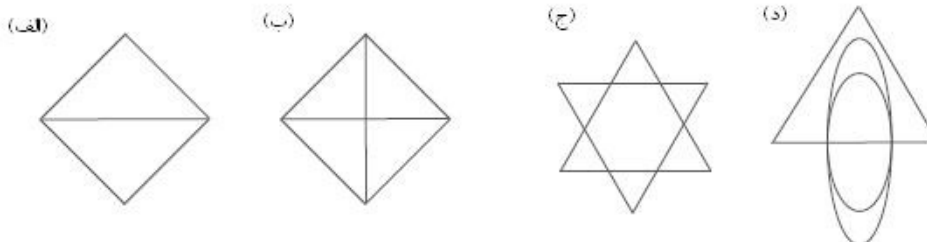


تمرین‌های سری اول درس نظریه و الگوریتم‌های گراف

دانشکده مهندسی و علوم کامپیوتر

مدرس: فرشاد صفایی، اسفندماه ۱۴۰۱

۱- کدامیک از گزینه‌های شکل زیر را می‌توان بدون برداشتن مداد از روی کاغذ رسم کرد طوری که هیچ خطی دوبار رسم نشود؟ چرا؟



۲- با توجه به شبکه داده شده به پرسشهای زیر پاسخ دهید:

(الف) ماتریس‌های مجاورت مربوطه

(ب) لیست‌های یال مربوطه

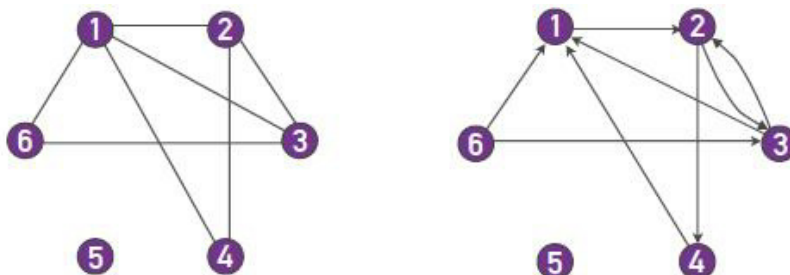
(ج) میانگین ضریب خوشه‌بندی شبکه‌ی نشان داده شده در شکل (الف) را مشخص کنید.

(د) اگر شما برچسب‌های ۵ و ۶ را در شکل (الف) جابجا کنید ماتریس مجاورت و لیست یال‌ها چه تغییری می‌کند؟

(ه) چه نوع اطلاعاتی را شما نمی‌توانید از لیست یال‌ها استنتاج کنید در حالیکه می‌توان از ماتریس مجاورت استنتاج کرد؟

(و) در شبکه (الف) چه تعداد مسیر (با هر تعداد تکرار گره‌ها و یال‌ها) با طول ۳ و شروع از گره ۱ و خاتمه با گره ۳ وجود دارد؟ در (ب) چطور؟

(ز) تعداد دورهایی به طول ۴ را در هر دو شبکه بیابید.



نمایش گراف: (الف) گراف بدون جهت با ۶ گره و ۷ یال؛ (ب) گراف جهت دار با ۶ گره و ۸ یال جهت دار

۳- (الف) یک شبکه بدون جهت با اندازه N را در نظر بگیرید که هر گره درجه $k=1$ دارد. N چه شرایطی را باید برآورده کند؟ توزیع درجه این

شبکه چیست؟ این شبکه چه تعداد مولفه دارد؟

(ب) شبکه‌ای را در نظر بگیرید که درجه هر گره $k=2$ و ضریب خوشه‌بندی آن $C=1$ است. این شبکه شبیه به چیست؟ در این حالت N چه

شرایطی را برآورده می‌کند؟

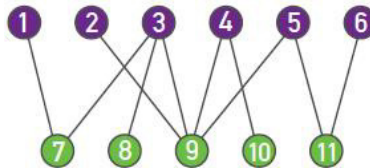
۴- شبکه دویخشی شکل زیر را در نظر بگیرید.

(الف) ماتریس مجاورت آن را بسازید. چرا آب یک ماتریس بلوک قطری است؟

(ب) ماتریس مجاورت دو تصویر آن را بسازید. گره‌های سبز و بنفش.

(ج) میانگین درجه گره‌های بنفش و میانگین درجه گره‌های سبز را در شبکه دویخشی محاسبه کنید.

