

# 支持向量机多专家决策算法

田盛丰 黄厚宽

(北方交通大学 计算机科学技术系 北京 100044)

**摘要** 多专家决策算法是对多个专家的决策做出综合决策,使决策更符合实际情况.通常的算法使用各专家决策的加权求和法,由于各专家的权值在不同的情况下会有所不同,因此难以应用.本文提出采用基于支持向量机的非线性回归法进行综合决策,克服了权值变化的问题.多专家决策的另一途径是选取最佳的专家决策,本文采用基于支持向量机的非线性分类的方法,可以在不同情况下选取相应的最佳专家决策.本文提出的算法用于“隧道工程岩石力学参数综合处理系统”,对若干子系统的结果进行综合,解决了专家权值变化的问题,取得了较精确的结果.

**关键词** 决策,支持向量机,回归,分类

**中图法分类号** TP18

## 1 引言

多专家决策算法就是根据一组实例值及相应的多个专家预测,学习一种策略,能够综合专家的预测,给出最接近实际值的决策.决策问题可分为时域情况和区域情况两种.时域情况相当于如下问题:已知有  $m$  个专家,设对时间序列  $T: 1, 2, \dots, t$ , 第  $i$  个专家做出的决策序列为  $Z_i: z_{i1}, z_{i2}, \dots, z_{it}$ , 实际输出序列为  $Y: y_1, y_2, \dots, y_t$ . 决策算法应根据上述序列给出  $t+1$  时刻的决策  $z_{i,t+1}$ , 使之与实际输出  $y_{t+1}$  预期的误差为最小.区域情况相当于如下问题:已知有  $m$  个专家,对任意的输入  $X: x_1, x_2, \dots, x_k$ , 第  $i$  个专家给出的相应的决策为  $Z_i: z_{i1}, z_{i2}, \dots, z_{ik}$ , 实际的相应输出为  $Y: y_1, y_2, \dots, y_k$ . 决策算法应根据这些数据对当前的输入  $x$  给出决策  $z$ , 使之与实际输出  $y$  预期的误差为最小.

多专家决策的基本方法是求各专家决策的加权和,并不断根据已知的数据对权值做出调整.对时域问题比较典型的方法是加权多数算法 (Weighted

Majority Algorithm, 简称 WM)<sup>[3]</sup>. 该算法对每次输入都根据现有的权值做出预测,并根据实际值对权值做出修正.对区域问题,由于对于各个子区域,各个专家的权值可能有所不同,因此算法比较复杂.一个可行的策略是,确定和调整各个子区域中各专家的权值,并根据输入所在的子区域的权值做出决策<sup>[7]</sup>. 上述加权方法的缺点是: (1) 当所有专家决策都在一个方向上偏离实际值时,不能得到与实际值偏差最小的决策. (2) 在区域问题中,子区域难于划分,且子区域的数目随着输入维数的增加而迅速增加,算法实现有一定难度.本文对时域和区域问题统一采用支持向量机的方法进行专家决策,克服了以上两个问题,决策效果大为改善.

多专家决策的另一个常用的方法是通过实例学习确定最佳的专家.当然,在不同的子区域最佳专家可能有所不同.本文对这个问题也采用支持向量机的方法予以解决.

支持向量机是 Vapnik 等人根据统计学习理论提出的一种学习方法,近年来在模式识别、回归分析和特征提取等方面得到了很多应用<sup>[2,4,6]</sup>. 支持向量机方法根据 Vapnik 的结构风险最小化原则,尽量提高学习机的泛化能力,即是使由有限训练样本得到

的决策规则对独立的测试集仍能得到小的误差.此外,支持向量机算法是一个凸二次优化问题,能够保证找到的极值解就是全局最优解.这些特点使支持向量机成为一种优秀的学习算法.

本文给出基于支持向量机的多专家综合决策算法和最佳专家决策算法,并给出实验结果及在一个实际的多专家决策系统中的应用.

