文章编号:1000－8152(2001)02－0160－06

# 非线性控制系统的近似化方法*

胡跃明　胡终须　毛宗源　　李志权
(华南理工大学自动控制工程系·广州,510640)　(香港理工大学电子与资讯工程系·香港)

**摘要**:介绍了目前几种较常用的非线性控制系统近似化方法包括伪线性化方法、扩展线性化方法、近似输入/输出线性化、近似反馈线性化、中心流形及平均法等,对有关的理论与应用研究进展作出了较全面的综述.

**关键词**:非线性控制系统;线性化;近似化方法
**文献标识码**:A

# Approximation Methods of Nonlinear Control Systems

HU Yueming,　HU Zhongxu　and　MAO Zongyuan
(Department of Automatic Control Engineering, South China University of Thchnology·Guangzhou, 510640, P.R.China)
LI Chikuen
(Department of Electronic and Information Engineering, Hong Kong Polytechnic University · Hong Kong)

**Abstract**: The approximation approches such as pesudolinearization, linearization family, center manifold and singular perturbation for the design nonlinear control systems are briefly reviewed in the present paper. Both the advantages and disadvantages of related approximation methods are also analyzed.

**Key words**: nonlinear control systems; linearization; approximation

## 1　引言(Introduction)

非线性系统的分析和设计往往比线性系统要困难得多,非线性微分方程除非是经过特殊"处理",通常不可能得到封闭形式的解析解,象拉普拉斯变换、傅里叶变换、叠加原理等适用于线性系统的强有力的数学工具都不适用于非线性控制问题.因此对于实际工程控制人员来说,最简单的方法是把非线性动态特性线性化,然后再用熟知的线性系统设计方法完成控制系统的分析和综合.

近二十多年来以微分几何为主要工具发展起来的精确线性化方法,为解决一类非线性控制系统的分析与综合问题提供了强有力的手段.当非线性系统经李括号运算所得的矢量场满足对合性和满秩条件时,通过适当的状态与反馈变换,非线性控制系统可以实现输入/状态的精确线性化[1,2].当系统的解耦矩阵为非奇异阵时,通过适当的反馈变换可以实现输入/输出的精确线性化.若系统的相对度等于系统状态的维数时,则等同于输入/状态线性化,否则系统通常只能部分线性化,降价处理还需考虑系统的零动态及其对系统稳定性的影响.虽然该类线性方法具有一定的应用背景和理论意义,但精确线性化方法必须满足苛刻的条件,且结构复杂.除了某些具特殊结构(如三角形结构)的系统外,往往很难得到所需的非线性变换.另一方面大多数实际系统如轮式移动机器人等具非完整约束的力学系统不再满足精确线性化方法中的对合条件,因而研究非线性系统的近似处理方法具有相当的理论与应用意义,近年来也一直同样受到人们的高度重视.近似线性化方法被证明在平衡点的某一领域内是有效的,误差可以接受,因而广泛地应用于实际系统中.主要包括以下几种方法:1)伪线性化方法;2)扩展线性化方法;3)线性化族;4)近似输入/输出线性化;5)平均法等.这些方法大量散见于近年来国内外有关学术论文中.本文的目的是对有关的近似化思想及研究进展作一系统的综述,供有关同行参考.

## 2　近似化方法(Approximation methods)

考虑下列非线性系统

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{1}$$

其中 $f(0,0) = 0$;$x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^n$ 分别为状态和控制向量.传统的线性近似方法是直接将(1)式的右端函数作泰勒展开:

$$\dot{x} = Ax + Bu + f_h(x, u), \tag{2}$$

其中

$$A = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{(0,0)},\quad B = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{(0,0)},$$

而 $f_h(x,u)$ 表示包含 $x$ 和 $u$ 的高阶项,略去高阶项,即得系统在(0,0)处的线性近似系统.

* 基金项目:国家 863 计划智能机器人主题资助项目(9805－19),国家自然科学基金(69974015)资助项目,广东省自然科学基金(960235 及 990583)资助项目及广东省教育厅资助课题.
收稿日期:1999－05－31;收修改稿日期:2000－03－10.

当 $(A,B)$ 可控时,对于某些不太严重的非本质非线性特性,用上述的泰勒近似方法进行分析和设计,在工作点的某一邻域,大体是正确的,所产生的误差往往为工程上所接受.但随工作点的偏离,误差变大,系统性能变差. 显然,如果所得到的系数阵对 $(A,B)$ 不可控(事实上许多实际系统如非完整力学控制系统就属于这种情形[3,4]),则这种简单近似就不再适合.因此必须寻求其它更有效和实用的近似方法.

### 2.1　最佳拟线性化(Optimal quasi-linearization)

对于控制系统中典型的'强非线性'(本质非线性)特性,如不灵敏、饱和限幅、继电特性、滞环、间隙等,通常不满足前述线性化方法所要求的连续可微条件,拟线性化方法用线性环节近似代替系统中的非线性环节[2].

