بسمه تعالی
جبر خطی
پاییز ۱۴۰۰

مدرس: دکتر حامد ملک

پاسخ تمرین سری **دو**
دانشکده مهندسی و علوم کامپیوتر

سوالات تئوری

۱. دستگاه معادلات زیر را به روش حذفی گاوس-جردن حل کنید.

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 - x_4 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= -2 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 2x_4 &= 6 \end{aligned}$$

ابتدا ماتریس افزوده را تشکیل می‌دهیم و به کمک عملگرهای سطری فرم اچولن ماتریس افزوده را بدست می آوریم:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & -4 & -2 \\ 1 & 4 & 6 & -2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \longleftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & -4 & -2 \\ 1 & 4 & 6 & -2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-R_1 + R_4 \to R_4]{-R_1 + R_3 \to R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[-R_2 + R_4 \to R_4]{R_2 + R_3 \to R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

حال دستگاه معادلات جدید را بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{gathered} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_3 - 4x_4 = 1 \\ 0 = 1 \end{gathered}$$

مشاهده می‌شود که معادله چهارم جواب ندارد. پس این دستگاه معادلات جواب ندارد یا به عبارتی دستگاه معادلات ناسازگار است.

۲. اگر ضرب داخلی دو تابع و به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})=\int_{-1}^{1}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}$$

سپس یک پایه متعامد یکه برای فضای $\boldsymbol{B}=\{\boldsymbol{1},\boldsymbol{x},\boldsymbol{x^2}\}$ بدست آورید.

$$u_1=1,\ u_2=x, u_3=x^2$$
$$v_1=u_1=1$$
$$v_2=u_2-Proj_{v_1}^{u_2}=u_2-\frac{(u_2,v_1)}{(v_1,v_1)}v_1=u_2-\frac{\int_{-1}^{1}x.1.dx}{\int_{-1}^{1}1.1.dx}.1=x-\frac{\frac{x^2}{2}|_{-1}^{1}}{x|_{-1}^{1}}=x-\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{1-(-1)}=x$$
$$v_3=u_3-Proj_{v_1}^{u_3}-Proj_{v_2}^{u_3}=x^2-\frac{(u_3,v_1)}{(v_1,v_1)}v_1-\frac{(u_3,v_2)}{(v_2,v_2)}v_2=x^2-\frac{\frac{x^3}{3}|_{-1}^{1}}{x|_{-1}^{1}}-\frac{\frac{x^4}{4}|_{-1}^{1}}{\frac{x^3}{3}|_{-1}^{1}}=x^2-\frac{1}{3}$$
$$w_1=\frac{v_1}{||v_1||}=\frac{1}{\sqrt{(v_1,v_1)}}=\frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1}1.dx}}=\frac{1}{\sqrt{x|_{-1}^{1}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$w_2=\frac{v_2}{||v_2||}=\frac{x}{\sqrt{(v_2,v_2)}}=\frac{x}{\sqrt{\int_{-1}^{1}x^2.\,dx}}=\frac{x}{\sqrt{\frac{x^3}{3}|_{-1}^{1}}}=\sqrt{\frac{3}{2}}x$$

$$w_3=\frac{v_3}{||v_3||}=\frac{x^2-\frac{1}{3}}{\sqrt{(v_3,v_3)}}=\frac{x^2-\frac{1}{3}}{\sqrt{\int_{-1}^{1}\left(x^4-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{9}\right)dx}}=\frac{x^2-\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{9}+\frac{x}{9}|_{-1}^{1}}}=\dots=\sqrt{\frac{45}{28}}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)$$

$$\Longrightarrow\ w_1=\frac{1}{\sqrt{2}},\ w_2=\sqrt{\frac{3}{2}}x,\ w_3=\sqrt{\frac{45}{28}}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)$$

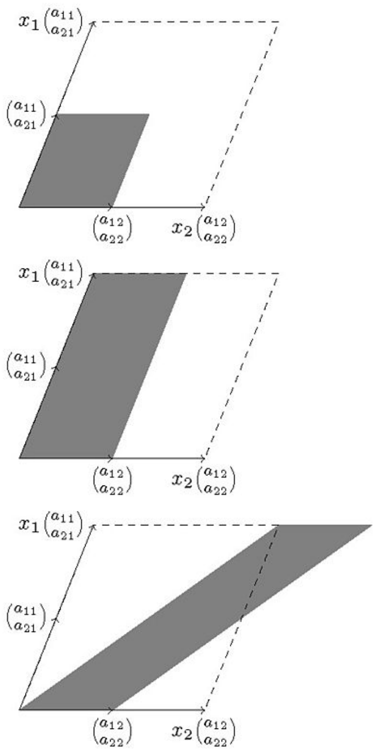
۳. فرض کنید معادله زیر را داریم. همانطور که می‌دانیم، می‌توان از قانون کرامر برای حل معادله زیر استفاده‌کرد. در این سوال از شما می‌خواهیم که برای روابطی که از قانون کرامر بدست می‌آید یک اثبات با شهود هندسی ارائه دهید.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a_{11}x + a_{12}y = b_1} \\ \boldsymbol{a_{21}x + a_{22}y = b_2} \end{aligned}$$

