Teoría de Colas

Ejercicio 1

Dado un sistema de cola que está vacío en $t = 0$, si los tiempos de arribo de los primeros 6 clientes son 1, 3, 4, 7, 8, 15, y sus respectivos tiempos de servicio 3.5, 4, 2, 1, 1.5, 4. Grafique $N(t)$ versus t y chequee la fórmula de Little calculando $\langle N \rangle_t$, $\langle \lambda \rangle_t$ y $\langle T \rangle_t$ para cada una de los siguientes tipos de servicio:

a) First come, first served.
b) Last come, first served.
c) Shortest job first.

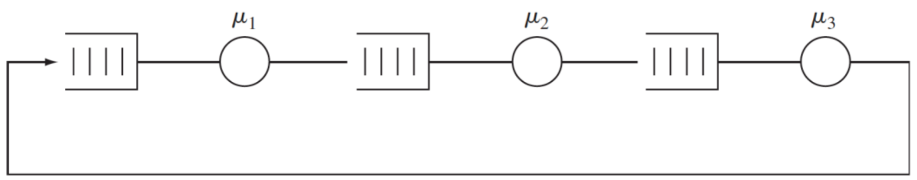
Ejercicio 2

Una línea de comunicación de datos transmite un bloque de información cada $10\mu s$. Un decodificador chequea errores en cada bloque y los corrige si es necesario. Al decodificador le toma $1\mu s$ determinar si hay o no errores. Si el bloque tiene un error, le toma $5\mu s$ corregirlo, y tiene más de un error le toma $20\mu s$ corregirlo. Los bloques esperan en una cola a ser procesados por el decodificador. Suponga que el decodificador está vacío inicialmente y que los números de errores en los primeros bloques de información son: 0, 1, 3, 1, 0, 4, 0, 1, 0, 0.

a) Grafique el número de bloques en el decodificador en función del tiempo.
b) Encuentre el número promedio de bloques en el decodificador.
c) Qué porcentaje del tiempo el decodificador está ocioso.

Ejercicio 3

Se colocan tres colas formando un loop como el de la figura abajo. Asuma que el tiempo de servicio promedio en la cola i es $m_i = {}^{1}/_{\mu_i}$.



a) Suponga que la cola tiene un único cliente circulando en el loop. Encuentre el tiempo promedio $E[T]$ que le toma al cliente completar un ciclo en el loop. Deduzca, a partir de $E[T]$, la tasa de arribos promedio λ_i en cada una de las colas. Verifique la fórmula de Little para estos valores.
b) Si hay N clientes circulando en el loop, ¿cómo se relacionan la tasa promedio de arribos y el tiempo de ciclo promedio?

Ejercicio 4

En el Ejercicio 0, asuma que las probabilidades de cero, uno y mas de un errores son p_0, p_1 y p_2, respectivamente. Use la fórmula de Little para enontrar el número promedio de bloques en el decodificador.

Ejercicio 5

Para una cola M/M/1:

a) Encuentre $P[N \geq n]$.
b) ¿Cuál es la máxima tasa de arribos permitida en un sistema con tasa de servicio μ, si se pide que $P[N \geq 10] = 10^{-3}$?

Ejercicio 6

Considere una granja de servidores con 2 servidores que operan independientemente. El número de solicitudes en el sistema varía entre 0 y 4.
Las probabilidades de n solicitudes son $p_0 = 1/16,\ p_1 = 4/16, p_2 = 6/16, p_3 = 4/16, p_4 = 1/16.$
Calcular:

a) El número esperado de solicitudes en el sistema y el número esperado de solicitudes en cola.
b) Dado que llegan 4 solicitudes por segundo, determine el tiempo de espera en el sistema, y el tiempo de espera en cola.

Ejercicio 7

Un router recibe paquetes y los transmite sobre una única línea de transmisión.
Suponga que los paquetes llegan siguiendo un proceso Poisson con tasa de 1 paquete cada 4 ms, y demora en ser transmitido un tiempo que sigue una distribución exponencial de media 3 ms.

Encuentre la cantidad media de paquetes en el sistema y el tiempo medio que los paquetes están en el sistema.
Qué porcentaje de incremento en la tasa de arribos genera que se duplique la media del tiempo total en el sistema?

Ejercicio 8

Se tiene que decidir la compra entre dos máquinas. La máquina 1 procesa μ transacciones por hora y cuesta B dólares por hora ya sea esté operando o en espera; la máquina 2 es el doble de rápida pero cuesta el doble. Suponga que las transacciones arriban con una distribución de Poisson con tasa λ y que los tiempos de proceso tienen una distribución exponencial. El costo total del sistema se obtiene como la suma del costo de operación más un costo de A dólares por cada hora que un cliente tiene que esperar.

a) Encuentre la expresión matemática del costo total por hora para cada uno de los sistemas. Dibuje este costo versus la tasa de arribos λ.
b) Si $A = B/10$, ¿para qué rango de tasas de arribos la máquina 1 es más económica? Repita el análisis para $A = 10B$.

Ejercicio 9

Considere un Sistema con una cola tipo M/M/1 en el cual cada cliente que llega significa una ganancia de 5$ pero donde por cada unidad de tiempo de demora representa un costo de 1$. Encuentre el rango de tasas de arribos para las cuales el sistema da ganancia (ganancia > costo).

a) Para una cola M/M/1 con tasa de arribos λ clientes por segundo.
b) Encuentre la tasa de servicio necesaria para que el número promedio de clientes en cola sea $E[N_q] = 5$.
c) Encuentre la tasa de servicio requerida para que el número promedio de clientes en cola, cuando la cola no está vacía, sea 5 ($E[N_q|N_q > 0] = 5$).
d) ¿Cuál de los dos criterios considera más apropiado y por qué ($E[N_q]$ o $E[N_q|N_q > 0]$)?