非线性环节 $N$,对于在 $[0,\infty)$ 上的任意一个连续函数 $x(t)$,非线性环节的输出为

$$(nx)(t) = n[t,x(t)], \tag{3}$$

对于 $C[0,\infty)$ 中的一个特殊函数 $x_0(t)$,由另一函数 $(wx_0)(t) = \int_0^t w_0(t-\tau)x_0(\tau)\mathrm{d}\tau$ 逼近非线性环节的输出 $(nx)(t)$,其中 $w_0(t)$ 为一线性环节的脉冲响应,希望这种逼近是'可能最好',由最小误差判据

$$e(w) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{\mathrm{T}}[(xn_0)(t) - (wx_0)(t)]^2\mathrm{d}t$$

得到脉冲响应 $w_0(\cdot)$,具体地选取输入 $x_0(\cdot)$ 为正弦函数 $A\sin(\omega t)$,将对应的非线性环节输出作傅里叶级数展开:

$$w(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)], \tag{4}$$

式中傅里叶系统 $a_i$,$b_i$ 通常为 $A$,$\omega$ 的函数.如果非线性环节为奇函数,则 $a_0 = 0$,近似地只考虑输出的基波,有

$$w(t) \approx a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t) = M\sin(\omega t+\phi), \tag{5}$$

使用线性环节 $N(A,\omega) = \dfrac{M\sin(\omega t+\phi)}{A\sin(\omega t)} = \dfrac{M}{A}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ 近似非线性元件,通常也称为描述函数方法.

上述为一种传统的工程近似方法,为推导描述函数的方便,通常应是:1) 只有一个单一的非线性环节;2) 自治系统;3) 非线性为奇函数类型.

### 2.2　伪线性化方法(Pesudolinearization)

前述 Lyapunov 线性化方法只考虑在某一平衡点附近作线性近似,但非线性系统往往有多个平衡点,根据不同的控制输入,平衡点为一条曲线或一流形.伪线性化方法[5~7]就是寻找一个与平衡点无关的系统的切模型,根据此模型的控制设计适合不同的平衡操作点.对于一般的非线性系统,必须寻找一个状态与控制的变换,使变换后的系统切模型对于不同的平衡点是独立的.

对单输入非线性系统 $\dot{x} = f(x,u)$,系统平衡点的集合定义为:

$$\mathscr{E}_{x,u} \triangleq \{(x,u):f(x_0,u_0) = 0\}, \tag{6}$$

其在状态空间的投影定义为:

$$\mathscr{E}_x \triangleq \{x_0:\exists\, u_0 \text{ 满足 } f(x_0,u_0) = 0\}, \tag{7}$$

在平衡点 $(x_0,u_0)$ 的邻域,系统的线性切模型可以表示为:

$$\delta\dot{x} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,u_0)}\delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x_0,u_0)}\delta u, \tag{8}$$

显然上述切模型是和平衡点 $(x_0,u_0)$ 有关的.寻找变换

$$z_i = T_i(x),\ i = 1,\cdots,n,\ v = T_{n+1}(x,u) \tag{9}$$

使得在 $z$ 状态空间,线性切模型和工作点无关,并且可以写成如下可控标准型:

$$\delta\dot{z}_1 = \delta z_2,\cdots,\quad \delta\dot{z} = \delta v, \tag{10}$$

考虑到对于集合 $\mathscr{E}_{x,u}$ 中的任意平衡工作点 $(x_0,u_0)$,$f(x_0,u_0) = 0$,可以推得线性切模型

$$\delta\dot{z}_i = \frac{\partial T_i(x)}{\partial x}\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,u_0)}\delta x + \frac{\partial T_i(x)}{\partial x}\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x_0,u_0)}\delta u. \tag{11}$$

令

$$\frac{\partial T_i(x)}{\partial x} = \alpha_i,\ i = 1,\cdots,n,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,u_0)} = F(x_0,u_0),\ \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x_0,u_0)} = G(x_0,u_0),$$

得

$$\delta\dot{z}_i = \alpha_i F(x_0,u_0)\delta x + \alpha_i G(x_0,u_0)\delta u. \tag{12}$$

为使该线性切模型独立于平衡操作点,系数 $\alpha_i$ 必须满足以下条件:

$$\begin{cases} \alpha_1 F^{i-1}G = 0, & i = 1,\cdots,n-1; \\ \alpha_i = \alpha_1 F^{i-1}, & \alpha_{n+1} = \alpha(F,G). \end{cases} \tag{13}$$

由上述方程可以解出系数,积分可得变换 $T_i(x)$,在该变换下系统的切模型是独立的.假定系统轨线保持在该切模型附近,则基于该模型的控制设计大大简化了系统设计问题.该方法忽略了二阶项,但可以证明如果系统轨线保持在平衡点附近,则不影响系统的闭环稳定性.文献[6]等将伪线性化方法应用于不可积的杂技机器人(acrobot)系统,取得了满意的控制效果.

