Movimiento Browniano, Filtración, EMH, Itô y Modelos de Precios

Por: alguien muy mal dormido

10 de diciembre de 2025

Contenido

Predicción y precios de activos

- "Conocer toda la historia no permite predecir con precisión el precio futuro."
- Los precios reaccionan instantáneamente a nueva información.
- Esto lleva a modelos estocásticos: representan incertidumbre.

Aplicaremos estas ideas para:

- Modelar activos libres de riesgo.
- Modelar activos riesgosos ("precio de una acción").
- Incorporar incertidumbre mediante procesos aleatorios.

Espacio filtrado

Consideramos:

$$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$$

donde:

- $\mathcal{F}_t$: información disponible hasta el tiempo t.
- Un proceso $X(t)$ es **adaptado** si es $\mathcal{F}_t$-medible.

Definición de Browniano

Un proceso Browniano estándar $W^{\mathbb{P}}(t)$ satisface:

1. $W^{\mathbb{P}}(0) = 0$.
2. Adaptado a $\mathcal{F}_t$.
3. Trayectorias continuas.
4. Incrementos independientes.
5. Incrementos normales:

$$W^{\mathbb{P}}(t) - W^{\mathbb{P}}(s) \sim \mathcal{N}(0, t-s).$$

Propiedades fundamentales

- $\mathbb{E}[W(t)] = 0$, $\mathrm{Var}(W(t)) = t$.
- Magnitud típica del movimiento: $\sqrt{t}$.
- Continuo pero no diferenciable.
- Sin memoria: futuro independiente del pasado dada la información actual.

Filtración natural

$$\mathcal{F}_t^W = \sigma(W(s) : 0 \leq s \leq t)$$

- Representa TODA la información accesible.
- El Browniano es adaptado por construcción.

Hipótesis de Mercado Eficiente (EMH)

Ideas clave

- Los precios incorporan instantáneamente la información.
- Ninguna estrategia predictiva basada sólo en el pasado genera arbitraje.
- Los cambios de precios parecen “ruido” (Browniano).

Conexión:

- Incrementos independientes no predictibilidad.
- Filtración información observable.
- Sin memoria precios reflejan sólo el presente.

Definición

Una variable aleatoria τ es tiempo de paro si:

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \quad \forall t \geq 0.$$

- Se puede decidir si ocurrió "mirando el presente".
- No requiere mirar el futuro.

Ejemplos

1. Tiempo de hitting:

$$\Theta = \text{ínf}\{t > 0 : W(t) = a\}$$

Es tiempo de paro.

2. Tiempo del máximo en $[0, T]$:

$$\tau = \arg \max_{0 \leq s \leq T} W(s)$$

No es tiempo de paro: requiere observar hasta T.

Cuenta de ahorro — tasa constante

$$\frac{dS(t)}{dt} = rS(t), \quad S(0) = S_0.$$

Solución:

$$S(t) = S_0 e^{rt}.$$

Si queremos recibir M:

$$S_0 = Me^{-rT}.$$

Tasa variable $r(t)$

$$\frac{dS(t)}{dt} = r(t)S(t)$$

Solución general:

$$S(t) = S_0 \exp\left(\int_0^t r(s)\, ds\right).$$

- Base determinista de los modelos de tasas de interés.

Crecimiento intrínseco del activo

Sin riesgo:

$$\frac{dS(t)}{dt} = \mu S(t)$$

Integrando:

$$S(t) = S_0 + \int_0^t \mu S(u) du$$

Precio reacciona a nueva información

De acuerdo con la EMH:

- El precio debe ajustarse ante nueva información.
- Puede comprarse/venderse en cualquier momento.
- Necesitamos incorporar incertidumbre $\rightarrow$ Browniano.

Modelamos ruido mediante $W^{\mathbb{P}}(t)$.

Modelo con riesgo

Incluimos un término estocástico:

$$S(t) = S_0 + \int_0^t \mu S(u)du + \int_0^t \sigma S(u)dW^{\mathbb{P}}(u)$$

donde:

- $\sigma > 0$: volatilidad.
- Controla la intensidad del ruido.

Integral de Itô

Para función determinista $g(s)$:

$$\int_s^t g(s)dW(s)$$

es una variable normal:

$$\int_s^t g(s)dW(s) \sim \mathcal{N}\Big(0, \int_s^t g^2(s)ds\Big).$$

Moral

Integrar una función determinista contra Browniano produce una variable normal con media 0 y varianza igual al integral del cuadrado.

Ruido escalado

Si $g(s) = c$ constante:

$$\int_s^t c\, dW(s) = c(W(t) - W(s)) \sim \mathcal{N}(0, c^2(t-s)).$$

El ruido del Browniano se amplifica por c.

Procesos de Itô

Si $X(t)$ es un proceso de Itô:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t f(s)ds + \int_0^t g(s)dW(s)$$

La forma diferencial es:

$$dX(t) = f(t)dt + g(t)dW(t)$$

Modelo de precio en forma diferencial

El modelo:

$$S(t) = S_0 + \int_0^t \mu S(u)du + \int_0^t \sigma S(u)dW(u)$$

se escribe como:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \quad S(0) = S_0 > 0.$$

- Es una EDE (SDE) de tipo Itô.
- Base del modelo de Black–Scholes.

Resumen para la sesión de 1 hora

- Browniano: base del riesgo financiero.
- Filtración, adaptación y EMH: lógica informacional.
- Tiempos de paro: reglas basadas en información.
- Activo libre de riesgo: base determinista.
- Modelo con riesgo: agregar Browniano.
- Integrales de Itô: ruido acumulado.
- EDEs: notación compacta para precios.

Gracias.