## 2 多专家综合决策算法

设已知输入样本为  $n$  维向量,其  $k$  个样本及其实际值表示为

$$(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k) \in R^n \times R, \quad (1)$$

设有  $m$  个专家,第  $i$  个专家对  $k$  个样本的决策值分别为  $z_{i1}, z_{i2}, \dots, z_{ik}$ .我们将根据输入估值的问题转化为根据专家决策估值.此时  $k$  组专家决策及相应的实际值表示为

$$(z_1, y_1), \dots, (z_k, y_k) \in R^m \times R, \quad (2)$$

基本的加权算法对输入根据专家决策给出综合决策

$$f(z) = w \cdot z + b, \quad (3)$$

其中  $w$  为各专家的权值向量,“ $\cdot$ ”表示向量的点积,  $b$  为偏移值.此时  $b$  的作用是当所有的专家决策都向一个方向偏离实际值时,也能得到正确的综合决策.现在的问题成为,根据已知的专家决策和实际输出值,确定权向量  $w$  和标量  $b$ .这是一个线性回归问题,只要求出回归函数  $f(z)$ ,不论是时域问题还是区域问题,都可以得到解决.但在大多数情况下,在不同的时段或子区域,各专家的权值是不同的.采用支持向量机的解决方法是,把专家的决策域用一个非线性函数  $\Phi$  映射到一个高维特征空间,再在高维特征空间进行线性回归,从而取得在原空间非线性回归的效果.此时综合决策为

$$f(z) = w \cdot \Phi(z) + b, \quad (4)$$

回归问题为最小化

$$R(w, b, \zeta, \zeta^*) = \frac{1}{2} w \cdot w + C \sum_{i=1}^k (\zeta_i + \zeta_i^*), \quad (5)$$

条件为

$$y_i - f(z_i) \leq \zeta_i + \varepsilon, \quad i = 1, \dots, k \quad (6)$$

$$f(z_i) - y_i \leq \zeta_i^* + \varepsilon, \quad i = 1, \dots, k \quad (7)$$

$$\zeta_i, \zeta_i^* \geq 0, \quad i = 1, \dots, k \quad (8)$$

式(5)中第一项使函数更为平坦,从而提高泛化能力,第二项使误差为最小,常数  $C$  对两者做出折中.  $\varepsilon$  为一正常数,从式(6)和(7)中可以看出,误差函数  $E$  取为

$$E = \begin{cases} 0, & \text{如果 } |f(z_i) - y_i| < \varepsilon \\ |f(z_i) - y_i| - \varepsilon, & \text{其它} \end{cases} \quad (9)$$

这是一个凸二次优化问题,引入拉格朗日函数:

$$L(w, b, \zeta, \zeta^*, \alpha, \alpha^*, \gamma, \gamma^*) = \frac{1}{2} w \cdot w + C \sum_{i=1}^k (\zeta_i + \zeta_i^*) - \sum_{i=1}^k \alpha_i [\zeta_i + \varepsilon - y_i + f(z_i)] - \sum_{i=1}^k \alpha_i^* [\zeta_i^* + \varepsilon + y_i - f(z_i)] - \sum_{i=1}^k (\gamma_i \zeta_i + \gamma_i^* \zeta_i^*), \quad (10)$$

其中  $\alpha_i, \alpha_i^* \geq 0; \gamma_i, \gamma_i^* \geq 0; i = 1, \dots, k$ .

函数  $L$  应对  $w, b, \zeta_i, \zeta_i^*$  最小化,对  $\alpha_i, \alpha_i^*, \gamma_i, \gamma_i^*$  最大化.函数  $L$  的极值应满足条件:

$$\frac{\partial}{\partial w} L = 0, \frac{\partial}{\partial b} L = 0, \frac{\partial}{\partial \zeta_i} L = 0, \frac{\partial}{\partial \zeta_i^*} L = 0, \quad (11)$$

从而得到对偶形,最大化函数:

$$W(\alpha, \alpha^*) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k (\alpha_i - \alpha_i^*)(\alpha_j - \alpha_j^*)(\Phi(z_i) \cdot \Phi(z_j)) + \sum_{i=1}^k (\alpha_i - \alpha_i^*) y_i - \sum_{i=1}^k (\alpha_i + \alpha_i^*) \varepsilon. \quad (12)$$

