

سوالات تئوری

۱. کدامیک از مجموعه‌های زیر با ضرب و جمع تعریف شده فضای برداری است؟ اثبات یا رد کنید.

الف) مجموعه همه‌ی زوج‌های حقیقی روی اعداد حقیقی به صورتی که:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$c(x_1, x_2) = (cx_1, x_2), c \in \mathbb{R}$$

ب) مجموعه اعداد حقیقی مثبت \mathbb{R}^+ روی اعداد حقیقی به صورتی که:

$$a + b = ab \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+$$

$$c \cdot a = a^c \quad \forall a \in \mathbb{R}^+, c \in \mathbb{R}$$

۲. فرض کنید U_1 و U_2 زیرفضاهایی از فضای برداری V باشند. ثابت کنید $U_1 \cup U_2$ زیرفضایی از V است اگر و تنها اگر $U_2 \subseteq U_1$ و یا $U_1 \subseteq U_2$.

۳. کدامیک از گزاره‌های زیر درست و کدامیک غلط است؟ اثبات یا رد کنید.

الف) اگر مجموعه $S = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ در \mathbb{R}^n شامل بردار صفر باشد، مجموعه S مستقل خطی خواهد بود.

ب) مجموعه $S = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ در \mathbb{R}^n مستقل خطی است اگر $p > n$.

ج) مجموعه $\text{span}\{u, v\}$ همیشه یک صفحه گذرنده از مبدا است.

د) اگر u و v بردارهای غیرصفر باشند، $\text{span}\{u, v\}$ شامل خطی گذرنده از u و مبدا است.

۴. برای سه ماتریس زیر، span و استقلال خطی یا عدم آن را بررسی نمایید و توضیحات خود را شرح دهید.
(راهنمایی: هر ستون از هر ماتریس را یک بردار در نظر بگیرید.)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (۱)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad (۲)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۳)$$

۵. در ابتدا استدلال شهودی از ضرب خارجی سه بردار مانند a, b, c را شرح دهید و سپس ثابت کنید می‌توان آن را با استفاده از ضرب داخلی بازنویسی کرد.

۶. نشان دهید برای هر سه عدد دلخواه مانند x, y, z به شرطی که رابطه $x + y + z = 0$ برقرار باشد، می‌توان دو بردار $v = (x, y, z)$ و $w = (z, x, y)$ را تعریف کرد به صورتی که $\frac{v \cdot w}{||v|| \cdot ||w||} = -0.5$ همواره برقرار باشد.

۷. ماتریس بالامثلثی ماتریسی است که کلیه اعضای زیر قطر اصلی آن صفر باشد. اگر M یک ماتریس $n \times n$ بالامثلثی با قطر غیر صفر باشد، ثابت کنید ستون‌های M مستقل خطی‌اند.

۸. اگر u, v, w بردارهای مجزا باشند: ثابت کنید $\{u, v, w\}$ مستقل خطی است، اگر و تنها اگر $\{u + v, u + w, v + w\}$ مستقل خطی باشد.

۹. فرض کنید دو $\{u_1, \dots, u_p\}$ و $\{v_1, \dots, v_q\}$ بردارهایی در فضای برداری V باشند. اگر $H = \text{span}\{u_1, \dots, u_p\}$ و $K = \{v_1, \dots, v_q\}$ باشد، نشان دهید:

$$H + K = \text{span}\{u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q\}$$

سوالات عملی

۱. هدف از انجام این تمرین، چگونگی رسم بردار به کمک کتابخانه‌های `numpy` و `matplotlib` و همچنین بررسی درستی پاسختان در سوال ۴ سوالات تئوری است. لطفاً برای اینکه قالب تمامی پاسخ‌ها یک‌دست باشد، مراحل زیر را به ترتیب دنبال کنید.

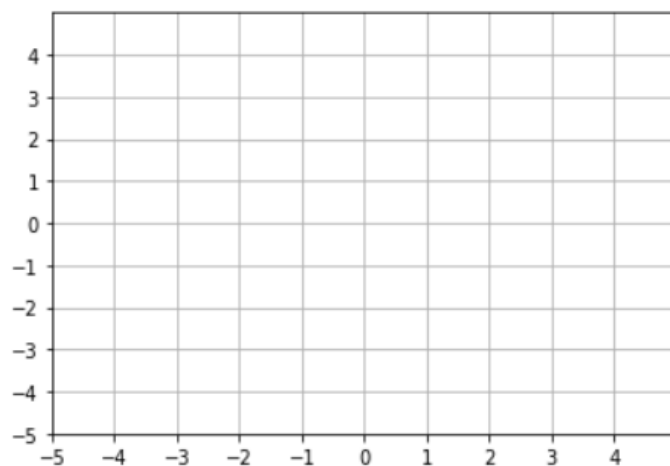
بخش اول

(۱) یک دایرکتوری با عنوان `computer_hw_1` بسازید.

