جبر خطی - پاسخ تمرین سری سوم

مدرس: دکتر حامد ملک

نیمسال دوم ۱۴۰۰ - ۱۴۰۱

۱- با استفاده از روش تجزیه LU، جواب‌های دستگاه معادلات زیر را به دست آورید.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 \ - \ 3x_3 = 5 \\ x_1 - \ 2x_2 - 5x_3 = 10 \end{cases}$$

Given system of equations are:

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$

$3x_1 + x_2 - 3x_3 = 5$

$x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 10$

These equations are written in the form of AX = B as:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

ماتریس را به فرم LU = A تبدیل می کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

By expanding the left side matrices, we get;

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Thus, by equating the corresponding elements, we get;

$u_{11} = 1, u_{12} = 1, u_{13} = 1$

$l_{21}u_{11} = 3,$

$l_{21}u_{12} + u_{22} = 1,$

$u_{21}u_{13} + u_{23} = -3$

$l_{31}u_{11} = 1,$

$l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = -2,$

$l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = -5$

Solving these equations, we get;

$u_{22} = -2, u_{23} = -6, u_{33} = 3$

$l_{21} = 3, l_{31} = 1, l_{32} = 3/2$

Step 2: LUX = B

Step 3: Let UX = Y

Step 4: From the previous two steps, we have LY = B

Thus,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

So,

$y_1 = 1$

$3y_1 + y_2 = 5$

$y_1 + (3/2)y_2 + y_3 = 10$

Solving these equations, we get;

$y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = 6$

Step 5: Now, consider UX = Y.

So,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

By expanding this equation, we get;

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$

$-2x_2 - 6x_3 = 2$

$3x_3 = 6$

Solving these equations, we can get;

$x_3 = 2, x_2 = -7$ and $x_1 = 6$

Therefore, the solution of the given system of equations is (6, -7, 2).

۲- فرم echelon ماتریس زیر را به دست آورید و ستون های pivot و متغیرهای free از ماتریس را مشخص نمایید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

فرم اچلون ماتریس داده شده به صورت زیر است :

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

همانطور که مشخص است x_2 و x_4 و x_5 متغیرهای free و x_1 و x_3 متغیرهای pivot هستند.

۳- a و b را به گونه ای بیابید که ماتریس زیر متعامد باشد.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & a \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & b \end{bmatrix}$$

ماتریس های زیر، ستون های ماتریس A هستند :

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\|v_1\| = 1 \quad \|v_2\| = 1 \quad \|v_3\| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \quad *$$

ضرب داخلی هر دو بردار باید صفر شود :

$$v_1.v_2 = -1 \times 0 + 0 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$
$$v_1.v_3 = -1 \times 0 + 0 \times a + 0 \times b = 0$$
$$v_2.v_3 = 0 \times 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \times a + \frac{1}{\sqrt{2}} \times b = 0 \quad **$$

از ** به دست می آید :

a = -b

با جایگذاری آن در * :

$$\sqrt{2b^2} = 1 \Rightarrow b = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

در نهایت a , b به شکل زیر به دست می آیند :

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$a = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

۴- یک ماتریس ۳ در ۵ با رنک ۳ را در نظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید.

- راجع به جواب معادله Ax = b بحث کنید. (همیشه / گاهی اما نه همیشه) (یک جواب یکتا / بیشمار جواب / بدون جواب)

  چون مرتبه ی ماتریس ما برابر با ۳ است پس ما قطعا جواب داریم. چون رنک برابر ۳ است پس ۲ ستون free دارند پس متوجه می شویم که بی نهایت جواب دایم.

- فضای ستونی A چیست؟

  فضای ستونی آن زیر مجموعه R^m است.

$$b = x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 + x_4A_4 + x_5A_5$$

- فضای پوچ A را توصیف کنید.

  همه ی جواب های AX = 0 است. این بردار ها در Rn قرار دارن.

۵- ماتریس زیر را در نظر بگیرید و بگویید که چطور با دانستن تمام جواب‌های Ax = b مشخص می‌شود که بردار b در فضای ستونی ماتریس A می‌باشد؟ سپس بررسی کنید که آیا $B=\begin{bmatrix} 8 \\ 28 \\ 14 \end{bmatrix}$ در فضای ستونی A می‌باشد یا خیر؟

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

برای Ax = b جواب وجود دارد اگر و تنها اگر b در فضای ستونی A باشد.

بله،

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 8 \\ 6 & 5 & 28 \\ 2 & 4 & 14 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

بنابراین برای Ax = b جواب وجود دارد وb در فضای ستونی A می‌باشد.

۶- با استفاده از سری فوریه تابع f(x) نشان دهید:

$$f(x)=\begin{cases}0 - \pi < x < 0\\ x^2 \quad 0 < x < \pi\end{cases}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$

$$\frac{\pi^2}{12}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots$$

$$a0=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}0dx+\ \int_{0}^{\pi}x^2dx\right]=\ \frac{\pi^2}{6}$$

$$an=\frac{1}{\pi}\left[0+\int_{0}^{\pi}x^2cosnxdx\ \right]=\frac{2\cos n\pi}{n^2}=\frac{2(-1)^n}{n^2}$$

$$bn=\frac{1}{\pi}\left[0+\int_{0}^{\pi}x^2sinnxdx\ \right]=\frac{(2-\pi^2n^2)\cos n\pi\ \ -2}{\pi n^3}$$

$$\boldsymbol{x=0}\to f(x)=0=\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n^2}\cos(nx)+\frac{(2-\pi^2n^2)\cos n\pi\ \ -2}{\pi n^3}\sin(nx)$$

$$0=\frac{\pi^2}{6}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}+2\left(-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}-\frac{1}{5^2}+\cdots\right)$$

$$\to\frac{\pi^2}{12}=\left(1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\cdots\right)$$

$$\boldsymbol{x=\pi}\to f(x)=\frac{\pi^2}{2}=\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi)+\frac{(2-\pi^2n^2)\cos n\pi\ \ -2}{\pi n^3}\sin(n\pi)$$

$$\frac{\pi^2}{2}=\frac{\pi^2}{6}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n\to\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n=\frac{\pi^2}{6}=\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)$$

