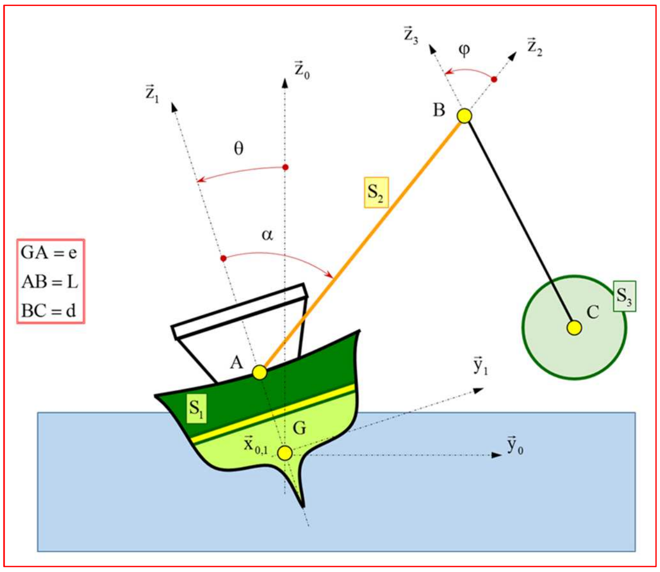
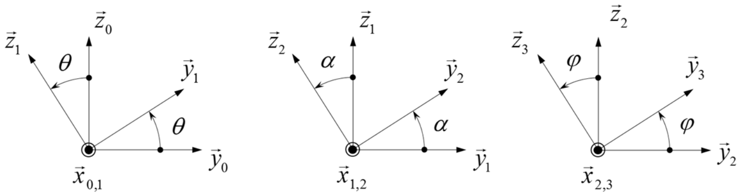
INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Mercredi 15 Avril 2020

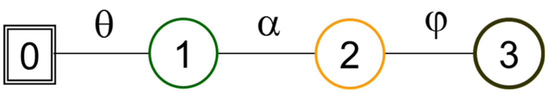
Mécanique – IE3 - Correction



Figures de changement de base et graphe des liaisons :



(ou mieux : sur la même figure)



Partie I - Géométrie des masses :

Q 1 - Matrice d'inertie en C puis en B de S_3, moment d'inertie I_3 de S_3 / $(B,\vec{x}_3)$.

S3 est assimilé à une sphère de centre C, nous avons donc :

$$\boxed{\overline{\overline{I}}(C,S_3)=\begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix}_{3,2,1,0}} \quad \text{avec :} \quad \boxed{A_3=\frac{2}{5}m_3R^2}$$

Compte tenu de la symétrie sphérique, cette matrice reste identique dans toutes les bases.

C étant le centre de masse, la matrice d'inertie se déduit du changement de point : $\overrightarrow{CB}=d\,\vec{z}_3$

Soit : $$\boxed{\overline{\overline{I}}(B,S_3)=\begin{pmatrix} A_3+m_3d^2 & 0 & 0 \\ 0 & A_3+m_3d^2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix}_3} \quad \text{et} \quad \boxed{I_3=I_{(B,\vec{x}_3)}=A_3+m_3d^2}$$

Ici la matrice d'inertie en B ne peut être exprimée que dans la base 3.

Q 2 - Matrice d'inertie de S_2 en A

S2 est une tige de longueur L et de section négligeable, sa matrice d'inertie en A est directement donnée par les tables :

$$\boxed{\overline{\overline{I}}(A,S_2)=\begin{pmatrix} m_2L^2/3 & 0 & 0 \\ 0 & m_2L^2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_2}$$

Q 3 - Moment d'inertie I_Σ de $\Sigma=\{S_1+S_2\}$ / $(G,\vec{x}_1)$ pour $\alpha=Cste$ (S_2 immobile / S_1)

I_Σ est la somme du moment d'inertie A_1 de S_1 / $(G,\vec{x}_1)$ et du moment d'inertie I_2 de S_2 / $(G,\vec{x}_1)$.

