جبر خطی - پاسخ تمرین سری دوم

مدرس: دکتر حامد ملک

نیمسال دوم ۱۴۰۰ - ۱۴۰۱

---

۱. اگر ماتریس A ماتریسی مربعی از مرتبه ۳ باشد و $AA^t = \begin{bmatrix} 9 & a & 2 \\ a & 0 & b \\ c & b & 6 \end{bmatrix}$. حاصل $a + b + c$ برابر چیست؟

فرض کنید بردارهای u ، v و w سطرهای ماتریس A باشند. در این صورت داریم:

$$A = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \rightarrow A^t = [u \quad v \quad w]$$

$$AA^t = \begin{bmatrix} 9 & a & 2 \\ a & 0 & b \\ c & b & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |u|^2 & u.v & u.w \\ v.u & |v|^2 & v.w \\ w.u & w.v & |w|^2 \end{bmatrix}$$

از آنجایی که $|v|^2 = 0$ پس بردار v مقادیرش برابر ۰ است. هم چنین ضرب این بردار در هر برداری نتیجه را ۰ می کند. پس:

$$u.v = 0 \;\&\; w.v = 0 \rightarrow a = 0 \& b = 0$$

از آنجایی که AA^t یک ماتریس متقارن است پس $c = 2$

۲. اگر $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$، $B^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ و $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$، ماتریس BA را به دست آورید.

می توانیم عبارت BA را به صورت $BA = (B^2B^{-1})(A^{-1}A^2)$ بازنویسی کرد:

$$B^2(B^{-1}A^{-1})A^2 \rightarrow B^2(AB)^{-1}A^2$$

از طرفی داریم:

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^2(AB)^{-1}A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

۳. فرض کنید دستگاه معادلات $\begin{cases} mx + ny + z = 3 \\ 6x - 4y - 2z = P \end{cases}$ جواب <u>نداشته</u> باشد، حاصل $m + n$ برابر چیست؟

هر معادله از دستگاه فوق نمایانگر، معادله یک صفحه در فضا است. اگر این دو صفحه متقاطع یا منطبق باشند، دستگاه بی نهایت جواب دارد و اگر دو صحه موازی و غیر منطبق باشند، دستگاه جواب ندارد. پس:

$$\frac{m}{6} = \frac{n}{-4} = \frac{1}{-2} \neq \frac{3}{p} \to m = -3, n = 2$$

۴. فرض کنید دو ماتریس A و B دارای مقادیر ویژه یکسان λ_n , ... ,λ_1 و بردار ویژه‌های یکسان مستقل خطی $X_1,\ldots,X_n$ باشند، ثابت کنید $A = B$.

برای مقادیر ویژه یکسان و بردارهای ویژه یکسان برای A , B داریم :

$$Ax = c_1\lambda_1 x_1 + \ldots + c_n\lambda_n x_n$$

$$Bx = c_1\lambda_1 x_1 + \ldots + c_n\lambda_n x_n$$

واضح است که A = B.

۵. اگر B و C و D به ترتیب دارای جفت مقادیر ویژه (۱و۲) و (۳و۴) و (۵و۷) باشد، مقادیر ویژه ماتریس A را به دست آورید.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

ماتریس A دارای مقادیر ویژه ۱ و ۲ از ماتریس B و مقادیر ویژه ۵ و ۷ از ماتریس D می باشد. همه درایه های C در محاسبه $det(A - \lambda I)$ در صفر ضرب می شوند. در نتیجه C هیچ تاثیری در مقادیر ویژه ندارد.

۶. پس از انجام چند عمل سطری مقدماتی روی ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ این ماتریس به $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}$ تبدیل شده است. حاصل $\mathrm{a + b + c}$ را به دست آورید.

