بسمه تعالی
جبر خطی
پاییز ۱۴۰۰

پاسخ تمرین سری **یک**
دانشکده مهندسی و علوم کامپیوتر

مدرس: دکتر حامد ملک

سوالات تئوری

۱. کدام‌یک از مجموعه‌های زیر با ضرب و جمع تعریف شده فضای برداری است؟ اثبات یا رد کنید.

الف) مجموعه همه‌ی زوج‌های حقیقی روی اعداد حقیقی به صورتی که:

$$(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}) + (\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2}) = (\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_1} + \boldsymbol{y_2})$$

$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}) = (\boldsymbol{c}\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}), \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$$

ب) مجموعه اعداد حقیقی مثبت $\mathbb{R}^+$ روی اعداد حقیقی به صورتی که:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{ab} \quad \forall\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^+$$

$$\boldsymbol{c}.\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{c}} \;\; \forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^+, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$$

الف) خاصیت پخشی ندارد.

$$(1+1)(x_1, x_2) = 1(x_1, x_2) + 1(x_1, x_2) = (x_1, x_2) + (x_1, x_2) = (2x_1, 2x_2)$$

در حالیکه:

$$(1+1)(x_1, x_2) = 2(x_1, x_2) = (2x_1, x_2)$$

ب) فضای برداری است. اثبات:

پخشی:

$$(c_1, c_2)a = a^{c_1+c_2} = a^{c_1}a^{c_2} = c_1a.c_2a = c_1 + c_2a$$

به همین ترتیب برای ضرب.

شرکت پذیری:

$$(a+b)+c = (ab)+c = (ab)c = a(bc) = a + (b+c)$$

به همین ترتیب برای ضرب.

عضو خنثی:

$$\exists 1 \in \mathbb{R}^{+}: a+1 = 1a = a \quad \exists 1 \in \mathbb{R}^{+}: 1a = a^{1} = a$$

به همین ترتیب برای ضرب.

عضو وارون:

$$\exists \frac{1}{a} \in \mathbb{R}^{+}: a + \frac{1}{a} = a\left(\frac{1}{a}\right) = 1$$

به همین ترتیب برای ضرب.

جابجایی: بدیهی است.

شرکت پذیری ضرب اسکالر: مانند شرکت پذیری عمل کنید. بدیهی است.

۲. فرض کنید U_1 و U_2 زیرفضاهایی از فضای برداری V باشند. ثابت کنید $U_1 \cup U_2$ زیرفضایی از V است اگر و تنها اگر $U_1 \subseteq U_2$ و یا $U_2 \subseteq U_1$.

قسمت اول:

$U_1 \subseteq U_2 \Rightarrow U_1 \cup U_2 = U_2$ زیرفضا

$U_2 \subseteq U_1 \Rightarrow U_1 \cup U_2 = U_1$ زیرفضا

قسمت دوم:

از برهان خلف استفاده می‌کنیم:

$$U_1 \not\subset U_2 \Rightarrow \exists v_1 \in U_1: v_1 \notin U_2, -v_1 \in U_1$$

$$U_2 \not\subset U_1 \Rightarrow \exists v_2 \in U_2: v_2 \notin U_1, -v_2 \in U_2$$

از طرفی می توان نتیجه گرفت:

$$v_1, v_2 \in U_1 \cup U_2 \Rightarrow v_1 + v_2 \in U_1 \cup U_2$$

پس برای بردار $v_1 + v_2$ دو حالت زیر را داریم:

$$v_1 + v_2 \in U_1 \Longrightarrow (v_1 + v_2) + (-v_1) = v_2 \in U_1$$

$$v_1 + v_2 \in U_2 \Longrightarrow (v_1 + v_2) + (-v_2) = v_1 \in U_2$$

۳. کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک غلط است؟ اثبات یا رد کنید.

الف) اگر مجموعه $S = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ در $\mathbb{R}^n$ شامل بردار صفر باشد، مجموعه S مستقل خطی خواهد بود.

غلط، می‌توانیم با تغییر نامگذاری بردارهای مجموعه‌ی S این فرض را کنیم که $v_1 = 0$. بنابراین معادله‌ی $1v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_p = 0$ نشان می دهد که مجموعه ی S وابسته‌ی خطی است.