### 2.3　线性化族(Linearization family)

同通常只考虑在某个平衡点附近进行线性近似不同,线性化族[8~11]考虑非线性系统对应于不同的非零输入和输出,具有一族平衡操作点的情况,其线性化模型具有一可调参数,适合不同操作点,在线性化族的基础上,可以很方便地应用增益调节控制方法[11,12].非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t),u(t)), \\ y(t) = h(x(t),u(t)), \end{cases} \tag{14}$$

相对于平衡点(0,0)的线性近似为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}x(t) + \left.\dfrac{\partial f}{\partial u}\right|_{(0,0)}u(t), \\ y(t) = \left.\dfrac{\partial h}{\partial x}\right|_{(0,0)}x(t) + \left.\dfrac{\partial h}{\partial u}\right|_{(0,0)}u(t), \end{cases} \tag{15}$$

其中 $f$,$h$ 为连续可微函数,且 $f(0,0) = 0$,$h(0,0) = 0$. 对于系统非零输入或非零输出的情况,由隐函数定理可知,在(0,0)的邻域,系统有一族平衡点,该平衡点的集合定义为:

$$E = \{(x,u,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^p \mid f(x,u) = 0,\ y = h(x,u)\},$$

平衡点随输入或输出的变化而变化,即平衡点 $x = x(\alpha)$,其

中参数 $\alpha$ 是操作点的输入或输出的函数,称为非线性系统的一个线性化族.对系统作 Lyapunov 近似,其系数矩阵分别是输入 $u$ 或输出 $y$ 的函数,得其一般表达式为:

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = A(\alpha)[x(t) - x(\alpha)] + B(\alpha)[u(t) - u(\alpha)], \\ y(t) - y(\alpha) = \\ C(\alpha)[x(t) - x(\alpha)] + D(\alpha)[u(t) - u(\alpha)].\end{cases} \tag{16}$$

可见线性化族仍然以 Lyapunov 线性化为基础,但其系统矩阵即使在平衡点的邻域内,也随工作点的移动而受到一个相应于输入或输出的参数的调整.文献[8]以一置于小车上的倒立摆平衡问题研究了应用线性化族的控制设计方法,增益调度也使用了线性化族的概念;文献[12]等则研究了在非完整移动机器人中的应用.

### 2.4 近似输入/输出线性化(Approximate input/output linearization)

如果系统的相对度在某一特定工作点没有定义,则在该点不能直接利用输入/输出线性化方法实现精确线性化.

非线性系统

$$\begin{cases}\dot{x} = f(x) + g(x)u, \\ y = h(x).\end{cases} \tag{17}$$

输入/输出线性化过程为:重复对输出 $y$ 进行微分,直到输入 $u$ 首次出现于等式右边

$$y^{(r)} = L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x) u, \tag{18}$$

其中 $r$ 是使 $L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$ 的最小正整数,称为系统的相对度.显然下列控制律

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)}(v - L_f^r h(x))$$

使输出 $y$ 和新的输入 $v$ 之间具有线性关系:$y^{(r)} = v$.

若 $L_g L_f^{r-1} h(x)$ 在 $x_0$ 点总为零,相对度无定义,但在离 $x_0$ 任意近的某些点不为零,则输入/输出线性化只能是近似的.用一组关于状态 $x$ 的函数 $\phi_i(x)(i = 1,\cdots,r)$ 近似系统的输出及其各阶微分:

$$y = h(x) = \phi_1(x) + \varphi_0(x),\ y \approx \phi_1(x),$$

$$\dot{y} = \dot{\phi}_1(x) = L_f\phi_1(x) + L_g\phi_1(x)u = \phi_2(x) + \varphi_1(x),$$

$$\dot{y} \approx \phi_2(x),$$

$$\square$$

$$y^{(i)} = L_f + gu\phi_i(x) = \phi_{i+1}(x) + \varphi_i(x),\ y^{(i)} \approx \phi_{i+1}(x),$$

$$\square$$

$$y^{(r)} = L_f + gu\phi_i(x) = b(x) + a(x)u + \varphi_r(x, u).$$

上式中 $a(x)$ 使得原系统在忽略高阶项 $\varphi_i(x)$ 后,相对度有定义,从而系统可以近似输入/输出线性化[11,13,14].对多输入多输出系统也可类似地进行近似.

上述的近似输入/输出线性化方法针对非线性系统的相对度在某一工作点不存在的情形.另一种关于输入/输出线性化的情况为部分线性化后,其零动态子系统不稳定,即所谓非最小相位系统.一般的策略为导出原系统的一个新的输出映射与原系统输出有相似的稳态轨迹,而其零动态子系统稳定.文献[15]及[16]分别给出了一种非最小相位系统和最大相位系统(零动态子系统的极点全部具有正实部)的局部外因子(local outer factor)方法.文献[13]给出了一个典型应用问题——位于旋转梁上的球的镇定问题.

