Математическое моделирование

Лабораторная работа № 2

Абдуллахи Шугофа

2026-02-22

Содержание (i)

1. 1. Введение

1.1 Цель исследования

Построить математическую модель задачи преследования и определить стратегию движения, обеспечивающую гарантированный перехват цели.

Рассматривается ситуация: в условиях тумана катер береговой охраны преследует лодку. После кратковременного улучшения видимости лодка фиксируется на расстоянии k км, затем снова исчезает и продолжает равномерное прямолинейное движение.

Скорость катера превышает скорость лодки в n раз. Требуется определить форму траектории катера, обеспечивающую встречу.

1. Получить дифференциальную модель движения при соотношении скоростей $n : 1$.

1.2 Задачи работы

1. Получить дифференциальную модель движения при соотношении скоростей $n:1$.
2. Исследовать два варианта начальных условий.

1.2 Задачи работы

1. Получить дифференциальную модель движения при соотношении скоростей $n : 1$.
2. Исследовать два варианта начальных условий.
3. По графикам определить точку перехвата.

2. 2. Теоретическая часть

2.1 Выбор системы координат

Положим $t_0 = 0$ — момент обнаружения.

Примем: - положение лодки за начало координат, - расстояние между объектами равно k.

Переходим к полярной системе (r, θ): - полюс — точка обнаружения лодки, - ось r направлена к катеру.

2.2 Определение стартового радиуса

Пусть через время t расстояния до полюса сравняются и станут равными x.

Используя равенство времён движения и учитывая отношение скоростей n, получаем два варианта начальных условий:

- case = plus

$$r_0 = \frac{k}{n+1}, \quad \theta_0 = 0$$

Эти значения определяют момент перехода к управляемому «обходу» цели.

Пусть через время t расстояния до полюса сравняются и станут равными x.

Используя равенство времён движения и учитывая отношение скоростей n, получаем два варианта начальных условий:

- case = plus

$$r_0 = \frac{k}{n+1}, \quad \theta_0 = 0$$

- case = minus

$$r_0 = \frac{k}{n-1}, \quad \theta_0 = -\pi$$

Эти значения определяют момент перехода к управляемому «обходу» цели.

Полная скорость катера равна nv. Разложим её на составляющие:

- радиальная:

$$v_r = \frac{dr}{dt}$$

Из соотношения

$$(nv)^2 = v_r^2 + v_\tau^2$$

и условия $v_r = v$ получаем

$$v_\tau = v\sqrt{n^2 - 1}.$$

2.3 Декомпозиция скорости катера

Полная скорость катера равна nv. Разложим её на составляющие:

- радиальная:

$$v_r = \frac{dr}{dt}$$

- тангенциальная:

$$v_\tau = r\frac{d\theta}{dt}$$

Из соотношения

$$(nv)^2 = v_r^2 + v_\tau^2$$

и условия $v_r = v$ получаем

$$v_\tau = v\sqrt{n^2 - 1}.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = v, \\ r\frac{d\theta}{dt} = v\sqrt{n^2 - 1}. \end{cases}$$

Исключая параметр t, получаем уравнение траектории:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

Решение данного уравнения представляет собой логарифмическую спираль.

3. 3. Численный эксперимент

Для расчётов принято: - $k = 20$ км, - $n = 5$.

Цель — визуализировать движение и определить точку пересечения траекторий.


Базовый эксперимент (case=plus)
катер
лодка
90°
135°
45°
180°
0°
225°
315°
12
10
8
6
4
2
0

3.2 Базовый эксперимент: case = plus


Базовый эксперимент (case=plus)
катер
лодка
90°
135°
45°
180°
0°
225°
315°
12
10
8
6
4
2
0

