第7章 Laplace变换

§7.1 基本概念

① 定义

设 $f(t)$ 是 $[0,+\infty)$ 的实(复)值函数，若对参数 $s=c+iy$

$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ 在某一区域内收敛，则称其为 $f(t)$ 的 Laplace 变换

$$\mathcal{L}[\underbrace{f(t)}_{\text{原象函数}}] = \underbrace{F(s)}_{\text{象函数}} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

而 $f(t)$ 称为 $F(s)$ 的 Laplace 逆变换，记为 $f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$

常用1 单位阶跃函数 $u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$ $\mathcal{L}[u(t)]=\frac{1}{s}$ ($Re(s)>0$ 时收敛)

常用2 $\mathcal{L}[e^{kt}]=\frac{1}{s-k}$ $Re(s)>Re(k)$

② 存在定理

若 $f(t)$ 满足 $\begin{cases}\text{在 } t\geq 0 \text{ 的任一有限区间上分段连续}\\ t\to+\infty\text{，增长速度不超过指数函数 } |f(t)|\leq Me^{ct}\end{cases}$

则 Laplace 变换在 $Re(s)>c$ 上存在且解析

常用3 $f(t)=t^a$ $(a>-1)$ $\mathcal{L}[f(t)] \overset{Re(s)>0}{=} \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$ a 为非负整数 n 时 $L[f(t)]=\frac{n!}{s^{n+1}}$

§ 7.2 基本性质

① 线性性质

$$\mathcal{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)] = a_1 f_1(t) + a_2(t)$$

常用 4 $\boxed{\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \qquad \mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2} \qquad Re(s) > 0}$

[例 1] $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s+2)(s+4)}\right]$

$\because \frac{s}{(s+2)(s+4)} = 2\frac{1}{s+4} - \frac{1}{s+2}$

$\therefore \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s+2)(s+4)}\right] = 2e^{-4t} - e^{-2t}$

② 平移性质

时移性 $\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{-st_0}F(s)$

频移性 $\mathcal{L}[e^{s_0 t} f(t)] = F(s-s_0)$

[例 2] 求 $L(e^{at}\sin \omega t)$

$\because L(\sin \omega t) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$\therefore$ 由频移性，$L(e^{at}\sin \omega t) = \frac{1}{(s-a)^2+\omega^2}$

③ 微分性质

原象函数 $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0^+)$

$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'(0^+) - \cdots - f^{(n-1)}(0^+)$

象函数 $\mathcal{L}^{-1}[F^{(n)}(s)] = (-t)^n f(t) \longleftrightarrow L[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s)$

[例 3] $\mathcal{L}[t^2 \cos kt]$

$\because \mathcal{L}[\cos kt] = \frac{s}{s^2+k^2}$

$\therefore \mathcal{L}[t^2\cos kt] = (-1)^2\left(\frac{s}{s^2+k^2}\right)'' = \frac{2s^3-6k^2 s}{(s^2+k^2)^3}$

④ 积分性质

原象函数 $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)\,du\right] = \frac{F(s)}{s}$

象函数 $\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{+\infty} F(u)\,du$

[例 4] $\mathcal{L}\left[\int_0^t \cos t\,dt\right] = \frac{1}{s}L[\cos t] = \frac{1}{s}\frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{s^2+1}$

[例 5] $\mathcal{L}\left[\frac{\operatorname{sh} t}{t}\right] = \int_s^{+\infty}\frac{1}{u^2-1}\,du = \frac{1}{2}\ln\frac{u-1}{u+1}\Big|_s^{\infty} = \frac{1}{2}\ln\frac{s+1}{s-1}$

⑤ 极限性质

有条件！

$f(0^+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$　　$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$

[例 6] 如果 $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s+a}$ $(a>0)$，求 $f(0)$、$f(\infty)$

$f(0) = \lim_{s\to\infty}\frac{s}{s+a} = 1$　　$f(\infty) = \lim_{s\to 0}\frac{s}{s+a} = 0$

⑥ 卷积性质

定义：若 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau$ 存在，则称为 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积 $f_1(t)*f_2(t)$

满足 交换律、结合律、分配律

若 $f_1(t) = f_2(t) \equiv 0$ $(t<0)$，则 $f_1(t)*f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau$

[例 7] 已知 $t<0$ 时 $f_1(t) = f_2(t) \equiv 0$，求 $f_1(t)*f_2(t)$：

(1) $t*\sin t = \int_0^t \tau\sin(t-\tau)\,d\tau = t-\sin t$

(2) $t*e^{at} = \int_0^t \tau e^{t-\tau}\,d\tau =$

(3) $\sin\omega t * \sin\omega t = \int_0^t \sin\omega\tau\sin[\omega(t-\tau)]\,d\tau =$

如果 $\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$，$\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$

则 $\mathcal{L}[f_1(t)*f_2(t)] = F_1(s)F_2(s)$

/ $\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)F_2(s)] = f_1(t)*f_2(t)$

[例 8] 若 $\mathcal{L}[f(t)] = \dfrac{1}{(s^2+4s+13)^2}$，求 $f(t)$

解 $\because F(s) = \dfrac{1}{9} \times \dfrac{3}{(s+2)^2+3^2} \times \dfrac{3}{(s+2)^2+3^2}$

$$\frac{3}{(s+2)^2+3^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-2t}\sin 3t$$

$$\therefore f(t) = \frac{1}{9}(e^{-2t}\sin 3t) * (e^{-2t}\sin 3t)$$

$$= \cdots$$

§7.3 Laplace 逆变换

一般式 $f(t) = \dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_{\beta-j\omega}^{\beta+j\omega} F(s)e^{st}ds$ （$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\beta(t)} f(t)u(t)\,dt$ 收敛）

定理：若 $F(s)$ 在全平面只有有限个奇点 $s_1, \cdots, s_n$（均在 $\mathrm{Re}\, s = \beta$ 左侧）

且 $\lim\limits_{s\to\infty} F(s) = 0$，则 $t>0$ 时

$$\boxed{f(t) = \sum_{k=1}^{n}[F(s)e^{st}; s_k]}$$

[例 1] $F(s) = \dfrac{1}{s(s-1)^2}$

[例 2] $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s+1)}$

$F(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$

$F(s) = \dfrac{1}{(s^2+2s+5)^2}$

§5 应用：解 ODE

[例 1] 解 $\begin{cases} x''(t) - 2x'(t) + 2x(t) = 2e^t\cos t \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$

令 $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$：

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) - 2(sX(s) - x(0)) + 2X(s) = \frac{2(s-1)}{(s-1)^2+1}$$

$$X(s) = \frac{2(s-1)}{[(s-1)^2+1]^2}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2(s-1)}{[(s-1)^2+1]^2}\right] = e^t\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s}{s^2+1}\right] = -e^t\mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{1}{s^2+1}\right)'\right] = -(-t)^1 e^t \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = te^t\sin t$$