

第 9 讲 区间估计与假设检验

知识梳理

一 枢轴量与抽样分布的上 α 分位数

1. 常用正态总体枢轴量

分布名称	待估参数	条件	枢轴量
单个正态总体	μ	σ^2 已知	$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$
	μ	σ^2 未知	$\frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$
	σ^2	——	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$
两个正态总体	$\mu_1 - \mu_2$	σ^2 已知	$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 / n_1 + \sigma_2^2 / n_2}} \sim N(0, 1)$
	$\mu_1 - \mu_2$	σ^2 未知	$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$
	σ_1^2 / σ_2^2	σ^2 已知	$\frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$

· 注: $S_w = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$

2. 上 α 分位数

· 设 Y 遵从某种分布（标准正态分布、 t 分布、 χ^2 分布、 F 分布中的一种）

若存在实数 a 使得 $P(Y > a) = \alpha$ ，则称 a 为该分布的上 α 分位数

分布	分位数符号	性质
$N(0, 1)$	z_α	$z_{1-\alpha} = -z_\alpha$
$\chi^2(n)$	$\chi_\alpha^2(n)$	——
$t(n)$	$t_\alpha(n)$	$t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$
$F(n_1, n_2)$	$F_\alpha(n_1, n_2)$	$F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \frac{1}{F_\alpha(n_2, n_1)}$

· 相当于分布函数的反函数，已知概率反求取值

二 区间估计与参数假设检验的基本原理

1. 区间估计的基本原理

- 以估计 σ^2 未知下的 μ 为例

由于简单随机样本 X_1, \dots, X_n 的样本均值 \bar{X} 和样本方差 S^2 都是随机变量

→ 枢轴量 $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ 也是一个一元连续型随机变量，且满足 $t(n)$ 分布

→ $t(n)$ 分布函数完全已知，可以计算 $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ 落入某个区间 (a, b) 的概率

→ 现在我们选择一个区间 (a, b) ，使得 $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ 落入 (a, b) 的概率为 95%， a 和 b 是完全确定的

→ 则有 $P(a < \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} < b) = 95\%$ ，变换内部的不等式得到 $P(\bar{X} - \frac{\sqrt{n}}{S}b < \mu < \bar{X} - \frac{\sqrt{n}}{S}a) = 95\%$

也就是说，当我们随机取样获得样本统计值时，待估参数 μ 落在上述区间的概率为 95%

由于区间可以任意选择，因此我们通常会选择区间长度最短的 (a, b)

2. 参数假设检验的基本原理

- 以检验 σ^2 未知下的 μ 为例

原假设的 μ 已知的前提下，我们可以直接计算 $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ 落入某个区间 (a, b) 的概率

比如通过计算，可以找到一个区间 (a, b) ， $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ 落在区间 (a, b) 外的概率为 5%

显然这个概率非常小，如果我们取样统计，发现这个小概率事件发生了，那么我们就拒绝原假设

因此只要 $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ 落在区间 (a, b) 外就拒绝原假设，这个外区间就是拒绝域

- P 值的解释

原假设的 μ 已知的前提下，我们可以直接计算 $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ 落入某个区间 (a, b) 的概率

现在我们取样统计，得到了一个枢轴量 T ，这个 T 可能比较偏僻

按照原假设的分布，我们可以计算出枢轴量取值比现在这个 T 更偏僻更极端的概率

如果这个概率非常小（如小于规定的 5%），那我们也认为这次抽样属于小概率事件发生了

因此拒绝原假设

题型解析

十七 求待估参数的置信区间

1. 题型简述与解法

- 以填空题或大题的形式，求出某正态总体的待估参数的置信区间
- 按照如下步骤进行（考试直接写出置信区间的表达式即可，不用写推导过程）：

① 确定区间估计类型（如 σ^2 未知求 μ ），在下表中选择对应的枢轴量 $G(\theta)$

这个 $G(\theta)$ 应当含有待估参数 θ ，且不能含有其他未知参数

分布名称	待估参数	条件	枢轴量
单个正态总体	μ	σ^2 已知	$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$
	μ	σ^2 未知	$\frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$
	σ^2	——	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$
两个正态总体	$\mu_1 - \mu_2$	σ^2 已知	$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 / n_1 + \sigma_2^2 / n_2}} \sim N(0, 1)$
	$\mu_1 - \mu_2$	σ^2 未知	$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$
	σ_1^2 / σ_2^2	σ^2 已知	$\frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$

② 确认置信区间的类型，写出对应的置信区间（此处用 $g_\alpha(n)$ 代表分位数）

检验类型	置信区间原始式
双侧置信区间	$g_{1-\alpha/2}(n) < G(\theta) < g_{\alpha/2}(n)$
单侧置信上限	$G(\theta) > g_{1-\alpha}(n)$
单侧置信下限	$G(\theta) < g_\alpha(n)$

