 $k_1 < k_2$ → 可能取值为 $k_1 = 1$（$a = 960\text{nm}$）$k_1 = 2$（$a = 1920\text{nm}$）

因此，当 k_1 取得最小值 1 时，a 取到最小值 960nm

二 其它衍射

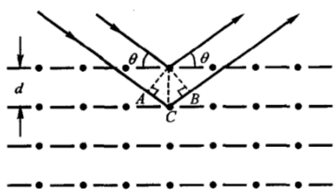
3. 圆孔衍射（最小分辨角）



$$\boxed{\theta_{\min} = 1.22\frac{\lambda}{D}}$$

· D：圆孔半径（包括人的瞳孔） 当 $\theta < \theta_{\min}$ 时，仪器或人就无法分辨两个点

2. X 射线在晶体上的衍射



· θ：入射光与晶面间的掠射角 d：相邻晶面间距

· 能够产生强反射的 θ 为：

$$\boxed{2d\sin\theta = k\lambda \qquad k = 1, 2, \cdots}$$

常见题型

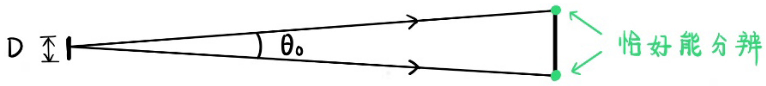
① 圆孔衍射（最小分辨角问题）

例 5　通常情况下，人眼瞳孔直径为 3mm，若视觉感受最灵敏的光波波长为 550nm，则人眼最小分辨角为_______rad；在教室的黑板上画有一等号“=”，两横线相距 2mm，则只有坐在距黑板_______m 内的同学才能看得清.

解　当你能看出这是一个圆孔衍射问题之后，事情就很简单了

由最小分辨角公式 $\theta_{\min}=1.22\dfrac{\lambda}{D}=1.22\times\dfrac{550\mathrm{nm}}{3\mathrm{mm}}=2.24\times10^{-4}\,\mathrm{rad}$（第一空）

根据最小分辨角的图示，第二空实际上是在问下图中等腰三角形的高 h（已知底边为 2mm）：



由于 θ 角几乎为 0，因此这个三角形可以看成是直角三角形：$\tan\theta=\dfrac{2\mathrm{mm}}{h}\approx\theta$

$\therefore\ h=\dfrac{2\mathrm{mm}}{2.24\times10^{-4}}=8.9\mathrm{m}$（第二空）

② X 射线在晶体上的衍射

例 6　一束 X 射线含有 0.095nm 到 0.13nm 范围内的各种波长，以掠射角 45°入射到晶体上；已知晶格常数 $d=0.275\mathrm{nm}$，则晶体对波长_________和__________的 X 射线产生强反射

解　由晶体衍射公式 $2d\sin\theta=k\lambda$，固定值为 $d=0.275\mathrm{nm}$，$\theta=45°$

依次代入 $k=1,2,\cdots$，得到一系列 λ，看它们是否在 X 射线的范围里

· $k=3$ 时，$\lambda=0.130\mathrm{nm}$，在范围里；$k=4$ 时，$\lambda=0.097\mathrm{nm}$，在范围里；其余均在范围外

因此答案填“0.130nm”和“0.097nm”