FIMI – 2ème Année **Année 2022/2023**

Interrogation de Physique n° 1 – semestre 4

Lundi 20 mars 2023 **Durée : 1h30**

*Barème **indicatif** : exercice 1 sur 14 points, exercice 2 sur 6 points.*
Sans document, calculatrice autorisée.

Seront évalués non seulement vos résultats, mais surtout votre capacité à les justifier clairement et à les analyser ensuite de manière critique. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : Cordes « de Melde » avec une perle en son milieu (~14 pts)

On considère deux cordes identiques (Corde1 et Corde2), de masse négligeable, chacune de longueur L, reliées en $x = 0$. Une perle, considérée comme ponctuelle (c'est-à-dire de rayon extrêmement petit), et de masse m_0 non nulle, est placée à leur jonction, en $x = 0$ (cf. Figure 1).

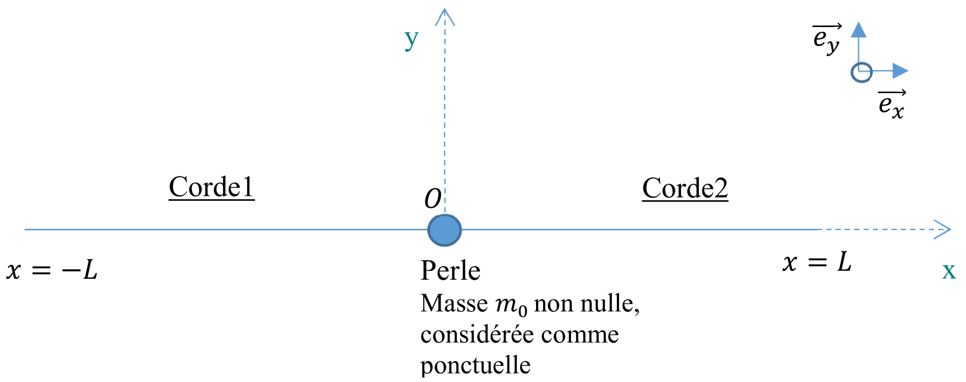

Figure 1 : schéma des deux cordes

Les cordes sont tendues entre deux supports positionnés en $x = -L$ et $x = +L$. Leur position au repos est l'horizontale, c'est-à-dire $y = 0$ pour tout point de la corde.
On notera $u(x,t)$ le déplacement transversal le long des deux cordes, dans la direction Oy, par rapport à cette position au repos.
L'extrémité $x = -L$ de la première corde est fixe.
L'autre extrémité de la deuxième corde est reliée en $x = +L$ à un vibreur qui impose la vibration sinusoïdale verticale suivante : $u(L,t) = a\cos(\omega t)$

On utilisera les hypothèses habituelles de la modélisation de la vibration des cordes : mouvement vertical uniquement, norme T_0 de la tension uniforme tout le long de la corde, déplacement suffisamment petit pour pouvoir se contenter d'approximations linéaires. On considérera également que la vitesse de propagation sur les deux cordes est connue et égale à V.

1. Pour chaque corde, justifiez l'existence de deux ondes progressives, harmoniques, uniformes se propageant dans des sens opposés.

On impose les notations suivantes :

i) *Les amplitudes complexes des déplacements verticaux entre $-L \leq x < 0$ (milieu 1 = Corde1) sont notées $\underline{A_1}$ et $\underline{B_1}$, respectivement pour l'Onde Progressive Harmonique Uniforme directe et l'OPHU rétrograde,*
ii) *Les amplitudes complexes des déplacements verticaux entre $0 \leq x < +L$ (milieu 2 = Corde2) sont notées $\underline{A_2}$ et $\underline{B_2}$ respectivement pour l'onde directe et l'onde rétrograde.*