-2 برابر سطر اول را ماتریس را به سطر دوم $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & -3 & 9 & -12 \\ -1 & 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ و سطر اول را به سطر سوم اضافه می نماییم. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & -3 & 9 & -12 \\ 0 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. سطر دوم را در $\frac{-1}{3}$ و سطر سوم را در $\frac{1}{2}$ ضرب می کنیم. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

-2 برابر سطر دوم را به سطر اول و -3 برابر سطر دوم را به سطر سوم اضافه می نماییم. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & -10 \end{bmatrix}$. سطر سوم را در $\frac{1}{10}$ ضرب میکنیم. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. -3 برابر سطر سوم را به سطر اول و 3 برابر سطر سوم را به سطر دوم اضافه می نماییم. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. در نتیجه : $\mathrm{a} = 2, \mathrm{b} = 1, \mathrm{c} = -1$

۷. تعیین کنید که آیا ماتریس‌های زیر معکوس پذیر هستند یا خیر و اگر معکوس پذیر است، ماتریس معکوس را پیدا کنید.

الف. $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\1 & 0 & 3\end{bmatrix}$ ج. $\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\1 & -1 & 1\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\1 & -1 & 3\\3 & 1 & -1\end{bmatrix}$

الف)

ابتدا بررسی می کنیم که ماتریسی که داریم وارون پذیر است یا نه. برای این کار کافی است که چک کنیم دترمینان ما برابر با صفر می شود یا نه پس داریم:

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix} \Rightarrow \det(a) = \begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{vmatrix} = (1\times 4) - (2\times 3) \neq 0$$

پس این تابع معکوس پذیر است پس برای آن داریم:

$$(A|I) = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\3 & 4 & 0 & 1\end{bmatrix} \xRightarrow{(3R_1-R_2=R_2)} \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\0 & 2 & 3 & -1\end{bmatrix}$$

$$\xRightarrow{(R_2-R_1=R_1)} \begin{bmatrix}-1 & 0 & 2 & -1\\0 & 2 & 3 & -1\end{bmatrix} \xRightarrow{\left(\frac{1}{2}R_2=R_2\right)} \begin{bmatrix}-1 & 0 & 2 & -1\\0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\xRightarrow{(-1R_1=R_1)} \begin{bmatrix}1 & 0 & -2 & 1\\0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix}-2 & 1\\\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

ب)

این ماتریس معکوس پذیر نیست به این دلیل که اصلا دترمینان ندارد این ماتریس.

ج)

مانند قسمت الف شرط دترمینان را چک می کنیم:

$$C = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\1 & -1 & 1\\0 & -1 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\det(C) = -1^0 \begin{vmatrix}-1 & 1\\-1 & 1\end{vmatrix} + -1^1 \begin{vmatrix}0 & 2\\-1 & 1\end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

پس معکوس پذیر است. پس داریم:

$$(C|I) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \xRightarrow{(R_1-R_2=R_2)} \begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0\\0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\xRightarrow{(2R_2-R_1=R_1)} \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1 & -2 & 0\\0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0\\0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \xRightarrow{(-R_2-R_3=R_3)} \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1 & -2 & 0\\0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0\\0 & 0 & -2 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\left(-\frac{1}{2}R_3=R_3\right)}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1 & -2 & 0\\0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0\\0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{(R_2-R_3=R_2)}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1 & -2 & 0\\0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2R_2-R_1=R_1)}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$C^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

قسمت د)

مانند قسمت های قبلی ابتدا چک می کنیم آیا این ماتریس دترمینان مخالف صفر دارد یا نه:

$$C=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\1 & -1 & 3\\3 & 1 & -1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\det(D)=-1^0\begin{vmatrix}-1 & 3\\1 & -1\end{vmatrix}\pm 1^1\begin{vmatrix}1 & 3\\3 & -1\end{vmatrix}\pm 1^2\begin{vmatrix}1 & -1\\3 & 1\end{vmatrix}=-2(2)+1(4)=0$$

چون دترمینان برابر با صفر شده پس این تابع معکوس پذیر نیست.