其约束为

$$\sum_{i=1}^k (\alpha_i - \alpha_i^*) = 0, \quad (13)$$

$$0 \leq \alpha_i, \alpha_i^* \leq C, \quad i = 1, \dots, k \quad (14)$$

式(12)涉及到高维特征空间的点积运算  $\Phi(z_i) \cdot \Phi(z_j)$ ,而且函数  $\Phi$  是未知的、高维的.支持向量机理论只考虑高维特征空间的点积运算  $K(z_i, z_j) = \Phi(z_i) \cdot \Phi(z_j)$ ,而不直接使用函数  $\Phi$ ,从而巧妙地解决了这个问题.我们称  $K(x, y)$  为核函数,核函数的选取应使其为高维特征空间的一个点积,即存在函数  $\Phi$ ,使  $\Phi(x) \cdot \Phi(y) = K(x, y)$ .已经证明,对称函数  $K(x, y)$  只要满足 Mercer 条件即可满足要求<sup>[6]</sup>.常用的核函数有

1) 多项式核函数

$$K(x, y) = (x \cdot y + 1)^d, d = 1, 2, \dots \quad (15)$$

2) RBF(Radial Basis Function) 核函数

$$K(x, y) = \exp\left(-\frac{\|x - y\|^2}{2\sigma^2}\right); \quad (16)$$

3) Sigmoid 核函数

$$K(x, y) = \tanh[b(x \cdot y) - c]. \quad (17)$$

这样式(12)变成

$$W(\alpha, \alpha^*) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k (\alpha_i - \alpha_i^*)(\alpha_j - \alpha_j^*) K(z_i, z_j) + \sum_{i=1}^k (\alpha_i - \alpha_i^*) y_i - \sum_{i=1}^k (\alpha_i + \alpha_i^*) \varepsilon. \quad (18)$$

式(18)和约束(13)、(14)表示的优化问题已有高效的算法求解,如内点算法<sup>[3]</sup>.向量  $w$  的值可由式(11)

中对  $w$  的偏导数公式求得:

$$w = \sum_{i=1}^k (\alpha_i - \alpha_i^*) \Phi(z_i). \quad (19)$$

由于函数  $\Phi$  未知, 因此  $w$  无法显式地表达, 但函数  $f(z)$  可直接表示为

$$f(z) = \sum_{i=1}^k (\alpha_i - \alpha_i^*) K(z, z_i) + b. \quad (20)$$

可以证明, 任何一组  $\alpha_i$  和  $\alpha_i^*$  都不会同时为非 0. 对应于  $\alpha_i = C$  或  $\alpha_i^* = C$  的  $f(z_i)$  与  $y_i$  的误差大于  $\epsilon$ , 对应于  $\alpha_i \in (0, C)$  或  $\alpha_i^* \in (0, C)$  的  $f(z_i)$  与  $y_i$  的差等于  $\epsilon$ , 即

$$\epsilon - y_i + f(z_i) = 0, \text{ 对于 } \alpha_i \in (0, C) \quad (21)$$

$$\epsilon + y_i - f(z_i) = 0, \text{ 对于 } \alpha_i^* \in (0, C) \quad (22)$$

以上两式可用于求标量  $b$ .

综上所述, 多专家决策过程如图 1 所示, 对输入  $x$  首先得到  $m$  个专家的决策, 再由式(20) 计算综合决策.

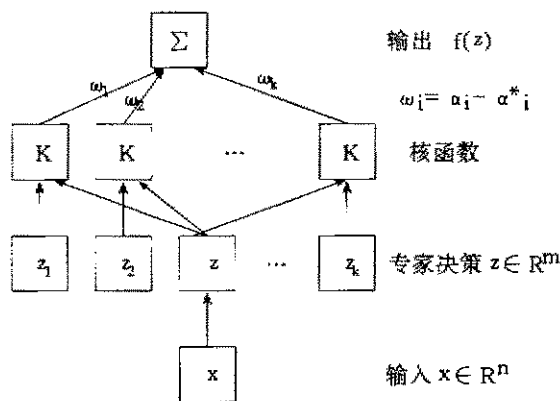


图 1 多专家决策过程

### 3 最佳专家决策算法

我们先讨论两个专家的情况. 问题是寻找一个决策面, 该决策面将输入域划分成两个子区域, 每个子区域对应一个最佳的专家. 设已知输入样本为  $n$  维向量, 其  $k$  个样本及其实际值表示为

$$(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k) \in R^n \times R. \quad (23)$$

