

# 第 17 章 光的衍射

## 一 单缝与光栅衍射

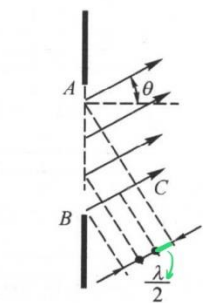
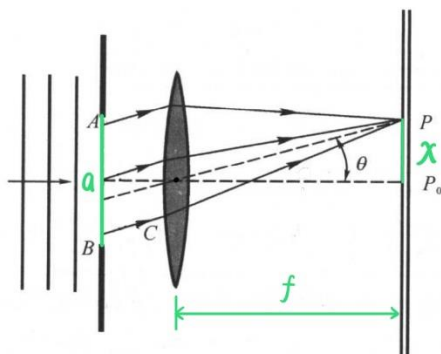
### 1. 单缝衍射

#### ① 模型参数

平行光垂直入射单缝

- $a$  : 缝宽
- $\theta$  : 光线相对缝面法线的偏转角
- $f$  : 透镜焦距
- $x$  : 条纹位置到中心的距离

$$\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{x}{f}$$



单个半波带宽度

#### ② 明暗条纹位置

- 中央明纹中心  $\theta = 0$  光强最强
- 暗纹中心  $a \sin \theta = \pm k \lambda \quad k = 1, 2, 3, \dots$  满足该方程的  $\theta$  处可以为暗纹
- 明纹中心  $a \sin \theta = \pm (k + 1/2) \lambda \quad k = 1, 2, 3, \dots$
- 若不是垂直入射，而是存在入射角  $i$ ，则将  $\sin \theta$  替换为  $\sin \theta + \sin i$

### 2. 光栅衍射

#### ① 光栅参数

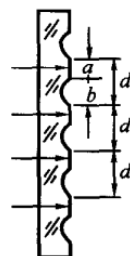
- 光栅：任何能起周期性地分割波阵面作用的衍射屏，可视为多个规律排列的单缝
- $a$  : 透光缝的宽度  $b$  : 不透光刻痕的宽度  $d$  : 光栅常数  $N$  : 单缝数量

$$d = a + b$$

#### ② 主极大明纹的形成

- 光栅方程：  $d \sin \theta = \pm k \lambda \quad k = 0, 1, 2, \dots$  满足该方程的  $\theta$  处可以看到明纹

由于  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，因此  $k$  存在最大值和最小值，也就是主极大个数是有限的



(a) 平面透射光栅

#### ③ 缺级

某些衍射角  $\theta$  同时满足光栅方程和单缝衍射的暗纹条件，此时原定的主极大就会变成暗纹  $\rightarrow$  缺级

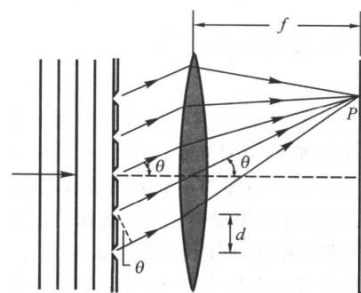
$$\begin{cases} a \sin \theta = k_1 \lambda \\ d \sin \theta = k_2 \lambda \end{cases} \rightarrow k_2 = \frac{d}{a} k_1$$

- $k_1$  取遍正整数时，若算出  $k_2$  也是正整数，那么这个  $k_2$  就会缺级

#### ④ 光栅分辨本领 $R$

- 在某级恰好能分辨的两条谱线的平均波长  $\bar{\lambda}$  与其波长差  $\Delta \lambda$  的比值

$$R = \frac{\bar{\lambda}}{\Delta \lambda} = kN$$



## 常见题型

### 1. 单缝衍射

**例 1** (例 17.1) 用波长  $\lambda$  的平行光垂直入射宽度  $a$  的单缝, 一焦距  $f$  的透镜紧靠缝后, 观察屏置于焦平面处。求屏上中央明纹的宽度。

**解** 中央明纹的宽度为两条第一级暗纹间的距离, 因此由暗纹方程  $a \sin \theta = k\lambda$ , 代入  $k = \pm 1$ :

$$\sin \theta = \pm \frac{\lambda}{a} \quad \text{又由几何关系有} \quad \sin \theta \approx \frac{x}{f}$$

$$\text{因此有 } \Delta x = x_1 - x_{-1} = f(\sin \theta_1 - \sin \theta_{-1}) = 2 \frac{\lambda f}{a}$$