2. En respectant les notations imposées ci-dessus :
   a. Donnez les expressions littérales, en complexes, de l'onde directe $\underline{u_{1d}}(x,t)$ et de l'onde rétrograde $\underline{u_{1r}}(x,t)$ sur la Corde1. De même donnez les expressions littérales complexes des ondes directe et rétrograde, $\underline{u_{2d}}(x,t)$ et $\underline{u_{2r}}(x,t)$, sur la Corde2.
   b. En déduire les expressions des ondes totales $\underline{u_{1tot}}(x,t)$ et $\underline{u_{2tot}}(x,t)$, respectivement sur la Corde1 et sur la Corde2.
3. On se place tout d'abord en un point *x* quelconque de l'une des deux cordes :
   a. Faites le schéma de la corde au voisinage de *x*, pour un état quelconque de l'onde en *x* (la corde n'est plus à l'équilibre), avec l'allure de la force de tension exercée par la partie de la corde à droite de *x* (vers les $x > 0$) sur la partie de corde à gauche de *x* (vers les $x < 0$).
   b. Montrez que la composante verticale de cette force, notée $F_y(x^+ \longrightarrow x^-)$, est égale à $+T_0 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ (dans votre démonstration, vous veillerez à justifier le signe de cette formule. On prendra comme sens positif des angles orientés celui défini par $\vec{e}_z = \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y$)
4. Déduire de la question précédente l'expression de $F_y(0^+ \longrightarrow 0)$, force transversale exercée par la Corde2 sur la perle, en fonction des données parmi : $\omega, k, \underline{A_1}, \underline{B_1}, \underline{A_2}\ et \underline{B_2}$.
5. De même, exprimez la force transversale $F_y(x^- \longrightarrow x^+)$ exercée en un point *x* quelconque, par la partie gauche de la corde sur la partie droite. En déduire l'expression de $F_y(0^- \longrightarrow 0)$, force transversale exercée sur la perle par la Corde1.
6. A partir du théorème fondamental de la dynamique appliquée à la perle (en $x = 0$), en déduire une première équation (Eq1) entre $\underline{A_1}$, $\underline{B_1}$, $\underline{A_2}$ et $\underline{B_2}$.
7. Quelle autre équation (Eq2) entre $\underline{A_1}$, $\underline{B_1}$, $\underline{A_2}$ et $\underline{B_2}$ peut-on écrire, du fait de la jonction des deux cordes en $x = 0$?
8. Donnez les deux autres équations indépendantes (Eq3) et (Eq4) que l'on peut encore écrire sur $\underline{A_1}$ et $\underline{B_1}$, puis $\underline{A_2}$ et $\underline{B_2}$ (on considèrera pour cela le comportement à chaque extrémité).

*L'utilisation du script python « solution = sp.solve((Eq1, Eq2, Eq3, Eq4), A1, B1, A2, B2, dict=True) » conduit à la solution donnée **en annexe 1**.*

9. Que se passe-t-il dans le cas particulier où $m_0 = 0$? Est-ce que cela vous parait cohérent avec les expressions données en annexe 1 ? Justifiez.
10. On revient à $m_0 \neq 0$
   a. Que devient $\underline{A_1}$ dans le cas où $kL \longrightarrow \pi$? Quel phénomène est en jeu ? Comment peut-on expliquer qualitativement ce résultat ? Commentez la validité des hypothèses du modèle dans ce cas particulier.

   Les expressions de $\underline{A_1}$, $\underline{B_1}$, $\underline{A_2}$ et $\underline{B_2}$ sont données en fin d'annexe 1 dans le cas où $kL = \frac{\pi}{2}$.

   b. Dans ces conditions, déterminez l'amplitude maximale U_{max} du déplacement $u(x,t)$ de la corde en un point *x* quelconque de la première corde ($-L \leq x < 0$).

Exercice 2 : Modes guidés dans un empilement planaire diélectrique (~6 pts)

*Un guide d'onde diélectrique planaire dit « symétrique » peut être composé de 3 couches. Une couche centrale de fort indice de réfraction – dans laquelle la lumière est confinée – constitue **le cœur**. Les 2 couches extérieures de faible indice de réfraction constituent **la gaine (cf. figure 2).***

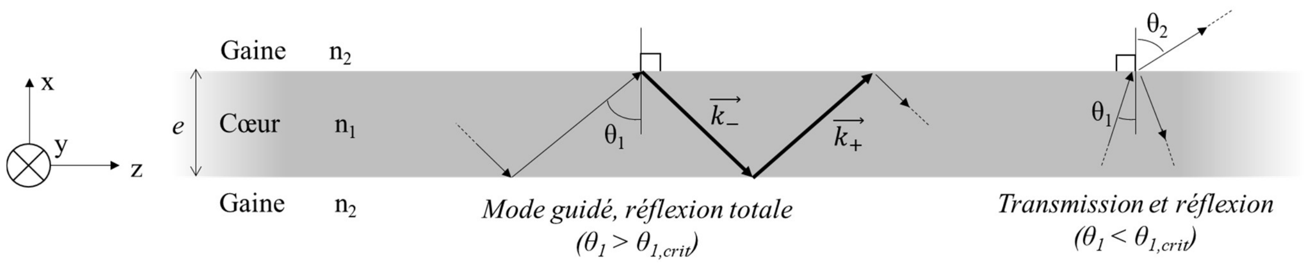

Figure 2 : schéma d'un guide d'onde dit « symétrique » à 3 couches.

