Generación de números aleatorios y tests de aleatoriedad

Ejercicio 1

Considere el siguiente generador linear congruente

$$U_{n+1} = (\mathrm{a}U_n + \mathrm{c}) \, mod \, \mathrm{m},$$

donde $a = 1$, $c = 7$ y $m = 10$.

a. Genere la secuencia $\{U_1, U_2, \ldots, U_{11}\}$ a partir de $U_0 = 7$.
b. Genere la secuencia $\{U_1, U_2, \ldots, U_{11}\}$ a partir de $U_0 = 1$.
c. Explique por qué este algoritmo no es válido y proponga un cambio para mejorarlo justificando adecuadamente.

Ejercicio 2

El generador de números aleatorios de Excel (Microsoft) es el siguiente:

$$U_{n+1} = (9821U_n + 0.211327) \, mod \, 1,$$

donde los cálculos se realizan con aritmética de punto flotante. Además, Excel genera el valor inicial U_0 utilizando el reloj interno. Describa al menos, una de las mayores deficiencias de este método.

Ejercicio 3

Dado $x_0 = 5$ y el generador

$$X_{n+1} = (3X_n) \, mod \, 150,$$

Encontrar la secuencia $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$.

Ejercicio 4

Dado $x_1 = 6$, $x_2 = 4$ y el generador

$$X_{n+1} = (3X_n + c) \, mod \, 7,$$

determinar x_{51}.

Ejercicio 5

Determine x_{100} para un generador congruente multiplicativo con módulo 7, multiplicador 4, y condición inicial $x_0 = 1$.

¿Cuál es la longitud de ciclo máxima posible para un generador congruente multiplicativo con módulo 7?

Ejercicio 6

Dado el siguiente generador congruente multiplicativo:

$$X_{n+1} = (7X_n)\ mod\ 13,$$

para $n = 1,2, \ldots$, con condición inicial $x_0 = 1$.

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones es verdadera?

I. La longitud de ciclo máxima posible es 12.
II. Este generador es más veloz que un generador congruente lineal con incremento no-nulo, usando el mismo módulo, multiplicador y condición inicial.
III. $x_4 = 9$.

Ejercicio 7

El generador de números aleatorios de Visual BASIC (Microsoft) está definido por

$$X_{n+1} = (1{,}140{,}671 \cdot X_n + 1{,}280{,}163)\ mod\ 2^{24}.$$

Si comenzamos la secuencia con un 1, ¿cuáles son los siguientes tres valores en la secuencia?

Ejercicio 8

Dado un generador lineal congruente con módulo 9, multiplicador 7 e incremento 4. Si $x_{\mathrm{i}+1} = 3$, ¿cuál es el valor de x_{i}?

Ejercicio 9

Se desea utilizar una urna para simular una variable aleatoria con un espacio muestral $S = \{1,2,3,4,5\}$ y probabilidades $p_1 = 1/3$, $p_2 = 1/5$, $p_3 = 1/4$, $p_4 = 1/7$, $p_5 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_4)$. ¿Cuántas bolas debería contener la urna y cómo deberían estar marcadas? Generalice este resultado para demostrar que una urna puede ser utilizada para simular cualquier experimento aleatorio con un espacio muestral finito y probabilidades dadas por números racionales.

Ejercicio 10

Supongamos que estamos interesados en utilizar una moneda para simular un experimento aleatorio en el cual hay seis posibles estados equiprobables, donde $S = \{0,1,2,3,4,5\}$. Se propone el siguiente método que es una versión del método del rechazo:

1. Tirar una moneda 3 veces y obtener un número binario de tres dígitos identificando los 1's con caras y los 0's con secas.
2. Si el resultado del punto 1 es un número que está en S, se anota el resultado, sino se vuelve al punto 1.

Encuentre la probabilidad de que un número válido sea obtenido en el punto 2.

Demuestre que los números producidos en el punto 2. son equiprobables.

Generalice este algoritmo para demostrar que una moneda puede ser usado para simular cualquier experimento aleatorio con urnas.

Ejercicio 11

Utilice la función rand() de Octave/Matlab o su equivalente en Python para generar 1000 pares de números en [0,1]. Grafique un scatter-plot para confirmar que los puntos obtenidos están uniformemente distribuidos sobre un cuadrado de lado unitario.

Ejercicio 12

Proponga un algoritmo e impleméntelo en Octave/Matlab o Python que genere una variable aleatoria con la siguiente función de densidad:

$$f_X(x) = 30(x^2 - 2x^3 + x^4) \text{ con } 0 < x < 1.$$

Verifique que es una función de densidad de probabilidad válida.

Ejercicio 13

Proponga un algoritmo e impleméntelo en Octave/Matlab o Python que genere una variable aleatoria con la siguiente función de densidad:

$$f_X(x) = \frac{5}{4} t^{-2} \text{ con } 1 < x < 5.$$

Verifique que es una función de densidad de probabilidad válida.

Ejercicio 14

Proponga un método del rechazo para generar puntos que estén unifórmenme distribuidos en la región $y > x$ de un cuadrado de lado unitario. Confirme el correcto funcionamiento visualizando los resultados.

Ejercicio 15

Suponga que se dispone de un generador de números U_n uniformemente distribuidos en [0,1]. Si definimos $Y_n = \alpha U_n + \beta$.