۷- ضرایب سری فوریه توابع زیر را به دست آورید.

$$a)\ f(x)=\ x^2|x-1|\to if-1<x<1$$

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\mathrm{f(x)=\ x^2-x^3\ \ 2L=1\Rightarrow L=1}$$

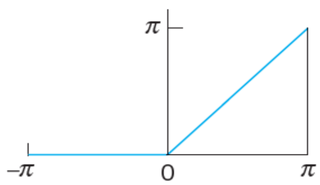
$$a_0=\ \frac{1}{2L}\ \int f(x)dx=\frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1}(x^2-x^3)dx\right)=\ \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|-1\ to\ 1\Rightarrow\frac{1}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int f(x)\cos nx\, dx = \left[\int_{-1}^{1} x^2 \cos n\pi x\, dx - \int_{-}^{1} x^3 \cos n\pi x\, dx\right]$$

$$= \frac{4\pi n \cos(n\pi)}{\pi^3 n^3} = \frac{4(-1)^n}{\pi^2 n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int f(x)\sin nx\, dx = \left[\int_{-1}^{1} x^2 \sin n\pi x\, dx - \int_{-}^{1} x^3 \sin n\pi x\, dx\right] = \frac{(2\pi^3 n^3 - 12\pi n)\cos(n\pi)}{\pi^4 n^4}$$

$b)$



$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi} xdx\right] = \frac{\frac{1}{2\pi}x^2}{2} = \frac{\frac{1}{2\pi}\pi^2}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int f(x)\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left[0 + \int_{0}^{\pi} xcosnxdx\right] \Longrightarrow \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2}(nxsinnx + cosnx) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2}(cosn\pi - 1)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int f(x)\sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left[0 + \int_{0}^{\pi} xsinnxdx\right] \Longrightarrow \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}xcosnx + \frac{1}{n^2}sinnx\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi cosn\pi}{n}\right)$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

n=1, n=2, n=3, n=4

۸- سری فوریه توابع زیر را به دست آورید. (در قسمت a فرض کنید دوره تناوب ۲π است.)

$a)\ f(x) = |x|$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -xdx + \int_{0}^{\pi} xdx\right) \Rightarrow \frac{1}{2\pi} * \pi^2 = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi} * \left[\int_{-\pi}^{0} -x\cos(nx)dx + \int_{0}^{\pi} x\cos(nx)dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}(\cos(n\pi) - 1 + \cos(n\pi) - 1) \Rightarrow \frac{2(\cos(n\pi) - 1)}{\pi n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int f(x)\sin nx\,dx = \text{is even function so} \Rightarrow 0$$

$$b)\ f(x) = \begin{cases} x & -\pi < x < 0 \\ \pi - x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} xdx + \int_{0}^{\pi} \pi - xdx\right) \Rightarrow 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} x\cos(nx)dx + \int_{0}^{\pi} (\pi - x)\cos(nx)dx\right)$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\left(\frac{x}{n}\sin(nx) + \frac{1}{n^2}\cos(nx)\right) + \left(\frac{\pi - x}{n}\sin(nx) - \frac{1}{n^2}\cos(nx)\right)\right) \Rightarrow \frac{2}{\pi n^2}(1 - \cos(n\pi))$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\left(\frac{-x}{n}\cos(nx) + \frac{1}{n^2}\sin(nx)\right) + \left(\frac{x - \pi}{n}\sin(nx) - \frac{1}{n^2}\sin(nx)\right)\right)$$

$$\frac{1}{n}(1 - \cos(-n\pi))$$

۹- اگر ماتریس A یک ماتریس m*n باشد، در اینصورت ثابت کنید که A و A^TA دارای فضای پوچ یکسانی هستند.

$$Ax = 0 \Rightarrow A^TAx = 0 \Rightarrow x \in N(A^TA) \Rightarrow N(A) \subseteq N(A^TA) \quad (1)$$
$$A^TAx = 0 \Rightarrow x^TA^TAx = 0 \Rightarrow$$

$$(Ax)^T(Ax) = 0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow N(A^TA) \subseteq N(A) \quad (2)$$

$$(1)\ \&\ (2) \Rightarrow N(A) = N(A^TA)$$

۱۰- درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

- کمترین مقدار nullity برای یک ماتریس 3*5 , ۳ است.

خیر می دانیم که جمع **nullity** به علاوه ی مرتبه ی ماتریس برابر با تعداد ستون های آن است. از آنجایی که می توان مرتبه ی ماتریس را برابر ۳ داد کمترین مقدار آن برابر با ۲ است.

- اگر یک ماتریس full rank باشد فضای پوچ ان فقط شامل بردار ۰ است.

این عبارت درست است. رنک – تعداد ستون. پس **nullity** برابر با صفر است.