ب) مجموعه $S = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ در $\mathbb{R}^n$ مستقل خطی است اگر $p > n$. (نمره این سوال به همگی داده خواهد شد)

اگر $A = [v_1 \quad \dots \quad v_p]$ آنگاه A یک ماتریس $n \times p$ خواهد بود. در واقع با این کار بردارهای v_i را در ستون‌های یک ماتریس قرار داده ایم:

$$\begin{array}{cc} & p \\ n & \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix} \end{array}$$

می توان این فرض را در نظر گرفت که درایه های این ماتریس، ضرایب دستگاه معادله $Ax = 0$ با n معادله و p مجهول است که تعداد مجهول ها بیشتر از تعداد معادلات است. بنابراین این دستگاه ها پاسخ non-trivial خواهد داشت و بردار های ضرایب وابسته خطی خواهند بود.

ج) مجموعه $span\{u, v\}$ همیشه یک صفحه گذرنده از مبدا است.

غلط، اگر v ضریبی اسکالر از u باشد، $span\{u,v\} = span\{u\}$ که به صورت یک فضای خطی است و نه صفحه. $(u \neq 0)$

د) اگر u و v بردارهای غیرصفر باشند، $span\{u, v\}$ شامل خطی گذرنده از u و مبدا است.

درست، $\mathbf{Span}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \{c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v}, \ \text{where} \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$

اگر $c_2 = 0$ در نظر بگیریم، خط $L = c_1.u$ خطی است که از u و مبدا میگذرد.

۴. برای سه ماتریس زیر، span و استقلال خطی یا عدم آن را بررسی نمایید و توضیحات خود را شرح دهید. (راهنمایی: هر ستون از هر ماتریس را یک بردار در نظر بگیرید.)

۱) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$

۲) $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-2} \end{bmatrix}$

۳) $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$

ماتریس A:

اگر هر ستون را یک بردار در نظر بگیریم و در صفحه مختصات رسم کنیم، از آنجایی که راستای دو بردار متفاوت خواهد بود و هم راستا نیستند، پس می‌توان گفت که نسبت بهم استقلال خطی دارند. دو بردار داریم در صفحه که از هم مستقل هستند، پس کل صفحه R_2 را پوشش می‌دهند. (هر راه حل یا توضیح دیگری که در نهایت به همین نتیجه رسیده باشد قابل قبول هست.)

ماتریس B:

اگر هر ستون را یک بردار در نظر بگیریم و در صفحه مختصات رسم کنیم، از آنجایی که راستای دو بردار یکی خواهد بود و هم راستا هستند، پس می‌توان گفت که نسبت بهم وابستگی خطی دارند و مستقل نیستند. دو بردار هم راستا داریم در صفحه پس span معادل با همان خطی است که در راستای دو بردار قرار می‌گیرد. (هر راه حل یا توضیح دیگری که در نهایت به همین نتیجه رسیده باشد قابل قبول هست.)

ماتریس C:

اگر هر ستون را یک بردار در نظر بگیریم و در صفحه مختصات رسم کنیم، از آنجایی که مختصات هر دو بردار ۰ است، پس اولا دو بردار نسبت بهم استقلال خطی ندارند و ثانیا چون هر دو در مبدا مختصات میفتند پس span معادل با یک نقطه که همان مبدا مختصات است می‌شود. (هر راه حل یا توضیح دیگری که در نهایت به همین نتیجه رسیده باشد قابل قبول هست.)

۵. در ابتدا استدلال شهودی از ضرب خارجی سه بردار مانند a, b, c را شرح دهید و سپس ثابت کنید می‌توان آن را با استفاده از ضرب داخلی بازنویسی کرد.

