



جبر خطی - تمرین سری دوم
 موعد تحویل: ۳۰ فروردین، ساعت ۲۳:۵۹
 مدرس: دکتر حامد ملک
 نیمسال دوم ۱۴۰۰ - ۱۴۰۱

سوالات تئوری

- ۱- اگر ماتریس A ماتریسی مربعی از مرتبه ۳ باشد و $AA^t = \begin{bmatrix} 9 & a & 2 \\ a & 0 & b \\ c & b & 6 \end{bmatrix}$ حاصل $a + b + c$ برابر چیست؟
- ۲- اگر $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ و $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، ماتریس BA را به دست آورید.
- ۳- فرض کنید دستگاه معادلات $\begin{cases} mx + ny + z = 3 \\ 6x - 4y - 2z = P \end{cases}$ جواب نداشته باشد، حاصل $m + n$ برابر چیست؟
- ۴- فرض کنید دو ماتریس A و B دارای مقادیر ویژه یکسان $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ و بردار ویژه‌های یکسان مستقل خطی X_1, \dots, X_n باشند، ثابت کنید $A = B$.
- ۵- اگر B و C و D به ترتیب دارای جفت مقادیر ویژه $(2, 1)$ و $(3, 4)$ و $(5, 7)$ باشد، مقادیر ویژه ماتریس A را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$
- ۶- پس از انجام چند عمل سطری مقدماتی روی ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ این ماتریس به $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}$ تبدیل شده است. حاصل $a + b + c$ را به دست آورید.
- ۷- تعیین کنید که آیا ماتریس‌های زیر معکوس پذیر هستند یا خیر و اگر معکوس پذیر است، ماتریس معکوس را پیدا کنید.
 الف. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ج. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$
- ۸- مرتبه ماتریس زیر را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2/3 & 3 & 1/3 \\ 6 & 6 & 6 & 12 & 0 \end{bmatrix}$$

۹- اگر A و B ماتریس های مربعی هم مرتبه باشند به طوری که $AB = B + A$ ، ثابت کنید با فرض وارون پذیری A ، B نیز وارون پذیر است و داریم: $A^{-1} + B^{-1} = I$

۱۰- اگر A ماتریس مقادیر دستگاه معادلات زیر باشد، $A^{2017}x$ را به دست آورید. (x ماتریس جواب های دستگاه است)

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = -1 \end{cases}$$

۱۱- فرض کنید $a + b + c = 1$. مقدار y از معادله $\begin{bmatrix} a+1 & b & c \\ a & b+1 & c \\ a & b & c+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ چه می شود؟

امتیازی: در مورد شهود هندسی روش کرامر جستجو کنید و آنچه که متوجه شدید را در قالب چند سطر به زبانی ساده توضیح دهید. همچنین، می توانید از منابع زیر استفاده کنید:

[ویدیو \(۱۲ دقیقه - به زبان انگلیسی\)](#)

[متن \(۱۰ دقیقه - به زبان فارسی\)](#)

سوالات کامپیوتری

هدف از انجام این تمرین بررسی مفهوم بردار ویژه و ویژگی قطری بودن ماتریس ها به کمک کتابخانه numpy در پایتون است. لطفاً برای اینکه تمامی پاسخ ها یک دست باشد، کدهای مربوط با این تکلیف را در محیط colab نوشته و لینک عمومی آن را ضمیمه پاسخ های خود کنید.

بخش اول

ماتریس زیر را در نظر بگیرید. مقادیر A^2 و A^3 و چند توان دیگر را به کمک کتابخانه numpy محاسبه نمایید و در قالب یک سلول text، به زبان فارسی یا انگلیسی توضیح دهید که چه الگویی در توان های مختلف این ماتریس مشاهده می شود؟ چگونه می توان A^n را محاسبه کرد؟ فرمولی برای محاسبه آن ارائه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

بخش دوم

به کمک کتابخانه numpy کدهایی بنویسید تا:

۱. مستقیماً حاصل ماتریس A^{10} را محاسبه کنید.

۲. به کمک بردارهای ویژه ماتریس A ، حاصل A^{10} را به دست آورید.

۳. جواب به دست آمده از دو قسمت ۱ و ۲ را مقایسه کنید. چه نتیجه ای می گیرید؟

راهنمایی: بردارهای ویژه ماتریس A به صورت زیر است:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 + \sqrt{5} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 - \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

نکات

فرمت نام‌گذاری فایل نهایی ارسالی حتماً به صورت HW2-[student id]-[student name] باشد.

برای نمونه: HW2-12345678-MyName

لینک عمومی نوت‌بوک و فایل py. خود را ضمیمه پاسخ‌های بخش تئوری کنید و در نهایت یک فایل فشرده را با فرمت نام‌گذاری گفته شده در سامانه LMS آپلود نمایید.

هر گونه سوال و ابهام را می‌توانید در گروه تلگرامی مطرح نمایید.

سلامت و موفق باشید

تیم حل تمرین