شکل اول نشان میدهد که می‌توان معادله داده شده را به صورت هندسی نمایش داد. با توجه به شکل می‌توان فهمید که مساحت دو متوازی الاضلاع دوم و سوم برابر است چون ارتفاع و قاعده یکسانی باهم دارند.
پس داریم:

$$\begin{vmatrix} b1 & a12 \\ b2 & a22 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a11.x1 & a12 \\ a21.x1 & a22 \end{vmatrix} \to x1 = \frac{\begin{vmatrix} b1 & a12 \\ b2 & a22 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{vmatrix}}$$

به همین منوال برای آرگومان دوم میتوان قانون کرامر را ثابت کرد.



۴. می‌دانیم که دترمینان برای ماتریس‌های مربعی تعریف می‌شود و رابطه زیر در مورد دو ماتریس مربعی $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{B}$ صادق است.

$$\mathbf{det}(\boldsymbol{AB}) = \mathbf{det}(\boldsymbol{A})\,\mathbf{det}(\boldsymbol{B})$$

حال، با استفاده از مفاهیمی که در مورد دترمینان خوانده‌اید، توضیح دهید که چرا نمی‌توان برای ماتریس‌های غیرمربعی دترمینان تعریف کرد؟ (راهنمایی: می‌توانید از رابطه بالا نیز کمک بگیرید.)

دترمینان یک ماتریس مربعی در فضای دو بعدی نشان‌دهنده مساحت و در فضای سه بعدی نشان دهنده حجم است. مساحت با دو مولفه و حجم با سه مولفه مشخص می‌شود. منظور از مولفه در اینجا همان بردارهای پایه

است. وقتی در یک فضای دو بعدی تعداد بردارهای پایه از ۲ تا بیشتر شود، عملا نمی‌توان چیزی بعنوان مساحت تعریف کرد و چون مساحت نداریم پس دترمینان هم نداریم. برای سه بعد و ابعاد بیشتر نیز به طور مشابه می‌توان توجیح کرد. از طرفی دیگر، می‌دانیم که برای ماتریس‌های مربعی رابطه زیر در مورد دترمینان صدق می‌کند:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

رابطه زیر را می‌توان به این صورت ادامه داد:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA)$$

اگر دترمینان برای ماتریس‌های غیر مربعی نیز قابل تعریف باشد، پس باید بتوان رابطه بالا را برای ماتریس‌های غیر مربعی هم اثبات کرد. اما با یک مثال نقض می‌توان نشان داد که در مورد ماتریس‌های غیر مربعی رابطه بالا صادق نیست. فرض کنید دو ماتریس غیر مربعی A و B داریم به صورتی که ضرب AB تعریف شده است. به این صورت که A یک ماتریس 3×2 و B یک ماتریس 5×3 است. بازنویسی رابطه بالا برای این دو ماتریس به شرح زیر است:

$$\det(A_{2\times3}B_{3\times5}) = \det(A_{2\times3})\det(B_{3\times5}) = \det(B_{3\times5})\det(A_{2\times3}) = \det(B_{3\times5}A_{2\times3})$$

از آنجایی که ماتریس B یک ماتریس 5×3 و A یک ماتریس 3×2 است، امکان محاسبه BA وجود ندارد. پس چون رابطه بالا در مورد ماتریس‌های غیر مربعی صدق نمی‌کند، پس یعنی عملاً مفهومی به نام دترمینان برای ماتریس‌های غیر مربعی وجود ندارد و تعریف نمی‌شود.

۵. مرتبه‌ی یک ماتریس ۳×۳ برابر با ۲ شده است. در مورد دترمینان و $span$ ماتریس ۳×۳ چه می‌توان گفت؟ توضیح دهید.

وقتی مرتبه یک ماتریس ۳×۳ برابر با ۲ می‌شود به این معنی است که انگار در فضای ۳ بعدی ۲ بردار پایه داریم. به این ترتیب، span معادل با یک صفحه می‌شود و چون در فضای سه بعدی هستیم و ۲ بردار پایه داریم پس حجمی تشکیل نشده است، پس دترمینان نیز برابر با صفر است.

۶. فرض کنید $A = QR$ باشد به طوری که Q، $m \times n$ و R، $n \times n$ است. نشان دهید اگر ستونهای A مستقل خطی باشند، R باید معکوس پذیر باشد.

فرض کنید x در معادله‌ی $Rx = 0$ صدق کند. پس $Q\,Rx = Q\,0 = 0$ و بنابراین $Ax = 0$.

از آنجایی که ستونهای A مستقل خطی اند، x باید صفر باشد. این نشان میدهد که ستون های R مستقل خطی اند. چون R مربعی است، معکوس پذیر است.

۷. اگر $A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$، $v_1 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.6 \\ 0.1 \end{bmatrix}$، $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$، $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ باشند،

الف) نشان دهید v_1، v_2 و v_3 بردار ویژه های A هستند.