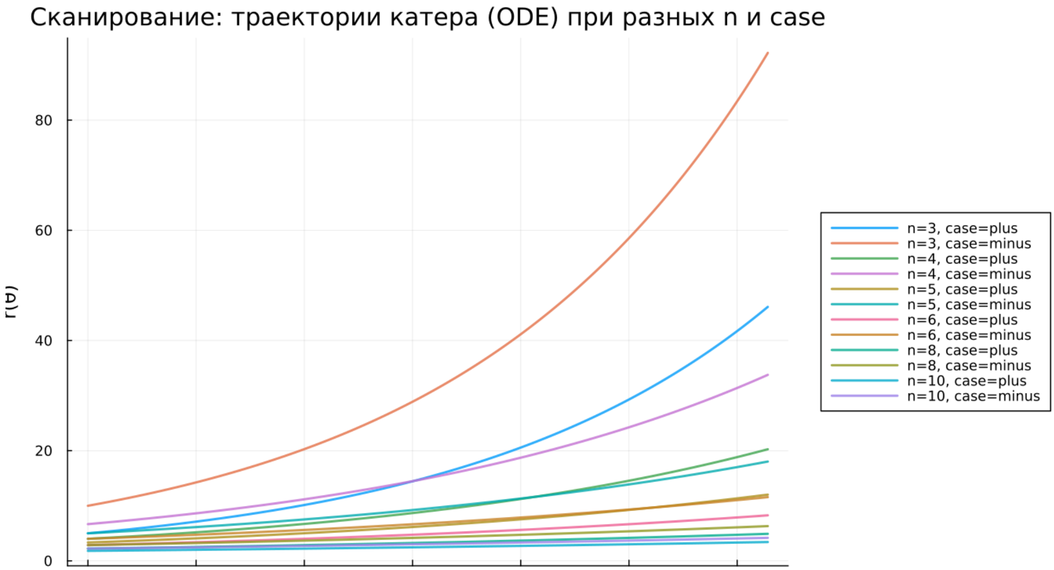

Базовый эксперимент (case=minus)
катер
лодка
90°
45°
0°
315°
225°
180°
135°
0
5
10
15
20

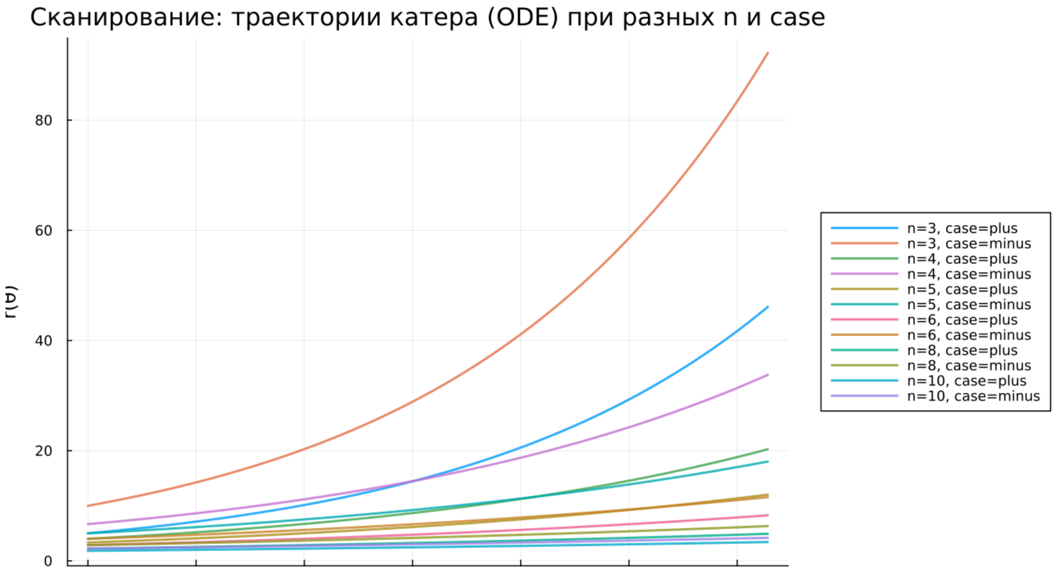

Базовый эксперимент (case=minus)
катер
лодка
90°
45°
135°
180°
0°
225°
315°
20
15
10
5
0