(۲) داخل این دایرکتوری، محیط `jupyter notebook` را باز نموده و یک فایل با عنوان `code_A.ipynb` بسازید. لطفاً نام‌گذاری فایل را حتماً رعایت کنید.

رسم Grid

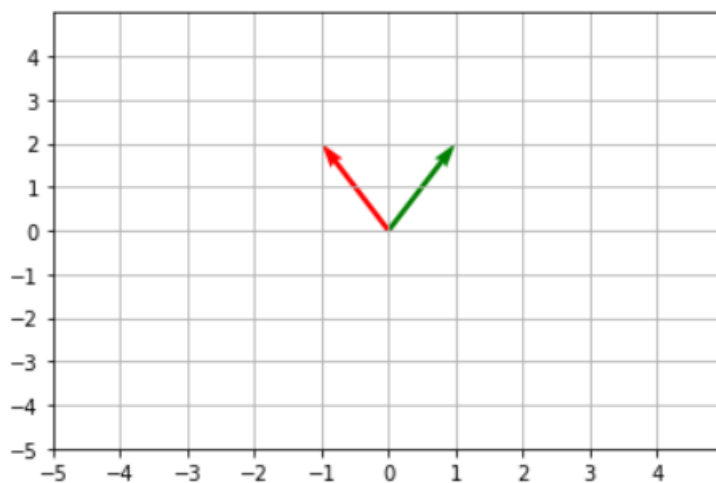
در این قسمت لازم است کدهایی را بنویسید که در نهایت بتوانید یک grid مانند تصویر ۱ در خروجی داشته باشید. برای این کار به جستجو و آشنایی با `figure`, `add_subplot`, `set_xlim`, `set_ylim`, `arange`, `set_xticks` و `set_yticks` در کتابخانه `matplotlib` نیاز خواهید داشت. همچنین، بازه محورهای x و y را $(-5, 5)$ در نظر بگیرید.



تصویر ۱

رسم بردار

در مورد `quiver` در کتابخانه `matplotlib` جستجو کنید و به کمک آن ماتریس A را که در سوال ۴ سوالات تئوری داده شده بود، به صورت دو بردار با شروع از مبدا رسم کنید. در نهایت نتیجه باید به صورت تصویر ۲ شود.



تصویر ۲

نمایش Span

به کمک کدهای زیر، `Span` دو برداری که در قسمت قبل رسم نمودید را به دست آورده و در قالب نقاط آبی رنگ در `grid` نمایش دهید. هر نقطه آبی رنگ معادل با یک بردار خواهد بود. (برای این کار لازم است از `'b.'` استفاده نمایید).

```
scaler = np.arange(-10, 10, 0.01)
scaler = scaler.reshape(scaler.shape[0], 1)
np.random.shuffle(scaler)
```

با کوچک‌تر کردن آرگومان سوم تابع `arrange` چه اتفاقی می‌افتد؟ در این بخش لازم است دو اسکرین‌شات بگیرید. یکی وقتی مقدار آرگومان سوم تابع `arrange` برابر با 0.01 و دیگری در حالتی که برابر با 0.001 است.

بخش دوم

داخل دایرکتوری `computer_hw_1`، محیط `jupyter notebook` را باز نموده و یک فایل با عنوان `code_B.ipynb` بسازید.

(دقت کنید که در نهایت لازم است دو فایل `code_A.ipynb` و `code_B.ipynb` را به همراه ۴ اسکرین‌شات که در هر بخش مورد نیاز گفته شده است، ضمیمه بقیه پاسخ‌های تکلیف این سری شود.)

رسم Grid

مشابه قسمت قبلی است. (نیازی به اسکرین‌شات از این قسمت نیست.)

رسم بردار

مشابه قسمت قبلی است، فقط با این تفاوت که باید برای ماتریس B از سوال ۴ تئوری رسم شوند. در این قسمت از خروجی نمودار رسم شده یک اسکرین‌شات تهیه کنید.

نمایش Span

مشابه قسمت قبلی است با این تفاوت که باید برای ماتریس B از سوال ۴ تئوری رسم شود. در این قسمت لازم است یک اسکرین‌شات بگیرید. فقط وقتی مقدار آرگومان سوم تابع `arrange` برابر با 0.01 است. `Span` به دست آمده در این حالت چه تفاوتی با `Span` بخش اول دارد؟ چرا؟ چه ارتباطی بین `Span` و استقلال خطی بردارها و عدم آن وجود دارد؟ در صورت کوچک‌تر کردن آرگومان سوم تابع `arrange` چه اتفاقی می‌افتد؟

لطفاً به نکات زیر توجه فرمایید:

- فرمت نام‌گذاری فایلی که آپلود می‌کنید حتماً به صورت `HW1[student id][student name]` باشد.
- در صورت مشاهده هرگونه تقلب نمره صفر برای تکلیف در نظر گرفته می‌شود.
- می‌توانید سوالات و ابهامات خود را در [گروه تلگرامی](#) درس بپرسید.