Tous les angles sont mesurés par rapport à la normale des interfaces entre les différentes couches du guide d'onde. *On injecte dans ce guide une onde électromagnétique plane progressive uniforme qui subit des réflexions avec un angle θ_1 par rapport à la normale. On a donc dans le coeur du guide, des ondes ascendantes (vecteur d'onde $\overrightarrow{k_+}$) et des ondes descendantes ($\overrightarrow{k_-}$).*

1. En utilisant une des relations de Descartes, exprimer l'angle critique $\theta_{1,crit}$ au-delà duquel l'angle de **réfraction** n'est plus défini, et donc le régime de réflexion totale a lieu, en fonction des indices de réfraction du cœur et de la gaine du guide, n_1 et n_2 respectivement.
2. Exprimer le cosinus de l'angle de propagation du rayon dans la gaine ($cos\theta_2$) en fonction de l'angle de propagation dans le cœur (θ_1). Que se passe-t-il pour $cos\theta_2$ lorsque θ_1 dépasse l'angle critique $\theta_{1,crit}$?

On considère le cas d'une ***polarisation du champ électrique perpendiculaire au plan d'incidence****. Dans ce cas, la formule, vue dans le polycopié du cours, pour le coefficient de réflexion (dit de 'Fresnel') pour une onde de champ électrique arrivant d'un milieu 1, en incidence oblique, sur une interface avec un milieu 2, est :*

$$r_{TE} = \frac{n_1 cos\theta_1 - n_2 cos\theta_2}{n_1 cos\theta_1 + n_2 cos\theta_2}$$

On se place par la suite dans le cas $\theta_1 > \theta_{1,crit}$. Il s'agit d'une condition nécessaire pour assurer la propagation des ondes dans le guide.

3. Montrer dans ce cas que le coefficient de réflexion r_{TE} devient complexe et peut s'écrire :

$$\underline{r_{TE}} = \frac{n_1 cos\theta_1 - jn_2\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 sin^2\theta_1 - 1}}{n_1 cos\theta_1 + jn_2\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 sin^2\theta_1 - 1}}$$

Remarquons que cette formule est du type $\frac{a-jb}{a+jb}$

4. Calculer le module du coefficient de réflexion, $|\underline{r_{TE}}|$. Est-ce cohérent avec l'hypothèse, $\theta_1 > \theta_{1,crit}$?

L'argument de $\underline{r_{TE}}$, lorsqu'il est écrit sous la forme d'un exponentielle complexe $\underline{r_{TE}} = |\underline{r_{TE}}|e^{j\phi}$, est donné par la formule suivante et correspond au changement de phase qui a lieu lorsqu'il y a réflexion totale ;

$$\arg(\underline{r_{TE}}) = \phi = -2 * \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{n^2 sin^2\theta_1 - 1}}{ncos\ _1}\right) \quad \text{où} \quad n = \frac{n_1}{n_2}$$

La propagation des ondes dans le guide nécessite également que soit vérifiée l'équation suivante :

$$2|k_x|e + 2\phi = 2\pi m$$

Avec m un entier. Cette équation est dite 'équation des modes', et l'entier m est « l'ordre du mode guidé ». Ces modes sont souvent excités à l'aide d'un coupleur à prisme de section semi-circulaire de haut indice de réfraction (cf Figure 3), ici identique à celui du cœur du guide ($n_p = n_1$). Un faisceau laser est focalisé et réfléchi sur la base de ce prisme. Lorsque l'angle d'incidence de la lumière sur la base du prisme correspond à celui de propagation d'un mode guidé, de l'énergie optique est transférée vers le cœur du guide par un processus appelée 'couplage évanescent'. Un trait noir, appelé un ***'m-line'****, apparaît alors dans le faisceau réfléchi dont l'angle de formation peut être mesuré. Puisque $n_p = n_1$, l'angle auquel le 'm-line' se forme correspond directement à l'angle de propagation du mode guidé dans le cœur du guide, θ_1.*

