

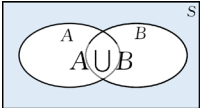
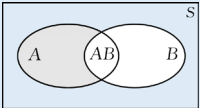
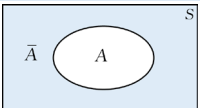
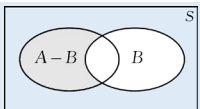
# 第 1 讲 随机事件与概率

## 知识梳理

### 一 事件关系与运算

#### 1. 事件的运算及规律

##### ① 四种事件运算类型

	符号	定义	Venn 图
和	$A \cup B$	$A \cup B = \{x : x \in A \text{ 或 } x \in B\}$	
积	$A \cap B$ $AB$	$AB = \{x : x \in A \text{ 且 } x \in B\}$	
逆	$\bar{A}$	$\bar{A} = \{x : x \notin A\}$	
差	$A - B$	$A - B = A \cap \bar{B} = \{x : x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$	

##### ② 事件运算的规律

规律名称	内容	
交换律	$A \cup B = B \cup A$	$AB = BA$
结合律	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(AB)C = A(BC)$
分配律	$(A \cup B)C = AC \cup BC$	$(AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$
德 · 摩根律	$\overline{\bigcup_{j=1}^n A_j} = \bigcap_{j=1}^n \bar{A}_j$	$\overline{\bigcap_{j=1}^n A_j} = \bigcup_{j=1}^n \bar{A}_j$

#### 2. 事件之间的关系

	符号	定义	说明
包含	$B \subset A$	事件 B 发生一定导致事件 A 发生	B 是 A 的子事件 (子集) Venn 图中 B 在 A 当中
相等	$A = B$	$B \subset A$ 且 $A \subset B$	——
互斥	$A \cap B = \emptyset$	——	Venn 图中二者没有重叠区域
独立	——	$P(AB) = P(A)P(B)$ 或 $P(A B) = P(A)$	通过 定义 或 实际逻辑 判断

## 二 概率的运算性质

### 1. 概率的基本运算性质

#### ① 和事件

##### 和事件的概率（双事件）

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

· 推论：若  $AB = \emptyset$ ，则  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

若  $B = \bar{A}$ ，则  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

##### 和事件的概率（三事件）

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$$

#### ② 积事件

##### 积事件的概率

$$A \text{ 和 } B \text{ 相互独立} \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$$

#### ③ 差事件

##### 差事件的概率

$$P(A - B) = P(A) - P(AB)$$

### 2. 条件概率的基本运算性质

##### 条件概率

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

#### ① 乘法公式

##### 条件概率乘法公式

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

#### ② 全概率公式

##### 全概率公式

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)$$

·  $B_1, \dots, B_n$  是  $S$  的一个划分

#### ③ 贝叶斯公式

##### 贝叶斯公式

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{j=1}^n P(B_j)P(A|B_j)}$$

### 三 古典概型

#### 1. 古典概型事件概率

##### 古典事件概率

$$P(A) = \frac{A \text{ 样本数}}{S \text{ 样本数}}$$

#### 2. 取样模型

- 盒子里有  $N$  个球，要取出  $n$  个球

取法	总样本数	说明
有放回地依次取出 $n$ 次	$N^n$	相当于每次从 $N$ 个球里选一个
无放回地依次取出 $n$ 个	$A_N^n = N! / (N - n)!$	相当于从 $N$ 个球中选 $n$ 个并排列
一次性取出 $n$ 个	$C_N^n = N! / [(n!)(N - n)!]$	——

- 事件样本数要根据事件化为先后步骤求排列组合

如无放回依次取出时，里面有  $m$  个红球，要求第 3 次取出红球

① 第一步：从  $m$  个红球里选一个作为第 3 个球：  $C_m^1$

② 第二步：从剩下  $N - 1$  个球里选择  $n - 1$  个：  $A_{N-1}^{n-1}$

则样本数为  $C_m^1 A_{N-1}^{n-1}$

#### 3. 抽签问题的结论

- 在无放回模型中，第  $k$  次取到特定球的概率与  $k$  无关，这使得我们可直接通过计算第 1 次的概率求解

## 题型解析

### 一 计算古典概型事件的概率

#### 1. 题型简述与解法

- 题干描述实际生活场景，且没有提供任何已知的概率
- 主要流程：求出所求事件的样本数和总样本数，相除后计算
- 计算样本数时需要灵活运用排列组合知识，将题目中的背景转换为熟悉的模型进行计算
- 如果发现计数需要复杂的分类讨论，不妨反过来求逆事件的样本数，可能有奇效

