بسمه تعالی
**جبر خطی**
پاییز ۱۴۰۰

**پاسخ** تمرین سری **سه**
دانشکده مهندسی و علوم کامپیوتر

مدرس: دکتر حامد ملک

---

## سوالات تئوری

**۱. با توجه به ماتریس $A$ به سوالات زیر پاسخ کامل همراه راه حل دهید.**

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&\mathbf{2}&\mathbf{3}&\mathbf{4}\\\mathbf{4}&\mathbf{3}&\mathbf{2}&\mathbf{1}\end{bmatrix}$$

**الف) مقدار nullity برای ماتریس $A$ چند است؟(راهنمایی: می‌توانید از رابطه‌ی بین رتبه ماتریس و تعداد ستون‌ها کمک بگیرید)**

**ب) پس از نوشتن فرم اچولن ماتریس، ستون‌های pivot و متغیرهای free از ماتریس را مشخص نمایید.**

**ج) فضای پوچ ماتریس $A$ را بدست آورید.**

**د) فضای ستونی ماتریس $A$ را بدست آورید.**

الف) rank + nullity = تعداد ستون

rank = ۲ و تعداد ستون = ۴ پس nullity برابر ۲ است.

ب) فرم اچولن:

(نوشتن راه حل الزامی است)

$$A=\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&-2&0\\0&1&2&3&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

ستون‌های pivot:

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$$

متغیرهای free:

اگر ماتریس متغیرها را به صورت زیر در نظر بگیریم، دو متغیر $x_3$ و $x_4$ متغیرهای free خواهند بود.

$$A = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

ج)

$$x1 = x3 + 2x2$$

$$x2 = -2x3 - 3x4$$

$$\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} = x3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x4 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Null(A) = Span(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})$$

د) فضای ستونی در واقع همان span ماتریس است. فقط دو بردار پایه داریم که از هم مستقل هستند (ستون‌های اول و دوم از سمت چپ ماتریس قسمت ب) یعنی فضای ستونی معادل با یک صفحه خواهد بود. از آنجایی که ماتریس سه سطر دارد، پس در فضای سه بعدی هستیم. به عبارتی دیگر، فضای ستونی معادل با یک صفحه است که در فضای سه بعدی قرار گرفته است.

**۲. با ارائه توضیحات مناسب، درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص نمایید.**

**الف) اگر یک ماتریس full rank باشد، فضای پوچ آن فقط شامل بردار صفر است.**

**ب) فضای ستونی یک ماتریس، معادل با span همان ماتریس است.**

**ج) معادله‌ای به فرم $Ax = v$ داریم که $A$ یک ماتریس و $x$ و $v$ بردار هستند. در صورتی که دترمینان ماتریس $A$ برابر با صفر شود، این دستگاه هیچ جوابی نخواهد داشت.**

الف) درست. رنک = تعداد ستون. پس nullity برابر با ۰ است. بنابراین فقط بردار ۰ در فضای پوچ وجود خواهد داشت.

ب) درست. فضای ستونی یعنی هر ماتریس را به صورت ستونی در نظر بگیریم و استقلال یا وابستگی خطی بین ستون‌ها را بررسی کنیم. برای بررسی span نیز دقیقاً همین کار مشابه را انجام می‌دهیم. پس هر دو معادل یک دیگر هستند.

ج) نادرست. هرگاه در یک دستگاه معادلات دترمینان یک ماتریس ۰ شود، دو حالت کلی رخ خواهد داد. یا برای معادله جواب خواهیم داشت، یا نخواهیم داشت. در صورتی جواب وجود دارد که راستای بردار v هم راستا با span بردارهای پایه ماتریس A شود. و در صورتی جواب وجود نخواهد داشت که بردار v هم راستا با span بردارهای پایه ماتریس A

نشود. (برای توضیح بیشتر میتوان یک ماتریس ۲ در ۲ یا یک ماتریس ۳ در ۳ را به عنوان مثال ذکر کرد و روی آن بررسی‌های لازم را انجام داد. آوردن مثال نقض هم قابل قبول است.)

**۳. با استفاده از روش تجزیه $LU$، جواب(های) دستگاه معادلات زیر را بدست آورید.**

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -4 \\ -4x_1 + x_2 - 10x_3 = 3 \end{cases}$$

در این روش باید ابتدا $A = LU$ را بنویسیم که $L$ ماتریس پایین مثلثی با عناصر قطری واحد و $U$ ماتریس بالا مثلثی است. سپس میتوان نوشت:

$$Ax = b \xrightarrow{A=LU} LUx = b \xrightarrow{y=Ux} Ly = b$$

با حل معادلات زیر پاسخ به دست می آید.

$$\begin{cases} Ly = b \\ y = Ux \end{cases}$$

$$Ax = b \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 2 & 5 & -3 \\ -4 & 1 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

تجزیه $LU$ ماتریس $A$ به شکل زیر میباشد:

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{-4}{3} & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -49 \end{bmatrix}$$

$$Ly = b \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{-4}{3} & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$Ux = y \to \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -49 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

از حل معادله ماتریسی $Ly = b$ به دست می آید :

$$y_1 = 0\ , \qquad y_2 = -4\,, \quad y_3 = 39$$

سپس با جایگذاری این مقادیر در معادله‌ی $Ux = y$ به دست می‌آید:

$$x_1 = \frac{41}{49}\ , \qquad x_2 = \frac{-79}{49} \qquad x_3 = -\frac{-39}{49}$$

**۴. بدون محاسبه $A^{-2}$ ،$A^{2}$ ،$A^{-1}$ و $A$ به صورت صریح، $A^{-1}x + A^{-2}y$ را با فرض تجزیه $A$ به فرم $LU$ محاسبه کنید.**

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$A^{-1}x$ معادل است با حل سیستم خطی $Az = x$ . با استفاده از $A = LU$ میتوان سیستم را به صورت مثلثی درآورد

با تجزیه‌ی $LU$ معادلات را حل کرد.