(د) میانگین درجه را در هر یک از دو تصویر بیابید. آیا با مقادیر قسمت (ج) برای هر گره فرق می‌کنند؟



۵- یک شبکه اردوش-رنی را در نظر بگیرید که با $N=3000$ گره که با احتمال $p=10^{-3}$ به هم متصل هستند.

(الف) متوسط تعداد یال‌ها $\langle L \rangle$ چیست؟

(ب) شبکه تحت چه رژیمی قرار دارد؟

(ج) احتمال p_c را محاسبه کنید طوری که شبکه در نقطه بحرانی باشد.

(د) با داشتن احتمال اتصال $p=10^{-3}$ ، تعداد گره‌ها N^{cf} را محاسبه کنید طوری که شبکه فقط یک مولفه داشته باشد.

(ه) برای شبکه بهد (د) میانگین درجه $\langle k^{cf} \rangle$ و میانگین فاصله بین دو گره تصادفاً انتخابی $\langle d \rangle$ را محاسبه کنید.

(ز) توزیع درجه p_k این شبکه را محاسبه کنید.

۶- یک شبکه با N گره بر روی یک دایره را در نظر بگیرید طوری که هر گره به m همسایه در هر دو طرف خویش متصل شود (در نتیجه هر گره

درجه $2m$ دارد). میانگین ضریب خوشه بندی $\langle C \rangle$ این شبکه و میانگین کوتاهترین مسیر $\langle d \rangle$ را محاسبه کنید. برای سادگی فرض کنید که

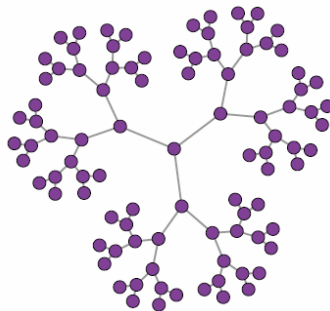
N و m طوری انتخاب شده‌اند که $(n-1)/2m$ یک عدد صحیح باشد. اگر $N \gg 1$ چه اتفاقی برای $\langle C \rangle$ می‌افتد؟ چه اتفاقی برای $\langle d \rangle$

می‌افتد؟

۷- هر درخت کیلی (Cayley tree) درخت متقارنی است که با شروع از یک گره مرکزی با درجه k ساخته می‌شود. هر گره در فاصله d از گره

مرکزی دارای درجه k است تا زمانی که به گره‌هایی در فاصله P برسیم که درجه ۱ دارند که به آنها برگ گفته میشود (در شکل زیر درخت

کیلی با $k=3, P=5$ نشان داده شده است).



(الف) تعداد گره‌های قابل دسترس از گره مرکزی را در t مرحله محاسبه کنید.

(ب) توزیع درجه شبکه را محاسبه کنید.

(ج) قطر d_{max} را محاسبه کنید.

(د) یک عبارت برای d_{max} بر اساس تعداد کل گره‌ها بیابید.

(ه) آیا این شبکه ویژگی جهان کوچک را نشان می‌دهد؟

۸- ماکزیمم درجه k_{max} را برای شبکه‌های لیست شده در جدول زیر محاسبه کنید.

شبکه	N	L	$\langle k \rangle$	$\langle k_{in}^2 \rangle$	$\langle k_{out}^2 \rangle$	$\langle k^2 \rangle$	γ_{in}	γ_{out}	γ
اینترنت	192,244	609,066	6.34	-	-	240.1	-	-	3.42*
WWW	325,729	1,497,134	4.60	1546.0	482.4	-	2.00	2.31	-
شبکه قدرت	4,941	6,594	2.67	-	-	10.3	-	-	Exp.
تماس‌های تلفن موبایل	36,595	91,826	2.51	12.0	11.7	-	4.69*	5.01*	-
ایمیل	57,194	103,731	1.81	94.7	1163.9	-	3.43*	2.03*	-
همکاری‌های علمی	23,133	93,439	8.08	-	-	178.2	-	-	3.35*
شبکه هنرمندان	702,388	29,397,908	83.71	-	-	47,353.7	-	-	2.12*
شبکه تقدیرات	449,673	4,689,479	10.43	971.5	198.8	-	3.03**	4.00*	-
متابولیسم E. Coli	1,039	5,802	5.58	535.7	396.7	-	2.43*	2.90*	-
تعاملات پروتئین	2,018	2,930	2.90	-	-	32.3	-	-	2.89*

موفق باشید