



جبر خطی - تمرین سری اول

موعد تحویل: ۱۸ اسفند، ساعت ۲۳:۵۹

مدرس: دکتر حامد ملک

نیمسال دوم ۱۴۰۰ - ۱۴۰۱

سوالات تئوری

- ۱- اگر $a = i + 2j + k$ ، $a \times b = 3i + j - 5k$ و $a \cdot b = 7$ باشد، بردار b را بیابید.
- ۲- فرض کنید حجم متوازی السطوح ساخته شده روی بردارهای a ، b و c برابر ۵ است. حجم متوازی السطوح ساخته شده بر روی بردارهای $a - c$ ، $2a + b$ و $a - b + 2c$ چه قدر است؟
- ۳- تعیین کنید که آیا موارد زیر یک زیرفضا از $C[-1, 1]$ هستند یا خیر؟
- مجموعه توابع f در $C[-1, 1]$ به طوریکه $f(1) = f(-1)$
 - مجموعه توابع f در $C[-1, 1]$ به طوریکه $f(1) = 0$ یا $f(-1) = 0$
- ۴- اگر در فضای برداری توابع چند جمله ای درجه ۲ که روی بازه $[0, 1]$ تعریف شده باشند و ضرب داخلی به صورت $(f, g) = \int_0^1 f(x) \cdot g(x)$ باشد، الگوریتم گرام-اشمیت را روی پایه‌ی $(1, x, x^2)$ اعمال کرده و پایه‌های متعامد یکه بسازید.
- ۵- مساحت مثلثی که راس هایش نقاط زیر باشد را بیابید.
- $A = (0, 0, 1)$
 $B = (2, 0, 5)$
 $C = (0, 8, 4)$
- ۶- اگر دو بردار $f(x)$ و $g(x)$ در فضای V باشند و جمع آن‌ها را به صورت $f(g(x))$ و ضرب اسکالر را $cf(x)$ و همچنین، بردار صفر را $g(x) = x$ تعریف کنیم، آنگاه V یک فضای برداری است؟ (اثبات یا رد کنید)
- ۷- در فضای برداری $V = R^3$ مجموعه $S = \{(4, 5, 6), (r, 5, 1), (4, 3, 2)\}$ را داریم. به ازای کدام مقدار r فضای پوششی توسط S با فضای برداری V برابر نیست؟
- ۸- اگر $V = R^3$ یک فضای برداری باشد:
- اگر H یک زیر مجموعه از V باشد و $H = \{(a, b, c) : c^2 + b^2 = 0, a \geq 0\}$ ثابت کنید که H یک زیرفضا نمی‌باشد.
 - اگر W یک زیر مجموعه از V باشد و $W = \{(a, b, c) : a^2 = b^2\}$ ثابت کنید که W یک زیرفضا نمی‌باشد.
- ۹- با استفاده از الگوریتم گرام-اشمیت برای مجموعه بردار داده شده یک پایه متعامد یکه پیدا کنید.
- $E = \{< 1, -1, 1, -1 >, < 1, 3, 0, 1 >\}$

سوالات کامپیوتری

هدف از انجام این تمرین بررسی مفهوم پوشش و بردار و تصویرسازی آن به کمک کتابخانه matplotlib در پایتون است. لطفاً برای اینکه تمامی پاسخ‌ها یک دست باشد، کدهای مربوط با این تکلیف را در محیط colab نوشته و لینک عمومی آن را ضمیمه پاسخ‌های خود کنید.

بخش اول - بررسی span

سه ماتریس زیر را در نظر بگیرید. span هر ماتریس را بررسی نمایید (هر ستون از هر ماتریس را به صورت یک بردار در نظر بگیرید). برای پاسخ این بخش می‌توانید یک سلول text در کولب بسازید و با markdown توضیحات خود را به زبان فارسی یا انگلیسی ارائه نمایید.

