

سوالات تئوری

۱. با توجه به ماتریس A به سوالات زیر پاسخ کامل همراه راه حل دهید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(الف) مقدار nullity برای ماتریس A چند است؟ (راهنمایی: می توانید از رابطه‌ی بین رتبه ماتریس و تعداد ستون‌ها کمک بگیرید)

(ب) پس از نوشتن فرم اچولن ماتریس، ستون‌های pivot و متغیرهای free از ماتریس را مشخص نمایید.

(ج) فضای پوچ ماتریس A را بدست آورید.

(د) فضای ستونی ماتریس A را بدست آورید.

۲. با ارائه توضیحات مناسب، درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص نمایید.

(الف) اگر یک ماتریس full rank باشد، فضای پوچ آن فقط شامل بردار صفر است.

(ب) فضای ستونی یک ماتریس، معادل با span همان ماتریس است.

(ج) معادله‌ای به فرم $Ax = v$ داریم که A یک ماتریس و x و v بردار هستند. در صورتی که دترمینان ماتریس A برابر با صفر شود، این دستگاه هیچ جوابی نخواهد داشت.

۳. با استفاده از روش تجزیه LU ، جواب(های) دستگاه معادلات زیر را بدست آورید.

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -4 \\ -4x_1 + x_2 - 10x_3 = 3 \end{cases}$$

۴. بدون محاسبه A^{-1} ، A^2 ، A^{-2} و A به صورت صریح، $A^{-1}x + A^{-2}y$ را با فرض تجزیه A به فرم LU محاسبه کنید.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

۵. با استفاده از سری فوریه تابع 2π متناوب زیر نشان دهید که: $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -pi \leq x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < pi \end{cases}$$

۶. ثابت کنید اگر A یک ماتریس متعامد باشد و $A^n = I$ آنگاه:

الف) رابطه $A^{n-1} = A^T$ برقرار است.

ب) ماتریس متعامد از بردارهای ویژه ماتریس زیر را بدست آورید:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

۷. اگر بتوانیم ماتریس $A_{n \times n}$ را قطری سازی کنیم، می‌دانیم ماتریس‌های D و P وجود دارند که قطری است و $D = P^{-1}AP$ ، ثابت کنید:

الف) رابطه $A^m = PD^mP^{-1}$ برقرار است.

ب) اگر ماتریس A نوشته شده در زیر، A^5 را بدست آورید (با راه حل کامل):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ -5 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

سوالات عملی

لطفا به نکات زیر توجه فرمایید:

- فرمت نام‌گذاری فایلی که آپلود می‌کنید حتماً به صورت **HW3[student id][student name]** باشد.
- در صورت مشاهده هرگونه تقلب نمره **صفر** برای تکلیف در نظر گرفته می‌شود.
- می‌توانید سوالات و ابهامات خود را در گروه تلگرامی درس بپرسید.