设对第  $i$  个输入样本, 两个专家的决策值分别为  $z_{i1}$  和  $z_{i2}$ , 且  $e_{i1} = |z_{i1} - y_i|$  和  $e_{i2} = |z_{i2} - y_i|$  分别为两个专家的决策值与实际值之差的绝对值. 令  $u_i$  表示输入样本  $x_i$  所在的子区域, 或称为类别:

$$u_i = \begin{cases} 1, & e_{i1} < e_{i2} \\ -1, & \text{其它} \end{cases} \quad i = 1, \dots, k \quad (24)$$

可将  $k$  个输入样本及其所属类别表示为

$$(x_1, u_1), \dots, (x_k, u_k) \in R^n \times \{\pm 1\}. \quad (25)$$

在线性可分的情况下, 超平面

$$w \cdot x + b = 0 \quad (26)$$

将样本分成两类, 其中“ $\cdot$ ”表示向量的点积. 在非线形可分的情况下, 可使用一个非线性函数  $\Phi$  把数据映射到一个高维特征空间, 再在高维特征空间建立优化超平面. 该超平面在原空间可表示为决策面

$$w \cdot \Phi(x) + b = 0. \quad (27)$$

决策面应满足约束:

$$u_i [w \cdot \Phi(x_i) + b] > 0, i = 1, \dots, k \quad (28)$$

显然, 向量  $w$  和标量  $b$  都不是唯一的, 考虑到两类样本离决策面都应有一段距离, 因此决策面的约束可为

$$u_i [w \cdot \Phi(x_i) + b] \geq 1, i = 1, \dots, k \quad (29)$$

考虑到可能存在一些样本不能被决策面正确分类, 因此引入松弛变量

$$\zeta_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, k \quad (30)$$

决策面的约束变为

$$u_i [w \cdot \Phi(x_i) + b] \geq 1 - \zeta_i, i = 1, \dots, k \quad (31)$$

分类问题变成在约束(30)和(31)下最小化:

$$R(w, b, \zeta, \zeta^*) = \frac{1}{2} w \cdot w + C \sum_{i=1}^k \zeta_i. \quad (32)$$

上式第一项使决策面更为平缓, 以提高泛化能力, 第二项使错分为最少, 常数  $C$  对两者做出折中.

为求解这个优化问题, 引入拉格朗日函数:

$$L(w, b, \zeta, \alpha, \gamma) = \frac{1}{2} w \cdot w + C \sum_{i=1}^k \zeta_i - \sum_{i=1}^k \alpha_i [u_i (w \cdot \Phi(x_i) + b) - 1 + \zeta_i] - \sum_{i=1}^k \gamma_i \zeta_i, \quad (33)$$

其中  $\alpha_i \geq 0, \gamma_i \geq 0, i = 1, \dots, k$ .

函数  $L$  应对  $\alpha_i$  和  $\gamma_i$  最大化, 且对  $w, b$  和  $\zeta_i$  最小化. 函数  $L$  的极值应满足条件:

$$\frac{\partial}{\partial w} L = 0, \quad \frac{\partial}{\partial b} L = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta_i} L = 0. \quad (34)$$

由此可得到优化问题的对偶形式, 最大化函数:

$$W(\alpha) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \alpha_i \alpha_j u_i u_j K(x_i, x_j) + \sum_{i=1}^k \alpha_i, \quad (35)$$

其约束为

$$0 \leq \alpha_i \leq C, \quad i = 1, \dots, k \quad (36)$$

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i u_i = 0, \quad (37)$$

式(35)中核函数  $K(x_i, x_j) = \Phi(x_i) \cdot \Phi(x_j)$ .

与上节相同, 核函数的采用避免了在高维特征空间

的点积运算. 与上节优化问题相似, 上述问题可用内点算法求解.