### 2.5 近似状态反馈线性化(Approximate state feedback linearization)

对于单输入不可积非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u,\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{19}$$

在系统平衡流形 $\mathscr{E}$ 的邻域内用一可积非线性模型近似,这种近似方法同前述伪线性化、线性化族、增益调节等方法不同,是一种在 $\mathscr{E}$ 上雅可比(Jacobian)线性化的一个闭联集.

为了进行近似状态反馈线性,首先寻找一输出函数:$z_1 = T_1(x)$,使系统具有鲁棒相对度 $\gamma = n$,从而存在满足下面条件的状态变换 $z = T(x) = [T_1(x),\cdots,T_n(x)]^{\mathrm{T}}$ 实现系统的完全线性化:

$$\begin{cases}L_{f+gu}T_i(x) = T_{i+1}(x) + \xi_i(x,u),\ i = 1,\cdots,n-1, \\ L_{f+gu}T_n(x) = a(x) + b(x)u + \xi_n(x,u),\end{cases} \tag{20}$$

其中 $\xi_i$ 为在平衡流形上的高阶项.在 $T_1$ 已知的情况下,用回归方法从 $i = 1$ 开始计算得到 $T_i$,$a$ 和 $b$.

有两种选择输出函数 $T_1$ 的方法:1) Banaszukh 和 Hauser 提出了使 $\xi = [\xi_1,\cdots,\xi_n]$ 的范数在状态空间的某一区域取最小的方法,这种方法需要解偏微分方程.2) Hauser 和 Murray 则使用对系统进行伪线性化时的第一个状态变换函数 $z_1 = T_1(x)$.

用和伪线性化近似相同的方法可以获得输出函数 $T_1$.但当系统模型相对比较复杂时计算工作很复杂,且在进行积分运算时不能得到 $T_1$ 闭合形式的解,即使得到了输出函数 $T_1$,要将 $L_{f+gu}T_i$ 分离成为 $T_{i+1}$ 和一个高阶项 $\xi_i$ 也很不明显.

对于上面的问题,Bortoff 提出,用样条函数近似在伪线性化时出现的不能表示成闭合形式的关键非线性函数,这种数值方法可以分为两部分:首先用数值方法计算输出函数 $T_1$,然后将 $T_i$ 分离成为 $T_{i+1}$ 和高阶项 $\xi_i$.可以把这种近似方法看作是伪线性化和近似状态反馈线性化之间的一种折中,简述如下:

Ⅰ) 将系统的平衡流形统一表示为集合 $\Delta = \{\chi_0,\cdots,\chi_N\}$,这要求平衡点的集合是有界的,绝大多数实际情况符合这一要求;

Ⅱ) 在集合的每一节点 $\chi_k \in \Delta$ 处,计算 $\alpha_1(\chi_k)$;

Ⅲ) 通过这 $n$ 组数据($Y_j = \{\alpha_{1j}(\chi_k): k = 0,\cdots,N, j = 1,\cdots,n\}$) 插入一个样条函数 $\hat{\alpha}_{1j}(s)$,这一过程需要计算 $n$ 维向量 $c_j = [c_j^1,\cdots,c_j^{N+3}] \in \mathbb{R}^{N+3}$,使得系数 $c_j$ 满足条件 $\hat{\alpha}_{1j}(s) = \sum_{l=1}^{N+3} c_j^l \beta_l(s)$,这里 $\beta_l(s)$ 为 $B$ 型样条函数基向量;

Ⅳ) 用样条函数近似在计算对 $\alpha_1$ 积分时的积分项 $A(s)$,表示为 $\hat{A}(s)$,从而得到近似输出函数 $\hat{z}_1 = \hat{T}_1(x) = \hat{A}(s) + \langle\hat{\alpha}_1(s), \alpha_{11}(x)\rangle$.

用数值方法和样条函数近似得到了近似输出函数 $\hat{T}_1$,在

分离成 $T_{i+1}$ 和高阶项 $\xi_i$ 时利用系统式中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在平衡点 $\bar{x}\in\mathcal{V}$ 附近的泰勒展开，可以得到一种与系统的复杂程度无关的近似方法：

$$\begin{cases} f(x) = f(\bar{x}) + \langle Df(\bar{x}), \alpha_{11}(x)\rangle + r_f(\bar{x}, x), \\ g(x) = g(\bar{x} + \langle D_g(\bar{x}, \alpha_{11}(x))\rangle + r_g(\bar{x}, x). \end{cases} \tag{21}$$

将上述 $f(x)$，$g(x)$ 的泰勒近似式代入 $L_fT_1$，则

$$\begin{aligned} L_fT_1 = & \langle\alpha_1, \langle F, \alpha_{11}\rangle\rangle + \langle\alpha_1', \alpha_{11}\rangle\cdot\langle \mathrm{d}\varphi; \langle F, \alpha_{11}\rangle\rangle + \\ & \langle\alpha_1, r_f + \bar{u}r_g\rangle + \langle\alpha_1', \alpha_{11}\rangle\cdot\langle\mathrm{d}\varphi, r_f + \bar{u}r_g\rangle + \\ & \langle\alpha_1, g\rangle\cdot\tilde{u} + \langle\alpha_1', \alpha_{11}\rangle\cdot\langle\mathrm{d}\varphi, g\rangle\tilde{u}, \end{aligned} \tag{22}$$