Le théorème de Huygens permet de calculer I_2 à partir du moment d'inertie $I_{(G_2,\vec{x}_2)}$ de S_2 / $(G_2,\vec{x}_2)$ et du vecteur $\overrightarrow{GG_2} = e\vec{z}_1 + \frac{L}{2}\vec{z}_2 = e\left(\cos\alpha\vec{z}_2 + \sin\alpha\vec{y}_2\right) + \frac{L}{2}\vec{z}_2 = \left(e\cos\alpha + \frac{L}{2}\right)\vec{z}_2 + e\sin\alpha\vec{y}_2$

La lecture des tables donne : $I_{(G_2,\vec{x}_2)} = m_2\frac{L^2}{12}$

$$\Rightarrow I_{(G,\vec{x}_2)} = m_2\frac{L^2}{12} + m_2\left[\left(e\cos\alpha + \frac{L}{2}\right)^2 + \left(e\sin\alpha\right)^2\right] = m_2\left(\frac{L^2}{3} + e^2 + Le\cos\alpha\right)$$

Soit : $\boxed{I_\Sigma = A_1 + m_2\left(\frac{L^2}{3} + e^2 + Le\cos\alpha\right)}$

Partie II – Cinétique :

Dans l'hypothèse où : $\alpha = \text{Cste}$ (S_2 immobile / S_1), $e = 0$, S_2 de masse négligeable, S_3 masse m_3 ponctuelle en C et G fixe dans R_0

Q 4 - Torseur dynamique galiléen de $\Sigma = \{S_1 + S_2\}$ en G.

S_2 étant de masse négligeable : $\left\{D_{\{S_1+S_2\}/0}\right\}_G = \left\{D_{S_1/0}\right\}_G = \begin{Bmatrix}\vec{D}(S_1/0) \\ \vec{\delta}(G,S_1/0)\end{Bmatrix}$

G étant fixe dans R0 : $\vec{A}(G/0) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{D}(S_1/0) = \vec{0}}$

Le mouvement de S1 / 0 étant une rotation d'axe $(G,\vec{x}_{0,1})$ et cette direction étant une direction principale d'inertie de S1, nous avons directement : $\boxed{\vec{\delta}(G,S_1/0) = A_1\ddot{\theta}\,\vec{x}_{0,1}}$

Ou démonstration : $\vec{\sigma}(G,S_1/0) = \bar{\bar{I}}(G,S_1)\vec{\Omega}_{1/0} = A_1\dot{\theta}\vec{x}_{0,1}$ et $\vec{\delta}(G,S_1/0) = \frac{d}{dt}\vec{\sigma}(G,S_1/0)\Big)_0 = A_1\ddot{\theta}\,\vec{x}_{0,1}$

Q 5 - Torseur cinétique galiléen de S_3 en B : $\left\{C_{S_3/0}\right\}_B = \begin{Bmatrix}\vec{P}(S_3/0) = m_3\vec{V}(C/0) \\ \vec{\sigma}(B,S_3/0)\end{Bmatrix}$

S_2 étant immobile par rapport à S_1, nous pouvons avantageusement écrire :

$\vec{V}(C/0) = \vec{V}(C/1) + \vec{V}(C,1/0)$ avec :

- B fixe dans 1 ici, donc $\vec{V}(C/1) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{BC}\Big)_1 = \frac{d}{dt}\left(-d\vec{z}_3\right)\Big)_1 = -d\underbrace{\vec{\Omega}_{3/1}\wedge\vec{z}_3}_{\text{base mobile}} = -d\dot{\varphi}\vec{x}_{0,1,2,3}\wedge\vec{z}_3 = d\dot{\varphi}\vec{y}_3$
- $\vec{V}(C,1/0) = \cancel{\vec{V}(G,1/0)} + \overrightarrow{CG}\wedge\vec{\Omega}(1/0)$

  Or **A et G sont confondus (e=0)**, il vient : $\vec{V}(C,1/0) = \left(d\vec{z}_3 - L\vec{z}_2\right)\wedge\dot{\theta}\vec{x}_{0,1,2,3} = d\dot{\theta}\vec{y}_3 - L\dot{\theta}\vec{y}_2$

Soit : $\boxed{\vec{P}(S_3/0) = m_3\left[d\left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}\right)\vec{y}_3 - L\dot{\theta}\vec{y}_2\right]}$

