Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Казахстанский филиал
Факультет прикладной математики и информатики

Отчет по практикуму по специализации
Лагранжев подход для уравнения теплопроводности

Составил: Шахпутов А.Е.

Преподаватель: Юрмальник Р.Ю.

Астана 2025

Содержание

1 Теоретическая постановка

1.1 Микро-макро переход

Рассмотрим микро модель одномерного движения броуновской частицы:

$$\begin{cases} dx_i(t) = v_i dt + \sigma_i dW_i(t), \qquad i = \overline{1,N}; \\ x_i(0) = x_i^0. \end{cases} \tag{1}$$

При $N \to \infty$ переходят к макроскопическому описанию, вводя меру плотности $u(x,t)$, которая порождает совокупность траекторий $x_i(t)$ по след. формуле:

$$\forall \varphi(x): \int \varphi(x) u(x,t) dx = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \varphi(x_i(t))$$

где φ - достаточно гладкая финитная функция. Возьмем стохастический дифференциал от обеих частей

$$d_t \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (dx)^2$$
$$dW \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{dt})$$

Пусть $v_i = 0 \Rightarrow dx = \sigma dW$, соответственно $\quad (dx)^2 \approx \sigma^2 (dW)^2 \sim \sigma^2 dt$:

$$d_t \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \sigma dW + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \sigma^2 dt$$

$$\int \varphi d_t u dx = \frac{1}{N} \sum d_t \varphi = \left(\frac{1}{N} \sum \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \sigma^2 \right) dt + \left(\frac{1}{N} \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x} \sigma \right) dW =$$
$$= \left(\int \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \sigma^2 u dx \right) dt + \left(\int \frac{\partial \varphi}{\partial x} \sigma u dx \right) dW =$$

Получили стохастическое обобщенное уравнение диффузии. Проинтегрируем по частям правую часть:

$$= \int \varphi \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\sigma^2 u)}{\partial x^2} dx \right) dt - \int \varphi \frac{\partial (\sigma u)}{\partial x} dx dW$$

$$\int \varphi \left(d_t u - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\sigma^2 u)}{\partial x^2} dt + \frac{\partial (\sigma u)}{\partial x} dW \right) dx = 0, \quad \forall \varphi$$

Усреднив по времени ($d\bar{W} = 0$) и учитывая произвольность φ, получим макро уравнение в частных производных, т.е. уравнение диффузии:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\bar{\sigma}^2 \bar{u})}{\partial x^2}. \tag{2}$$

1.2 Схема Эйлера-Маруямы

Простейшим эффективным численным методом аппроксимации ОДУ является метод Эйлера. Метод Эйлера-Маруяма является аналогом метода Эйлера для ОДУ. Рассмотрим СДУ:

$$\begin{cases} dX(t) = a(t)X(t)dt + \sigma X(t)dW(t), \\ X(t_0) = X_0, \end{cases} \tag{3}$$

где W(t) — винеровский процесс, на некотором интервале времени [0,T].

Зафиксируем равномерную сетку $\omega_t = \left\{t_{i+1} = t_i + \Delta t, i = \overline{1,n}, \Delta t = T/n\right\}$, где

- T — длина рассматриваемого временного промежутка,
- n — количество шагов в рассматриваемом промежутке времени,
- t — шаг по времени.

Также введем следующие обозначения:

$$X(t_i) = X_i, \qquad a(t_i) = a_i.$$

Проинтегрируем исходное уравнение на промежутке $[t_i, t_{i+1}]$. Получим:

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} a(s)X(s)ds + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma X(s)dW(s). \tag{4}$$

Переходя к конечным разностям и определения стохастического интеграла, имеем:

$$X_{i+1} = X_i + a_i X_i \Delta t + \sigma X_i \Delta W_i, \tag{5}$$

где $\Delta W_i = W_{i+1} - W_i$ - приращение винеровского процесса, которое, исходя из свойств винеровского процесса, можно записать в виде: $\Delta W_i = \xi_i\sqrt{\Delta t}$, где $\xi_i \in \mathcal{N}(0,1)$. Т.е. ξ_i — случайная величина, распределенная по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Наиболее универсальный способ построения таких схем состоит в использовании стохастического аналога формулы Тейлора. Принципы построения таких схем совпадают с соответствующими принципами в детерминированном случае. При этом в разложении присутствуют кратные интегралы Ито по винеровским траекториям.