③ 对 P 内部的不等式进行变换，将待估参数 θ 分离出来，得到置信区间表达式

④ 将统计值、 n 、 g_α 或 $g_{1-\alpha}$ 代入，就得到置信区间或单侧置信上下限

- 这种方法只需记住枢轴量以及置信区间类型对应的不等式形式，无需记忆大量的置信区间

2. 历年考试典型例题

例 1 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ， X_1, \dots, X_n 为来自 X 的简单随机样本，设样本均值为 \bar{x} ，样本标准差为 s ，置信水平为 95%

(1) (15-16 春夏) 若 $n = 16$ ， $\bar{x} = 5.098$ ， $s = 1.200$ ，则 σ^2 的单侧置信上限为_____；

(2) (15-16 秋冬) 若 $n = 9$ ， $\bar{x} = 2.15$ ， $s = 0.9$ ，则 σ^2 的双侧置信区间为_____；

(3)(17-18 秋冬) 若 $n=9$, $\bar{x}=1.8$, $\sum_{i=1}^{16}(x_i - \bar{x})^2 = 30.6$, 则 μ 的置信区间为_____。

解

(1)(2) 判断类型: 求 σ^2 , 因此选择枢轴量 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

(1) · 判断区间类型: 单侧置信上限, 选择 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \chi_{1-\alpha}^2(n)$

· 变换: $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \chi_{1-\alpha}^2(n) \Rightarrow \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n)}$

· 代入数据, 得单侧置信上限为 $\frac{15s^2}{\chi_{0.95}^2(16)} = 2.975$

(2) · 判断区间类型: 双侧置信区间, 选择 $\chi_{1-\alpha/2}^2(n) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_{\alpha/2}^2(n)$

· 变换: $\chi_{1-\alpha/2}^2(n) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_{\alpha/2}^2(n) \Rightarrow \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n)}$

· 代入数据, 得置信区间为 $\left(\frac{8 \times 0.9^2}{17.5}, \frac{8 \times 0.9^2}{2.18} \right) = (0.37, 2.97)$

(3) 判断类型: σ^2 未知, 求 μ , 选择枢轴量 $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

· 判断区间类型: 双侧置信区间, 选择 $t_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1)$

· 变换: $\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) < \mu < \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1)$

· 代入数据, 得单侧置信上限为 $(1.8 - \frac{\sqrt{30.6}}{16} \times 2.13, 1.8 + \frac{\sqrt{30.6}}{16} \times 2.13)$, 即 $(1.04, 2.56)$

例 2 (18-19 秋冬) 为验证某汽车厂生产的汽车平均每公升汽油行驶里程是否达到 15km 以上, 随机选取 16 辆车, 记录下每辆车每公升汽油行驶的千米数, 得到样本均值 $\bar{x}=14.22$, 样本方差 $s^2=1.2^2$, 假设数据来自正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 。

(2) 现有另一汽车厂生产的同类型汽车, 其每公升汽油行驶的千米数 $Y \sim N(\mu_Y, \sigma^2)$, 随机选取该类型汽车 11 辆车, 测得样本均值 $\bar{y}=14.97$, 样本方差 $s_y^2=1.4^2$, 求 $\mu - \mu_Y$ 的置信度为 95% 的双侧置信区间。(保留两位小数)

解

· 判断类型: $\mu_1 - \mu_2$ (σ^2 均未知), 因此选择 $\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$

· 判断区间类型: 双侧置信区间, 选择 $t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) < \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} < t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$

· 变换: $|\mu - \mu_Y - (\bar{X} - \bar{Y})| < S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$

· 代入数据, 解得置信区间为 $(-1.79, 0.29)$

十八 求拒绝域并检验假设

1. 题型简述与解法

· 实际上考试从来没有求过拒绝域，检验假设通常都会要求计算 P 值， P 值都算出来了谁还算拒绝域啊！

① 根据要检验的参数，选择对应的检验统计量 G （下表以双边检验为例）

分布名称	原假设	条件	检验统计量
单个正态总体	$\mu = \mu_0$	σ^2 已知	$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$
	$\mu = \mu_0$	σ^2 未知	$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$
	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	——	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$
两个正态总体	$\mu_1 = \mu_2$	σ^2 已知	$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 / n_1 + \sigma_2^2 / n_2}} \sim N(0, 1)$
	$\mu_1 = \mu_2$	σ^2 未知	$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$
	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	σ^2 已知	$\frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$

