M. ESPINOZA

# LES MATHÉMATIQUES ET LE MONDE SENSIBLE

Ellipses, Paris, 1997

# CHAPITRE II

# WITTGENSTEIN, ÉMIETTEUR DE LA REALITE MATHÉMATIQUE

## § 1. — L'UNIVERS EST-IL DANS LE MOT ?

Le platonisme en philosophie des mathématiques postule que derrière le monde physique, sensible et doté de mouvement, il existe un monde objectif encore plus réel, habité par des idées, essences ou universaux abstraits immuables et éternels qui peuvent se combiner pour former des vérités ou des faussetés exactes et définitives que nous pouvons parfois découvrir. Ce monde platonicien, sur lequel nous ne pouvons exercer aucune influence, nous contrôle d'une façon dont la compréhension parfaite nous échappe. Dans le processus de découverte, le langage joue un rôle secondaire et accessoire. L'histoire, l'approximation à la vérité, la contingence, ne font pas partie du monde mathématique en soi; elles sont à placer du côté de notre effort pour atteindre la vérité. La raison linguistique fonctionne comme une échelle qui nous permet de nous hisser pour mieux voir. Il y a dans le platonisme, tout comme dans l'intuitionnisme de L.E.J. Brouwer, une primauté de l'intuition intellectuelle par rapport à la démonstration.

Au contraire, pour l'idéaliste, le monde objectif indépendant de nos symboles est un rêve. L'Univers est dans le mot. Il n'y a pas de vérité mathématique au sens ontologique; toute vérité est épistémologique et dépend de notre perception, de notre expression donc de notre langage qui n'est pas un simple habit mais le contenu même de la vérité. Après le *Tractatus*, Wittgenstein nie que les propositions des mathématiques décrivent des faits concernant des objets et imagine que la notion de vérité-correspondance (l'adéquation de notre représentation à la réalité) est vide, tout en s'acheminant vers une théorie non-réaliste (idéaliste, nominaliste ou redondantiste) de la vérité.

Pour un idéaliste, la vérité ne peut être que la cohérence des symboles entre eux car il postule qu'il est impossible de sortir des symboles: on peut comparer un énoncé à un autre énoncé, mais non à quelque chose d'extra-linguistique. Le nominaliste, qui n'a pas de place dans son ontologie pour les idées générales (nous choisissons un objet concret pour représenter d'autres objets concrets), coupe le signe général de toute réalité car seul l'individuel existe, doctrine à laquelle les modernes ont ajouté l'idée qu'il est inutile de parler de vérité ou de connaissance de la réalité et qu'il convient de les remplacer par les notions de convention, de commodité ou de réussite empirique. La conception redondantiste stipule que dire "p est vrai" ou "p" sont exactement la même chose: une fois p reconnu, rien n'est gagné en ajoutant : "est vrai". Les exégètes ne sont pas d'accord sur le degré d'idéalisme ou de nominalisme attribuable à l'oeuvre de Wittgenstein, mais personne ne contestera qu'il a fait plusieurs pas dans une direction anti-réaliste.

Le rejet du monde objectif est partagé par le constructiviste qui exige une règle ou un calcul, une procédure qui permettrait de construire l'objet dont il affirme l'existence ou de reconnaître la vérité de la conclusion. On a besoin d'un algorithme, c'est-à-dire d'un processus entièrement planifié et par conséquent fini, qui opère sur des configurations finies en étapes discrètes et simples où chaque pas est déterminé par le pas qui le précède. Un algorithme est capable de résoudre toute une classe de problèmes qui diffèrent par leurs données tout en étant régis par les mêmes prescriptions. Une preuve est constructive si chaque fois qu'elle implique l'existence de quelque chose on montre les procédures qui en permettent la construction. Le constructiviste exige de plus que chaque fois qu'on fait une affirmation générale elle soit illustrée par des exemples, et quand il s'agit d'un ensemble, que l'on nomme ses éléments de façon à les distinguer.

