耶鲁大学公开课：博弈论

有关线性城市差异化产品模型的深入探讨

Ben Polak，Econ 159a/MGT522a.

由人人影视博弈论制作组 Darrencui 翻译

模型介绍：

- 模型中我们假设一座城市是一条街道（一条线段）
- 有两家公司：公司 1 和公司 2。他们分别位于街道（线段）的两端
    - 两家公司同时分别制定产品价格P_1和P_2
    - 两家公司的边际成本是一个常数
    - 每家公司都追求利润最大化
- 潜在顾客平均分布在这条街道上，在每一点上都有一个潜在顾客
    - 把顾客群的总数看成是 1（或者可以把它理解成整个市场份额）
- 每位顾客都只购买 1 单位的产品，要么买公司 1 的，要么买公司 2 的
    - 当且仅当满足下列条件时，处于位置 y 的顾客才会选择公司 1 的产品

$$P_1 + ty^2 < P_2 + t(1-y)^2 \qquad (1)$$

对于模型的解读：顾客需要同时考虑价格和与公司的距离这两个因素。如果把线段想象成现实中的道路的话，我们可以用$t \times (\text{距离})^2$来表示到该公司的交通成本。或者，如果把线段想象成产品某方面的质量（比如冰激凌中的脂肪含量），那么此时$t \times (\text{差异})^2$就表示产品实际体验与顾客最佳预期之间的差异。从顾客的角度上看，参数t越大，那么两家公司生产的产品的差异也就越大。如果$t = 0$，那么这两种产品就是完全替代品。

下面我们需要考虑什么呢？

- 任何一家公司i都不会按照$P_i < c$来给产品定价，为什么呢？
- 如果公司 2 定价为P_2，那么只要公司 1 的定价小于$P_2 - t$，就可以垄断整个市场，为什么呢？
    - 也就是说低于$P_2 - t$的定价方案并不是公司 1 的最佳对策
- 如果公司 1 定价高于$P_2 - t$会不会获得更多的收益呢？
    - 坏消息是这样做的话公司 1 必须放弃一部分市场份额
    - 好消息是每一位公司 1 的顾客都会付更多的钱
- 想要解答这些问题，我们需要计算公司 1 在不同定价下的市场份额（以及利润）。

两家公司分摊市场份额时的需求及利润：假如P_1和P_2非常接近，导致两家公司分摊市场份额。这种情况下如何计算公司 1 分摊到了多少顾客呢？

- 解答过程如下：首先我们找到位于x一位中立的顾客
  - 在她左边的顾客($< x$)严格偏好购买公司 1 的产品
  - 在她右边的顾客($> x$)严格偏好购买公司 2 的产品

想要找到x，需要用到表达式(1)。令$P_1 + tx^2 = P_2 + t(1-x)^2$。解出$x$就可以得出在价格接近的情况下，消费者对于公司 1 产品的需求。

$$D(P_1, P_2) = x = \frac{P_2+t-P_1}{2t} \qquad (2)$$

接下来就可以根据需求函数计算公司 1 的利润了。在价格接近的情况下，公司 1 的利润是：

$$\pi_1(P_1, P_2) = (P_1 - c)D(P_1, P_2) = (P_1 - c)(\frac{P_2+t-P_1}{2t}) \qquad (3)$$

公司 1 的最佳对策：对于不同的P_2，公司 1 的最佳对策是什么呢？通过表达式（3）我们至少可以算出来在价格接近的情况下，P_1如何取值可以使公司 1 的利润方程取最大值。根据微积分的乘法法则，可以得到一阶条件：

$$(\frac{P_2+t-P_1}{2t}) + (P_1^* - c)\left(\frac{-1}{2t}\right) = 0 \qquad (4)$$

整理化简后得：

$$P_1^* = \frac{P_2+t+c}{2} \qquad (5)$$

（顺便说一下，这个价格刚好是完全竞争价格c与公司 2 垄断价格$P_2 + t$的平均数。同理可知，如果一家垄断企业面对$p = a - bq$这样的线性需求曲线并且边际成本是常数时，垄断价格就是$\frac{a+c}{2}$，即是完全竞争价格c与零需求价格a的平均数）

绘制最佳对策函数的图像：参见图 1

1. 首先画出$P_1 = c$这条图线。公司 1 的最佳对策方程$BR_1(P_2)$不会出现在该图线的左边。为什么呢？
2. 然后画出$P_1 = P_2 - t$这条图线。$BR_1(P_2)$不会出现在该图线的右边。为什么呢？
3. 下一步，根据表达式（5）绘制出$P_1 = \frac{P_2+t+c}{2}$这条图线。
   - 为了绘制方便，需注意当$P_2 = c - t$时，可以得出$P_1 = c$。先绘制出这一点
   - 然后注意P_2每增加一单位，P_1增加 0.5 单位。绘制出这条图线来

最佳对策方程的大致图像在图像 1 中用粗线表示。（之所以说它是大致图像原因如下：a. 当P_2非常小的情况下，公司 1 最佳对策是在保证零需求时，定价可以无限高；b. 当P_2非常大的情况下，公司 1 的最佳对策是价格从左侧逐渐接近P_2图线，如图中 t 所示）

寻找纳什均衡：由于这个模型是对称的，公司 2 的最佳对策可以通过把公司 1 的最佳对策图线根据 45°线对称绘制出来。图 2 包含了两家公司的最佳对策图线图。纳什均衡就是两条图线的交点。

- 想要具体算出该点的坐标，只需带入$P^* = P_1^* = P_2^*$到表达式（5）中，可得$P^* = \frac{P^*+t+c}{2}$
  即$P^* = c + t$

大家不妨自己尝试画出不同t值下的函数图像，来验证一下纳什均衡价格是不是与通过代数方法求得的值一致。

经济学意义：回忆一下所学的伯川德模型。大家都同意该模型中存在着价格竞争现象，但我们不是很赞同它的结论：只需两家公司就可以通过价格竞争使$P^B = c$。通过引入差异化产品，我们可以保证在该模型依然存在价格竞争的情况下，得出比较令人信服的结论来：

- 均衡价格并不等于成本，而是高于成本t单位价格
  - 交通成本t越大，均衡价格也就越大（因此利润也就越大）
  - 如果不存在交通成本和差异成本（也就是说产品是同质的），那么均衡价格就等于边际成本
  - 公司都希望产品之间存在差异
- 这里我们令市场中公司的数量保持不变，如果有新的公司进入市场结果就不同了。

博弈论结论：

1. 首先我们学到的了“现实一点”地思考可以使结论更具有说服力。当我们排除了完全替代品这一个极端假设后，这个模型就更具有现实意义了。
2. 我们研究模型的方法是很典型的。这个模型是一个足够复杂的模型，因为初次遇到这个模型的时候大家并不知道结果会是怎样的。然而通过按照我们在课堂上讲的方法（找出最佳对策，然后求出交点在哪里等）进行分析后，再来研究该模型就相对容易些了。