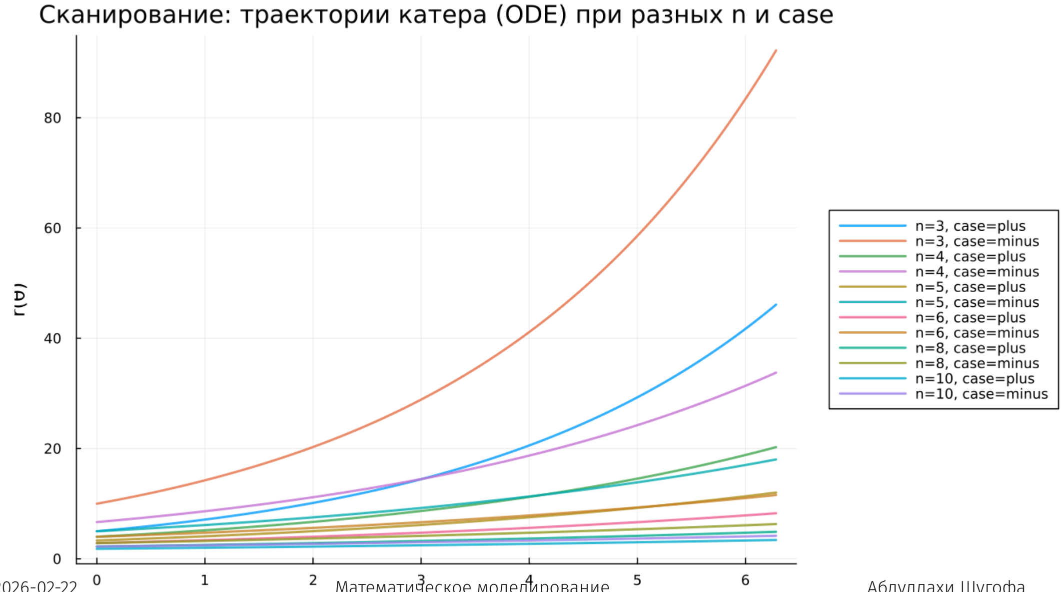

Базовый эксперимент (case=minus)
катер
лодка
90°
135°
45°
20
15
10
5
0
180°
0°
225°
315°

4. 4. Параметрическое исследование

4.1 Влияние параметра n

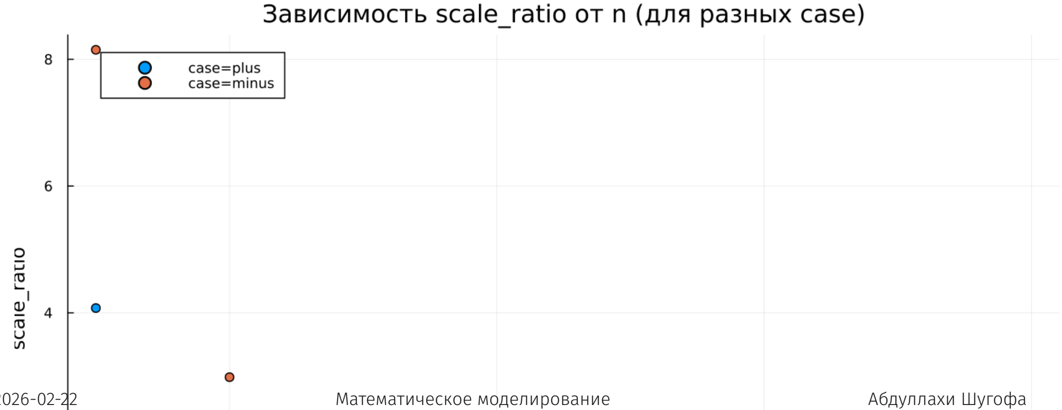



Сканирование: траектории катера (ODE) при разных n и case
r(θ)
0
20
40
60
80
0
1
2
3
4
5
6
n=3, case=plus
n=3, case=minus
n=4, case=plus
n=4, case=minus
n=5, case=plus
n=5, case=minus
n=6, case=plus
n=6, case=minus
n=8, case=plus
n=8, case=minus
n=10, case=plus
n=10, case=minus


