جبر خطی - پاسخ تمرین سری چهارم

مدرس: دکتر حامد ملک

نیمسال دوم ۱۴۰۰ - ۱۴۰۱

---

۱. برای ماتریس زیر تجزیه SVD را به دست آورید. (با راه حل کامل)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A^T A = \begin{bmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 9 \end{bmatrix}$$

بردارهای ویژه این ماتریس را به دست می آوریم :

$$v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

مقادیر منفرد ماتریس را به دست می آوریم :

$$\sigma_1 = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \quad , \quad \sigma_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 3\sqrt{2}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

برای پیدا کردن ماتریس U ابتدا ماتریس های زیر را به دست می آوریم :

$$Av_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{-4}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad , \quad Av_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس های u_1 و u_2 و u_3 را به دست می آوریم :

$$u_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad , \quad u_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix} \; , \; u_1 = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{45}} \\ \frac{4}{\sqrt{45}} \\ \frac{5}{\sqrt{45}} \end{bmatrix}$$

درنهایت تجزیه SVD ماتریس A به صورت زیر است :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{45}} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

۲. درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی نمایید. (با ذکر دلیل و راه حل)

الف. عدد حالت ماتریس A برابر با ∞ است.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

درست. دترمینان ۰ است و ماتریس وارون ندارد. در نتیجه عدد حالت بی نهایت است.

ب. ماتریس A را به صورتی در نظر گرفته‌ایم که معادله Ax = b دارای جواب باشد. پس از اضافه کردن 0.001 به مقادیر b و محاسبه مجدد معادله Ax = b مقدار x جدید نسبت به مقادیر x قبلی، تغییرات چشم‌گیری می‌کند. ماتریس A خوش‌حالت است.

نادرست. در صورتی که با تغییر ناچیز b مقدار x تغییرات زیادی داشته باشد، طبق تعریف، ماتریس ill-formed است.

ج. عدد حالت ماتریس B بسیار بزرگ است.

$$B = \begin{bmatrix} 3.7 & 0.9 \\ 7.8 & 1.9 \end{bmatrix}$$

درست. مقداری را برای b در نظر می‌گیریم و معادله Bx=b را حل می‌کنیم. مثلاً:

b = [7.4   15.6]

پس از حل معادله مقدار x می‌شود:

x_1 = [2   0]

سپس مقدار ناچیزی مثلاً 0.01 را به مقادیر b اضافه می‌کنیم و مجدداً معادله Bx=b را حل می‌کنیم:

b = [7.41   15.7]

پس از حل معادله خواهیم داشت:

x_2 = [3.9   -7.8]

با توجه به اینکه تغییرات ناچیز در مقدار b باعث شد تا مقدار x تغییرات زیادی داشته باشد می‌توان گفت عدد حالت ماتریس B بزرگ است. می‌توانیم دقیق‌تر نیز بررسی کنیم. منظور از k عدد حالت ماتریس است:

k = ||B|| . $||B^{-1}||$

می‌توان هر نرم دلخواهی را در نظر گرفت اما باید در نظر داشت که از یک نرم برای هر دو قسمت استفاده شود. برای مثال در اینجا از نرم norm-1 استفاده شده است.

$||B||_1$ = max(3.7 + 7.8, 0.9 + 1.9) = max(11.5, 2.8) = 11.5

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 190 & -89.99 \\ -779.99 & 369.99 \end{bmatrix}$$

$||B^{-1}||_1$ = max(190 + |-779.99|, |-89.99| + 369.99) = max(969.99, 459.98) = 969.99

k = ||B|| . $||B^{-1}||$ = 11.5 * 969.99 = 11154.89 >> 1

۳. ماتریس $A_{n\times n}$ را قطری سازی می کنیم به طوری که ماتریس های P و D وجود دارند که D قطری است و $D = P^{-1}AP$

الف) ثابت کنید رابطه $A^m = PD^mP^{-1}$ برقرار است.

$$D = P^{-1}AP \Rightarrow A = PDP^{-1} \Rightarrow A^m = (PDP^{-1})^m = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1})$$
$$= PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P) \dots (P^{-1}P)DP^{-1} \Rightarrow A^m = PD^mP^{-1}$$

