

سوالات تئوری

۱. برای ماتریس زیر مقادیر منفرد (singular values) را بدست آورید (با راه حل کامل).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

۲. برای ماتریس زیر تجزیه SVD را بدست آورید (با راه حل کامل).

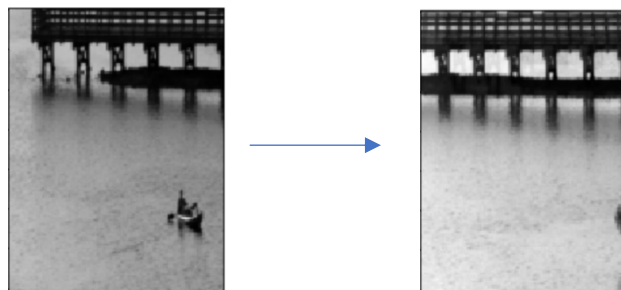
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۳. الف) نشان دهید اگر A یک ماتریس مربعی باشد آنگاه $|\det A|$ حاصلضرب مقادیر تکین A است.

ب) فرض کنید A ماتریسی مربعی و معکوس پذیر باشد، آنگاه SVD را برای A^{-1} بدست آورید.

سوالات عملی

۴. در این سوال قرار است یکی از کاربردهای تجزیه SVD در حوزه پردازش تصویر را پیاده سازی کنیم. هدف پیاده سازی برنامه ای است تا پس زمینه یک فیلم را از foreground آن جدا کند.



قرار است فایل `Remove_Video_Background_with_SVD.ipynb` توسط شما تکمیل شود. همچنین توضیحات تکمیلی در همین فایل موجود است.

۵. در درس با مقدمات PCA آشنا شده‌اید. برای اینکه مفاهیم مرتبط با این موضوع بهتر برایتان جا بفتند، در ابتدا یک مثال تصویری ارائه شده است و سپس به حل یک سوال خواهید پرداخت. هدف از این تکلیف این است که یک بار تمامی گام‌های الگوریتم را خودتان جلو ببرید و محاسبات را انجام دهید. اگر تمامی مراحل را در قالب این تمرین ساده بتوانید پیش ببرید، پیچیده‌ترین مسائل را هم درک خواهید کرد.

فرض کنید دیتاستی داریم که شامل تصویر چهره افراد است و هدف این است که به کمک PCA تعداد ابعاد در فضا را کاهش دهیم. یعنی، تصاویر داده شده را با تعداد ابعاد کمتری بازسازی کنیم و همچنان کیفیت خوبی داشته باشیم. تعداد ابعاد معادل است با تعداد پیکسل‌های موجود در هر سطر و هر ستون. مثلاً در این مثال، ابعادی که داریم ۹۲ در ۱۱۲ است. یعنی ۱۰,۳۰۴ بعد!



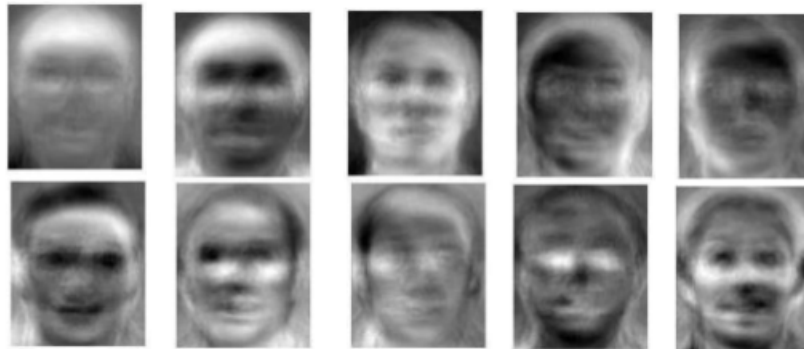
گام‌های الگوریتم به شرح زیر است.

ابتدا میانگین چهره‌ها را حساب می‌کنیم. تصویر میانگین به دست آمده از تمامی تصاویر به این صورت خواهد بود:



Average
face

سپس میانگین به دست آمده را باید از تمامی عکس‌های موجود کم کنیم. سپس، ماتریس کواریانس تشکیل می‌دهیم و سپس بردارهای ویژه و مقادیر ویژه ماتریس کواریانس را محاسبه می‌کنیم. می‌توان برای داشتن شهود بهتر، بردارهای ویژه را به صورت تصویر نشان داد. برای مثال در تصویر زیر ۱۰ بردار ویژه نشان داده شده است:



هر کدام از تصاویر بالا معادل با یکی از بردارهای ویژه محاسبه شده هستند. در نهایت با در نظر گرفتن ترکیب خطی بردارهای ویژه مختلف و جمع آن‌ها با تصویر میانگین، می‌توان تصاویر اولیه را به فضایی با ابعاد کمتر برد و با کیفیت خوبی بازسازی کرد. تصویر زیر کیفیت تصاویر را در ابعاد مختلف نشان می‌دهد. همانطور که مشخص است، می‌توان ۱۰,۳۰۴ بعد را به ۲۵۶ بعد کاهش داد و همچنان وضوح خوبی برای تصاویر داشت.

$d'=1$



$d'=2$



$d'=4$



$d'=8$



$d'=16$



$d'=32$



$d'=64$



$d'=128$



$d'=256$



**Original
Image**



این مثال صرفاً یکی از کاربردهای PCA در عمل است. احتمالاً تا به اینجا شهود خوبی از این روش به دست آورده باشید.

حالا سوال. دادگان زیر داده شده است. با استفاده از زبان پایتون و کتابخانه numpy گام‌های الگوریتم PCA را روی این دادگان پیاده سازی کنید.

```
Dataset = np.array([[2, 1], [3, 5], [4, 3], [5, 6], [6, 7], [7, 8]])
```

لطفا به نکات زیر توجه فرمایید:

- فرمت نام‌گذاری فایلی که آپلود می‌کنید حتماً به صورت **HW4[student id][student name]** باشد.
- در صورت مشاهده هرگونه تقلب نمره **صفر** برای تکلیف در نظر گرفته می‌شود.
- می‌توانید سوالات و ابهامات خود را در گروه تلگرامی درس بپرسید.