برای سادگی محاسبات میتوان نوشت:

$$A^{-1}x + A^{-2}y = A^{-1}(x + A^{-1}y)$$

بنابراین ابتدا $A^{-1}y$ را با تجزیه $LU$ بدست می‌آوریم.

$$Av = y \xrightarrow{A=LU} LUv = y \xrightarrow{w=Uv} Lw = y$$

$$\begin{cases} Lw = y \\ w = Uv \end{cases}$$

$$Lw = y \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Uv = w \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

از حل معادله ماتریسی $Lw = x$ به دست می آید :

$$w_1 = -1 \ , \quad w_2 = 2 \ , \quad w_3 = -1$$

سپس با جایگذاری این مقادیر در معادله‌ی $Uv = w$ به دست می‌آید:

$$v_1 = 0 \ , \quad v_2 = 3 \ , \quad v_3 = -1$$

بنابراین تا اینجا $A^{-1}y$ که $v$ هست را به دست آوردیم. پس میتوانیم عبارت $x + A^{-1}y$ را به دست آوریم:

$$x + A^{-1}y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

با استفاده از روش $LU$ ، $A^{-1}(x + A^{-1}y)$ را به دست می‌آوریم:

$$Az = x + A^{-1}y \xrightarrow{A=LU} LUz = x + A^{-1}y \xrightarrow{c=Uz} Lc = x + A^{-1}y$$

$$\begin{cases} Lc = x + A^{-1}y \\ c = Uz \end{cases}$$

$$Lc = x + A^{-1}y \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Uz = c \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

از حل معادله ماتریسی $Lc = x + A^{-1}y$ به دست می آید :

$$c_1 = 1\ , \qquad c_2 = 2\ , \quad c_3 = -2$$

سپس با جایگذاری این مقادیر در معادله‌ی $Uz = c$ به دست می‌آید:

$$z_1 = 3\ , \quad z_2 = 4\ , \quad z_3 = -2$$

بنابراین :

$$A^{-1}x + A^{-2}y = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

**۵. با استفاده از سری فوریه تابع $2\pi$ متناوب زیر نشان دهید که: $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$ .**

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -pi \leqslant x < 0 \\ \mathrm{x}^2 & 0 \leqslant x < pi \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx)\, dx = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin(nx)\, dx = 0$$

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx) \to \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \to \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

**۶. ثابت کنید اگر A یک ماتریس متعامد باشد و $A^n = I$ آنگاه:**

**الف)رابطه $A^{n-1} = A^T$ برقرار است.**

**ب) ماتریس متعامد از بردارهای ویژه ماتریس زیر را بدست آورید:**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

الف)

$$A^T = A^{-1}, A^n = I \to AA^{n-1} = I \to A^{n-1} = A^{-1} = A^T$$

ب)

مقادیر ویژه‌ی ماتریس داده‌شده برابر است با:

$$\lambda_1 = 0.23, \qquad \lambda_2 = 2.52, \qquad \lambda_3 = 5.25$$

بردارهای ویژه عبارتند از:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4.77 \\ -2.7 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2.48 \\ 4.77 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} -0.25 \\ -0.08 \\ 1 \end{pmatrix}$$

وقتی ضرب نقطه‌ای بردارهای بالا را بدست می‌آوریم، صفر مطلق نمی‌شود و این بدلیل رند کردن اعداد است. جواب‌هایی که به این بردارها نزدیک باشند، قابل قبولند.

ماتریس متعامد از الحاق ستونی بردارهای بالا بدست می‌آید.

**۷. اگر بتوانیم ماتریس $A_{n\times n}$ را قطری سازی کنیم، می‌دانیم ماتریس‌های $D$ و $P$ وجود دارند $D$ که قطری است و $D = P^{-1}AP$، ثابت کنید:**

**الف) رابطه $A^m = PD^mP^{-1}$ برقرار است.**

**ب) اگر ماتریس $A$ نوشته شده در زیر، $A^5$ را بدست آورید(با راه‌حل کامل):**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ -5 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

الف)

$$D = P^{-1}AP \Longrightarrow A = PDP^{-1} \Longrightarrow A^m = (PDP^{-1})^m = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1})$$
$$= PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P) \dots (P^{-1}P)DP^{-1} \Longrightarrow A^m = PD^mP^{-1}$$

ب) ابتدا مقادیر و بردارهای ویژه ماتریس $A$ را بدست می‌آوریم:

$$\det(A - \lambda I) = 1(1-\lambda) - 2(3-\lambda) + 2(8-\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 3$$

همچنین بردار های ویژه متناظر برابر هستند با:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(طبیعتا هر ضریبی از این بردار ها نیز هم بردار ویژه محسوب میشود.)

حال ماتریس $P$ را با الحاق ستونی بردار های ویژه بدست آمده می‌سازیم:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

همچنین $P^{-1}$ را بدست می‌آوریم:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

حال ماتریس $D$ را بدست می‌آوریم:

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ -5 & 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

بنابراین طبق رابطه ای که در قسمت الف ثابت شد داریم:

$$A^5 = PD^5P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3125 & 0 & 0 \\ 0 & 1024 & 0 \\ 0 & 0 & 243 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1319 & 1562 & 1562 \\ 4202 & -1077 & -4202 \\ -6545 & 3663 & 6788 \end{pmatrix}$$