# Modelo de Black–Scholes:
# Solución exacta y propiedades estadísticas

# El modelo estocástico del precio

Consideramos el modelo estocástico del precio de un activo financiero:

$$dS(t) = \mu S(t)\,dt + \sigma S(t)\,dW^{\mathbb{P}}(t), \qquad S(0) = S_0 > 0, \quad t \in [0, T].$$

- $\mu$: tasa media de crecimiento.
- $\sigma > 0$: volatilidad.
- $W^{\mathbb{P}}(t)$: movimiento browniano estándar.

Este es el **modelo de activos financieros de Black–Scholes**.

# Existencia y unicidad

La ecuación anterior es una SDE lineal de tipo Itô.
Por teoría general:

- Existe una **solución fuerte única**.
- $S(t) > 0$ casi seguramente para todo $t \in [0, T]$.

Esto garantiza que el proceso está bien definido en todo el intervalo.

# Motivación para usar el logaritmo

Queremos resolver la SDE explícitamente.
Observaciones clave:

- El precio no es aditivo, sino multiplicativo.
- El logaritmo convierte productos en sumas.
- $S(t) > 0 \Rightarrow \ln S(t)$ está bien definido.

Por ello definimos:

$$V(S(t)) = \ln S(t).$$

# Derivadas necesarias

Para $V(x) = \ln x$:

$$V_x(x) = \frac{1}{x}, \qquad V_{xx}(x) = -\frac{1}{x^2}, \qquad V_t = 0.$$

Estas derivadas se usarán en la fórmula de Itô.

# Aplicando la fórmula de Itô

Aplicamos Itô a $V(S(t)) = \ln S(t)$:

$$dV = V_x \, dS + \frac{1}{2} V_{xx} (dS)^2.$$

Sustituyendo $dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dW^{\mathbb{P}}(t)$:

$$d \ln S(t) = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma \, dW^{\mathbb{P}}(t).$$

La ecuación se vuelve **lineal e integrable**.

# Forma integral

Integramos entre 0 y $t$:

$$\ln S(t) = \ln S_0 + \int_0^t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) ds + \int_0^t \sigma \, dW^{\mathbb{P}}(s).$$

Como $W^{\mathbb{P}}(0) = 0$:

$$\ln S(t) = \ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W^{\mathbb{P}}(t).$$

# Solución explícita

Tomando exponencial:

$$S(t) = S_0 \exp\left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W^{\mathbb{P}}(t) \right), \quad t \in [0, T].$$

Este proceso se conoce como:

- **Movimiento Browniano Geométrico**.
- Modelo base del precio en Black–Scholes.

# Definición de log-retorno

Para $0 \leq s < t \leq T$:

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S(s)}\right) = \ln S(t) - \ln S(s).$$

Usando la solución explícita:

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S(s)}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s) + \sigma\big(W^{\mathbb{P}}(t) - W^{\mathbb{P}}(s)\big).$$

# Distribución de los log-retornos

Como

$$W^{\mathbb{P}}(t) - W^{\mathbb{P}}(s) \sim \mathcal{N}(0, t-s),$$

se sigue que:

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S(s)}\right) \sim \mathcal{N}\left((\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)(t-s),\ \sigma^2(t-s)\right).$$

Los log-retornos:

- Son normales.
- Tienen varianza proporcional al tiempo.
- Son independientes en intervalos no solapados.

# Distribución de $S(t)$

Como $\ln S(t)$ es normal:

$$S(t) \sim \text{Lognormal}.$$

Para $a < b$:

$$\mathbb{P}(a \leq S(t) \leq b) = \mathbb{P}\left(\frac{\ln(a/S_0) - (\mu - \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}} \leq Z \leq \frac{\ln(b/S_0) - (\mu - \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right),$$

donde $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

# Función densidad del precio

La densidad de $S(t)$ es:

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi t}} \exp\left( -\frac{\left(\ln(x/S_0) - (\mu - \sigma^2/2)t\right)^2}{2\sigma^2 t} \right), \quad x > 0.$$

Y $f(x) = 0$ si $x \leq 0$.

# Media y varianza

Los momentos del precio son:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S(t)] = S_0 e^{\mu t},$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S(t)^2] = S_0^2 e^{(2\mu+\sigma^2)t},$$

$$\mathrm{Var}_{\mathbb{P}}[S(t)] = S_0^2 e^{2\mu t} \left( e^{\sigma^2 t} - 1 \right).$$

La volatilidad controla la dispersión del precio.

# Resumen conceptual

- El precio sigue una SDE multiplicativa.
- El log-precio sigue una SDE aditiva.
- La solución es un movimiento browniano geométrico.
- Los log-retornos son normales e independientes.
- El precio es lognormal.

Este modelo es la base del pricing en Black–Scholes.