فرض می‌کنیم که می‌خواهیم $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ را تحلیل کنیم. می‌دانیم که حاصل $(\vec{b} \times \vec{c})$ برداری مانند $\vec{p}$ می‌شود که این بردار بر صفحه‌ی عبوری از $\vec{b}$ و $\vec{c}$ عمود می‌شود. حال بردار $\vec{q} = \vec{a} \times \vec{p}$ بر بردار $\vec{p}$ عمود می‌شود که این بدین معناست که در صفحه‌ی عبوری از $\vec{b}$ و $\vec{c}$ قرار می‌گیرد پس در واقع حاصل بردار نهایی، برداری می‌شود که از ترکیب خطی دو بردار $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بدست می‌آید. پس داریم:

$$\vec{q} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$$

$$\vec{q} = \vec{a} \times \vec{p} \to \vec{q} \perp \vec{a} \to \vec{a}.\left(\alpha\vec{b} + \beta\vec{c}\right) = 0 \to \alpha\left(\vec{a}.\vec{b}\right) + \beta(\vec{a}.\vec{c}) = 0$$

برای اینکه رابطه‌ی بالا همیشه برقرار باشد فرض می‌کنیم که $\alpha = \gamma(\vec{a}.\vec{c})\ and\ \beta = -\gamma\left(\vec{a}.\vec{b}\right)$. پس با این فرض می‌توان گفت که:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \gamma[(\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - \left(\vec{a}.\vec{b}\right)\vec{c}]$$

چون طبق فرض قبلی با انتخاب هر عددی برای γ رابطه همیشه برقرار است پس به ترتیب برای $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ بردارهای $\vec{k}$ و $\vec{j}$ و $\vec{i}$ را در نظر می‌گیریم که داریم:

$\vec{i} \times (\vec{j} \times \vec{k}) = \gamma[(\vec{i}.\vec{k})\vec{j} - (\vec{i}.\vec{j})\vec{k}] \to \overrightarrow{-j} = \gamma(\overrightarrow{-j}) \to \gamma = 1$

پس در نهایت داریم که $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$

۶. نشان دهید برای هر سه عدد دلخواه مانند x, y, z به شرطی که رابطه $x + y + z = 0$ برقرار باشد، می‌توان دو بردار $v = (x, y, z)$ و $v = (z, x, y)$ را تعریف کرد به صورتی که $\frac{v.w}{||v||.||w||} = -0.5$ همواره برقرار باشد.

$$\frac{v.w}{||v|| \times ||w||} = \frac{(z,x,y)\ .\ (x,y,z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \times \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{xz + xy + zy}{x^2 + y^2 + z^2} = A$$

$$x + y + z = 0 \to (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 0$$
$$\to xy + xz + yz = -0.5(x^2 + y^2 + z^2) \to \frac{xz + xy + zy}{x^2 + y^2 + z^2} = A = -0.5$$

۷. ماتریس بالامثلثی ماتریسی است که کلیه اعضای زیر قطر اصلی آن صفر باشد. اگر M یک ماتریس $n \times n$ بالامثلثی با قطر غیر صفر باشد، ثابت کنید ستون‌های M مستقل خطی‌اند.

اگر M یک ماتریس بالا مثلثی با قطر غیر صفر باشد، M به صورت زیر خواهد بود.

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

برای اثبات اینکه ستون ها مستقل خطی اند، فرض کنید r_1 تا r_n وجود دارند به طوری که :

$$r_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + r_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

این عبارت به یک سیستم با n معادله خطی منجر میشود.

$$\begin{aligned}
&r_1a_{11}+r_2a_{12}+r_3a_{13}+\cdots+r_na_{1n}=0\\
&0+r_2a_{22}+r_3a_{23}+\cdots+r_na_{2n}=0\\
&0+0+r_3a_{33}+\cdots+r_na_{3n}=0\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&0+\cdots+0+r_{n-1}a_{n-1,n-1}+r_na_{n-1,n}=0\\
&0+\cdots+0+0+r_na_{nn}=0.
\end{aligned}$$

به دلیل اینکه a_{nn} صفر نیست، از معادله ی آخر نتیجه میگیریم که $r_n = 0$. در معادله‌ی یکی مانده به آخری با جایگذاری این نتیجه، $r_{n-1} = 0$ به دست می‌آید. با ادامه‌ی همین روند نتیجه میگیریم : $r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 0$ در نتیجه ستون ها مستقل خطی اند.