#### 2. 历年考试典型例题

**例 1** (19—20 春夏) 一盒中有 5 个球，其中 3 个红球，2 个白球，采用不放回抽样取 3 个球，则至少取到 2 个红球的概率为\_\_\_\_\_，第 2 次取到红球的概率为\_\_\_\_\_。

**解** ① 由于“至少取到 2 个红球”没有对抽取顺序提出要求，因此可以视为一次性取出

套用到抽球模型， $N=5$ ， $n=3$ ，总样本数  $C_5^3=10$

“至少取到 2 个红球”包括“2 个红球 1 个白球”和“3 个红球”两种情况

“2 个红球 1 个白球”相当于“3 个红球中选 2 个 且 2 个白球中选 1 个”，样本数  $C_3^2 C_2^1=6$

“3 个红球”相当于“3 个红球中选 3 个”再全排列，样本数  $C_3^3=1$

→ 该事件样本数  $6+1=7$ ，概率  $7/10=$  0.7

② 由于“第 2 次取到红球”对顺序提出要求，因此视为不放回依次取出，总样本数  $A_5^3=60$

“第 2 次取到红球”相当于“3 个红球选 1 个 且 4 个球中选 2 个全排列”，样本数  $C_3^1 A_4^2=36$

→ 该事件概率为  $36/60=0.6$

实际上就是抽签问题，直接使用结论： $3/5=$  0.6

**例 2** (18—19 秋冬) 某小区有  $a$  个人申请小区停车位 ( $a \geq 3$ )，而小区的停车位只有  $b$  个 ( $0 < b \leq a-2$ )。

管理者决定采用随机抽签方法确定停车位使用权。则排在第 3 位的抽签者抽中停车位的概率为\_\_\_\_\_；前三个人中恰好有一人抽中停车位的概率为\_\_\_\_\_。

**解** ① 利用结论，第 3 位抽签抽中概率与第 1 位一致，即  $b/a$

② 由于“前三个人中恰好有一人抽中停车位”没有提出顺序要求，因此视为一次性抽取

总样本数  $C_a^3$ ，“前三个人中恰好有一人抽中停车位”相当于“从  $b$  张中签中选择 1 张”且

“ $a-b$  张未中签中选择 2 张”，所以样本数  $C_b^1 C_{a-b}^2$ ，因此概率  $(C_b^1 C_{a-b}^2)/C_a^3$

## 二 计算抽象事件的概率

### 1. 题型简述与解法

- 题干直接使用  $A, B$  等来表示事件, 并提供已知概率)
- 盯住目标, 利用概率公式将所求事件的概率转化为已知概率的表达式
- 需要熟练地由事件关系得到概率间的关系, 初学者可借助韦恩图做题训练
- 遇到条件概率, 可通过定义式转化为一般的概率, 或直接利用条件概率性质

### 2. 历年考试典型例题

**例 1** (19-20 秋冬) 设  $A, B$  为两个随机事件, 已知  $P(A)=0.45$ ,  $P(A|B)=P(\bar{A}|\bar{B})=0.6$ , 则  $A$  与  $B$  是否独立? 答: \_\_\_\_\_;  $P(B)=$  \_\_\_\_\_.

**解** ① 目标是判断  $A$  和  $B$  是否独立, 等价于判断  $P(AB)=P(A)P(B)$  或  $P(A|B)=P(A)$  是否成立  
而题干中直接就有  $P(A)=0.45$ ,  $P(A|B)=0.6$ , 因此  $P(A|B) \neq P(A)$ , 即 **不独立**

② 方法一: 将条件概率化为定义式

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = 0.6 \rightarrow P(AB) = 0.6P(B) \quad (1)$$

$$P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{P(\overline{AB})}{P(\bar{B})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{1 - P(B)} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} = \frac{1 - P(A) - P(B) + P(AB)}{1 - P(B)} = 0.6 \quad (2)$$