ب) اگر x_0 برداری در $\mathbb{R}^3$ با مقادیر نامنفی باشد که جمع شان ۱ است، توضیح دهید چرا ثابت هایی مانند c_1، c_2 و c_3 وجود دارند به طوری که $x_0 = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$. مقدار w^Tx_0 را محاسبه کنید و نتیجه بگیرید $c_1 = 1$.

الف)

$Av_1 = v_1$	$Av_2 = 0.5v_2$	$Av_3 = 0.2v_3$
$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.6 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.6 \\ 0.1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1.5 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2 \\ 0 \\ 0.2 \end{pmatrix}$

ب) مجموعه‌ی $\{v_1, v_2, v_3\}$ مستقل خطی هستند زیرا بردارهای ویژه ی v_1 و v_2 و v_3 مقادیر ویژه ی متفاوتی دارند.

چون سه بردار در مجموعه هست این یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ است. بینابراین ثابت های یکتایی وجود دارند به طوری که $x_0 = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$ و $w^Tx_0 = c_1w^Tv_1 + c_2w^Tv_2 + c_3w^Tv_3$

چون بردارهای v_0 و x_0 بردارهای احتمالی هستند و چون مجموع مقادیر در v_3 و v_2 صفر است، معادله‌ی بالا نشان میدهد که $C_1 = 0$.

$$w^Tx_0 = c_1w^Tv_1 + c_2w^Tv_2 + c_3w^Tv_3 = x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_0 = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0.3\ c_1 + 0.6\ c_1 + 0.1c_1 + c_2 - 3c_2 + 2c_2 - c_3 + c_3 = c_1 = 1$$

۸. اگر برای هر ماتریس ۳ × ۳ مانند A رابطه های زیر برقرار باشند، ماتریس A^{10} را محاسبه کنید.

$$\boldsymbol{A^m = c_0I + c_1A + c_2A^2 \quad and \quad \lambda^m = c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2}$$

که λ مقدار ویژه ماتریس A است.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & \cancel{1}\ 0 \\ 0 & 1 & \cancel{2}\ 3 \end{pmatrix}$$

$$det\begin{vmatrix} 1-\lambda & 6 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\implies (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0 \implies \lambda = 1, 2, 3$$

$$\begin{aligned} \implies 1^m &= c_0 + c_1 + c_2 \\ 2^m &= c_0 + 2c_1 + 4c_2 \\ 3^m &= c_0 + 3c_1 + 9c_2 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2^m \\ 1 & 3 & 9 & 3^m \end{array}\right) \xrightarrow[-R_1+R_3 \to R_3]{-R_1+R_2 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2^m - 1 \\ 0 & 2 & 8 & 3^m - 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2R_1+R_3 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2^m - 1 \\ 0 & 0 & 6 & 3^m - 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_3+R_2 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2^m - 1 - \dfrac{3^m-3}{2} \\ 0 & 0 & 6 & 3^m - 3 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{6}R_3+R_1 \to R_1]{-R_2+R_1 \to R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 - \dfrac{3^m-3}{6} - 2^m + 1 + \dfrac{3^m-3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2^m - 1 - \dfrac{3^m-3}{2} \\ 0 & 0 & 6 & 3^m - 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \implies c_0 &= 4 - 2 \times 3^{m-1} - 2^m \\ c_1 &= \frac{1}{2}\left[1 - 3^m + 2^{m+1}\right] \\ c_2 &= \frac{1}{6}\left[3^m - 3\right] \end{aligned}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 18 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A^m = c_0 I + c_1 A + c_2 A^2 \implies A^m = \begin{bmatrix} 4 - 3^m & 3 \times 2^{m+1} - 6 & 0 \\ 0 & 3 + 2^m & 0 \\ 0 & 3^{m-1} + 2^m - 4 & 4 + 2^{m+1} + 7 \times 3^{m-1} \end{bmatrix}$$

$$\implies A^{10} = \begin{bmatrix} 4 - 3^{10} & 3 \times 2^{11} - 6 & 0 \\ 0 & 1027 & 0 \\ 0 & 3^9 + 2^{10} - 4 & 4 + 2^{11} + 7 \times 3^9 \end{bmatrix}$$

۹) مرتبه ماتریس زیر را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{-4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-4} & \mathbf{-11} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

در هر مرحله مولفه‌ای که می‌خواهیم برابر با ۱ شود با رنگ سبز و مولفه‌ای که می‌خواهیم برابر با ۰ شود با رنگ آبی مشخص شده است.

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & -11 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 \to 2R_2 + R_1 \\ R_2 \to 2R_3 + R_2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 & 2 \\ 0 & -8 & -26 & 5 \\ 1 & -4 & -11 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \to 9R_4 + R_2 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & 8 & 5 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_3 \to 2R_2 + R_3 \\ R_4 \to 2R_4 + R_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 12 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} R_3 \to 1/12R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to rank = 3$$