ب) ماتریس A به صورت زیر است، A^5 را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ -5 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$\det(A - \lambda I) = 1(1 - \lambda) - 2(3 - \lambda) + 2(8 - \lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 3$

بردارهای ویژه متناظر برابرند با :

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس P از الحاق ستونی بردارهای ویژه به دست می آید :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

سپس p^{-1} را به دست می آوریم :

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

حالا ماتریس D را به دست می آوریم :

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ -5 & 3 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = PD^5P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3125 & 0 & 0 \\ 0 & 1024 & 0 \\ 0 & 0 & 243 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1319 & 1562 & 1562 \\ 4202 & -1077 & -4202 \\ -6545 & 3663 & 6788 \end{bmatrix}$$

۴. مقادیر منفرد (singular values) ماتریس زیر را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ابتدا AA^T را به دست می آوریم :

$$AA^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

سپس مقادیر ویژه این ماتریس را به دست می آوریم :

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 6\lambda = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = 3 + \sqrt{3} \ , \ \lambda = 3 - \sqrt{3} \ , \ \lambda = 0$$

حالا مقادیر منفرد را به دست می آوریم :

$$\sigma_1 = \sqrt{3 + \sqrt{3}} \ , \ \sigma_2 = \sqrt{3 - \sqrt{3}}$$

۵. دستگاه معادلات زیر را با روش LU حل کنید

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = LU = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$\xRightarrow{Doolittle} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{bmatrix}$$

$u_{11} = 1$

$u_{12} = 1$

$u_{13} = 1$

$l_{21} = 3$

$u_{22} = -2$

$u_{23} = -1$

$l_{31} = 1$

$l_{32} = 1$

$u_{33} = 1$

$$\Rightarrow L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$AX = B$

$A = LU$

$(LU)X = B \Rightarrow L(UX) = B$

$$Y = UX = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$LY = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ 3y_1 + y_2 \\ y_1 + y_2 + y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$UX = Y \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ -2x_2 - x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = 3$

۶. زوج یا فرد بودن توابع زیر را نشان دهید. ضرایب فوریه را به دست بیاورید.

$$a)\ f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}\ (-2 < x < 2), \qquad P = 4$$

Graph=>Even Function

$p = 4 \Longrightarrow L = 2$

$$a0 = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) dx = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{24} = \frac{2}{3}$$

$$an = \int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) \cos\frac{n\pi x}{2}\, dx = \sin\frac{n\pi x}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{2}{\pi n}x^2 \sin\frac{n\pi x}{2} - \frac{2}{\pi n}\left(-\frac{2}{\pi n}x\cos\frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\right)\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi^2 n^2}$$

$$b)\ f(x) = \cos \pi x\ \left(-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right), \qquad P = 1$$

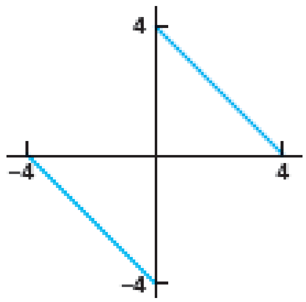
Graph=>Even Function

$$a0 = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \cos \pi x\, dx = \frac{\frac{2 \sin \pi x}{\pi}\Big| 0\ to\ 1}{2} = \frac{2}{\pi}$$

$$an = 4\int_0^{\frac{1}{2}} \cos \pi x \cos 2n\pi x\, dx = 2\left[\int_0^{\frac{1}{2}} \cos(\pi x - 2n\pi x)\, dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(\pi x + 2n\pi x) dx\right]$$

$$2\frac{1}{\pi - 2\pi n}\sin(\pi x - 2n\pi x)\Big| + \ 2\frac{1}{\pi - 2\pi n}\sin(\pi x + 2n\pi x)\Big| = \frac{4(-1)^n}{\pi(1+2n)(1-2n)}$$

$c)$



$p = 2\pi$

=>Odd Function

$p = 2\pi \Longrightarrow L = \pi$

$$f(x) = \begin{cases} -x - 4, & -\pi < x < 0 \\ -x + 4, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$bn = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(-x+4)\sin nx\, dx \Rightarrow \frac{2}{\pi}\left(\frac{4}{n} - \frac{sin\, n\pi + (4-\pi)n\, cos\, \pi n}{n^2}\right)$$