· (1) 及  $P(A)=0.45$  代入 (2), 得

$$\frac{0.55 - 0.4P(B)}{1 - P(B)} = 0.6, \text{ 解得 } P(B) = \boxed{0.25}$$

方法二: 根据条件概率的性质

$$P(\bar{A}|\bar{B}) = 1 - P(A|\bar{B}) = 0.6 \rightarrow P(A|\bar{B}) = 0.4$$

· 已知  $P(A|B)$  和  $P(A|\bar{B})$ , 我们就能用全概率公式

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})$$

$$\text{代入数据: } 0.45 = 0.6P(B) + 0.4(1 - P(B))$$

$$\text{解得 } P(B) = \boxed{0.25}$$

**例 2** (18-19 春夏) 设  $A, B, C$  为三个随机事件, 已知  $A$  发生时  $B$  必定发生,  $P(A)=0.3$ ,  $P(B)=0.4$ ,  $P(A|C)=0.4$ ,  $P(B|C)=0.5$ ,  $P(C)=0.6$ , 则  $P(C|A)=$  \_\_\_\_\_;  $P(A \cup B \cup C)=$  \_\_\_\_\_.

**解** ① 从条件概率的定义出发

$$P(C|A) = \frac{P(AC)}{P(A)} = \frac{P(A|C)P(C)}{P(A)} = \frac{0.4 \times 0.6}{0.3} = \boxed{0.8}$$

② “已知  $A$  发生时  $B$  必定发生”  $\rightarrow A \subset B \rightarrow A \cup B = B$ , 因此

$$P(A \cup B \cup C) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(BC) = P(B) + P(C) - P(B|C)P(C) = \boxed{0.7}$$

**例 3** (15-16 春夏) 设  $A, B, C$  是三个事件,  $P(A)=a$ ,  $P(B)=b$ ,  $P(C)=c$ . (1) 若  $A, B, C$  相互独立, 则  $P(\bar{B} \cup \bar{C} | AB) = \underline{\hspace{2cm}}$ ; (2) 若  $A \subset B$ , 且  $B$  与  $C$  不相容, 则  $P(\bar{B} \cup \bar{C} | AB) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

**解** 两问求的是同一个概率, 形式复杂, 首先简化它:

$$P(\bar{B} \cup \bar{C} | AB) = \frac{P((\bar{B} \cup \bar{C})AB)}{P(AB)} = \frac{P(AB\bar{B} \cup AB\bar{C})}{P(AB)} = \frac{P(AB\bar{C})}{P(AB)}$$

(1)  $A, B, C$  相互独立  $\rightarrow AB$  与  $C$  独立

$$P(\bar{B} \cup \bar{C} | AB) = \frac{P(AB\bar{C})}{P(AB)} = P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - c$$

(2)  $A \subset B \rightarrow AB = A$ , 则

$$P(\bar{B} \cup \bar{C} | AB) = \frac{P(AB\bar{C})}{P(AB)} = \frac{P(A\bar{C})}{P(A)}$$

$B$  与  $C$  不相容 且  $A \subset B \rightarrow A$  与  $C$  也不相容  $\rightarrow A \subset \bar{C} \rightarrow A\bar{C} = A$ , 因此

$$P(\bar{B} \cup \bar{C} | AB) = \frac{P(AB\bar{C})}{P(AB)} = \frac{P(A\bar{C})}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

**例 4** (14-15 秋冬) 设随机事件  $A$  与  $B$  独立,  $P(A)=0.4$ ,  $P(A \cup B)=0.64$ , 则  $P(B) = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $P(\bar{A} | A \cup B) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

**解** ①  $P(A \cup B)=0.64 \rightarrow$  和事件公式:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.64$

$A$  与  $B$  独立  $\rightarrow P(AB) = P(A)P(B) \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0.64$

代入  $P(A)=0.4$ , 解得  $P(B)=0.4$

$$\textcircled{2} P(\bar{A} | A \cup B) = \frac{P(\bar{A}(A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(\bar{A}B)}{P(A \cup B)} = \frac{P(\bar{A})P(B)}{P(A \cup B)} = \frac{0.6 \times 0.4}{0.64} = 0.375$$

