



جبر خطی - تمرین اختیاری سری دوم

موعد تحویل: -

مدرس: دکتر حامد ملک

نیمسال دوم ۱۴۰۰ - ۱۴۰۱

۱. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ماتریس A^{23} را محاسبه کنید.

۲. فرض کنید A ماتریسی مربعی و $A^3 = O$ حاصل $A(2I - 3A)^5$ برابر چیست؟

۳. حاصل $\begin{vmatrix} 1 & 2a & a^2 \\ 1 & a+b & ab \\ 1 & 2b & b^2 \end{vmatrix}$ را به دست آورید.

۴. اگر $A = \begin{bmatrix} a+x & a & a \\ b & b+x & b \\ c & c & c+x \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه های A برابر ۶ و $|A| = 8$ ، x را به دست آورید.

۵. اگر ماتریس الحاقی ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & a & b \\ c & d & 3 \end{bmatrix}$ برابر صفر باشد، حاصل $a + b + c + d$ کدام است؟

۶. پس از انجام چند عمل سطری مقدماتی روی ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ این ماتریس به $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}$ تبدیل شده است. حاصل $a + b + c$ را به دست آورید.

۷. اگر T یک تبدیل خطی از R^2 به R^2 باشد، ابتدا نشان دهید T وارون پذیر است و سپس T^{-1} را پیدا کنید.

a) $T(x_1, x_2) = (-5x_1 + 9x_2, 4x_1 - 7x_2)$

b) $T(x_1, x_2) = (6x_1 - 8x_2, -5x_1 + 7x_2)$

۸. اگر v برداری غیر صفر در R^n باشد و $v \cdot v = v^T v \neq 0$ و $a = \frac{2}{v^T v}$ باشد و ماتریس A به صورت زیر تعریف شده باشد، ثابت کنید ماتریس A متقارن است و $AA = I$.

$$A = I - avv^T$$

$$T: R \xrightarrow{3} R^2$$

۹. فرض کنید ماتریس T را به صورت روبه رو تعریف کنیم:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x+z \\ y+z \\ y \end{bmatrix}$$

- نشان دهید که T یک تبدیل خطی است.
- ماتریس استاندارد T را تعیین کنید

۱۰. مقادیر ویژه و بردار های ویژه ماتریس روبه رو را به دست بیاورید و بدون محاسبه ی A^{-1} مقادیر و بردار های ویژه ان را بدست بیاورید.

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

۱۱. ماتریس های زیر را در نظر بگیرید و مقادیر خواسته شده را محاسبه کنید.

$$C = AB, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

الف) A^{37}

ب) C^{42}

۱۲. فرض کنید روابط زیر برقرار باشد. مقادیر d, c را بیابید.

$$A^2 = -I, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ c & d \end{bmatrix}$$

۱۳. دترمینان ماتریس زیر را به دست آورید. (با محاسبه کامل) (می دانیم a, b برابر نیستند).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4(a+b) \\ 1 & a+1 & a^2(b+2) \\ 1 & b+1 & b^2(a+2) \end{bmatrix}$$

۱۴. بردار ویژه ماتریس های زیر را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

۱۵. رتبه ماتریس های زیر را به دست آورید.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

۱۶. مقادیر ویژه ماتریس زیر را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -3 \\ -9 & -2 & 3 \\ 18 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

۱۷. برای ماتریس A ابتدا مقادیر r,n,m را طوری پیدا کنید که داشته باشیم:

$$mA^2+nA+rI=0$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

سپس به کمک این رابطه A^{-1} را محاسبه کنید.

نکات

توجه کنید که این تکلیف به صورت اختیاری و برای تمرین بیشتر است و هیچ نمره‌ای (به صورت اجباری یا امتیازی) ندارد.

هر گونه سوال و ابهام را می‌توانید در گروه تلگرامی مطرح نمایید.

سلامت و موفق باشید

تیم حل تمرین