表达式中最后的四项为高阶项，从而定义

$$\begin{aligned} \xi_1 = & \langle\alpha_1, r_f + \bar{u}r_g\rangle + \langle\alpha_1', \alpha_{11}\rangle\cdot\langle\mathrm{d}\varphi, r_f + \bar{u}r_g\rangle + \\ & \langle\alpha_1, g\rangle\tilde{u} + \langle\alpha_1', \alpha_{11}\rangle\cdot\langle\mathrm{d}\varphi, g\rangle\tilde{u}, \end{aligned}$$

取前面的两项，所以 $T_2 = \langle\alpha_2, \alpha_{11}\rangle + \langle\alpha_1', \alpha_{11}\rangle\cdot\langle\mathrm{d}\varphi, \langle F, \alpha_{11}\rangle\rangle$，这里 $\alpha_2 = \langle\alpha_1, F\rangle$，在 $T_2$ 的计算过程中不需计算 $f$ 和 $g$ 及其李导数，且 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1', F$ 都可以样条函数近似，使得计算与系统的复杂程度无关. 类似地可以计算 $T_3, T_4$ 等等. 概括起来，$z = T(x)$ 的回归计算可以归结为：

SI）计算 $L_f + guT_i$；

SII）线性化 $f + gu$，给出 $\langle F(s), \alpha_{11}(x)\rangle + G(s)\cdot\tilde{u}$；

SIII）定义包含 $\tilde{u}$ 的项为高阶项 $\xi_i$，其余项为 $T_{i+1}$；

SIV）当 $i = n$ 时，$a(x) = L_fT_n(x)$，$b(x) = L_gT_n(x)$.

可以证明这样的回归计算产生的变换 $z_i = T_i(x)$，满足 $L_gT_i\mid_{x=\phi(s)} = 0, i = 1, \cdots, (n-1)$；$L_gT_n\mid_{x=\phi(s)} \neq 0$.

文献[17]将该方法应用于旋转的倒摆和杂技机器人的控制问题，取得了满意的控制效果. 文献[18～21]还提出了高阶近似反馈线性化方法，可以大大减少近似化处理带来的误差.

**2.6　奇异摄动(Singular perturbation)**

许多实际的高阶控制系统中，常有不同的时间常数相互作用着. 利用奇异摄动理论[22～24]将系统按不同的时标分解成快慢子系统而实现将全系统的控制设计转化为子系统的设计问题，以简化问题的复杂性. 高阶非线性系统分解成几个低阶子系统，既可以降低反馈线性化的计算复杂性，又有可能将不满足线性化条件的非线性系统分解成满足线性化条件的子系统.

1）奇异摄动方法的一个应用为分析简化非线性系统.

非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, u, \varepsilon),\ x\in\mathbb{R}^n,\ \varepsilon > 0, \\ \varepsilon\dot{y} = g(x, y, u, \varepsilon),\ y\in\mathbb{R}^m. \end{cases} \tag{23}$$

对于任意非零 $\varepsilon$，系统包含 $(n+m)$ 个微分方程，令摄动参数 $\varepsilon = 0$，有 $g(x, y, u, 0) = 0$. 假设可以解出 $y(t)$，则此时系统可以表示为：

$$\dot{x} = f[x(t), \phi(x, u), u, \varepsilon]. \tag{24}$$

奇异摄动改变了原系统的性质，由一个较低阶的系统近似高阶非线性，简化了系统分析，但是，简化后的系统能在多大程度近似原非线性，及保证原系统的稳定性？这是必须注意的问题[24].

2）奇异摄动系统的近似线性化.

如果非线性奇异摄动系统不满足能够通过非线性状态变换和反馈实现精确线性化的对合条件，可以用所谓慢流型理论进行近似分析[25～27]. 非线性奇异摄动系统(23)的精确慢流型定义为[23]：

$$M_\varepsilon: y = \Phi(x, u, \varepsilon), \tag{25}$$

结合(23)两式得到所谓"流形条件"：

$$\begin{aligned} & \varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial x}f(x, \Phi(x, u, \varepsilon), u, \varepsilon) + \varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial u}u = \\ & g(x, \Phi(x, u, \varepsilon), u, \varepsilon) \end{aligned} \tag{26}$$

及"慢子系统"

$$\dot{x} = f(x, \Phi(x, u, \varepsilon), u, \varepsilon).$$

若该慢子系统可线性化，须寻找一非线性变换 $T:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^{n+1}$ 和反馈输入 $u$，使其具有

$$\dot{y} = Ay + Bv$$

的线性等效形式. 将 $\Phi(x, u, \varepsilon)$，$u$，$T$ 在 $\varepsilon = 0$ 附近展开

$$\begin{cases} \Phi(x, u, \varepsilon) = \Phi_0(x, u_0) + \varepsilon\Phi_1(x, u) + o(\varepsilon^2), \\ u = u_0 + \varepsilon u_1 + o(\varepsilon^2), \\ T = T_r + \varepsilon T_c + o(\varepsilon^2), \end{cases} \tag{27}$$

利用流形条件及上述展开式，解得近似的 $\Phi(x, u, \varepsilon)$，最后对 $\Phi(x, u, \varepsilon)$ 线性化.