۸. مرتبه ماتریس زیر را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 4 & 2 & 2\\ 4 & 1 & 0 & 5 & 1\\ 2 & 1 & {}^{2}\!/_{3} & 3 & {}^{1}\!/_{3}\\ 6 & 6 & 6 & 12 & 0\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 4 & 2 & 2\\ 4 & 1 & 0 & 5 & 1\\ 2 & 1 & \frac{2}{3} & 3 & \frac{1}{3}\\ 6 & 6 & 6 & 12 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1\Leftrightarrow R_2}\begin{bmatrix}4 & 1 & 0 & 5 & 1\\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2\\ 2 & 1 & \frac{2}{3} & 3 & \frac{1}{3}\\ 6 & 6 & 6 & 12 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1=\frac{R_1}{4}}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2\\ 2 & 1 & \frac{2}{3} & 3 & \frac{1}{3}\\ 6 & 6 & 6 & 12 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3=R_3-2R_1}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6}\\ 6 & 6 & 6 & 12 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{R_4=R_4-6R_1}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6}\\ 0 & \frac{9}{2} & 6 & \frac{9}{2} & -\frac{3}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2=\frac{R_2}{2}}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6}\\ 0 & \frac{9}{2} & 6 & \frac{9}{2} & -\frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1=R_1-\frac{R_2}{4}}\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6}\\ 0 & \frac{9}{2} & 6 & \frac{9}{2} & -\frac{3}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3=R_3-\frac{R_2}{2}}\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2\\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{9}{2} & 6 & \frac{9}{2} & -\frac{3}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_4=R_4-\frac{9R_2}{2}}\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2\\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3}\\ 0 & 0 & -3 & 0 & -6\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2=R_2+6R_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3}\\ 0 & 0 & -3 & 0 & -6\end{bmatrix}\xrightarrow{R_4=R_4-9R_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3=-3R_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1=R_1+\frac{R_3}{2}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow rank(A)=3$$

۹. اگر A و B ماتریس های مربعی هم مرتبه باشند به طوری که $AB = B + A$ ، ثابت کنید با فرض وارون پذیری A ، B نیز وارون پذیر است و داریم: $A^{-1} + B^{-1} = I$

$$A + B = AB$$
$$I - A - B + AB = I$$
$$(I - A)(I - B) = I$$
$$AB = BA$$
$$(I - B)^{-1} = I - A$$
$$\Longrightarrow A^{-1} + B^{-1} = I$$

۱۰. اگر A ماتریس مقادیر دستگاه معادلات زیر باشد، $A^{2017}x$ را به دست آورید. (x ماتریس جواب های دستگاه است)

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = -1 \end{cases}$$

ماتریس A به صورت زیر است :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

حالا ماتریس جواب را پیدا می کنیم :

$$det(A) = (-1)(3) - (-2)(2) = 1$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

حالا Ax را محاسبه می کنیم :

$$Ax = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A^2x = AAx = Ax = x$$

$$A^3x = AA^2x = Ax = x$$

$$A^4x = AA^3x = Ax = x$$

به همین ترتیب میبینیم که هر توانی از A در ماتریس x ضرب شود حاصل همان x می شود پس :

$$A^{2017} = x$$

۱۱. فرض کنید $a + b + c = 1$. مقدار y از معادله $\begin{bmatrix} a+1 & b & c \\ a & b+1 & c \\ a & b & c+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ چه می شود؟

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & 2 & c \\ a & 2 & c \\ a & 2 & c+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a+1 & b & c \\ a & b+1 & c \\ a & b & c+1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a+1-a & 2-2 & c-c \\ a & 2 & c \\ a-a & 2-2 & c+1-c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a+1+b & b & c \\ a+b+1 & b+1 & c \\ a+b & b & c+1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 2 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a+1+b+c & b & c \\ a+b+1+c & b+1 & c \\ a+b+c+1 & b & c+1 \end{vmatrix}} = \frac{2}{\begin{vmatrix} 2 & b & c \\ 2 & b+1 & c \\ 2 & b & c+1 \end{vmatrix}} = \frac{2}{\begin{vmatrix} 2 & b & c \\ 2-2 & b+1-b & c-c \\ 2-2 & b-b & c+1-c \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{2}{\begin{vmatrix} 2 & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2}{2} = 1$$