



جبر خطی - پاسخ تمرین سری اول

مدرس: دکتر حامد ملک

نیمسال دوم ۱۴۰۰ - ۱۴۰۱

۱- اگر $a = i + 2j + k$ ، $a \times b = 3i + j - 5k$ و $a \cdot b = 7$ باشد، بردار b را بیابید.

$$a \times (a \times b) = (a \cdot b)a - (a \cdot a)b$$

$$a \times (a \times b) = (-11, 8, -5), \quad a \cdot a = |a|^2 = 6$$

$$(-11, 8, -5) = 7(1, 2, 1) - 6b$$

$$b = (3, 1, 2)$$

۲- فرض کنید حجم متوازی السطوح ساخته شده روی بردارهای a ، b و c برابر ۵ است. حجم متوازی السطوح ساخته شده بر روی بردارهای $a - b + 2c$ ، $a - c$ و $2a + b$ چه قدر است؟

$$|a \cdot (b \times c)| = 5$$

$$(2a + b) \cdot ((a - c) \times (a - b + 2c)) = (2a + b) \cdot (a \times a - a \times b + 2a \times c - c \times a + c \times b - 2c \times c)$$

$$(2a + b) \cdot (0 - a \times b + 2a \times c + a \times c - b \times c - 0) = (2a + b) \cdot (-a \times b + 3a \times c - b \times c)$$

$$-2a(a \times b) + 6a(a \times c) - 2a(b \times c) - b(a \times b) + 3b(a \times c) - b(b \times c)$$

$$0 + 0 - 2a(b \times c) - 0 + 3b(a \times c) - 0 = -2a(b \times c) + 3b(a \times c)$$

$$-2a(b \times c) - 3a(b \times c) = -5a(b \times c) = -25$$

۳- تعیین کنید که آیا موارد زیر یک زیرفضا از $C[-1, 1]$ هستند یا خیر؟

• مجموعه توابع f در $C[-1, 1]$ به طوریکه $f(1) = f(-1)$

$$f(1) = f(-1) \text{ و } g(1) = g(-1) \Rightarrow f(1) + g(1) = f(-1) + g(-1)$$

$$f(1) = f(-1) \Rightarrow k f(1) = k f(-1)$$

• مجموعه توابع f در $C[-1, 1]$ به طوریکه $f(1) = 0$ یا $f(-1) = 0$

زیر فضا به حساب نمی آید

$$f(1)=0 \text{ و } f(-1)=x \quad \{ f(1)+g(1)=y \neq 0, f(-1)+g(-1)=x \neq 0$$

$$g(1)=y \text{ و } g(-1)=0$$

۴- اگر در فضای برداری توابع چند جمله ای درجه ۲ که روی بازه $[0, 1]$ تعریف شده باشند و ضرب داخلی به صورت

$$(f, g) = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) \text{ باشد، الگوریتم گرام اشمیت را روی پایه‌ی } (1, x, x^2) \text{ اعمال کرده و پایه‌های متعامد یکه بسازید.}$$

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = x$$

$$u_3 = x^2$$

$$\Rightarrow v_2 = u_2 - (u_2 - u_1 / u_1 \cdot u_1) u_1$$

$$\Rightarrow x - (\int x dx / \int x dx) u_1$$

$$\Rightarrow x - 1/2 = x - 1/2$$

$$v_3 = u_3 - (u_3 - u_1 / u_3 \cdot u_3) u_1 - (u_3 - v_2 / u_2 \cdot u_2) u_2$$

$$\Rightarrow x^2 - (\int x^2 dx / \int x dx) - (\int x^2 (x - 1/2) dx / \int (x - 1/2)^2 dx) x - 1/2$$

$$= x^2 - 1/3 - (1/12) / (1/12) = x^2 - 4/3$$

$$= \{(1, x - 1/2, x^2 - 1/3)\} = \{1, \sqrt{3}(2x - 1), \sqrt{5/7}(3x^2 - 4)\}$$

۵- مساحت مثلثی که راس هایش نقاط زیر باشد را بیابید.