② 根据检验类型，选取对应的拒绝域公式并计算

检验类型	条件	拒绝域
左侧检验	$H_0: \theta \geq \theta_0$	$W = \{G_0 < g_{1-\alpha}\}$
右侧检验	$H_0: \theta \leq \theta_0$	$W = \{G_0 > g_\alpha\}$
双侧检验	$H_0: \theta = \theta_0$	$W = \{ G_0 > g_{\alpha/2}\} \quad (\mu \text{ 相关})$ $W = \{G_0 < g_{1-\alpha/2} \cup G_0 > g_{\alpha/2}\} \quad (\sigma^2 \text{ 相关})$

③ 计算枢轴量 G_0 ，如果落在了拒绝域内，就拒绝原假设

2. 历年考试典型例题

例 1 （19—20 春夏）为了解某县粮食产量情况，随机调查该县 64 个乡当年的粮食产量，得到样本均值为 1120 吨，样本方差 108900，设乡粮食产量（单位：吨） $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ， μ, σ^2 未知。
在显著水平 0.05 下检验假设 $H_0: \mu \leq 1000, H_1: \mu > 1000$

解 · 确定类型： σ^2 未知，检验 μ ，取枢轴量 $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}}$
· 确定检验类型：右侧检验，取拒绝域 $W = \{T_0 > t_\alpha(n-1)\} \quad T_0 > t_\alpha(n-1)$

· 计算 $T_0 = \frac{1120-1000}{\sqrt{108900}/\sqrt{64}} = 2.909$, $t_{0.05}(63) = 1.669 \rightarrow T_0 > t_{0.05}(63)$, 拒绝原假设

十九 求 P 值并检验假设

1. 题型简述与解法

· 以填空题或大题的形式, 根据样本值求出某正态总体的 P_- , 并判断是否拒绝原假设

① 根据要检验的参数, 选择并计算对应的检验统计量 G

分布名称	原假设	条件	检验统计量
单个正态总体	$\mu = \mu_0$	σ^2 已知	$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$
	$\mu = \mu_0$	σ^2 未知	$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$
	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	——	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$
两个正态总体	$\mu_1 = \mu_2$	σ^2 已知	$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} \sim N(0, 1)$
	$\mu_1 = \mu_2$	σ^2 未知	$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$
	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	σ^2 已知	$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$

② 根据检验类型, 选择对应的 P_- 值公式并计算

检验类型	条件	P 值公式
左侧检验	$H_0: \theta \geq \theta_0$	$P_- = P(g < G_0)$
右侧检验	$H_0: \theta \leq \theta_0$	$P_- = P(g > G_0)$

双侧检验 $H_0: \theta = \theta_0$ $P_- = 2P(g > |G_0|)$ (μ 相关)
 $P_- = 2\min\{P(g > G_0), P(g < G_0)\}$ (σ^2 相关)

具体方法: 在试卷第一页抬头寻找 $g_A = G_0$, 则 $P(g < G_0) = 1 - A$, $P(g > G_0) = A$

③ 如果 $P_- < \alpha$, 则拒绝原假设

2. 历年考试典型例题

例 1 (18—19 春夏) 为调查某减肥药的疗效, 随机选择 16 位服药一个疗程的使用者, 记录他们的减肥重量 X (单位: 公斤), 假设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 已测得样本均值 $\bar{x} = 1.18$, 样本标准差 $s = 1.6$.

(1) 对于假设: $H_0: \mu \leq 0, H_1: \mu > 0$, 求 P_- 值并进行检验 (取 $\alpha = 0.05$);

解 (1) σ^2 未知检验 $\mu \rightarrow$ 取检验统计量

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \rightarrow T_0 = \frac{1.18 - 0}{1.6 / \sqrt{16}} = 2.95$$

右侧检验 $\rightarrow P_- = P(t(15) > T_0)$

$\because t_{0.005}(15) = 2.95 \rightarrow P_- = 0.005 < 0.05 \rightarrow$ 拒绝原假设

例 2 (14-15 春夏) 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, X_1, \dots, X_n 为来自 X 的简单随机样本, 若取得容量是 9 的样本, 计算得样本均值 $\bar{x} = 1.896$, 样本标准差为 $s = 0.8$, 则假设 $H_0: \mu = 1, H_1: \mu \neq 1$ 的 P_- 值为_____, 若显著水平为 0.05, 则应该拒绝还是接受原假设_____.

