Procesos Estocásticos

Ejercicio 1

Un proceso aleatorio independiente e idénticamente distribuido (i.i.d) X_n con $n = 1,2, \ldots$, tiene una función de densidad marginal $p(x) = e^{-x}u(x)$, con $u(x) = 1$ si $x \geq 0$ y $u(x) = 0$ si $x < 0$. ¿Cuál es la probabilidad que X_1, X_{12} y X_3 sean todas mayores que 1?

Ejercicio 2

Sea X_n con $n = 1,2, \ldots$, un proceso aleatorio independiente e idénticamente distribuido (i.i.d), el proceso $Y_n = X_n^2$, ¿Es también i.i.d? Justifique.

Ejercicio 3

Sea X_n con $n = 1,2, \ldots$, un proceso aleatorio independiente e idénticamente distribuido (i.i.d), el proceso $Y_n = X_n X_{n-1}$, con para $n = 2,3, \ldots$ y con $Y_1 = X_1$ ¿Es Y_n también i.i.d? Justifique.

Procesos aleatorios de Poisson

Ejercicio 4

Encuentre la probabilidad de que sucedan 6 eventos en un proceso aleatorio de Poisson en el intervalo $[7,12]$ si $\lambda = 1$. Luego, determine el número promedio de eventos para ese intervalo.

Ejercicio 5

Para un proceso aleatorio de Poisson con una tasa de eventos igual a 2 por segundo, encuentre la probabilidad de obtener exactamente 2 eventos en 5 intervalos sucesivos de longitud 1 segundo cada uno.

Ejercicio 6

En un Call Center, entran llamadas telefónicas con una tasa pormedio de una llamada cada 5 segundos. ¿Cuál es la probabilidad de que se reciban más de 12 llamadas en el primer minuto?

Ejercicio 7

Usando Octave, Matlab o Python, escribe un código que genere una realización de un processo aleatorio de Poisson. Utilice para ello, la propiedad de que el tiempo entre eventos es una variable aleatoria con distribución exponencial.

Ejercicio 8

Utilizando el código del ejercicio 0, genere realizaciones de un proceso aleatorio de Poisson con $\lambda = 2$ y $\lambda = 5$. Utilizando los datos generados, estime empíricamente la tasa de eventos en ambos casos y calcule los errores obtenidos para distintos tamaños de muestras.

Ejercicio 9

Una boca de acceso al subte contiene 3 molinetes, cada uno caracterizado por un proceso aleatorio de Poisson independiente con tasa de eventos igual a λ. Determine la probabilidad de que se obtengan total de k arrivos en el intervalo $[0, T]$. Ayuda: utilice la propiedad de suma de procesos de Poisson independientes.

Ejercicio 10

En una parada de taxis, un taxi arriba en promedio cada un minuto. Si una persona ya lleva esperando un taxi por 10 minutos, calcule la probabilidad de que tenga que esperar menos de un minuto adicional.

Ejercicio 11

Considere una computadora con una memoria con capacidad para almacenar 10^6 palabras. Si el pedido de almacenamiento de una palabra es un proceso aleatorio de Poisson con una tasa de eventos de 1 por milisegundo, ¿Cuánto tiempo pasará en promedio hasta que la memoria se sature?

Ejercicio 12

Utilice Octave, Matlab o Python para generar múltiples realizaciones de un proceso aleatorio de Poisson con $\lambda = 1$. Luego, use los datos generados para estimar la probabilidad $P(T_2 < 1)$, siendo T_n el instante de tiempo en el que ocurren n eventos.

Ejercicio 13

Un servidor atiende pedidos que arriban de acuerdo con un proceso de Poisson con una tasa de 10 pedidos por minuto. ¿Determine la probabilidad de que no haya pedido desatendidos si el servidor está fuera de servicion durante 20 segundos?

Ejercicio 14

En un multiplexer arriban paquetes en dos puertos de acuerdo a un proceso de Poisson con tasas $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$ paquetes por segundo, respectivamente.

a. Encuentre la probabilidad de que un mensaje arribe primero en la línea 2.
b. Encuentre la función de densidad de probabilidad para el tiempo necesario hasta que llegue un mensaje ya sea en la línea 1 o 2.
c. Encuentre la probabilidad de que se reciban $N(t)$ mensajes en un interalo de longitud t.
d. Generalice el resultado del punto c cuando se mezclan k procesos de Poisson con tasas: $\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_k$, respectivamente:

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t) + \cdots + N_k(t)$$

Ejercicio 15

Suponga que el tiempo requerido para atender a un cliente en un sistema de cola es T. Si los clientes arriban de acuerdo con un proceso de Poisson con una tasa λ, encuentre la probabilidad de que arriben N clientes durante el tiempo en que un cliente es atendido.

Evalúe la probabilidad del punto 0 si T es una variable exponencial con parámetro β.

Ejercicio 16

Considere un flujo de paquetes que arriban como un proceso de Poisson con una tasa $\lambda = 50$ paquetes por segundo. Suponga que cada paquete es de color verde con probabilidad 5% y amarillo con probabilidad 95%. Dado que han arribado 100 paquetes durante el último segundo, (i) ¿Cuál es el número de paquetes amarillos esperado para durante el segundo anterior? (ii) ¿Cuál es la probabilidad de que hayan arribado 200 paquetes amarillos durante el segundo anterior?