Сканирование: траектории катера (ODE) при разных n и case
r(θ)
0
20
40
60
80
0
1
2
3
4
5
6
n=3, case=plus
n=3, case=minus
n=4, case=plus
n=4, case=minus
n=5, case=plus
n=5, case=minus
n=6, case=plus
n=6, case=minus
n=8, case=plus
n=8, case=minus
n=10, case=plus
n=10, case=minus

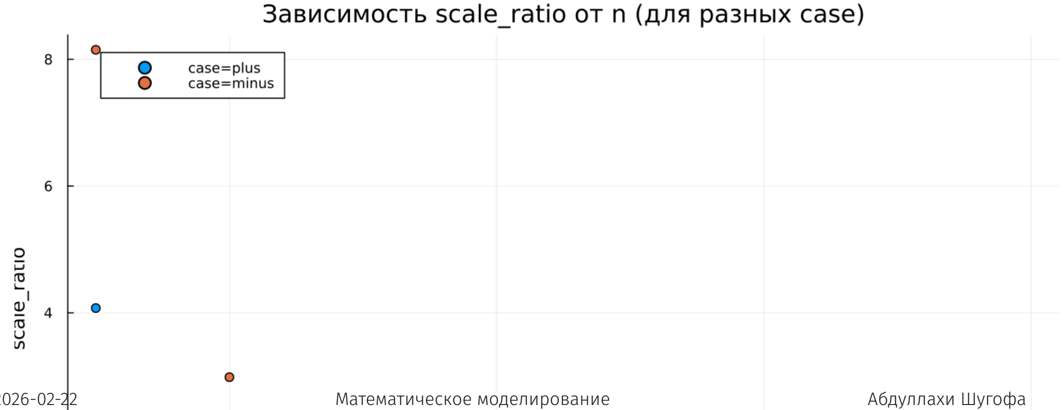
Введём показатель:

$$\text{scale\_ratio} = \frac{r_{\text{final}}}{\max(r_{\text{boat}})}.$$



Введём показатель:

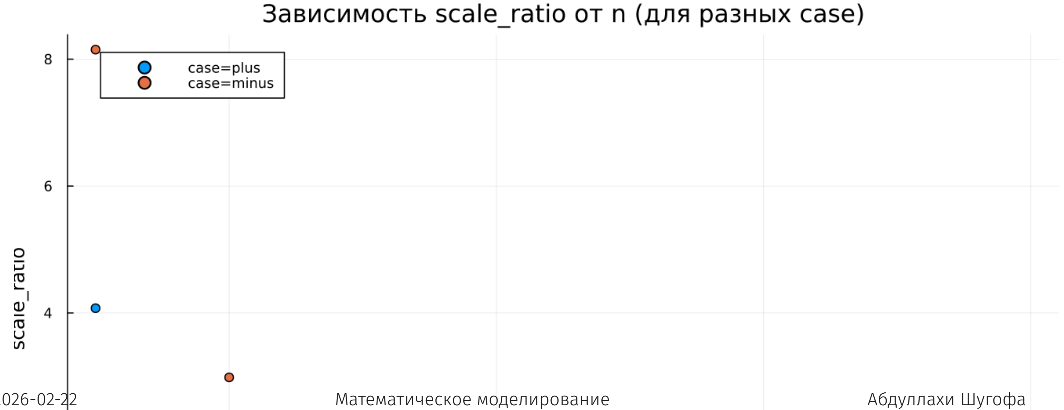
$$\text{scale\_ratio} = \frac{r_{\text{final}}}{\max(r_{\text{boat}})}.$$