Encuentre α y β tal que Y_n esté distribuido uniformemente en el intervalo $[a, b]$.

Sea $a = -5$ y $b = 15$. Use Octave/Matlab o su equivalente en Python para generar Y_n y calcular la media $\langle X \rangle$ y varianza muestral $\langle V^2 \rangle$ definidas de la siguiente manera:

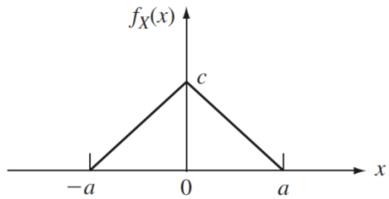
$$\langle X \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} X_n,$$

$$\langle V^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (X_n - \langle X \rangle)^2.$$

Compare estos valores con los valores teóricos de media y varianza para una distribución uniforme en el intervalo $[a, b]$ para distintos tamaños del conjunto de muestras: $N = 10, 50, 200, 100$.

Ejercicio 16

La variable aleatoria X tiene la función de densidad de probabilidad de la figura abajo.



Encuentre la transformación necesaria que, aplicada a una variable U uniformemente distribuida en [0,1], permita generar X.

d. Use Octave/Matlab o Python para generar N muestras de X. Compare la función teórica de densidad de probabilidad con un histograma de valores obtenidos para dicha variable. Utilice $N = 100, 1000, 10000$.

Ejercicio 17

Para cada una de las variables aleatorias siguientes: Encuentre la transformación necesaria que, aplicada a una variable U uniformemente distribuida en [0,1], permita generarlas. Use Octave/Matlab o Python para generar N muestras de X. Compare la función teórica de densidad de probabilidad con un histograma de valores obtenidos para dicha variable. Utilice $N = 100, 1000, 10000$.

Variable aleatoria Laplaciana con $\alpha = 1$.
Distribución de Pareto con $\alpha = 1.5, 2, 2.5$.
Distribución de Weibull con $\beta = 0.5, 2, 3$ y $\lambda = 1$.

Ejercicio 18

El siguiente método de rechazo puede ser utilizado para generar variables aleatorias Gaussianas:

1. Generar U_1, variable aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo unitario.
2. Definir $X_1 = -\ln U_1$.
3. Generar U_2, variable aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo unitario. Si $U_2 \leq \exp(-(X_1 - 1)^2/2)$, aceptar X_1, sino, rechazar X_1 y volver al punto 1.
4. Generar un signo aleatorio S (+1 o -1) con igual probabilidad. Definir $X = S * X_1$.
   e. Demostrar que si X_1 es aceptada, entonces su función de densidad de probabilidad es la del valor absoluto de una variable aleatoria Gaussiana con media cero y varianza unitaria.
   f. Demuestre que X es una variable aleatoria Gaussiana con media cero y varianza unitaria.

Ejercicio 19

2- Dos métodos posibles para generar variables aleatorias binomiales son:

1. Generar n Bernoulli variables aleatorias y sumar los resultados, y
2. Dividir el intervalo unitario de acuerdo con las probabilidades de la distribución binomial.

   Compare los métodos bajo las siguientes condiciones:
   a. $p = 0.5, n = 5, 25, 50$;

b. $p = 0.1, n = 5, 25, 50;$
c. Use Octave/Matlab o Python para implementar ambos métodos generando 1000 muestras binomialmente distribuidas. Compare ambos métodos.

Ejercicio 20

Se obtuvo el siguiente histograma contando los números que aparecen como primer dígito en una guía telefónica:

digit	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
observed	0	0	24	2	25	3	32	15	2	2

Aplique un test de Chi^2 con una distribución uniforme para los dígitos $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ usando un nivel de significancia del 1%. Repita el test para los dígitos $\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Ejercicio 21

Se tira una moneda 96 veces y se anota el número de veces obtenido cada dígito dando como resultado la siguiente tabla:

k	1	2	3	4	5	6
n_k	25	8	17	20	13	13

Aplique un test de Chi^2 para el caso equiprobable con un nivel de significancia del 5%.

Ejercicio 22

Utilizando Octave/Matlab o Python, realice el siguiente experimento 100 veces: genere 50 variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con la siguiente distribución discreta de probabilidades $\left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{3}{24}, \frac{5}{24}\right\}$. Aplique un test de Chi^2 con una distribución correspondiente a un dado no cargado con un nivel de significancia del 5%. ¿Con qué frecuencia se rechaza la hipótesis nula? ¿Cómo se interpreta este resultado?

Ejercicio 23

Utilizando Octave/Matlab o Python, realice los siguientes experimentos 500 veces

d. Genere 100 muestras de una variable X definida como la suma de 10 variables aleatorias independientes y uniformemente distribuidas en [0,1].
e. Genere 100 muestras de una variable X definida como la suma de 20 variables aleatorias independientes y uniformemente distribuidas en [0,1].
f. Para los puntos a. y b., aplique un test de Chi^2 con una distribución Gaussiana con la misma media y varianza que X. ¿Con qué frecuencia se rechaza la hipótesis nula con un nivel de significancia del 5% en cada caso? Interprete los resultados.

Ejercicio 24

Utilizando Octave/Matlab o Python, genere pares de números independientes (X, Y) que en teoría debería estar distribuidos uniformemente en el cuadrado de lado unidad. Utilice el test Chi^2 para medir que tan cierta es esta aseveración.