解 σ^2 未知检验 $\mu \rightarrow$ 取检验统计量

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \rightarrow T_0 = \frac{1.896 - 1}{0.8 / \sqrt{9}} = 3.36$$

双侧检验 $\rightarrow P_- = 2P(t(8) > T_0)$

$\because t_{0.005}(8) = 3.36 \rightarrow P_- = 0.01 < 0.05 \rightarrow$ 拒绝原假设

例 3 (19-20 秋冬) 为了解某市两所高校学生的消费情况, 在两所高校各随机调查 100 人, 调查结果甲校学生月平均消费 2583 元, 样本方差 882669, 乙校学生月平均消费 2439 元, 样本方差 678976, 设甲校学生月平均消费额 $X \sim N(\mu, \sigma_1^2)$, 乙校学生月平均消费额 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ 未知, 两个样本独立.

(1) 在显著水平 0.05 下检验假设 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, 并计算相应的 P_- 值;

解 检验 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 \rightarrow$ 取检验统计量

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(99, 99) \rightarrow F_0 = 1.30$$

双侧检验 $\rightarrow P(F(99, 99) \geq 1.30) = 0.1 \rightarrow P_- = 2P(F(99, 99) \geq 1.30) = 0.2 > 0.05 \rightarrow$ 接受

例 4 (17-18 秋冬) 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 均未知, X_1, \dots, X_{16} 是总体 X 的简单随机样本, \bar{X} 是样本均值, 若计算得 $\bar{x} = 1.8$, $\sum_{i=1}^{16} (x_i - \bar{x})^2 = 30.6$, 为检验假设 $H_0: \sigma^2 \leq 1, H_1: \sigma^2 > 1$, $P_- =$ _____, 若显著水平 $\alpha = 0.05$, 应该拒绝还是接受原假设? 答:_____.

解 检验 $\sigma^2 \rightarrow$ 取检验统计量

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \rightarrow \chi_0^2 = 30.6$$

右侧检验 $\rightarrow P_- = P(\chi^2 > \chi_0^2)$, 由 $\chi_{0.01}^2(15) = 30.6 \rightarrow P_- = 0.01 < 0.05 \rightarrow$ 拒绝原假设

二十 拟合优度检验

1. 题型简述与解法

- 已知总体 X 的大量样本数据, 使用拟合优度检验判断 X 是否服从指定分布
- ① 将 X 的取值范围划分为 k 个区间, 获得各个区间内数据数量 n_i (实际频数)
 - 如果 X 是连续型, 则要将 X 的取值范围划分为 k 个区间 (题目已经划分好了)
- ② 假设 X 服从该分布, 计算 X 在各个区间内的理论频数 np_i
 - n 为样本数, p_i 为 X 落在区间 i 的概率
 - 如果分布含有未知参数, 则先用极大似然法估出参数 (这种情况题目一般会设两问)
- ③ 计算统计量 χ^2 , 若 $\chi^2 \leq \chi_{\alpha}^2(k-1)$, 则接受原假设, 否则拒绝原假设

拟合优度统计量

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

2. 历年考试典型例题

例 1 (18-19 春夏) 设总体 X 取值 0, 1, 2, 3, 4, 5, 对总体进行 100 次观察, 其中 0, 1, 2, 3, 4, 5 分别观察到 11, 18, 19, 21, 16, 15 次.

(1) 若总体的分布律如下表所示, 未知参数 $p \in (0, 1)$, 求参数 p 的极大似然估计值 \hat{p} ;

X	0	1	2	3	4	5
概率	$0.25p$	$0.5p(1-p)$	$0.5p(1-p)$	$(1-p)^2$	$0.5p$	$0.25p$

(2) 在显著水平 0.05 下, 用 χ^2 拟合优度检验法检验假设: $H_0: X$ 的分布律如上表所示.

解 (1) $L(p) = (0.25p)^{20} [0.5p(1-p)]^{37} (1-p)^{42} (0.5p)^{36}$

$$\rightarrow \ln L(p) = 79 \ln p + 79 \ln(1-p) + C$$

$$\rightarrow \frac{d \ln L(p)}{dp} = 79 \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} \right) = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \text{当 } p = \frac{1}{2} \text{ 时, } L(p) \text{ 取极大值 } \rightarrow \hat{p} = \frac{1}{2}$$

(2) 取 $\hat{p} = \frac{1}{2}$, 计算理论频数如下表所示

X	0	1	2	3	4	5
理论频数	12.5	12.5	12.5	25	25	12.5
实际频数	11	18	19	21	16	15

$$\chi^2 = \frac{(12.5-11)^2}{12.5} + \frac{(12.5-18)^2}{12.5} + \frac{(12.5-19)^2}{12.5} + \frac{(25-21)^2}{25} + \frac{(25-16)^2}{12.5} + \frac{(12.5-15)^2}{12.5}$$

$$= 10.36 > 9.49 = \chi_{0.05}^2(5-1) \rightarrow \text{拒绝原假设}$$