### 三 全概率与贝叶斯

#### 1. 题型简述与解法

- 题干描述的是实际生活场景, 并且提供已知的概率, 求全概率、贝叶斯事件
- 关键在于正确用字母描述事件, 并将已知的条件转化为数学语言, 主要靠日常逻辑
- 列全概率时, 要确保划分与条件概率一一对应, 不要有漏掉的划分事件

#### 2. 历年考试典型例题

**例 1** (19-20 春夏) 设某地区居民患有某种疾病的概率为 0.001, 用于疾病检测的方法存在误判, 设患病者检测结果呈阳性的概率为 0.95, 未患病者检测为阳性的概率为 0.002. 若在该地区随机选一人进行检测, 结果呈阳性, 求 TA 的确患病的概率; 若对 TA 独立进行两次检测, 且假设两次检测

都处于相同的状态，如果结果都是阳性，求 TA 患病的概率。（保留 3 位小数）

解

(1) 设事件  $A$  为“检测阳性”，事件  $B$  为“患病”，则事件  $\bar{B}$  为“不患病”

“患有某种疾病的概率为 0.001”  $\rightarrow P(B) = 0.001$ ,  $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0.999$

“患病者检测结果呈阳性的概率为 0.95”  $\rightarrow P(A|B) = 0.95$

“未患病者检测为阳性的概率为 0.002”  $\rightarrow P(A|\bar{B}) = 0.002$

“结果呈阳性，求 TA 的确患病的概率”  $\rightarrow P(B|A)$

$$\therefore P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B}) = 0.95 \times 0.001 + 0.002 \times 0.999 =$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})} = \frac{0.95 \times 0.001}{0.95 \times 0.001 + 0.002 \times 0.999} = \boxed{0.322}$$

(2) 设事件  $A_i$  为“第  $i$  次进行检测为阳性”，若已知患病与否，则  $A_1, A_2$  相互独立

“两次检测都是阳性”  $\rightarrow P(A_1 A_2) = P(A_1|B)P(A_2|B)P(B) + P(A_1|\bar{B})P(A_2|\bar{B})P(\bar{B})$

“患病且 2 次阳性”  $\rightarrow P(A_1 A_2 B) = P(A_1 A_2|B)P(B) = P(A_1|B)P(A_2|B)P(B)$

“2 次检测都是阳性，求 TA 患病的概率”  $\rightarrow P(B|A_1 A_2)$

$$\therefore P(B|A_1 A_2) = \frac{P(A_1 A_2|B)P(B)}{P(A_1 A_2|B)P(B) + P(A_1 A_2|\bar{B})P(\bar{B})} = \frac{P(A_1|B)P(A_2|B)P(B)}{P(A_1|B)P(A_2|B)P(B) + P(A_1|\bar{B})P(A_2|\bar{B})P(\bar{B})} = \boxed{0.996}$$

例 8

(17-18 春夏) 小王喜欢玩某款一对一对战游戏，该游戏会根据玩家自身的等级分随机匹配等级分相近的玩家。假设在一局中小王遇到等级分高于，等于，低于自己的玩家的概率分别为 0.4, 0.2, 0.4，遇到等级分高的玩家，小王胜，平，负的概率分别 0.3, 0.3, 0.4，遇到等级分相同的玩家，小王胜，平，负的概率分别 0.4, 0.4, 0.2，遇到等级分低的玩家，小王胜，平，负的概率分别 0.5, 0.3, 0.2。

(1) 求在一局中小王胜的概率；

(2) 若已知小王胜了一局，求此局对手是等级分高的玩家的概率；

解

(1) 设遇到等级分高中低的玩家分别为  $A_1 A_2 A_3$ ，胜平负分别是  $B_1 B_2 B_3$ ，则小王胜的概率

$$P(B_1) = P(A_1)P(B_1|A_1) + P(A_2)P(B_1|A_2) + P(A_3)P(B_1|A_3)$$

$$= 0.4 \times 0.3 + 0.2 \times 0.4 + 0.4 \times 0.5 = 0.4$$

(2) “已知小王胜了一局，此局对手是等级分高的玩家”  $\rightarrow P(A_1|B_1)$

$$\therefore P(A_1|B_1) = \frac{P(A_1)P(B_1|A_1)}{P(B_1)} = \frac{0.4 \times 0.3}{0.4} = 0.3$$