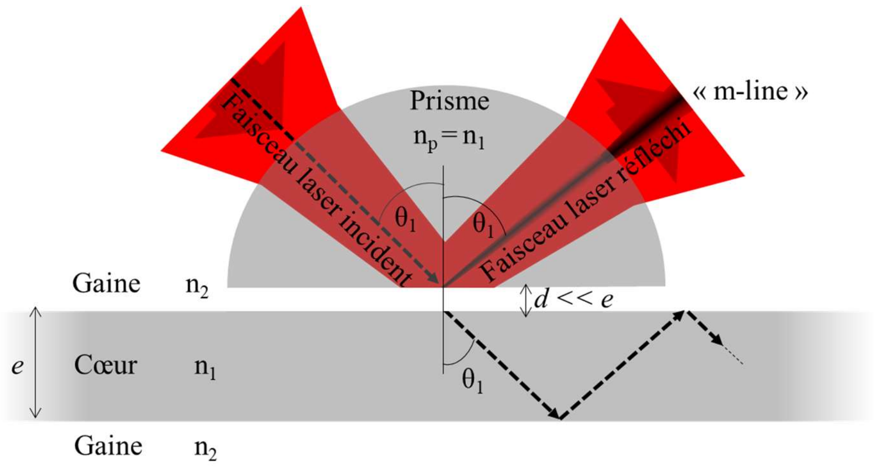

Figure 3 : excitation de modes dans un guide « symétrique »

5. Donner l'expression analytique de k_x en fonction de la longueur d'onde dans le vide λ_0 du laser, l'indice de réfraction du cœur (et du prisme) n_1 et l'angle de propagation du mode guidé θ_1.
6. Admettons que nous connaissons l'indice de réfraction du cœur du guide (et du prisme) n_1= 1,6 et celui de la gaine n_2 = 1,5. Si, pour le mode d'ordre $m=1$, le 'm-line' correspondant se forme à l'angle θ_1 = 73,8° lorsque la longueur d'onde dans le vide du laser utilisé est λ_0 = 633nm, quelle est l'épaisseur e du cœur du guide d'onde ?

Note de fin : la technique d'excitation des modes guidés et leur identification en cherchant les 'm-lines' constitue une méthode de mesure avancée des propriétés des couches minces, et des guides d'ondes ainsi composés. En mesurant la position angulaire de deux 'm-lines' il est possible de remonter à l'indice de réfraction du cœur d'un guide d'onde, ainsi qu'à son épaisseur …

Annexe 1 de l'exercice 1

$$\underline{A_1} = \frac{2T_0ake^{jkL}}{2T_0k(1-e^{4jkL}) - jm_0\omega^2(1+e^{4jkL}-2e^{2jkL})}$$

$$\underline{B_1} = \frac{-2T_0ake^{3jkL}}{2T_0k(1-e^{4jkL}) - jm_0\omega^2(1+e^{4jkL}-2e^{2jkL})}$$

$$\underline{A_2} = \frac{2T_0ake^{jkL} - jm_0a\omega^2\left(e^{jkL}-e^{3jkL}\right)}{2T_0k(1-e^{4jkL}) - jm_0\omega^2(1+e^{4jkL}-2e^{2jk})}$$

$$\underline{B_2} = \frac{-2T_0ake^{3jkL} + jm_0a\omega^2\left(e^{jkL}-e^{3jkL}\right)}{2T_0k(1-e^{4jkL}) - jm_0\omega^2(1+e^{4jkL}-2e^{2jkL})}$$

solution à $m_0 \neq 0$ et $kL = \frac{\pi}{2}$:

$$\underline{A}_1 = -\frac{\pi T_0 a}{4Lm_0\omega^2} \qquad \underline{A}_2 = j\frac{a}{2} - \frac{\pi T_0 a}{4Lm_0\omega^2} \qquad \underline{B}_1 = -\frac{\pi T_0 a}{4Lm_0\omega^2} \qquad \underline{B}_2 = -j\frac{a}{2} - \frac{\pi T_0 a}{4Lm_0\omega^2}$$