$$A = (0, 0, 1)$$

$$B = (2, 0, 5)$$

$$C = (0, 8, 4)$$

$$S = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC})$$

$$\overrightarrow{AB} = (2, 0, 4)$$

$$\overrightarrow{AC} = (0, 8, 3)$$

$$\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC} = -32i - 6j + 16k$$

$$S = \sqrt{16^2 + 3^2 + 8^2}$$

۶- اگر دو بردار $f(x)$ و $g(x)$ در فضای V باشند و جمع آن ها را به صورت $f(g(x))$ و ضرب اسکالر را $cf(x)$ و همچنین، بردار صفر را $g(x) = x$ تعریف کنیم، آنگاه V یک فضای برداری است؟ (اثبات یا رد کنید)

با توجه به جمع تعریف شده داریم:

$$f(x) + g(x) = f(g(x))$$

$$g(x) + f(x) = g(f(x))$$

که نشان می دهد $f + g$ و $g + f$ متفاوت هستند پس ویژگی دوم فضای برداری $(x + y = y + x)$ را نقض می کند.

همچنین طبق ویژگی پنجم برای هر x بردار یکتای $-x$ وجود دارد که $x + (-x) = 0$. پس طبق تعریف بردار صفر در صورت سوال (x) باید همواره $f^{-1}(f(x)) = x$ برقرار باشد که در صورت وارون ناپذیر بودن f برقرار نمیشود پس این ویژگی هم نقض می شود و در نتیجه V یک فضای برداری نیست.

۷- در فضای برداری $V = R^3$ مجموعه $S = \{(4,5,6), (r,5,1), (4,3,2)\}$ را داریم. به ازای کدام مقدار r فضای پوششی توسط S با فضای برداری V برابر نیست؟

اگر سه بردار S مستقل خطی باشند، آنگاه فضای پوششی توسط S با V برابر است پس باید سه بردار S وابسته خطی باشند تا شرط فوق برقرار نباشد در نتیجه بردار $(r,5,1)$ باید ترکیب خطی از دو بردار دیگر باشد یعنی حاصل دترمینان زیر صفر شود :

$$\begin{vmatrix} r & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

راه دوم:

$$x(4,5,6) + y(4,3,2) = (r,5,1) \Rightarrow x = \frac{-7}{8}, y = \frac{25}{8} \Rightarrow r = 9$$

۸- اگر $V = R^3$ یک فضای برداری باشد:

- اگر H یک زیر مجموعه از V باشد و $H = \{(a,b,c) : c^2 + b^2 = 0, a \geq 0\}$ ثابت کنید که H یک زیرفضا نمی باشد.
- برای مثال ما بردار b را $(2,0,0)$ فرض می کنیم. حال اگر آن را ضرب در یک ضریب ثابتی کنیم بردار جدید نیز باید جزء h باشد. اگر ما ضریب ثابت را برابر ۱- بگیریم مجموعه جدید هست $(-2,0,0)$ که در این صورت مقدار a کوچک تر از صفر می شود و شرط دوم را نقض می کند پس دیگر عضو مجموعه h نیست و از زیر فضا بودن در می آید.
- اگر W یک زیر مجموعه از V باشد و $W = \{(a,b,c) : a^2 = b^2\}$ ثابت کنید که W یک زیرفضا نمی باشد.

برای مثال ما توابع زیر مثال میزنیم $B = (3,3,0)$ $B' = (3, -3,0)$

نسبت به جمع اسکالر بردار نهایی شرط را حفظ نمی کند

۹- با استفاده از الگوریتم گرام-اشمیت برای مجموعه بردار داده شده یک پایه متعامد یکه پیدا کنید.

$$E = \{< 1, -1, 1, -1 >, < 1, 3, 0, 1 >\}$$

$$u_1 = (1, -1, 1, -1), u_2 = (1, 3, 0, 1)$$

$$V_1 = u_1 = (1, -1, 1, 1)$$

$$V_2 = u_2 - Proj_{V_1}^{u_2} = u_2 - \left(\frac{u_2 \cdot V_1}{V_1^2}\right)V_1$$

$$(1, 3, 0, 1) - \left(\frac{(1, 3, 0, 1) \cdot (1, -1, 1, -1)}{(1, -1, 1, -1) \cdot (1, -1, 1, -1)}\right)(1, -1, 1, -1)$$

$$(1, 3, 0, 1) - \left(\frac{-3}{4}\right)(1, -1, 1, -1) = \left(\frac{7}{4}, \frac{9}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

$$W_1 = \frac{V_1}{|V_1|} = \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1)$$

$$W_2 = \frac{V_2}{|V_2|} = \frac{\sqrt{140}}{4}(1, -1, 1, -1)$$