上述方法在各种物理系统中有广泛的应用，如文献[23]在控制高性能鱼雷时就应用了上述方法，将鱼雷的高速运动和燃料消耗引起的质量变化分解为相应的快慢子系统.

**2.7　中心流形方法(Center manifold method)**

考虑一非线性系统 $\dot{x} = f(x)$，平衡点 $x_0 = 0$ 的渐近稳定性，在某种程度上由系统在 $x_0 = 0$ 的线性近似决定，$F = \frac{\partial f}{\partial x}\mid_{x=0}$ 称为 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的雅可比矩阵. 如果 $F$ 的特征根全部位于左半平面，则平衡点为渐近稳定. 如果 $F$ 的特征根有一个或以上位于右半平面，则平衡点不稳定. 显然上述原则不完全，不适用于当 $F$ 的特征根具有零实部的情形下系统的渐近稳定性能分析. 中心流形理论对分析系统的临界状态下的稳定性是非常有效的.

因为只有当矩阵 $F$ 具有非正实部特征根，平衡点才有可能稳定，所以只考虑这种情形. 选择变换 $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = Tx$，系统可以写成如下的形式：

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay + g(y, z), \\ \dot{z} = Bz + f(y, z), \end{cases} \tag{28}$$

其中矩阵 $A$ 的特征根为负实部，矩阵 $B$ 的特征根为零实部. 有如下的中心流形存在性定理：存在一个 $z = 0$ 的邻域和变换 $\pi(x)$ 使得 $S = \{(y, z): y = \pi(z)\}$ 为系统的一个中心流形. 一个系统可能有许多个中心流形，根据中心流形的定义，可以得到此变换 $\pi(z)$ 的边界条件和偏微分方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial\pi}{\partial z}(Bz + f(\pi(z), z)) = A\pi(z) + g(\pi(z), z), \\ \pi(0) = 0,\quad \frac{\partial\pi}{\partial z}(0) = 0. \end{cases} \tag{29}$$

中心流形的重要特点为其局部吸引性.起始于平衡点附近的系统轨线,当 $t$ 趋于无穷时,收敛于定义于该平衡点的一个中心流形.因此研究平衡点的稳定性转化为分析该中心流形 $y = \pi(z)$ 的稳定性.起始于中心流形上某点 $y_0 = \pi(z_0)$ 的系统轨线,由于中心流形的不变性,可以描述为:$y(t) = \pi(\zeta(t)), z(t) = \zeta(t)$,其中 $\zeta(t)$ 是微分方程 $\dot{\zeta} = B\zeta + f(\pi(\zeta), \zeta)$ 在初始条件 $\zeta(0) = z^0$ 下的解.系统在平衡点的稳定性,在小的初始条件下,由该降阶方程的渐近性能决定,如果 $\zeta = 0$ 是稳定的,则 $(y, z) = (0, 0)$ 是稳定的,可见该方法将 $n$ 维系统稳定性分析,降阶为 $n^c$($n^c$ 为 $B$ 阵中零实部特征根的个数)维降阶微分方程在变换 $\pi(z)$ 下的稳定性分析.

实际应用中,必须解中心流形方程,以求得变换 $y = \pi(z)$ 才有可能分析 $\zeta = 0$ 的稳定性.一般来说解中心流形方程是非常困难的,通常采用近似解法.设 $\pi_k(z)$ 为一个关于 $z$ 的 $k(1 < k < r)$ 阶多项式,满足初始条件 $\pi_k(0) = 0, \frac{\partial \pi_k}{\partial z}(0) = 0$.该近似解 $\pi_k(z)$ 使中心流形方程误差为 $R_k(z)$,即

$$\frac{\partial \pi_k}{\partial z}(Bz + f(\pi_k(z), z)) - A\pi_k(z) - g(\pi_k(z), z) = R_k(z) = O(z^{k+1}).$$

方程解的误差为:$D_k(z) = \pi(z) - \pi_k(z)$,由误差方程,可以得到方程的近似解 $\pi_k(z)$ 和精确解 $\pi(z) = \pi_k(z) + D_k(z)$,其中 $D_k(z) = O(z^{k+1})$,将 $\pi(z)$ 代入降阶方程,可以分析其稳定性.该近似解的精度要求决定于降阶方程的稳定性分析的需要.中心流形方法在研究临界情形的控制系统的稳定性方面是一种非常有效的工具[27,28].