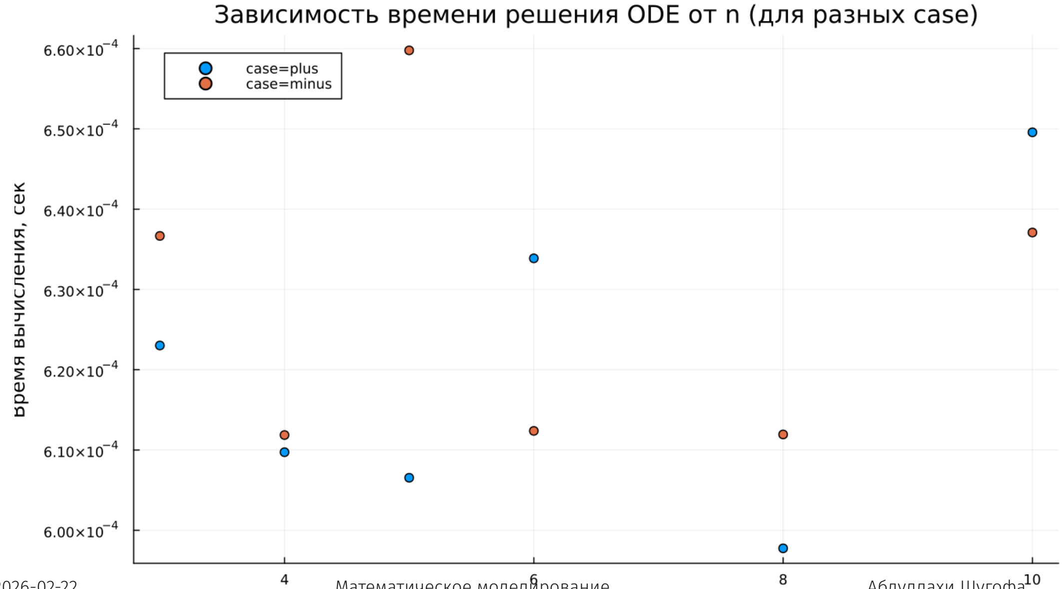


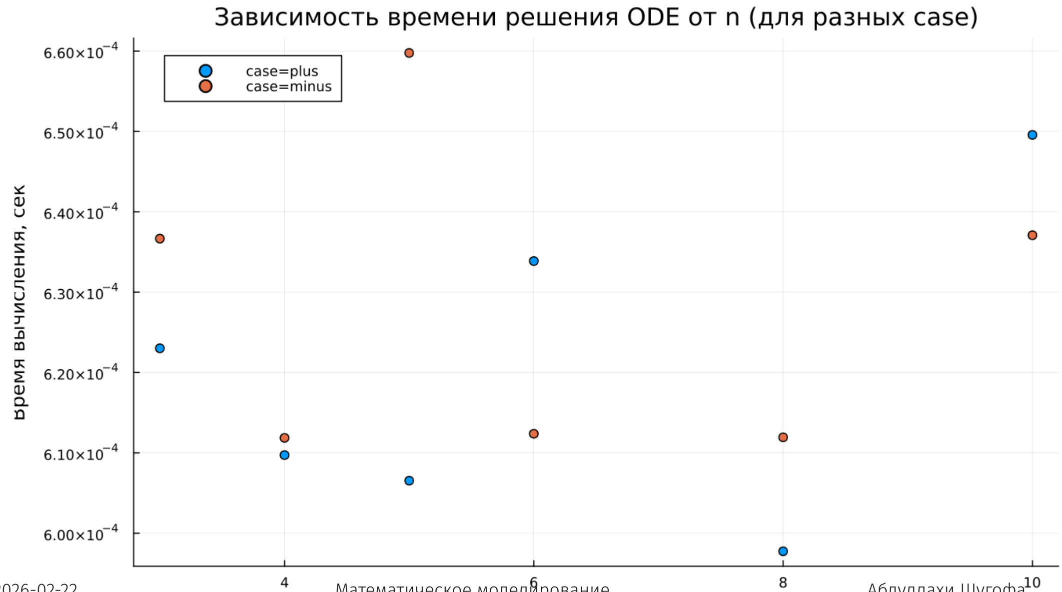
4.2 Относительный масштаб траекторий

Введём показатель:

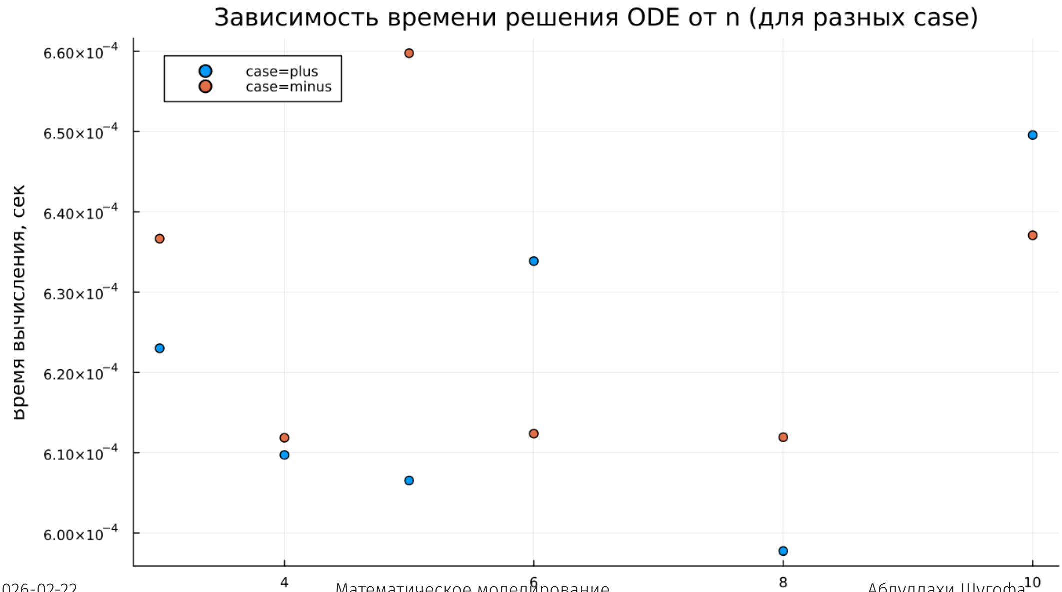
$$\text{scale\_ratio} = \frac{r_{\text{final}}}{\max(r_{\text{boat}})}.$$




Зависимость времени решения ODE от n (для разных case)
case=plus
case=minus
Время вычисления, сек
6.60×10⁻⁴
6.50×10⁻⁴
6.40×10⁻⁴
6.30×10⁻⁴
6.20×10⁻⁴
6.10×10⁻⁴
6.00×10⁻⁴
4
6
8
10


Зависимость времени решения ODE от n (для разных case)
case=plus
case=minus
Время вычисления, сек
6.60×10⁻⁴
6.50×10⁻⁴
6.40×10⁻⁴
6.30×10⁻⁴
6.20×10⁻⁴
6.10×10⁻⁴
6.00×10⁻⁴
4
6
8
10

4.3 Временные характеристики вычислений



5. 5. Заключение

1. Движение катера описывается логарифмической спиралью.

1. Движение катера описывается логарифмической спиралью.
2. Параметр n регулирует интенсивность радиального роста.

1. Движение катера описывается логарифмической спиралью.
2. Параметр n регулирует интенсивность радиального роста.
3. Начальные условия влияют на масштаб, но не изменяют форму траектории.

5.1 Основные выводы

1. Движение катера описывается логарифмической спиралью.
2. Параметр n регулирует интенсивность радиального роста.
3. Начальные условия влияют на масштаб, но не изменяют форму траектории.
4. Численная реализация демонстрирует устойчивость и малые вычислительные затраты.