### 2. 光栅衍射

#### ① 基本问题

描述: 已知入射角、波长、光栅参数, 求出可见的主极大, (可能还会包含  $N$  与分辨本领)

思路: 列出光栅方程, 根据角度限制, 得到可能的  $k$

再根据  $d/a$ , 依次代入  $k_1 = 1, 2, \dots$ , 检查结果会涉及哪些  $k$

最后得出可见的主极大

**例 2** (例 17.2) 以每毫米 500 条栅纹的衍射光栅观察钠光谱线 ( $\lambda = 590\text{nm}$ ), 缝宽  $a$  与刻痕宽度  $b$  之比为 1:2。(1) 平行光垂直入射于光栅时能看到哪些光谱线? (2) 平行光以  $30^\circ$  斜入射时又如何?

**解** 由题意, 光栅常数  $d = 1\text{mm}/500 = 2\mu\text{m}$ 。

(1) 由光栅方程  $d \sin \theta = k\lambda$ , 由  $\theta$  的范围, 得  $-1 < \frac{k\lambda}{d} < 1$

$\rightarrow -\frac{d}{\lambda} < k < \frac{d}{\lambda} = 3.39$  向下取整得  $k_{\max} = 3$ , 因此最高可能会看见第 3 级主极大

由单缝暗纹方程与光栅方程联立:  $k_2 = \frac{d}{a} k_1 = \frac{a+b}{a} k_1 = 3k_1$

因此  $k_2 = \pm 3, \pm 6, \pm 9 \dots$  缺级, 结合对可能看见的  $k$  的考察:

能够看到的光谱线为  $0, \pm 1, \pm 2$ , 共 5 条

(2) 斜入射时, 将光栅方程改写为  $d(\sin \theta + \sin i) = k\lambda$ , 同样可以得到  $d \frac{-1 + \sin i}{\lambda} < k < \frac{1 + \sin i}{\lambda} d$

因此  $-1.69 < k < 5.08$  可能看到的是  $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$  级

单缝暗纹方程与光栅方程联立依然为  $k_2 = 3k_1$ , 因此第 3 级不可见

$\therefore$  可见的是  $-1, 0, 1, 2, 4, 5$  级

#### ② 逆向问题

已知主极大可见情况或缺项情况, 反求光栅参数、波长; 若结果有多种可能或范围, 求出最值

**例 3** 某种单色光垂直入射到每厘米有 8000 条刻线的光栅上, 若用白光垂直照射, 哪些波长的光能够观

观察到第二级谱线?

解 · 由光栅方程  $d \sin \theta = k\lambda$ , 代入  $k=2$ ,  $d=1\text{cm}/8000=1.25\mu\text{m}$ ,  $\sin \theta < 1$ :

$$\lambda < \frac{d}{k} = \frac{1.25\mu\text{m}}{2} = 625\text{nm}$$

· 根据可见光波长的范围, 能观察到二级谱线的波长范围是  $400\text{nm} \sim 625\text{nm}$

例 4 设有一光栅, 当白光垂直照射时, 波长为  $720\text{nm}$  的红光在衍射角为  $30^\circ$  的方向上存在第二级主极大, 且该级能分辨  $720\text{nm}$  红光附近的最小波长差  $\Delta\lambda$  为  $0.05\text{nm}$ 。此外在  $30^\circ$  的方向上不存在可见光谱线的其它主极大。求该光栅的 (1) 光栅常数; (2) 总缝数; (3) 可能及最小缝宽

解 (1) 关键句为“波长为  $720\text{nm}$  的红光在衍射角为  $30^\circ$  的方向上存在第二级主极大”

由光栅方程  $d \sin \theta = k\lambda$ , 此时  $k=2$ ,  $\theta=30^\circ$ ,  $\lambda=720\text{nm}$ , 因此得到  $d=2.88\mu\text{m}$

(2) 关键句为“该级能分辨  $720\text{nm}$  红光附近的最小波长差  $\Delta\lambda$  为  $0.05\text{nm}$ ”

由分辨本领的公式  $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN$ , 代入  $k=2$ ,  $\lambda=720\text{nm}$ ,  $\Delta\lambda=0.05\text{nm}$ , 得  $N=7200$

(3) 关键句为“在  $30^\circ$  的方向上不存在可见光谱线的其它主极大”

① 首先要搞清楚在该方向上可能出现的主极大:

由光栅方程  $d \sin \theta = k\lambda \rightarrow \lambda = \frac{d \sin \theta}{k} = \frac{1440\text{nm}}{k}$ , 依次取  $k=1, 2, 3, \dots$ , 算出对应的  $\lambda$

$\rightarrow$  这意味着在  $30^\circ$  的方向上, 会出现这些波长的主极大

其中只有  $k=2$ ,  $k=3$  对应的  $\lambda$  落在可见光范围, 因此可能出现的其它主极大只有  $k=3$

② 然后搞明白为什么看不见  $\rightarrow$  缺级了

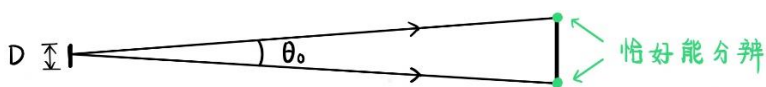
由“缺级方程”  $k_2 = \frac{d}{a} k_1$ , 可得到  $a = \frac{k_1}{k_2} d$ , 其中  $k_2=3$ ,  $d=2.8\mu\text{m}$

·  $k_1$  为正整数, 且  $k_1 < k_2 \rightarrow$  可能取值为  $k_1=1$  ( $a=960\text{nm}$ )  $k_1=2$  ( $a=1920\text{nm}$ )

因此, 当  $k_1$  取得最小值 1 时,  $a$  取到最小值  $960\text{nm}$

## 二 其它衍射

### 3. 圆孔衍射 (最小分辨角)



$$\theta_{\min} = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

·  $D$ : 圆孔半径 (包括人的瞳孔)

当  $\theta < \theta_{\min}$  时, 仪器或人就无法分辨两个点

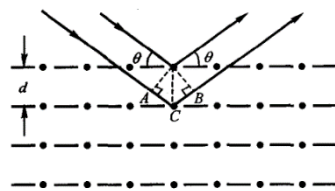
### 2. X 射线在晶体上的衍射

·  $\theta$ : 入射光与晶面间的掠射角

$d$ : 相邻晶面间距

· 能够产生强反射的  $\theta$  为:

$$2d \sin \theta = k\lambda \quad k=1, 2, \dots$$



## 常见题型

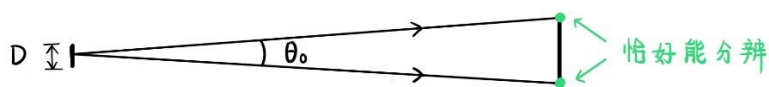
### ① 圆孔衍射（最小分辨角问题）

**例 5** 通常情况下，人眼瞳孔直径为 3mm，若视觉感受最灵敏的光波波长为 550nm，则人眼最小分辨角为 \_\_\_\_\_ rad；在教室的黑板上画有一等号“=”，两横线相距 2mm，则只有坐在距黑板 \_\_\_\_\_ m 内的同学才能看得清。

**解** 当你能看出这是一个圆孔衍射问题之后，事情就很简单了

$$\text{由最小分辨角公式 } \theta_{\min} = 1.22 \frac{\lambda}{D} = 1.22 \times \frac{3\text{mm}}{550\text{nm}} = 2.44 \times 10^{-4} \text{ rad (第一空)}$$

根据最小分辨角的图示，第二空实际上是在问下图中等腰三角形的高  $h$ （已知底边为 2mm）：



由于  $\theta$  角几乎为 0，因此这个三角形可以看成是直角三角形： $\tan \theta = \frac{2\text{mm}}{h} \approx \theta$

$$\therefore h = \frac{2\text{mm}}{2.44 \times 10^{-4}} = 8.9\text{m (第二空)}$$

### ② X 射线在晶体上的衍射

**例 6** 一束 X 射线含有 0.095nm 到 0.13nm 范围内的各种波长，以掠射角  $45^\circ$  入射到晶体上；已知晶格常数  $d = 0.275\text{nm}$ ，则晶体对波长 \_\_\_\_\_ 和 \_\_\_\_\_ 的 X 射线产生强反射

**解** 由晶体衍射公式  $2d \sin \theta = k\lambda$ ，固定值为  $d = 0.275\text{nm}$ ， $\theta = 45^\circ$

依次代入  $k = 1, 2, \dots$ ，得到一系列  $\lambda$ ，看它们是否在 X 射线的范围里

·  $k = 3$  时， $\lambda = 0.130\text{nm}$ ，在范围里； $k = 4$  时， $\lambda = 0.097\text{nm}$ ，在范围里；其余均在范围外

因此答案填“0.130nm”和“0.097nm”