按照优化理论的 Kuhn-Tucker 定理<sup>[1]</sup>, 在鞍点, 对偶变量与约束的乘积为 0, 即

$$\alpha_i [u_i (\mathbf{w} \cdot \Phi(\mathbf{x}_i) + b) - 1 + \zeta_i] = 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (38)$$

由式(38)可以看出, 远离决策面的输入样本所对应的  $\alpha_i$  必定为 0, 而非 0 的  $\alpha_i$  所对应的样本完全确定了决策面, 因此称为支持向量. 与上节类似, 对应于  $\alpha_i \in (0, C)$  的样本, 有

$$u_i (\mathbf{w} \cdot \Phi(\mathbf{x}_i) + b) = 1. \quad (39)$$

根据此式可计算出  $b$  值, 向量  $\mathbf{w}$  的值可由式(34)中对  $\mathbf{w}$  的偏导数公式求得

$$\mathbf{w} = \sum_{\text{支持向量}} \alpha_i u_i \Phi(\mathbf{x}_i). \quad (40)$$

判别函数  $f(\mathbf{x})$  可直接表示为

$$f(\mathbf{x}) = \text{sign} \left[ \sum_{\text{支持向量}} \alpha_i u_i K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) + b \right]. \quad (41)$$

根据式(41)可确定输入样本应采用的最佳专家决策, 对于多个专家的情况 ( $m > 2$ ), 可以两类算法为基础实现, 为每个输入确定各专家决策的优劣顺序.

## 4 实验结果与应用

为说明起见, 设有一维变量  $x \in [1, 5]$ , 两个“专家”对该变量的取值所做的决策分别为  $y = 2$  和  $y = x - 1$ , 而实际函数为  $y = \ln x$ . 我们在区间  $[1, 5]$  内随机选取 10 个  $x$  值, 根据“专家”的决策值和实际值用  $d = 2$  的多项式核函数进行回归, 综合决策的结果如图 2 所示, 图中圆圈为等距离选取的 10 个  $x$  的综合决策值. 由图中结果可见, 虽然两个“专家”决策误差很大, 但综合决策取得了较精确的结果. 作为另一种方法, 为挑选最佳的专家决策, 用支持向量机方法进行了分类. 得到的决策点为  $x = 2.95$ , 即  $x > 2.95$  时  $y = 2$  为最佳,  $x < 2.95$  时  $y = x - 1$  为最佳. 此决策点与实际的分界点  $x = 3$  稍有差异, 这是因为输入样本是随机选取的且数量较少的缘故.

在实际问题中, 如果专家决策在不同的区域取值相同, 则无法获得正确的综合决策, 如图 3(a) 所示. 图中变量  $x \in [0, 4]$ , 两个专家对变量的估值分别为  $y = 2.5$  和  $y = 0.5$ , 而实际函数为  $y = 3e^{-x/2}$ . 图中圆圈为综合决策值, 决策是失败的. 这是因为常数决策丢失了太多的信息. 解决方法是增加一个任意的虚拟单调函数, 此处取为  $y = 1 + x/4$ , 结果如图 3(b) 所示, 用  $d = 3$  的多项式核函数进行回归, 综合决策取得了较好的结果.

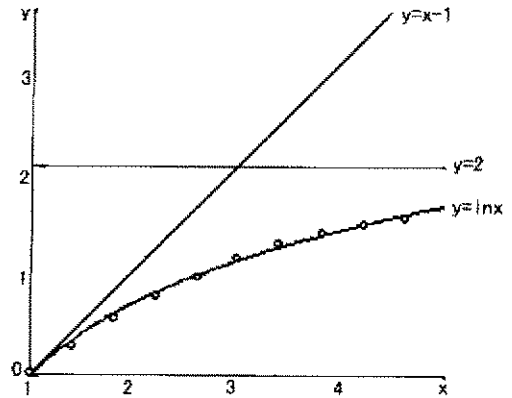
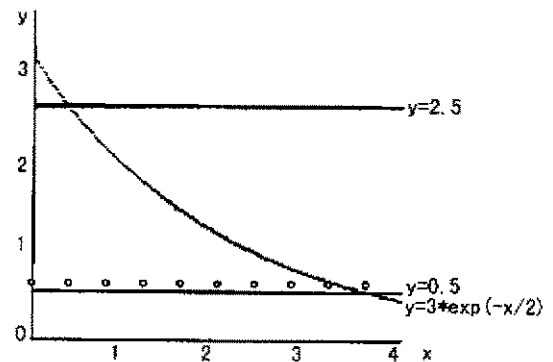
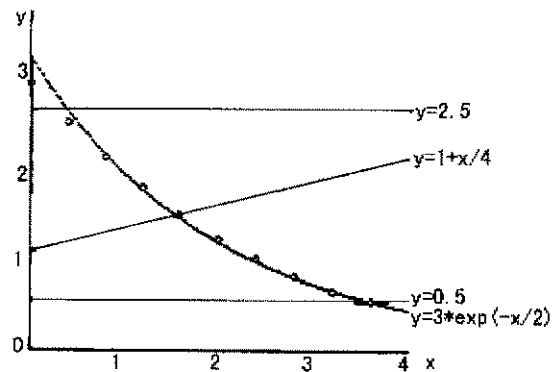


