



جبر خطی - تمرین سری سوم

موعد تحویل: ۱۰ خرداد، ساعت ۲۳:۵۹

مدرس: دکتر حامد ملک

نیمسال دوم ۱۴۰۰ - ۱۴۰۱

## سوالات تئوری

۱- با استفاده از روش تجزیه LU، جواب‌های دستگاه معادلات زیر را به دست آورید.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 10 \end{cases}$$

۲- فرم echelon ماتریس زیر را به دست آورید و ستون‌های pivot و متغیرهای free از ماتریس را مشخص نمایید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

۳- a و b را به گونه‌ای بیابید که ماتریس زیر متعامد باشد.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & a \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & b \end{bmatrix}$$

۴- یک ماتریس ۳ در ۵ با رنک ۳ را در نظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید.

- راجع به جواب معادله  $Ax = b$  بحث کنید. (همیشه / گاهی اما نه همیشه) (یک جواب یکتا / بیشمار جواب / بدون جواب)
- فضای ستونی A چیست؟
- فضای پوچ A را توصیف کنید.

۵- ماتریس زیر را در نظر بگیرید و بگویید که چطور با دانستن تمام جواب‌های  $Ax = b$  مشخص می‌شود که بردار  $b$  در فضای ستونی

ماتریس  $A$  می‌باشد؟ سپس بررسی کنید که آیا  $B = \begin{bmatrix} 8 \\ 28 \\ 14 \end{bmatrix}$  در فضای ستونی  $A$  می‌باشد یا خیر؟

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

۶- با استفاده از سری فوریه تابع  $f(x)$  نشان دهید:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ x^2 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

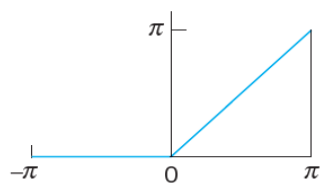
$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

۷- ضرایب سری فوریه توابع زیر را به دست آورید.

a)  $f(x) = x^2|x-1| \rightarrow \text{if } -1 < x < 1$

b)



۸- سری فوریه توابع زیر را به دست آورید. (در قسمت a فرض کنید دوره تناوب  $2\pi$  است.)

a)  $f(x) = |x|$

b)  $f(x) = \begin{cases} x & -\pi < x < 0 \\ \pi - x & 0 < x < \pi \end{cases}$

۹- اگر ماتریس  $A$  یک ماتریس  $m \times n$  باشد، در اینصورت ثابت کنید که  $A^T A$  و  $A$  دارای فضای پوچ یکسانی هستند.

۱۰- درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

- کمترین مقدار nullity برای یک ماتریس  $3 \times 5$ ، ۳ است.
- اگر یک ماتریس full rank باشد فضای پوچ آن فقط شامل بردار ۰ است.

## سوالات کامپیوتری

هدف از انجام این تمرین بررسی کاربرد تجزیه ماتریس‌ها (روش SVD) در ریکامندر سیستم‌ها و تا حدی پیاده‌سازی آن، همچنین، آشنایی با کتابخانه scipy و pandas است. لطفاً از سوال نترسید و با آرامش صورت سوال را تا انتها بخوانید! هر سوال یا ابهامی نیز داشتید در گروه تلگرامی درس مطرح نمایید. یک نوت‌بوک در کولب بسازید و تمامی کدها و توضیحات خود را در آن قرار دهید.

### قسمت اول

یکی از روش‌هایی که در نوشتن ریکامندر سیستم‌ها از آن استفاده می‌شود، روش collaborative filtering است. در این روش یک ماتریس از یوزرها و آیتم‌ها (مواردی که قرار است به کاربر پیشنهاد داده شود) ساخته می‌شود و با توجه به شباهت یوزرها یا آیتم‌ها در مورد یوزرها یا آیتم‌های جدید تصمیم‌گیری می‌شود که آیا پیشنهاد شوند یا خیر. برای کسب اطلاعات بیشتر در این خصوص، می‌توانید از [این لینک](#) استفاده کنید.

فرض کنید قرار است برای [Twitch](#) یک ریکامندر سیستم بنویسیم و به کاربران، کانال پیشنهاد دهیم. از روی [این دیتاست](#) یک دیتاست تغییر یافته به شما ارائه می‌شود و در مرحله اول لازم است که شما ماتریس یوزر آیتم را به کمک آن دیتاست تغییر یافته بسازید. دیتاستی که باید با آن کار کنید در [این لینک](#) قابل دسترسی است. اگر برایتان سوال بود که این دیتاست تغییر یافته چگونه ساخته شده است در گروه تلگرامی مطرح کنید.