## 3 结束语(Conclusion)

对于不能实现精确线性化的非线性控制系统,采用近似化方法依然为一种倍受控制界重视又十分有效的途径.本文介绍了非线性系统分析和设计的一些主要近似分析方法.尚有其它的新方法如神经网络逼近[29],模糊自适应[24],微分几何方法[30],周期激励[31,32],逆系统方法[33,34]以及李群与李代数等工具的应用,都给非线性系统的分析和设计提供了有效的途径.期望本文能给有关同行在近似化理论与应用方面的研究以一定的推动作用.

## 参考文献(References)


[1] Isidori A. Nonlinear Control Systems [M]. New York: Spinger-Verlag, 1995

[2] Cai Z X. Applied Nonlinear Control [M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1992 (in Chinese)

[3] Hu Y M, Zhou Q J and Pei H L. Theory and applications of a class of nonholonomic control systems [J]. Control Theory and Applications, 1996, 13(1): 1 – 10 (in Chinese)

[4] Dong W J and Huo W. Adaptive stabilizations of a class of nonholonomic dynamic systems [J]. Robot, 1998, 20(6): 432 – 447 (in Chinese)

[5] Marino R. On the largest feedback linearizable subsystem [J]. Syst. Contr. Lett., 1986, 6(5): 345 – 351

[6] Bortoff S A and Spong M W. Pseudolinearization of the acrobot using spline functions [A], Proc. 31st IEEE Conf. on Decision and Control [C], Tucson, Arizona, USA, 1992, 96 – 97

[7] Champetier C, Mouyon P and Reboulet C. Pseudolinearization of multi-input nonlinear systems [A]. Proc. 23rd IEEE Conf. on Decision and Control [C], Las Vegas, USA, 1985, 593 – 598

[8] Baumann W T and Rugh W J. Feedback control of nonlinear systems by extended linearization [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1986, 31(1): 40 – 46

[9] Wang J and Rugh W J. Feedback linearization families for nonlinear systems [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1987, 32(10): 935 – 940

[10] Wang J and Rugh W J. Parameterized linear systems and linearization families for nonlinear systems [J]. IEEE Trans. Circuits and Systems, 1987, 34(6): 650 – 657

[11] Jeng T, Shih C L and Lee T T. Applying input-output pseudolinearization and gain scheduling techniques for stabilization of mobile robots with two independent driven wheels [J]. Robotica, 1997, 15(5): 573 – 582

[12] Grizzle J W and Di Benedetto M D. Approximation by regular input-output maps [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1992, 37(11): 1052 – 1055

[13] Hauser J, Sastry S and Kokototic P. Nonlinear control via approximate input-output linearization: the ball and beam example [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1992, 37(4): 392 – 398

[14] Banaszuk A and Hauser J. Approximate feedback linearization: a homotopy operator approach [J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1996, 34(5): 1533 – 1554

[15] Wright R A and Kravaris C. Nonminimum-phase compensation for nonlinear processes [J]. AIChE J. 1992, 38(1): 26 – 40

[16] Doyle III F J, Allgower F and Morari M. Normal form approach to approximate input-output linearization for maximum phase nonlinear SISO systems [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1996, 41(2): 305 – 309

[17] Bortoff S A. Approximation state-feedback linearization using spline functions [J]. Automatica, 1998, 33(8): 1449 – 1458

[18] Krener A J, Karahan S, Hubbard M and Frezza R. High order linear approximations to nonlinear control systems [A]. Proc. of the 26th IEEE Conf. on Decision and Control [C], Los Angeles, CA, USA, 1987, 519 – 523

[19] Xu Z and Hauser J. Higher order approximate feedback linearization about a manifold [J]. J. Math. Syst., Estimation and Contr., 1994, 4(4): 451 – 465

[20] Karahan S. Higher degree linear approximations of nonlnear systems [D]. California Davis, CA: Dep. Mech. Eng., Univ. California, 1989

[21] Xu Z G and Hauser J. Higher order approximate feedback linearization about a manifold for multi-input systems [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1995, 40(9): 833 – 840

