

سوالات تئوری

۱. دستگاه معادلات زیر را به روش حذفی گاوس-جردن حل کنید.

$$\begin{aligned}x_2 + x_3 - x_4 &= 4 \\x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 &= 1 \\x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= -2 \\x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 2x_4 &= 6\end{aligned}$$

۲. اگر ضرب داخلی دو تابع و به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$(p, q) = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$$

سپس یک پایه متعامد یکه برای فضای $B = \{1, x, x^2\}$ بدست آورید.

۳. فرض کنید معادله زیر را داریم. همانطور که می‌دانیم، می‌توان از قانون کرامر برای حل معادله زیر استفاده کرد. در این سوال از شما می‌خواهیم که برای روابطی که از قانون کرامر بدست می‌آید یک اثبات با شهود هندسی ارائه دهید.

$$\begin{aligned}a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\a_{21}x + a_{22}y &= b_2\end{aligned}$$

۴. می‌دانیم که دترمینان برای ماتریس‌های مربعی تعریف می‌شود و رابطه زیر در مورد دو ماتریس مربعی A و B صادق است.

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

حال، با استفاده از مفاهیمی که در مورد دترمینان خوانده‌اید، توضیح دهید که چرا نمی‌توان برای ماتریس‌های غیرمربعی دترمینان تعریف کرد؟ (راهنمایی: می‌توانید از رابطه بالا نیز کمک بگیرید.)

۵. مرتبه‌ی یک ماتریس 3×3 برابر با ۲ شده است. در مورد دترمینان و $span$ ماتریس 3×3 چه می‌توان گفت؟ توضیح دهید.

۶. فرض کنید $A = QR$ باشد به طوری که $Q, m \times n$ و $R, n \times n$ است. نشان دهید اگر ستونهای A مستقل خطی باشند، R باید معکوس پذیر باشد.

۷. اگر $A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$ ، $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.6 \\ 0.1 \end{bmatrix}$ ، $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ باشند،
الف) نشان دهید v_1 ، v_2 و v_3 بردار ویژه های A هستند.

ب) اگر x_0 برداری در \mathbb{R}^3 با مقادیر نامنفی باشد که جمع شان ۱ است، توضیح دهید چرا ثابت هایی مانند c_1 ، c_2 و c_3 وجود دارند به طوری که $x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$. مقدار $w^T x_0$ را محاسبه کنید و نتیجه بگیرید $c_1 = 1$.

۸. اگر برای هر ماتریس 3×3 مانند A رابطه های زیر برقرار باشند، ماتریس A^{10} را محاسبه کنید.

$$A^m = c_0 I + c_1 A + c_2 A^2 \quad \text{and} \quad \lambda^m = c_0 + c_1 \lambda + c_2 \lambda^2$$

که λ مقدار ویژه ماتریس A است.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

۹) مرتبه ماتریس زیر را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & -11 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

سوالات عملی

۱۰. در این سوال از شما می خواهیم برنامه ای به زبان پایتون بنویسید که یک دستگاه معادله بگیرد و با استفاده از قانون کرامر آن را حل کند.

ورودی مسئله به این صورت است که در خط اول یک عدد مانند n را ورودی می گیرد و در n خط بعدی یک رشته که نشان دهنده ی معادله است را ورودی می گیرد. فرض کنید که معادله ورودی دقیقاً n مجهول دارد و اگر ضریب مجهولی 1 بود، آن را وارد می کنیم یعنی در هیچ معادله ای x یا $-x$ نداریم. همچنین فرض کنید که مجهولات فقط از حروف انگلیسی تشکیل شدند یعنی به عنوان مثال $x1$ در ورودی نداریم. یک نمونه از نحوه ی ورودی گرفتن به صورت زیر است:

```
Enter number of variables: 4
1a + 1b + 2c + 3.5d = 10
2a - 1b + 5c + 4.5d = 20
-4a + 12.5b + 7c + 8d = 2
1a + 6.5b - 8c - 4d = 5
```

حال شما باید این معادلات را بعد از تجزیه کردن (parsing) با استفاده از قانون کرامر حل کنید. خروجی کد شما برای ورودی بالا باید به صورت زیر باشد:

```
a = 7.5235676765441895
b = 1.9731978178024292
c = 2.5854897499084473
d = -1.3336414098739624
```

توجه داشته باشید که کد شما باید جنرال باشد و برای هر نوع دستگاه معادله‌ای کار کند. همچنین اگر معادله‌ای غیر قابل حل بود در خروجی **Unsolvable** چاپ کنید. دقت کنید که برای این سوال فقط باید یک فایل **cramer.ipynb** آپلود کنید.

لطفاً به نکات زیر توجه فرمایید:

- فرمت نام‌گذاری فایل‌ها که آپلود می‌کنید حتماً به صورت **HW2[student id][student name]** باشد.
- در صورت مشاهده هرگونه تقلب نمره **صفر** برای تکلیف در نظر گرفته می‌شود.
- می‌توانید سوالات و ابهامات خود را در گروه تلگرامی درس بپرسید.