۸. اگر u, v, w بردار های مجزا باشند:
ثابت کنید $\{u, v, w\}$ مستقل خطی است، اگر و تنها اگر $\{u+v, u+w, v+w\}$ مستقل خطی باشد.

فرض کنید$\{u, v, w\}$ مستقل خطی اند و a, b, c ای وجود دارند به طوری که $a(u+v)+b(u+w)+c(v+w)=0$. بنابراین $(a+b)u + (a+c)v + (b+c)w = 0$ است. چون $\{u, v, w\}$ مستقل خطی اند پس میتوان نتیجه گرفت:

$$(a+b) = (a+c) = (b+c) = 0$$

که نتیجه میدهد : $a = b = c = 0$. بنابراین $\{u+v, u+w, v+w\}$ مستقل خطی است.

برای طرف دیگر اثبات، فرض کنید، $\{u+v, u+w, v+w\}$ مستقل خطی است. میتوان u و v و w را به صورت زیر نوشت:

$$u = \frac{1}{2}(u+v)+\frac{1}{2}(u+w)-\frac{1}{2}(v+w)$$

$$v = \frac{1}{2}(u+v)-\frac{1}{2}(u+w)+\frac{1}{2}(v+w)$$

$$w = -\frac{1}{2}(u+v)+\frac{1}{2}(u+w)+\frac{1}{2}(v+w)$$

فرض کنید a,b,c ای وجود دارند به طوری که $au+bv+cw=0$ باشد. بنابراین :

$$a\left(\frac{1}{2}(u+v)+\frac{1}{2}(u+w)-\frac{1}{2}(v+w)\right)+b\left(\frac{1}{2}(u+v)-\frac{1}{2}(u+w)+\frac{1}{2}(v+w)\right)$$
$$+c\left(-\frac{1}{2}(u+v)+\frac{1}{2}(u+w)+\frac{1}{2}(v+w)\right)=0$$

بنابراین:

$$\frac{a+b-c}{2}(u+v)+\frac{a-b+c}{2}(u+w)+\frac{-a+b+c}{2}(v+w)=0$$

از آنجا که $\{u+v, u+w, v+w\}$ مستقل خطی است، داریم:

$$\frac{a+b-c}{2}=\frac{a-b+c}{2}=\frac{-a+b+c}{2}=0$$

پس نتیجه میگیریم $a=b=c=0$ است. پس $\{u, v, w\}$ مستقل خطی اند.

۹. فرض کنید دو $\{\boldsymbol{u_1}, .., \boldsymbol{u_p}\}$ و $\{\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_q}\}$ بردارهایی در فضای برداری V باشند. اگر $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{span}\{\boldsymbol{u_1}, \dots, \boldsymbol{u_p}\}$ و $\boldsymbol{K} = \{\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_q}\}$ باشد، نشان دهید:

$$H+K=span\{u_1, \dots u_p, v_1, \dots, v_q\}$$

این اثبات دو بخش دارد. اول، اینکه ثابت کنیم $H+K$ زیر مجموعه ای از $span\{u_1, \dots u_p, v_1, \dots, v_q\}$ است. دوم اینکه ثابت کنیم $span\{u_1, \dots u_p, v_1, \dots, v_q\}$ زیر مجموعه ای از $H+K$ است.

بخش اول :

برداری از H فرمی به صورت $c_1u_1+\cdots+c_pu_p$ دارد. برداری از K به صورت $d_1v_1+\cdots+d_qv_q$ است. مجموع این دو بردار به صورت ترکیب خطی ای از $u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q$ است. بنابراین متعلق به $span\{u_1, \dots u_p, v_1, \dots, v_q\}$ است. پس، $H+K$ زیر مجموعه ای از $span\{u_1, \dots u_p, v_1, \dots, v_q\}$ است.

بخش دوم :

هر بردار $u_1, \dots u_p, v_1, \dots, v_q$ متعلق به $H+K$ است. از آنجا که هر ترکیب خطی از آن ها متعلق به $H+K$ است و $H+K$ یک زیرفضاست، $span\{u_1, \dots u_p, v_1, \dots, v_q\}$ زیر مجموعه ای از $H+K$ است.