[22] Verhulst F. Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems [M]. New York: Spinger-Verlag, 1992
[23] Wu X G and Fan J P. Time scale decomposition and feedback linearization of a class of nonliear systems [J]. Control Theory and Applications, 1994, 11(5): 588 – 593(in Chinese)
[24] Xu K K. Singular Perturbation in Control Systems [M]. Beijing: Academic Press, 1986(in Chinese)
[25] Spong M W, Khorasani K and Kokotovic P V. A slow manifold approach to feedback control of nonlinear flexible systems [A]. Proc. of 1985 Amer. Contr. Conf. [C], Boston, MA, 1985
[26] Khorasani K. On linearization of nonlinear singularly perturbed systems [J], IEEE Trans. Automat. Contr., 1987, 32(3): 256 – 260
[27] Li T C, Wang Z L and Cheng J H. Output regulation of nonlinear systems and controlled center manifold [J]. Control Theory and Applications, 1995, 12(5): 623 – 626(in Chinese)
[28] Murry R M. Control of Nonholonomic Systems Using Chained Forms [M]. Rhode Island: Fields Institute Communications, 1993, 1: 219 – 245
[29] Pei H L and Zhou Q J. Approximate linearization of nonlinear systems a neural network approach [J]. Control Theory and Applications, 1998, 15(1): 34 – 38
[30] Cheng D Z. Geometrical Theory of Nonlinear Control Systems [M]. Beijing: Academic Press, 1988
[31] Baillieul J. Stable average motions of mechanical systems subject to periodic forcing [M]. Rhode Island: Fields Institute Communications, 1993, 1: 1 – 22
[32] Bloch A M and Crouch P E. Nonholonomic and vakonomic control systems on Riemannian manifolds [M]. Rhode Island: Fields Institute Communications, 1993, 1: 25 – 52
[33] Li C W, Miao Y, Feng Y K and Du J H. Inverse system method for nonliear systems control (II): Single variable control theory [J]. Control and Decision, 1997, 12(5): 529 – 535(in Chinese)
[34] Li C W, Miao Y, Feng Y K and Du J H. Inverse system method for nonlinear systems control (II): Multivariable control theory [J]. Control and Decision, 1997, 12(6): 625 – 630(in Chinese)
[35] Kener A J. Approximate linearization by state feedback and coordinate change [J]. Syst. Contr. Lett., 1984, 5(3): 181 – 185
[36] Reboulet C and Champetier C. New method for linearizing nonlinear system: the pseudolinearization [J]. Int. J. Contr., 1984, 40(4): 631 – 638
[37] Hunt L R, Su R and Meyer G. Global transformations of nonlinear systems [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1983, 28(1): 24 – 31
[38] Reboulet C, Mouyon P and Champetier C. About the local linearization of nonlinear systems [A]. Fliess M and Hazewinke M, eds. Algebraic and Geometric Methods in Nonlinear Control Theory [M]. Reidel, Dordvecht, 1986
[39] Huang J and Rugh W J. Approximate noninteracting control with stability for nonlinear systems [A]. Proc. of 1990 Amer. Contr. Conf. [C], San Diego, CA, USA, 1990, 651 – 656
[40] Rugh W J. Linearization about constant operating points: an input-output viewpoint [A]. Proc. of the 22nd IEEE Conf. on Decision and Control [C], San Antonio, TX, USA, 1983, 1165 – 1169
[41] Lejeune R and Rugh W J. Linearization of nonlinear systems about constant operating points [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1985, 30(9): 804 – 808
[42] Khorasani K and Kokotovic P V. A corrective feedback design for nonlinear systems with fast actuators [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1986, 31(1): 67 – 69
[43] Slotine J J F and Hedrick J K. Robust input-output feedback linearization [J]. Int. J. Control, 1993, 57(5): 1133 – 1139
[44] Lawrence D A and Rugh W J. Gain scheduling dynamic linear controller for a nonlinear plant [J]. Automatica, 1995, 31(3): 381 – 390
[45] Wang J L and Wilson J. Parameterizad linear systems and linearization families for nonlinear systems [J]. IEEE Trans. on Circuits and Systems, 1987, 34(6): 650 – 657
[46] Saksena V R, O'Relly J, Kokotovic P V. Singular perturbation and time-scale methods in control theory: Survey [J]. Automatica, 1984, 20(3): 273 – 293
[47] Wu X G and Wang X M. Global linearization of nonlinear singular perturbation systems [A]. Int. Conference on MSC '92 [C], Hefei, China, 1992
[48] Li C W. Inverse systems methods and applications [J]. Journal of Tsinghua University, 1986, 26(2): 105 – 114(in Chinese)
[49] Su H Y, Chu J and Wang J C. A step-by-step transformation based controller design for nulti-input nonlinear systems [J]. Control and Decision, 1995, 10(5): 444 – 449(in Chinese)

## 本文作者简介

**胡跃明** 1960 年生. 分别于 1982 年、1985 年和 1991 年获学士、硕士和博士学位,曾任香港理工大学电子与信息工程系副研究员及研究员等职,现为华南理工大学自动控制工程系教授,博士生导师. 目前主要研究兴趣为模式识别技术及应用,非线性控制理论及在机器人控制中的应用,计算机辅助优化设计等.

**胡终须** 1968 年生. 分别于 1989 年、1992 年和 2000 年获学士、硕士和博士学位. 现在英国进行博士后研究.

**毛宗源** 1936 年生. 1962 年毕业于大连工学院,现为华南理工大学自动控制工程系教授,博士生导师. 研究兴趣为工业自动化与智能控制.

**李志权** 1957 年生. 分别于 1977 年与 1984 年在伦敦大学和威尔斯大学获电子工程学士与博士学位, 1986 年至今在香港理工大学电子与资讯工程系任教授. 研究兴趣为数字信息处理,伺服电机及控制系统设计等.