不确定性线性系统模型处理的一种新方法

刘皓春　卢珞先　李中年
(武汉汽车工业大学　430000)

摘　要:本文研究一种不确定性线性系统(ULS, Uncertain Linear System)模型处理新方法。

关键词:ULS　模型变换　线性化

0 引言

实际物理系统通常包含许多不确定性因素,用连续或离散不确定性模型描述实际物理系统,更符合实际情况。在进行数据处理时,常常需要在连续和离散模型之间进行相互变换。本文针对线性不确定性系统,采用近似线性化方法进行模型变换,获得满意的精度。

1 ULS基本模型

ULS的时间连续模型如下

$$\dot{S}_c(t) = Ms(t) + Pi_c(t) \qquad (1)$$
$$qc(t) = K_0 s_c(t)$$

式中系数矩阵为:

$$M = M_0 + M_v = M_0 + \sum_{i=1}^{j_m} M_{vi} M_i \qquad (2)$$

$$P = P_0 + P_v = P_0 + \sum_{i=1}^{j_p} P_{vi} P_i$$

$s_c(t) \in R^{n\times1}$是系统状态,$i_c(t) \in R^{m\times1}$是输入,$q(t) \in R^{q\times1}$是输出,M_0、P_0和K_0标称系统矩阵,M_v、P_v是干扰不确定性矩阵,M_i和P_i是已知的常数矩阵。m_{vi}和P_{vi}是不确定标量参数。不失一般性,假设$|m_{vi}| \le 1, \forall i = 1,2,\cdots,j_m$, $|P_{vi} \le 1, \forall_i = 1,2\cdots j_p$,若采样周期为T,则与(1)相对应的离散模型为

$$s_d(k+1) = \dot{A} s_d(k) + \dot{B} i_d(k) \qquad (3)$$
$$q_d(k) = k_0 s_d(k)$$

其中系数矩阵为:

$$\dot{A} = e^{MT} = e^{(M0 + Mv)T}$$
$$\dot{B} = (\int_0^T e^{Mt} dt)P = (\dot{A}-I)(M_0 + M_v)^{-1}(P_0 + P_v) \qquad (4)$$

对于(4)式,为找出与(2)式相似的表达形式,须将(4)式线性化成如下形式:

$$\dot{A} \approx A_0 + A_v = A_0 + \sum_{i=1}^{jm} m_{vi} A_i \qquad (5)$$

$$\dot{B} \approx B_0 + B_v = B_0 + \sum_{i=1}^{j_p} P_{vi} B_i \qquad (5)$$

式中

$$A_0 = e^{M_0 T}$$

$$B_0 = (A_0 - I)M_0^{-1} P_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} (M_o T)^{i-1} P_0 T \qquad (6)$$

文献[2]已经证明:当式(2)中的不定性摄动参数$|m_{vi}|$足够小,且$P_v = 0$时,有

$$\dot{A} = A_0 + A_v + O(m_{vi}^2) \approx A_0 + A_{vp} \qquad (7)$$
$$\dot{B} = B_0 + B_v + O(m_{vi}^2) \approx B_0 + B_{vp}$$

式中

$$A_v = A_0 \int_0^T e^{-M_0 t} M_v e^{M_0 t} dt$$
$$B_v = \int_0^T \{ \int_0^T e^{M_0(t-\tau)} M_v e^{M_0 \tau} d\tau \} P_0 dt \tag{8}$$

文献[2]已经证明，不确定性系统矩阵为

$$A_{vp} = \frac{1}{2}(H_0 - I)M_0^{-1}M_v(A_0 + I)$$
$$B_{vp} = (A_0 - I)M_0^{-1}P_v + \frac{1}{2}(A_0 - I)M_0^{-1}M_v P_0 \tag{9}$$

由(9)式可解出 M_{vp}和 P_{vp}如下：

$$M_{vp} = 2M_0(A_0 - I)^{-1}A_v(A_0 + I)^{-1}$$
$$P_{vp} = M_0(A_0 - I)^{-1}\left\{B_v - \frac{1}{2}(A_0 - I)M_0^{-1}M_{vp}B_0\right\} \tag{10}$$

文献[2]在推导(9)、(10)式时，利用了下式所示的时域双线性变换：

$$e^{ST} \approx (I - \frac{1}{2}ST)^{-1}(I + \frac{1}{2}ST) \tag{11}$$

式中 S是可逆矩阵。

2 近似线性化方法

本文使用近似线性化方法方法对(4)式的 A、B 线性化，其方法如下。设 S是一方阵，T 为采样周期，根据文献[1]，矩阵函数 e^{ST}可用一个几何级数近似：

$$e^{ST} = \{e^{ST/y}\}^y = \{e^{-\frac{1}{2}ST/y}e^{\frac{1}{2}ST/y}\}^y \approx (G_w^{-1}H_w)^y = A_w \tag{12}$$

式中，对 $w = 1, 2, \cdots$,

$$G_w = \{I - ST/(2wy)\}\{I + \sum_{i=1}^{w-1}(-1)^i(w-i)(ST)^i/[(2^i)(w)(i!)(y)^i]\}$$
$$H_w = \{I + ST/(2WY)\}\{I + \sum_{i=1}^{w-1}(w-i)(ST)^i/[(2^i)(w)(i!)(y)^i]\} \tag{13}$$
$$T < (2wy)/|S|$$

当 $w = 1, 2, 3$ 时，则有

$$A_1 = \{[I - (ST)/(2y)]^{-1}[I + (ST)/(2y)]\}^y \tag{14}$$

其中 $T < 2y/|S|$

$$A_2 = \{[I - (ST)/(2y) + (ST)^2/(16y^2)]^{-1}[I + (ST)/(2y) + (ST)^2/(16y^2)]\}^y \tag{15}$$
$$A_3 = \{[I - (ST)/(2y) + 7(ST)^2/(72y^2) - (ST)^3/(144y^3)]^{-1}$$
$$[I + (ST)/(2y) + 7(ST)^2/(72y^2) + (ST)^3/(144y^3)]\}^y$$