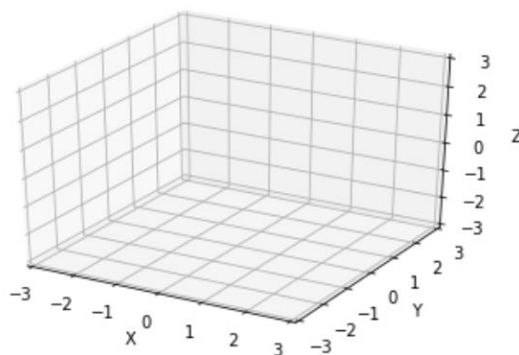
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

بخش دوم - نمایش grid

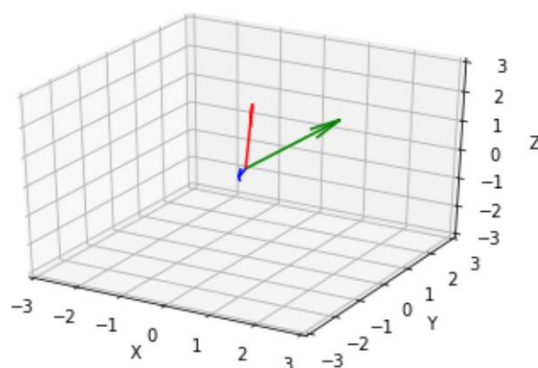
در این بخش لازم است تا با استفاده از کتابخانه matplotlib کدهایی بنویسید تا در نهایت بتوانید مطابق آنچه که در تصویر ۱ ارائه شده است یک grid سه بعدی رسم نمایید.



تصویر ۱ - grid

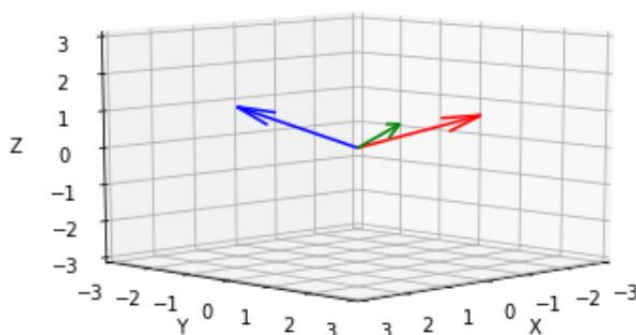
بخش سوم - نمایش بردارها

در مورد quiver جستجو کنید و به کمک آن ماتریس C را در قالب ۳ بردار رسم کنید. در نهایت نتیجه باید مطابق صورت تصویر ۲ شود.



تصویر ۲- رسم بردارها

در تصویر ۲ بردار سبز مختصات $(1, 2, 1)$ ، بردار آبی مختصات $(1, -2, 1)$ و بردار قرمز مختصات $(-1, 2, 1)$ دارد و از مبدا با مختصات $(0, 0, 0)$ رسم شده اند. به کمک تابع `view_init` در `matplotlib` این امکان وجود دارد تا زاویه نمودار سه بعدی را تغییر دهید. نمودار بالا با زاویه 45° درجه به صورت تصویر ۳ در می آید. می توانید زوایای مختلف را امتحان کنید تا بهتر متوجه حضور بردارها در فضای سه بعدی شوید.



تصویر ۳- نمودار سه بعدی در زاویه 45° درجه

طبق توضیحات ارائه شده بردار دو ماتریس A و B را نیز رسم نمایید.

بخش چهارم - نمایش `span`

ماتریس A را در نظر بگیرید. در این بخش هدف این است تا با نمایش `span` ماتریس A در قالب نقاطی آبی رنگ که هر کدام مشخص کننده یک بردار هستند، درستی پاسخ ارائه شده در بخش اول را بررسی نمایید. آیا خروجی به دست آمده مطابق همان چیزی است که انتظار می رفت؟ به صورت اختیاری می توانید `span` را برای دو ماتریس B و C نیز نمایش دهید.

نکات

فرمت نام‌گذاری فایل نهایی ارسالی حتماً به صورت HW1-[student id]-[student name] باشد.

برای نمونه: HW1-12345678-MyName

لینک عمومی نوت‌بوک و فایل py. خود را ضمیمه پاسخ‌های بخش تئوری کنید و در نهایت یک فایل فشرده را با فرمت نام‌گذاری گفته شده در سامانه LMS آپلود نمایید.

هر گونه سوال و ابهام را می‌توانید در گروه تلگرامی مطرح نمایید.

سلامت و موفق باشید

تیم حل تمرین