Нелинейная краевая задача, вариант 4 (Аристеев)

Требуется найти решение краевой задачи на отрезке $x_L \le x \le x_R$

$$y'' = -2yy' \qquad (1)$$

с граничными условиями на концах отрезка:

$$y(x_L) = C_L, \quad y(x_R) = C_R\,. \qquad (2)$$

$$x_L = 0, \quad x_R = 10,$$

$$C_L = 0, \quad C_R = \mathrm{th}(10).$$

У нелинейной задачи может быть много решений. Требуется найти решение

$$y_a(x) = \mathrm{th}(x)$$

(убедитесь, что это решение удовлетворяет условиям (1) и (2)).

Решение нелинейной задачи должно быть сведено к решению серии линейных задач для поправок методом Ньютона:

$$v'' - q_n(x)v' - p_n(x)v = \varphi_n(x) \qquad (3)$$

с соответствующими граничными условиями.

Разностная задача должна аппроксимировать дифференциальную со вторым порядком аппроксимации.

Начальное приближение в ньютоновском процессе нужно брать в виде

$$y_{ini}(x) = (1-\alpha)\,y_a(x) + \alpha\,y_{lin}(x),$$

где $y_{lin}(x)$ — линейная функция, удовлетворяющая граничным условиям задачи.

Требуемая точность решения $\varepsilon = 10^{-4}$.

Требования к программе.

1) Параметры варианта x_L, x_R, ε должны быть реализованы в виде переменных (их значения будут варьироваться при сдаче).

2) Использовать т.н. сдвинутую расчетную сетку с постоянным шагом *h*, у которой точка $x = x_L$ лежит посередине между двумя самыми левыми точками сетки, а правая точка совпадает с точкой x_R. Например, если нумерация точек сетки начинается от 1, то $(x_1 + x_2)/2 = x_L$.

3) Восполнять сеточную функцию до непрерывной полиномами Лагранжа.

4) Показать сходимость решения линейной разностной задачи, выводить на печать величину $\delta_h = \|v_h - v_{3h}\|$ (delta), где v_h — решение на сетке с шагом *h*.

5) Показать второй порядок сходимости решения линейной разностной задачи **<u>на разных ньютоновских итерациях</u>**, выводить на печать величину $R_h = \delta_{3h} / \delta_h$ (ratio).

6) Показать сходимость ньютоновских итераций, выводить величину нормы поправки $\|v_h\|$. Показать сходимость к требуемому решению, выводить величину нормы погрешности ε_h.

7) Найти интервал допустимых значений α, при котором ньютоновский процесс сходится к данному аналитическому решению (два значащих знака у $\alpha_{\min}$ и $\alpha_{\max}$).

Структура программы представляет собой два вложенных цикла, каждый из которых реализует свой итерационный процесс.

Во внутреннем цикле осуществляется расчёт решений линейного уравнения для поправки на последовательности всё более подробных сеток, контролируется сходимость численного решения к решению дифференциальной задачи при стремлении шага сетки к нулю. Шаг сетки мельчится до тех пор, пока не будет выполнено условие

$$\left\| v_h - v_{3h} \right\| < \varepsilon / 2,$$

где v_h и v_{3h} — численные решения, полученные на сетках с шагами h и $3h$ соответственно. Для проведения сравнения эти два решения должны быть проинтерполированы на представительное множество контрольных точек, например, в точки сетки с шагом $3h$.

Во внешнем цикле вычисляются параметры задачи (3) и контролируется сходимость итерационного процесса Ньютона.

После решения задачи (3) очередное приближенное решение задачи (1)–(2) вычисляется по формуле

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + v(x),$$

и итерации повторяются до достижения заданной точности ε (если процесс сходится). Процесс останавливается, если выполнено условие:

$$\left\| v_h \right\| < \varepsilon / 2.$$

Если при этом величина погрешности $\varepsilon_h > \varepsilon$, то это означает, что процесс сошёлся к другому решению, и такое α считается недопустимым.

Пример желательного оформления задачи приведен в файле «Пример рисунков».