式(14)中采样周期 T(记为 T1)与式(15)中采样周期 T(记为 T2)之间的关系由下面的方程确定：

$$\{[1 - (E_s T_1)/2y)]^{-1}[1 + (E_s T_1)/(2y)]\}^y$$
$$= \{[1 - (E_s T_2)/(2y) + (E_s T_2)^2/(16y^2)]^{-1}[1 + (E_s T_2)/(2y) + (E_s T_2)^2/(16y^2)]\}^y \tag{17}$$

式中，E_s 是 S 的最大特征值的绝对值，因此，

$$T_1 = T_2/[1 + (E_s T_2)^2/(16y^2) < T_2 \tag{18}$$

观察(14)式，当 $y = 1$ 时，可用一几何级数表示：

$$A_1 = [I - (ST)/2]^{-1}[I + (ST)/2y]$$
$$= I + ST + \frac{(ST)^2}{2} + \frac{(ST)^3}{2^2} + \frac{(ST)^4}{2^3} + \frac{(ST)^5}{2^4} + \cdots \tag{19}$$

式中 $T < \frac{2}{|S|}$。当 $y = 2$，(14)式变成

$$A_1 = \{[I - (ST)/4]^{-1}[I + (ST)/4]\}^2$$
$$= I + ST + \frac{(ST)^2}{2} + \frac{(ST)^3}{2^2 \times 4/3} + \frac{(ST)^4}{2^3 \times 2} + \frac{(ST)^5}{2^4 \times 16/5} \cdots \tag{20}$$

式中 $T < \frac{2^2}{|S|}$。若 $y = 4$，则

$$A_1 = \{[I-(ST)/8]^{-1}[I+(ST)/8]\}^4$$
$$= I + ST + \frac{(ST)^2}{2} + \frac{(ST)^3}{2^2\times 16/11} + \frac{(ST)^4}{2^3\times 8/3} + \frac{(ST)^5}{2^4\times 256/45} + \cdots\cdots \quad (21)$$

式中 $T<\frac{8}{|S|}$。根据式(14),可得 e^{ST}的逆几何级数近似如下:

$$\{[I-(ST)/(2y)]^{-1}[I+(ST)/(2y)]\}^{y} = A_1 \approx \dot{A} = e^{ST} \quad (22)$$

$$[I-(ST)/(2y)]^{-y} = \{[I-(ST)/(2y)]^{-1}[I+(ST)/(2y)]-[I-(ST)/(2y)](ST/y)^{-1}\}^{y}$$
$$= \{(A_2^{1/y}-I)(ST/y)^{-1}\}y \quad (23)$$

$$[I+(ST)/(2y)]^{y} = [I-(ST)/(2y)]^{y}A_1 \approx [I-(ST)/(2y)]^{y}\dot{A} \quad (24)$$

值得注意的是,当 $y=1$ 时,式(22)、(23)、(24)所示的逆几何级数近似变成了逆双线性近似。当 $S=M_0+M_v$ 时,(14)中满足 $|ST|/(2y)<1$ 的采样周期 T 可推导如下:

$$|S|T/(2y) = |M_0+M_v|T/(2y) \le (|M_0|+|M_v|)T/(2y) < 1 \quad (25)$$

同样,从式(15)也可得到逆几何级数近似如下:

$$\{[I-(ST)/(2y)+(ST)^2/(16y^2)]^{-1}[I+(ST)/(2y)+(ST)^2/(16y^2)]\}^{y} = A_2 \approx \dot{A} = e^{st} \quad (26)$$

$$[I-(ST)/(2y)+(ST)^2/(16y^2)]^{-y}$$
$$= \{[I-(ST)/(2y)+(ST)^2/(16y^2)]^{-1}[I+(ST)/(2y)+(ST)^2/(16y^2)]$$
$$-[I-(ST)/(2y)+(ST)^2/(16y^2)](ST/y)^{-1}\}^{y} = \{(A_2^{1/y}-I)(ST/y)^{-1}\}^{A} \approx \{(\dot{A}^{1/y}-I)(ST/y)^{-1}\}^{y}$$

$$[I+(ST)/(2y)(ST)^2/(16y^2)]^{y}$$
$$= [I-(ST)/(2y)+(ST)^2/(16y^2)]^{y}A_2 \approx [I-(ST)/(2y)+(ST)^2/(16y^2)]^{y}\dot{A} \quad (28)$$

3 实例

某系统的标称 ULS 矩阵为

$$M_0 = \begin{bmatrix} -0.0368 & 0.0270 & 0.0189 & -0.4554 \\ 0.0481 & -1.0110 & 0.0023 & -4.0209 \\ 0.1000 & 0.2856 & -0.7071 & 1.3230 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}; M_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{v1} & 0 & m_{v2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0.4423 & 0.1760 \\ 3.0448 & -7.5921 \\ -5.5200 & 4.9900 \\ 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}; P_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p_{v1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

这里,$|m_{v1}| \le 0.22$,$|m_{v2}| \le 1.20$,且 $|P_{v1}| \le 2.07$。上述扰动参数可标称化为

$$m_{v1} = m_{v2} = p_{v1} = b_v = \pm 1。$$

因此,$M_v = b_vM_1 + b_vM_2$,$P_v = b_vP_1 + b_vP_2$,这里 $P_2 = 0_{4\times 2}$,且

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.2200 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.2200 & 0.0000 & 1.2000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}; P_1 = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 \\ 2.0700 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

(下转第 68 页)