S3 étant réduit à une masse ponctuelle en C, nous avons directement :

$$\boxed{\vec{\sigma}(C,S_3/0) = \underbrace{\bar{\bar{I}}(C,S_3)}_{=\bar{0}}\vec{\Omega}_{3/0} = \vec{0}}$$

Ce qui permet de déterminer le moment cinétique en B par :

$$\vec{\sigma}(B,S_3/0) = \vec{\sigma}(C,S_3/0) + \overrightarrow{BC} \wedge \vec{P}(S_3/0) = -d\,\vec{z}_3 \wedge m_3\left[d\left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}\right)\vec{y}_3 - L\dot{\theta}\,\vec{y}_2\right]$$

Soit : $$\boxed{\vec{\sigma}(B,S_3/0) = \left[m_3\,d^2\left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}\right) - m_3\,L\,d\,\dot{\theta}\cos\varphi\right]\vec{x}_{3,2,1,0}}$$

Q 6 - Torseur dynamique galiléen de S_3 en B : $\left\{D_{S_3/0}\right\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{D}(S_3/0) = m_3\,\vec{A}(C/0) \\ \vec{\delta}(B,S_3/0) \end{Bmatrix}$

Avec : $$\vec{A}(C/0) = \left.\frac{d\vec{V}(C/0)}{dt}\right)_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ d(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi}) \\ d(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2 \end{pmatrix}_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ -L\ddot{\theta} \\ -L\dot{\theta}^2 \end{pmatrix}_2$$

Soit : $$\boxed{\vec{D}(S_3/0) = m_3\left[\begin{pmatrix} 0 \\ d(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi}) \\ d(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2 \end{pmatrix}_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ -L\ddot{\theta} \\ -L\dot{\theta}^2 \end{pmatrix}_2\right]}$$ en utilisant 2 fois la base mobile

Et : $$\vec{\delta}(B,S_3/0) = \left.\frac{d\vec{\sigma}(B,S_3/0)}{dt}\right)_0 + m_3\,\vec{V}(B/0) \wedge \vec{V}(C/0)$$

Ou plus simplement : $\vec{\delta}(B,S_3/0) = \cancel{\vec{\delta}(C,S_3/0)} + \overrightarrow{BC} \wedge m_3\,\vec{A}(C/0)$ car $\vec{\delta}(C,S_3/0) = \left.\frac{d}{dt}\underbrace{\vec{\sigma}(C,S_3/0)}_{=\vec{0}}\right)_0$

$$\Rightarrow \vec{\delta}(B,S_3/0) = -d\vec{z}_3 \wedge m_3\,\vec{A}(C/0) = -d\vec{z}_3 \wedge m_3\left[d(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi})\vec{y}_3 + d(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2\vec{z}_3 - L\ddot{\theta}\vec{y}_2 - L\dot{\theta}^2\vec{z}_2\right]$$

Soit : $$\boxed{\vec{\delta}(B,S_3/0) = m_3\left[d^2(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi}) - d\,L\left(\ddot{\theta}\cos\varphi + \dot{\theta}^2\sin\varphi\right)\right]\vec{x}_{0,1,2,3}}$$

Partie III – Dynamique :

Dans l'hypothèse où : $\alpha = Cste$ (S_2 immobile / S_1), $e = 0$, S_2 de masse négligeable, S_3 masse m_3 ponctuelle en C et G fixe dans R_0

Q 7 - Théorème du moment dynamique à $\left\{S_3\right\}$ isolé en projection sur $(B,\vec{x}_{3,2})$.