Ejercicio 10

Demuestre que el percentil p del tiempo de espera en una cola M/M/1 es

$$x = \frac{1/\mu}{1-\rho}\ln\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)$$

Ejercicio 11

Considere un sistema de cola M/M/1/2 en el cual cada cliente aceptado representa una ganancia de 5$ y cada cliente rechazado una pérdida de 1$. Encuentre la tasa de arribos necesaria para que la ganancia sea igual al costo (ganancia neta nula).

Ejercicio 12

Para una cola tipo M/M/1/K, demuestre que:

$$P[N=k|N<K] = \frac{P[N=k]}{1-P[N=K]} \quad \text{con} \quad 0 \leq k \leq K$$

Ejercicio 13

Suponga que dos tipos de clientes arriban a sistema de cola con distribuciones de Poisson y tasas de arribo igual a $\lambda/2$. Ambos tipos de clientes requieren servicios on tiempos distribuidos exponencialmente con tasa de servicio μ. Los clientes tipo I son siempre aceptados al sistema (clientes VIP) mientras que los de tipo II son rechazados cuando el número total de clientes es mayor a K.

a) Dibuje el diagrama de transiciones para $N(t)$ (número total de clientes en el sistema).
b) Encuentre la distribución de probabilidades de $N(t)$ en el estado estacionario.

Ejercicio 14

Encuentre $P[N \geq c+k]$ para un sistema M/M/c.

Ejercicio 15

Suponga que clientes llegan a un comercio como un proceso de Poisson con tasa $\lambda = 12$ clientes por hora. El comercio tiene dos empleados. Suponga que el tiempo que le toma a cada empleado atender a un cliente tiene distribución exponencial con media igual a 5 minutos por cliente.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente tenga que espera en la cola para ser atendido?
b) Encuentre el número promedio de clientes en el sistema y le tiempo promedio en el sistema.
c) Encuentre la probabilidad de que haya mas de 4 clientes en el sistema.

Ejercicio 16

La fórmula de Little aplicada a los servidores implica que el número medio de servidores ocupados es $\lambda E[\tau]$. Verifique esto calculando explícitamente el número promedio de servidores ocupados en un sistema M/M/c.

Ejercicio 17

Un centro de información recibe pedidos con una distribución de Poisson con una tasa de 10 pedidos por segundo. Cada pedido requiere en promedio ½ segundo para ser atendido.

a) ¿Cuántos servidores se necesitan si se require que el delay total en promedio para cada pedido no exceda los 4 segundos, y el 90% de los pedidos deban esperar menos que 8 segundos en cola?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que todos los servidores estén ocupados? ¿Y desocupados?

Ejercicio 18

Considere un Sistema de colas en el cual la tasa de servicio máxima es $c\mu$ clientes por segundo. Sea k el número de clientes en el sistema. Cuando $k \geq c$, c clientes son atendidos con una tasa μ cada uno. Cuando $0 < k < c$, estos k

clientes son atendidos con una tasa $c\mu/k$ cada uno. Asuma arribos tipo Poisson con una tasa igual a λ y tiempos exponenciales.

a) Encuentre el diagrama de transiciones de este sistema.
b) Encuentre la distribución del número de clientes en el sistema en el estado estacionario.
c) Encuentre $E[W]$ y $E[T]$.
d) Para $c = 2$, compare $E[W]$ y $E[T]$ de este sistema con colas tipo M/M/1 y M/M/2 con igual tasa de servicio máxima.

Ejercicio 19

Considere un sistema M/M/5 en el cual la tasa de arribos es de 10 clientes por minuto y el tiempo de servicio promedio es ½ minuto.

a) Encuentre la probabilidad de que un cliente sea rechazado. *Ayuda:* puede usar la siguiente fórmula para el número Erlang B:

$$B(c,a) = \frac{aB(c-1,a)}{c+aB(c-1,a)} \text{ donde } a = \lambda E[\tau]$$

b) ¿Cuántos servidores adicionales se requieren para reducir la probabilidad de rechazo al 10%?

Ejercicio 20

Un comercio que alquila herramientas posee 4 unidades para alquilar. Los clientes arriban como un proceso de Poisson con una tasa de un cliente cada 2 días. El tiempo de alquiler es exponencial con una media igual a 2 días. Si el comercio no tiene herramientas disponibles, los clientes concurren a un comercio vecino.

a) Encuentre la proporción de clientes que concurren al comercio vecino.
b) ¿Cuál es el número promedio de herramientas alquiladas?
c) ¿En cuanto se incrementa la pérdida de clientes si una de las herramientas se rompe y no es reemplazada?

Ejercicio 21

Durante la hora pico nocturna, los usuarios se conectan a una red peer-to-peer con una tasa de 10 usuarios por segundo. Cada usuario permanece conectado a la red 1 hora en promedio.

a) ¿Cuál es la distribución del número de usuarios conectados en el estado estacionario?
b) ¿El sistema, alcanza su estado estacionario?
c) ¿Es razonable asumir una distribución Gaussiana para el número de usuarios conectados al sistema?