图 2 多专家决策算法示例



(a)



(b)

图 3 综合决策中虚拟函数的使用

本算法已应用于“隧道工程岩石力学参数综合处理系统”. 该系统是一个大型决策系统, 用于根据地质条件确定隧道开挖后的稳定性及支护参数. 系统由多个决策子系统组成: 基于规则的专家系统, 基于事例的专家系统和数值计算系统. 数值计算包括有限差分法, 有限元分析, 边界元分析和离散元分析等. 这些方法在不同的情况下效果是不同的, 因此系统首先根据某些专家知识选取 2-3 种方法进行决

策,再根据这些结果进行综合决策.系统建造初期,综合决策采用计算各专家决策加权和方法.其困难在于,各专家在不同的子区域的权值应是不同的,而子区域的划分比较困难.子区域划分过多,为确定权值所需学习的实例数量过多,子区域划分少,则不能反映权值的变化.因为有关权值划分的知识难以获取,因此子区域的划分有较大的主观随意性.现在采取支持向量机的回归方法,完全避免了子区域划分问题,因此效果明显改善.

## 5 结 束 语

本文介绍的多专家决策算法在加权和中引入非线性映射,从而克服了在不同的子区域各专家权值不同所造成的困难,可以简单而精确地确定综合决策.

对于复杂的问题,直接根据实例建立从输入到输出的回归函数是困难的,而从不同途径建立的专家决策可以在一定条件下取得较好的结果.采用各专家决策的加权算法确定综合决策可以取得更好的

结果.一般来说,各专家的权值在不同子区域应有所不同,但其变化比较平缓.因此,本文所述的基于支持向量机的多专家决策算法可以取得最佳的效果.

## 参 考 文 献

- [1] Bertsekas D P. Nonlinear Programming. MA: Athena Scientific, 1995
- [2] Cortes C, Vapnik V. Support-Vector Networks. Machine Learning, 1995, 20(3): 273-297
- [3] Littlestone N, Warmuth M K. The Weighted Majority Algorithm. Information Computation, 1994, 108: 212-261
- [4] Stitson M O, *et al.* Theory of Support Vector Machines. Technical Report CSD-TR-96-17, Department of Computer Science, Royal Holloway University of London, 1996
- [5] Vanderbei R J. LOQO: An Interior Point Method for Quadratic Programming. Technical Report SOR-94-15, Statistics & Operations Research, Princeton University, 1994
- [6] Vapnik V N. The Nature of Statistical Learning Theory. NY: Springer, 1995
- [7] 田盛丰, 蔺永华. 多专家决策算法. 计算机研究与发展, 1999, 36(7): 783-787

# A MULTI-EXPERT DECISION-MAKING ALGORITHM BASED ON SUPPORT VECTOR MACHINE

Tian Shengfeng, Huang Houkuan

(Department of Computer Science and Technology, Northern Jiaotong University, Beijing, 100044)

## ABSTRACT

The multi-expert decision-making algorithm makes integrative decision, based on several experts' decisions, which is better than each individual decision. Usually the weighted sum strategy is adopted. But it is difficult to use in practice, because the weights assigned to each experts often vary in different conditions. In this paper, a nonlinear regression algorithm based on support vector machine is presented to make the integrative decision and overcome the variant weight problem. Another approach of multi-expert decision-making is finding the best expert's decision. In this paper, a nonlinear classification method based on support vector machine is presented to provide best expert's decision in various cases. The algorithm is applied to "the integrated processing system for rock mechanical parameters in tunnel engineering", in which the integrative decision is obtained from several sub-systems, and good results are obtained.

**Key Words** Decision-Making, Support Vector Machine, Regression, Classification