2 Результаты

2.1 Линейное уравнение теплопроводности

2.1.1 Однородная задача

Задача 1

Решим задачу для уравнения теплопроводности на отрезке $a < \ < b$:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \qquad a < x < b, \qquad t > 0, \\ u|_{x=a} = u|_{x=b} = 0, \\ u|_{t=0} = e^{-x^2}. \end{cases} \tag{6}$$

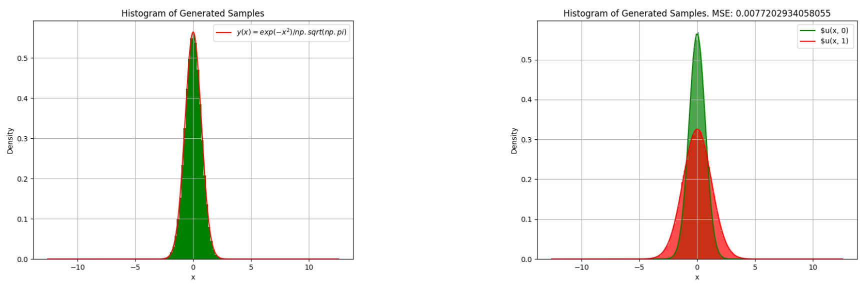
Поскольку уравнение однородное, решение задачи можно предствить в виде ряда произведения двух функций, отдельно зависящих от x и t соответственно. Т.о., аналитическое решение уравнения (6) будет выглядить следующим образом:

$$u(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4\alpha t+1}}}{\sqrt{4\alpha^2 t + 1}}. \tag{7}$$

Заметим, что ряд сходится быстрее при большем t, поэтому при достаточно больших t можно учитывать лишь несколько первых членов. Скорость сходимости также зависит от роста собственных значений с увеличением индекса, что характерно и для более сложных решений уравнения теплопроводности.

Отметим также, что $u(x,t)$ - нормированная функция плотности распределения точек на прямой в момент времени t:

$$\int_R u(x,t)dx = 1.$$



(a) Начальное распределение

(b) Применение Лагранжева подхода

Рис. 1: Решение линейного однородного уравнения теплопроводности (6)

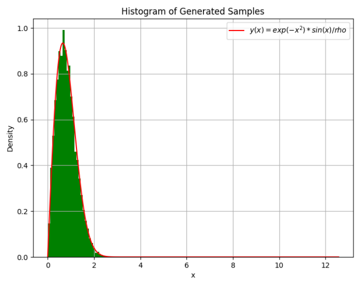
Задача 2

Рассмотрим задачу (6) с другим начальным распределением:

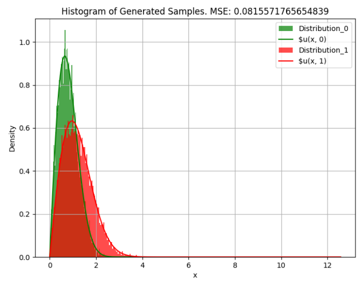
$$u|_{t=0} = e^{-x^2} \sin x.$$

Тогда аналитическое уравнение будет выглядеть следующим образом:

$$u(x,t) = e^{\frac{-(4x^2+t)}{(4(1+t))}} * \frac{\sin\frac{x}{1+t}}{\sqrt{1+t}}. \tag{8}$$



(a) Начальное распределение



(b) Применение Лагранжева подхода

Рис. 2: Решение линейного однородного уравнения теплопроводности с аналитическим решением (8)

2.1.2 Дополнительный источник

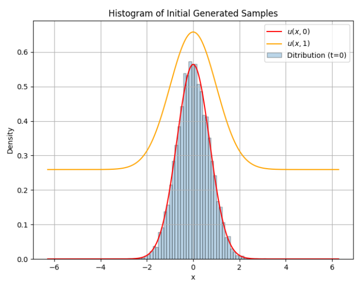
Задача 3

Теперь рассмотрим уравнение диффузии при дополнительноим источнике тепла:

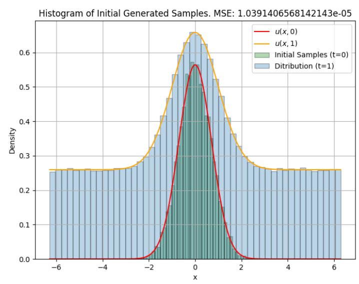
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \\ u(x,0) = e^{-x^2}, \\ f(x,t) = sin(t). \end{cases} \tag{9}$$

Решая данную систему, получим следующее решение:

$$u(x,t) = 1 - \cos(t) + \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{1+4\alpha^2 t}\right)}{\sqrt{1+4\alpha^2 t}} \tag{10}$$



(a) Начальное распределение



(b) Применение Лагранжева подхода

Рис. 3: Решение линейного уравнения теплопроводности (9)

Задача 4

Найти температуру однородного стержня длины l, если его боковая поверхность теплоизолирована, начальная температура равна нулю и температура концов поддерживается равной нулю. Вдоль стержня распределены источники тепла с плотностью:

$$f(x,t) = e^{\alpha t} x(l-x), \tag{11}$$

где α - вещественный параметр.

Начально-краевая задача, моделирующая описанный в условии задачи процесс, имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{\alpha t} x(l-x), \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0, \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{12}$$

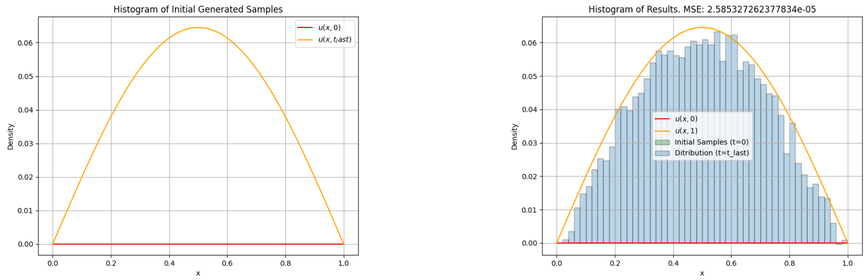
Общее решение задачи записывается следующим образом:

$$u(x,t) = -\frac{8l^4}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-(\frac{\pi \alpha (2k+1)}{l})^2 t} - e^{\alpha t}}{\alpha l^2 + \pi^2 a^2 (2k+1)^2} \frac{\sin \frac{\pi(2k+1)}{l} x}{(2k+1)^3}. \tag{13}$$

При $\alpha < 0$ температра тела при $t \to +\infty$ стремится к 0.