Bilan des actions mécaniques extérieures sur S_3 :

Poids : $\left\{T_{P/3}\right\} = \begin{cases} \vec{R}_{P/3} = -m_3\,g\,\vec{z}_0 \\ \vec{M}_{P/3}(C) = \vec{0} \end{cases}$

Soit : $\vec{M}_{P/3}(B) = \underbrace{\overline{BC}}_{-d\vec{z}_3} \wedge -m_3\, g\, \vec{z}_0 = -d\left[\cos(\theta+\alpha+\varphi)\vec{z}_0 - \sin(\theta+\alpha+\varphi)\vec{y}_0\right] \wedge -m_3\, g\, \vec{z}_0$

$= -m_3\, g\, d\sin(\theta+\alpha+\varphi)\,\vec{x}_{0,1,2,3}$

L23 : Telle que : $\vec{M}_{2/3}(B).\,\vec{x}_{0,1,2,3} = 0$

Mise en équation : $\vec{\delta}(B,S_3/0).\vec{x}_{0,1,2,3} = \vec{M}_{Ext./S_3}(B).\vec{x}_{0,1,2,3}$

Soit : $\boxed{m_3\left[d^2(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi}) - d\,L\left(\ddot{\theta}\cos\varphi + \dot{\theta}^2\sin\varphi\right)\right] = -m_3\, g\, d\sin(\theta+\alpha+\varphi)}$

Q 8 - Théorème du moment dynamique à $\{S_1+S_2+S_3\}$ isolé en projection sur $(G,\vec{x}_{0,1})$.

Cinétique : $\vec{\delta}(G,\{S_1+S_2+S_3\}/0) = \vec{\delta}(G,S_1/0) + \vec{0} + \vec{\delta}(G,S_3/0) = \left(A_1\ddot{\theta} + \delta_3\right)\vec{x}_{0,1}$

Bilan des actions mécaniques extérieures sur $\{S_1+S_2+S_3\}$:

Actions combinée du poids et de l'eau : $\{T_{R/1}\} = \begin{cases} \vec{R}_{R/1} = \vec{0} \\ \vec{M}_{R/1}(G) = M_R\, \vec{x}_{0,1} \end{cases}$

Houle : $\{T_{h/1}\} = \begin{cases} \vec{R}_{h/1} = \vec{0} \\ \vec{M}_{h/1}(G) = M_h \sin(\omega t)\,\vec{x}_{0,1} \end{cases}$

Mise en équation : $\vec{\delta}(G,\{S_1+S_2+S_3\}/0).\vec{x}_{0,1,2,3} = \vec{M}_{Ext./\{S_1+S_2+S_3\}}(G).\vec{x}_{0,1,2,3}$

Il vient donc : $A_1\ddot{\theta} + \delta_3 = M_h \sin(\omega t) + M_R$

Soit : $\boxed{A_1\ddot{\theta} + \delta_3 + K\,\theta = M_h \sin(\omega t)}$

Remarque : dans l'hypothèse où S_2 est immobile par rapport à S_1 et où A et G sont confondus (e=0), nous pouvons écrire :

$$\vec{\delta}(G,S_3/0) = \cancel{\vec{\delta}(C,S_3/0)} + \overline{GC} \wedge m_3\,\vec{A}(C/0) = \left(L\vec{z}_2 - d\vec{z}_3\right) \wedge m_3\,\vec{A}(C/0)$$

ou plus rapide (en utilisant le moment dynamique en B, déjà calculé) :

$$\vec{\delta}(G,S_3/0) = \vec{\delta}(B,S_3/0) + \overline{GB} \wedge m_3\,\vec{A}(C/0)$$

avec $\vec{\delta}(B,S_3/0) = m_3\left[d^2(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi}) - d\,L\left(\ddot{\theta}\cos\varphi + \dot{\theta}^2\sin\varphi\right)\right]\vec{x}_{0,1,2,3}$ (déjà calculé)

et $\overline{GB} \wedge m_3\,\vec{A}(C/0) = L\vec{z}_2 \wedge m_3\left[d(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi})\vec{y}_3 + d(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2\vec{z}_3 - L\ddot{\theta}\vec{y}_2 - L\dot{\theta}^2\vec{z}_2\right]$

$= Lm_3\left[-d(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi})\cos\varphi + d(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2\sin\varphi + L\ddot{\theta}\right]\vec{x}_{0,1,2,3}$

Et il vient après simplification : $\boxed{\delta_3 = m_3\left[\left(d^2+L^2\right)\ddot{\theta} + d^2\ddot{\varphi} - d\,L\left(2\ddot{\theta}+\ddot{\varphi}\right)\cos\varphi + dL\dot{\varphi}(2\dot{\theta}+\dot{\varphi})\sin\varphi\right]}$