تعداد سطرهای این ماتریس ۹۹۰۸۱ تا است و هر سطر که با عنوان user\_id مشخص می‌شود یک کاربر را نشان می‌دهد. تعداد ستون‌های این ماتریس ۱۵۰۸۶۷ تا است و هر ستون که با عنوان streamer\_name مشخص می‌شود نام یک استریمر (در واقع نام یک کانال) را نشان می‌دهد. از آنجایی که نام کانال‌ها به صورت رشته است و ما باید با اعداد کار کنیم، به طریقی نام هر کانال به یک عدد مپ شده است. مثلاً عدد ۴۹۵۳ نشان‌دهنده کانال alptv است (اگر تمایل داشتید جزئیات بیشتری در این خصوص بدانید که چگونه مپینگ انجام شده است در گروه تلگرامی برسید). مقدیری هم که در هر سلول از ماتریس قرار می‌گیرد میزان علاقه کاربر به آن کانال را نشان می‌دهد و با عنوان channel\_score مشخص شده است. عدد ۰ به این معنا است که کاربر هیچ علاقه‌ای به آن کانال ندارد. وظیفه شما این است تا با کمک تابع csr\_matrix از کتابخانه scipy این ماتریس یوزر آیتم را بسازید. همچنین برای خواندن دیتاست و استفاده از آن نیاز دارید تا با کتابخانه pandas کار کنید.

پس از ساخت این ماتریس خروجی ماتریس برای کاربر با آیدی شماره ۱ به صورت زیر خواهد بود:

```

user_id: 1
(0, 4953)    0.0
(0, 12902)   0.0
(0, 36505)   0.12157481821660926
(0, 37614)   0.0
(0, 37985)   0.0
(0, 49120)   1.0572100313479624
(0, 50075)   0.0
(0, 59879)   0.27403846153846156
(0, 63507)   0.0749296408870877
(0, 63611)   0.0
(0, 66867)   0.2860169491525424
(0, 85675)   0.4025607507960449
(0, 95902)   0.4797659377887281
(0, 106869)  0.19927536231884058
(0, 134476)  0.7343358395989975
(0, 137811)  1.132897603485839
(0, 143842)  0.21090790023491077
(0, 149396)  0.27017458028633223
(0, 149653)  0.29627054361567634

```

توجه: در بسیاری از مواقع ماتریس یوزر آیتم که قرار است ساخته شود sparse است، به همین دلیل ذخیره‌سازی ماتریس به صورت بالا انجام می‌شود.

امتیازی: از ماتریس ساخته شده shape بگیرید و خروجی را گزارش کنید. خروجی به دست آمده با چیزی که انتظار داشتید یکسان است؟ اگر نیست، به نظر شما چرا چنین اتفاقی رخ داده است؟ (راهنمایی: دیتاست تغییر یافته با دیتاست اولیه تفاوت‌هایی دارد.)

## قسمت دوم

تا به اینجا یک ماتریس  $99081 \times 150867$  ساخته شده است که sparse نیز است! در کاربردهای واقعی‌تر ماتریس ساخته شده بسیار بزرگ‌تر از چیزی است که در اینجا می‌بینید. حال به کمک روش svd باید ماتریس ساخته شده را تجزیه کنید. برای تجزیه ماتریس از تابع sdvs از کتابخانه scipy کمک بگیرید. پارامتر k در این تابع مشخص‌کننده ابعادی است که قرار است ماتریس به آن کاهش داده شود. می‌توانید مقدار آن را به صورت ثابت (مثلاً ۷۵) در نظر بگیرید. پس از تجزیه shape ماتریس‌های U, S و VT را نمایش دهید. هر کدام از ماتریس‌های U, S و VT مشخص‌کننده چه چیزی هستند؟ خروجی کد زیر چه چیزی را نشان می‌دهد؟

```
np.dot(np.dot(U[1], S), VT)
```

صرفاً جهت اطلاعات بیشتر:

از این مرحله به بعد، یکی از کارهایی که می‌توان انجام داد این است که کاربران مشابه یا آیتم‌های مشابه را پیدا کرد و سپس موردی را که لازم است پیشنهاد داد. مثلاً در این مثال می‌توان ۱۰ یوزر شبیه بهم را پیدا کرد و اجتماع کانال‌هایشان را به هر کدام از این یوزرها پیشنهاد داد. (اگر علاقه‌مند بودید که جزییات بیشتری بدانید و یا برایتان سوال شده بود که چطور می‌توان این کار را انجام داد می‌توانید در اینترنت جستجو کنید یا در گروه تلگرامی بپرسید.)

## نکات

---

فرمت نام‌گذاری فایل نهایی ارسالی حتماً به صورت HW3-[student id]-[student name] باشد.

برای نمونه: HW3-12345678-MyName

لینک عمومی نوت‌بوک و فایل py. خود را ضمیمه پاسخ‌های بخش تئوری کنید و در نهایت یک فایل فشرده را با فرمت نام‌گذاری گفته شده در سامانه LMS آپلود نمایید.

هر گونه سوال و ابهام را می‌توانید در گروه تلگرامی مطرح نمایید.

---

سلامت و موفق باشید

تیم حل تمرین