Integral de Itô, Martingalas, Fórmula de Itô y Regla de Producto

LTRF

11 de diciembre de 2025

Contenido

Integral de Itô

Sea $W^{\mathbb{P}}$ un Browniano estándar y $g(s)$ un proceso adecuado. Definimos la **integral de Itô**:

$$\int_0^t g(s)\, dW^{\mathbb{P}}(s).$$

Propiedades clave:

- Es una variable aleatoria normal (bajo buenas condiciones).
- Captura la acumulación del "ruido" multiplicado por $g(s)$.

Isometría de Itô

Si g es cuadrado-integrable, entonces:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_0^t g(s)\, dW^{\mathbb{P}}(s)\right] = 0,$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\left(\int_0^t g(s)\, dW^{\mathbb{P}}(s)\right)^2\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_0^t g^2(s)\, ds\right].$$

Interpretación:

- La integral de Itô tiene media cero.
- Su varianza es el integral del *cuadrado* de $g(s)$.
- Multiplicar el ruido por $g(s)$ reescala la intensidad total del ruido.

Funciones suaves: $C^{m,n}$

Para una función $V : \mathbb{R} \times [0, T] \to \mathbb{R}$:

$$V \in C^{m,n}(\mathbb{R} \times [0, T]; \mathbb{R})$$

significa:

- m derivadas continuas en la variable espacial x.
- n derivadas continuas en la variable temporal t.

Casos típicos:

- C^0: continua.
- C^1: una derivada continua.
- C^2: dos derivadas continuas.
- C^∞: infinitamente diferenciable (ej: e^x, polinomios).

Diferenciales y variación cuadrática

Sea un proceso de Itô:

$$dX(t) = f(t)\,dt + g(t)\,dW^{\mathbb{P}}(t).$$

En el cálculo estocástico se cumple:

$$\begin{aligned} (dt)^2 &\approx 0, \\ dt\,dW^{\mathbb{P}}(t) &\approx 0, \\ (dW^{\mathbb{P}}(t))^2 &= dt. \end{aligned}$$

Entonces:

$$(dX(t))^2 = g^2(t)\,dt.$$

- Aparece un término cuadrático que NO desaparece.
- Es la fuente del término $\frac{1}{2}g^2 V_{xx}$ en la fórmula de Itô.

Regla del producto estocástico

Sean

$$dX(t) = f_1(t)dt + g_1(t)dW^{\mathbb{P}}(t), \quad dY(t) = f_2(t)dt + g_2(t)dW^{\mathbb{P}}(t).$$

Entonces:

$$d[X(t)Y(t)] = Y(t)\,dX(t) + X(t)\,dY(t) + g_1(t)g_2(t)\,dt.$$

- El tercer término proviene de $(dW^{\mathbb{P}})^2 = dt$.
- Si los ruidos fueran independientes, el término cruzado sería 0.

Fórmula de Itô (enunciado)

Sea $X(t)$ un proceso de Itô:

$$dX(t) = f(t)\,dt + g(t)\,dW^{\mathbb{P}}(t),$$

y $V(x,t) \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times [0,T]; \mathbb{R})$. Entonces:

$$dV(X(t),t) = \left(V_t + f(t)V_x + \tfrac{1}{2}g^2(t)V_{xx}\right)dt + g(t)V_x\,dW^{\mathbb{P}}(t).$$

donde:

$$V_x = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad V_{xx} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad V_t = \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Interpretación término a término

En

$$dV = \underbrace{V_t dt}_{\text{cambio por el paso del tiempo}} + \underbrace{f V_x dt}_{\text{drift del proceso } X} + \underbrace{\tfrac{1}{2} g^2 V_{xx} dt}_{\text{efecto de la volatilidad}} + \underbrace{g V_x dW}_{\text{ruido estocástico}} .$$

- $V_t dt$: cambio en V aunque X no se mueva.
- $f V_x dt$: efecto del drift de X sobre V.
- $\frac{1}{2} g^2 V_{xx} dt$: término nuevo puramente estocástico.
- $g V_x dW$: fluctuaciones aleatorias de corto plazo.

Curvatura y volatilidad

El término

$$\frac{1}{2}g^2V_{xx}dt$$

muestra cómo interactúan volatilidad y curvatura:

- Si V es **convexa** $(V_{xx} > 0) \Rightarrow$ drift *positivo adicional*.
- Si V es **cóncava** $(V_{xx} < 0) \Rightarrow$ drift *negativo adicional*.
- Si V es **lineal** $(V_{xx} = 0) \Rightarrow$ no hay término extra.

Este efecto es clave para:

- Explicar sensibilidad de opciones a la volatilidad.
- Entender por qué el cálculo estocástico requiere un término de segundo orden.

Definición de martingala

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$ un espacio filtrado. Un proceso $M(t)$ es una **martingala** si:

1. $M(t)$ es $\mathcal{F}_t$-adaptado.
2. $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|M(t)|] < \infty$ para todo t.
3. Para $0 \leq s \leq t$:
$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M(t) \mid \mathcal{F}_s] = M(s).$$

Intuición:

- *Juego justo*: en promedio no ganas ni pierdes con el tiempo.
- Tu mejor predicción del futuro es el valor actual.

Integral de Itô como martingala (teorema)

Sea $g(t)$ un proceso $\mathcal{F}_t$-adaptado tal que

$$\int_0^T g^2(s)\,ds < \infty \quad \text{c.s.}$$

Definimos, para $t \in [0, T]$,

$$X(t) = \int_0^t g(s)\,dW^{\mathbb{P}}(s).$$

Entonces:

- $X(t)$ es una $\mathcal{F}_t$-martingala.
- Es decir, para $0 \leq s \leq t \leq T$:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X(t) \mid \mathcal{F}_s] = X(s).$$

Conclusión: Toda integral estocástica con integrando adaptado y cuadrado-integrable es automáticamente una martingala.

Interpretación financiera de una martingala

- $M(t)$ puede representar el **capital** en una estrategia de trading.
- Condición de martingala:

$$\mathbb{E}[M(t) \mid \mathcal{F}_s] = M(s)$$

  dice:
  - Con la información disponible en s, el capital esperado en el futuro es igual al capital actual.
  - En promedio, no esperas ganar ni perder.
- En modelos de *no-arbitraje*, muchos precios descontados se modelan como martingalas.

Teorema de representación martingala

Sea $W^{\mathbb{P}}$ un Browniano estándar y $M(t)$ una martingala continua. Entonces existe un proceso $\mathcal{F}_t$-adaptado $g(t)$ tal que:

$$M(t) = M_0 + \int_0^t g(u)\, dW^{\mathbb{P}}(u).$$

Moraleja:

- Cualquier martingala continua puede escribirse como **capital inicial + integral estocástica**.
- En finanzas:
  - M_0: capital inicial.
  - $g(t)$: número de unidades del activo riesgoso.
  - dW: cambio aleatorio del precio.
  - Capital final = capital inicial + acumulación de ganancias/pérdidas.

Resumen

- La integral de Itô tiene media cero y varianza controlada por g^2.
- Cálculo estocástico: reglas $(dW)^2 = dt$ generan términos de segundo orden.
- Fórmula de Itô: versión estocástica de la regla de la cadena.
- La curvatura V_{xx} interactúa con la volatilidad para crear drift adicional.
- Si g es adaptado y cuadrado-integrable, la integral de Itô es martingala.
- Martingalas: procesos de "juego justo"; el futuro esperado $=$ valor actual.
- Teorema de representación: martingala continua $=$ constante $+$ integral de Itô.

Gracias.