

INSA PCC1 - Interrogation écrite 4

6 mars 2015

Avertissement

Non seulement vos résultats, mais surtout votre capacité à les justifier clairement et à les analyser ensuite de manière critique seront évalués. Il est également rappelé de soigner l'orthographe et la présentation des copies. Tout document est interdit. Seul l'emploi d'une calculatrice est autorisé. **RENDRE LES SUJETS AVEC VOTRE COPIE.**

Durée : 1h30

1 Mouvement en coordonnées polaires et base de Frenet

1. La figure 1 représente la trajectoire d'un point M. Tracer les vecteurs de la base locale polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et de la base locale de Frenet (\vec{T}, \vec{N}) au niveau du point P sur la figure 1.
2. Le mouvement du point M dans le plan est défini par les coordonnées polaires suivantes :

$$\begin{cases} r &= Ae^{k\omega t} \\ \theta &= \omega t \end{cases}$$

où A et ω sont des constantes positives.

- (a) Donner l'expression du vecteur vitesse \vec{v} du point M dans la base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ en fonction du temps. Penser à factoriser l'expression obtenue. Calculer la norme de \vec{v} et vérifier l'homogénéité de l'expression obtenue.
- (b) Donner l'expression du vecteur accélération \vec{a} du point M dans la base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ en fonction du temps. Calculer la norme de \vec{a} et vérifier l'homogénéité de l'expression obtenue.
- (c) Ecrire le vecteur vitesse dans la base de Frenet (\vec{T}, \vec{N}) . En déduire l'expression du vecteur unitaire tangent \vec{T} au point M dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.
- (d) Exprimer le vecteur accélération \vec{a} dans la base de Frenet en fonction du rayon de courbure R_c de la trajectoire au point M.
- (e) Déterminer les valeurs de A et k pour la trajectoire représentée en figure 1. Proposer puis appliquer une méthode pour estimer la valeur du rayon de courbure, R_c , de la trajectoire au point P ainsi que l'incertitude associée.

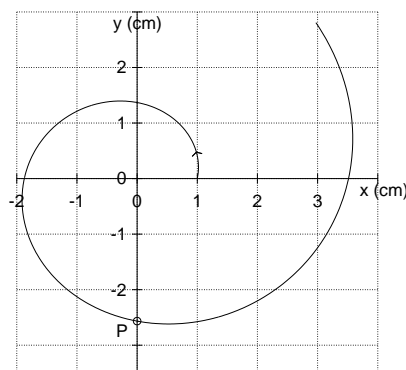


Fig. 1 – Trajectoire du point M pour $0 \leq t \leq 2\pi/\omega$.

2 Centrifugeuse

Problème moins guidé

Une centrifugeuse est un appareil permettant d'entraîner un objet en rotation autour d'un axe fixe. Les applications sont diverses : essorage du linge dans une machine à laver, séparation de liquides non miscibles de densités différentes, décantation d'un liquide contenant des particules solides en suspension, enrichissement de l'uranium (séparation des isotopes ^{235}U et ^{238}U de l'uranium), entraînement des astronautes et pilotes de chasse...

On considère un point matériel, noté M , de masse m , en rotation autour d'un axe fixe. On notera \vec{v} sa vitesse, \vec{a} son accélération, ω sa vitesse angulaire et R le rayon (constant) de sa trajectoire. Les trois questions sont indépendantes.

1. Lors de sa mise en route, la centrifugeuse passe d'une vitesse angulaire initiale nulle ($\omega = 0$ à $t = 0$) à une vitesse angulaire finale $\omega = \omega_f$ à $t = t_f$, avec une accélération angulaire constante.
On donne : $R = 20 \text{ cm}$; $\omega_f = 1,0 \cdot 10^3 \text{ tr/min}$; $t_f = 4,0 \text{ s}$ (cas d'une machine à laver). Déterminer l'expression de l'accélération \vec{a} du point M , à $t_0 = 2,0 \text{ s}$. Détailler chaque étape de votre raisonnement. Calculer $||\vec{a}||$.
2. On cherche à concevoir une centrifugeuse pour l'entraînement de pilotes de chasse, leur permettant de s'habituer à subir des accélérations de $10 g$ (où $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ est l'accélération de la pesanteur). Proposer des valeurs de R et ω pour cette application, sachant que l'on veut que l'accélération subie en tout point du pilote en position assise soit uniforme à 5% près et que l'installation ne soit pas trop coûteuse. Justifier votre réponse.
3. A titre de comparaison, quelle est l'accélération moyenne $||\vec{a}||$ d'une voiture de course passant de 0 à 100 km/h en 3 s (en ligne droite) ?

3 Nageur

Un sportif de masse m nage en ligne droite dans une piscine. Pour avancer, il exerce une force constante de poussée sur l'eau $\vec{N} = -N\vec{e}_x$, avec $N > 0$ et (Ox) un axe horizontal. De plus, il subit une force de frottement visqueux $\vec{F} = -\eta\vec{v}$, avec $\vec{v} = v\vec{e}_x$, avec $v > 0$ et $\eta > 0$. On suppose que la trajectoire du nageur suit l'axe (Ox) .

1. Quelles sont les dimensions physiques de N et η ?
2. Etablir le bilan des forces extérieures au système et faire un schéma.
3. Donner la relation fondamentale de la dynamique.
4. Projeter cette relation sur l'axe x et établir l'équation différentielle satisfaite par la vitesse $v(t)$.
5. Résoudre cette équation différentielle avec la condition $v(t = 0) = 0$.
6. Quelle est la vitesse limite v_∞ atteinte par le nageur ?