Paquetes rojos arriban de acuerdo con un proceso de Poisson con tasa $\lambda_1 = 30$ paquetes por segundo. Paquetes negros lo hacen con una tasa $\lambda_2 = 10$. Asuma que ambos flujos de paquetes se mezclan en un único flujo. Suponga que sabemos que arribaron 60 paquetes durante un segundo. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 40 hayan sido rojos?

Suponga que arriban paquetes según un proceso de Poisson con tasa λ y sabemos que en 30 segundos han arribado 100 paquetes. ¿Cuál es la probabilidad de que hayan arribado 20 paquetes durante los primeros 10 segundos?

Ejercicio 17

Considere una oficina de correos con dos mostradores. Tres personas, A, B y C, entran simultáneamente a la oficina. A y B van directamente a los mostradores y C espera a que A o B finalicen de ser atendidos. ¿Cuál es la probabilidad de que A se encuentre todavía en la oficina luego de que las otras dos personas hayan dejado la misma cuando:

a. el tiempo de servicio para cada mostrador es exactamente de 10 minutos (no aleatorio)?
b. el tiempo de servicio es T con probabilidad $\frac{1}{3}$ para $T = 1,2,3$?
c. el tiempo de servicio es una variable aleatoria exponencial con media $1/\mu$?

Ejercicio 18

Considere clientes que son atendidos por cualquiera de tres mostradores disponibles dondel el tiempo de servicio del mostrador i es modelado con una distribución exponencial con tasa μ_i ($i = 1,2,3$). Siempre que un mostrador se libera, el cliente que se encontraba esperando mas tiempo es atendido por este mostrador.

a. Si un cliente arriba y encuentra los tres mostradores ocupados y nadie esperando a ser atendido, encuentre el tiempo esperado hasta que este cliente finalice su trámite.
b. Sin un cliente arriba y encuentra los tres mostradores ocupados y una persona esperando, encuentre el tiempo esperado hasta que este cliente finalice su trámite.

Ejercicio 19

Cada cliente que llega a un local debe ser tendido primero por cajero 1, luego cajero 2 y finalmente el cajero 3. El tiempo de servicio en cada cajero es una variable aleatoria exponencial con tasa μ_i, con $i = 1,2,3$. Suponga que Ud. Ingresa al local cuando hay solo un cliente siendo atendido por el cajero 3.

a. Encuentre la probabilidad de que el cajero 3 continúe ocupado cuando Ud. pase a ser atendido por el cajero 2.
b. Encuentre la probabilidad de que el cajero 3 continúe ocupado cuando Ud. esté listo para ser atendido por el cajero 3.
c. Encuentre el tiempo promedio que deberá permanecer en el local.

Ejercicio 20

Los autos que pasan por determinada calle están gobernados por un proceso de Poisson con tasa λ. Una mujer que desea cruzar la calle espera hasta que no se divisan autos que llegarán en los próximos T segundos.

a. Encuentre la probabilidad de que deba esperar 0 segundos.
b. Encuentre el tiempo de espera promedio.

Ejercicio 21

Considere un sistema de cola paralelo con dos servidores donde los clientes arriban de acuerdo con un proceso de Poisson con tasa λ, y donde el tiempo de servicio es una variable aleatoria exponencial con tasa μ. Además, suponga que los clientes que encuentran ambos servers ocupados parten del sistema sin ser atendidos (cliente perdido), mientras que aquellos que encuentran al menos un server disponible son atendidos inmediatamente y parten del sistema una vez atendidos.

a. Si ambos servers se encuentran ocupados, encuentre el tiempo promedio hasta que el próximo cliente entre al sistema
b. Partiendo de un sistema vacío, encuentre el tiempo promedio hasta que ambos servers estén ocupados.
c. Encuentre el tiempo promedio entre dos clientes perdidos sucesivos.

Ejercicio 22

Se realiza un experimento en el cual se lanza de una moneda m veces donde m sigue una distribución Poisson con parámetro $\lambda = 5$ lanzamientos por experimento.

Si se define la variable X como la cantidad de caras obtenidas en m lanzamientos, calcule $E[X]$

Simule en Matlab, Octave o Pyton 1000 experimentos realizados comparando la media obtenida de forma teórica contra la obtenida en la simulación.

Ejercicio 23

El tiempo en horas entre la llegada de trenes sucesivos en una estación está distribuido uniformemente en el intervalo $[0,1]$. Los pasajeros arriban de acuerdo con un proceso de Poisson con una tasa de $\lambda = 7$ pasajeros por hora. Suponga que un tren acaba de dejar la estación. Definiendo a X como el número de personas que suben en el próximo tren, encontrar:

$E[X]$

$Var(X)$

Ejercicio 24

Determinado evento está gobernado por un proceso de Poisson con una tasa de $\lambda = 2$ por hora.

a. ¿Cuál es la probabilidad que no haya eventos entre las 8PM y 9PM?
b. Comenzando al mediodía, ¿Cuál es el tiempo esperado para que suceda el 4to evento?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que dos o más eventos ocurran entre las 6PM y las 8PM?

Ejercicio 25

Un servidor tiene 2 puntos de falla, la fuente de alimentación y un disco. Los tiempos de vida de cada uno de los componentes tiene una distribución Poisson con medias 500 y 1000 días respectivamente. Cuál es la probabilidad que si el sistema falla la causa haya sido la fuente de alimentación?
Simule en Matlab, Octave o Python hasta alcanzar 1000 fallas del servidor.