При $\alpha \geq 0$ температра тела при $t \to +\infty$ зависит от времени по такому же закону, что и плотность распр. источника и сис. выходит на стационарный режим:

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-\alpha t} u(x,t) = -\frac{8l^4}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi(2k+1)}{l} x}{[\alpha l^2 + \pi^2 a^2 (2k+1)^2](2k+1)^3}.$$



(a) Начальное распределение (b) Применение Ланранжева подхода

Рис. 4: Решение линейного уравнения теплопроводности (12)

2.2 Нелинейное уравнение теплопроводности

Задача 5

Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности, когда коэффициент теплопроводности зависит от $u(x,t)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}), \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0, \\ k(u) = u^2, \\ u(x,0) = 6x(1-x). \end{cases} \tag{14}$$

Сравнивая (2) и (14), выведим как соотносится k(u) и σ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2(\sigma^2 u)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}). \tag{15}$$

Предположим, что $k(u) = u^\alpha$. Тогда:

$$\frac{\partial}{\partial x}(u^\alpha \frac{\partial u}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}}{\partial x}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\frac{u^\alpha}{\alpha+1}u). \tag{16}$$

Из (15) и (16) следует, что:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2u^\alpha}{\alpha+1}}. \tag{17}$$

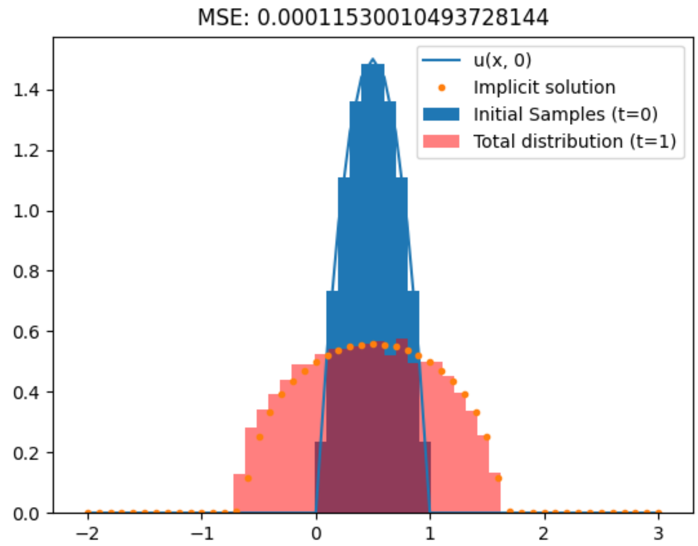
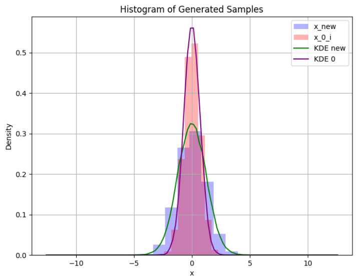
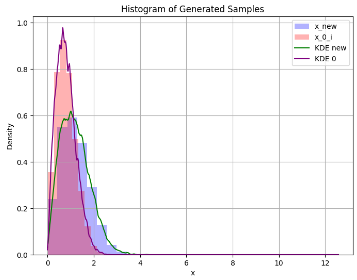


Рис. 5: Нелинейное уравнение теплопроводности

Примеры интерполяции методом KDE

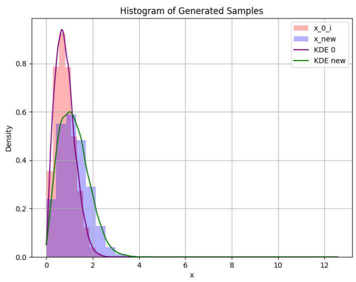


(a) Интерполяция задачи (6)

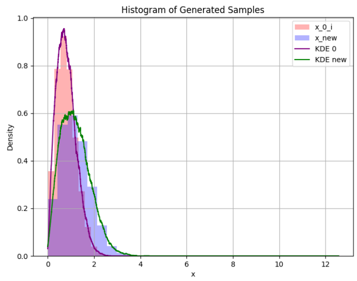


(b) Интерполяция задачи (8)

Рис. 6: KDE. Gaussian interpolation



(a) Silverman's rule and Gaussian kernel



(b) Scott's rule and Rectangular kernel

Рис. 7: Ядерная оценка плотности (KDE)

Список литературы

[1] Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Задачи по математической физике. — 1998. — 350 с.

[2] Юрмальник Р.Ю. Учебное пособие. — 2024. — 12 с.

[3] Листинг кода