La vérité, selon le constructivisme et telle qu'elle est définie par Wittgenstein, est sa méthode de vérification. On passe de l'ontologie à l'épistémologie : "La vérification n'est pas un simple indice de la vérité, elle détermine le sens de la proposition". (1) Le constructiviste invente ou construit les vérités mathématiques, il ne les découvre pas : "S'il y a une infinité de nombres cardinaux c'est parce que nous construisons ce système infini et le nommons système des nombres cardinaux". (2) D'un mot, "le mathématicien crée l'essence". (3)

Wittgenstein écrivit que ceux qui parlent de la solution du problème de Fermat (que l'on peut exprimer ainsi: $a^n + b^n = c^n$ où a, b et c sont des entiers et où n est un exposant entier)

> ne comprennent pas la grammaire du mot "problème mathématique", non plus que celle du mot "solution"... Le prix est offert pour la solution d'un problème scientifique; pour *l'extérieur* de la solution... Les conditions du problème sont des conditions externes, et si le problème est résolu, ce qui se produit correspond à la position du problème... Si le problème était de trouver la construction d'un pentagone régulier, quand on pose ce problème, ce qui caractérise la construction c'est la propriété physique qu'elle a de pouvoir produire effectivement un pentagone que la mesure détermine comme régulier. (4)

Nous devons laisser à l'utilisation d'un mot le soin de nous apprendre sa signification; de façon analogue, on doit laisser à la preuve le soin de nous renseigner sur ce qui est prouvé.

J'aimerais faire remarquer que l'attitude constructiviste est compatible avec le platonisme, à condition de ne pas affirmer que la preuve crée l'existence. Or nous venons de voir, malheureusement, que Wittgenstein dit explicitement que le mathématicien crée l'essence. Il est légitime d'exiger une preuve d'existence pour avoir le droit personnel d'affirmer que nous connaissons telle ou telle vérité. C'est dans cet ordre des choses que le mot de Jean Largeault sur la signification de la philosophie de Brouwer prend tout son sens:

> Le but de l'intuitionnisme est d'associer aux Idées une représentation mentale; d'ajouter au platonisme une dimension de subjectivité et de vie intérieure. Je dis que cela équivaut encore à entreprendre de corriger la situation issue du cartésianisme, qui laisse en présence la pensée et l'étendue, sans communication possible. (5)

La philosophie des mathématiques de Wittgenstein peut être qualifiée, à juste titre, de constructivisme anthropocentrique car elle accepte comme vrai non seulement ce que nous pouvons démontrer comme tel, mais elle exige, de plus, que nous soyons susceptibles de suivre la démonstration. Un dénominateur commun aux intuitionnistes est de penser que notre capacité de concevoir ou d'imaginer ne peut être prolongée au-delà de certaines limites qu'il faudrait définir. Ainsi, les limites de notre capacité de percevoir sensiblement ou intellectuellement une vérité seraient les limites de cette vérité même, tout comme, d'après Wittgenstein, les limites de notre langage sont les limites du monde. (Descartes, dans les Règles pour la direction de l'esprit (Règle XI) s'était attaqué à ce problème et avait proposé d'apprendre par coeur des morceaux de preuves pour élargir notre capacité, ce qui est devenu pratique courante).

L'exigence de Wittgenstein exclut donc de l'essence des mathématiques les preuves trop longues pour nous — ce qui n'est pas les cas chez la plupart des constructivistes sensibles à l'aide de l'ordinateur. Par exemple, dans la résolution du problème des quatre couleurs (le nombre chromatique du plan ou de la sphère est-il égal à quatre ?), Appel et Haken, pour accomplir les dernières étapes de leur démonstration, mirent au point un calcul qui nécessita 12OO heures d'ordinateur, et à l'heure actuelle (1994) la preuve de A. Wiles concernant la conjecture de Fermat occupe un millier de pages. (Les professionnels qui ont eu la preuve entre leurs mains nous demandent de faire confiance malgré les vides et les présuppositions, non encore suffisamment justifiées, qui restent).

Les empiristes récents, tel Philip Kitcher, ont utilisé l'observation selon laquelle nous ne pouvons pas suivre les preuves longues et les vérifier, pour ainsi dire, d'un seul coup, comme raison pour affirmer que les mathématiques sont aussi faillibles ou empiriques que les sciences naturelles. (6) Par ailleurs, même si Wittgenstein trouve irrecevable le point de vue empiriste, il lui arrive d'être tout proche de lui. Comment ne pas qualifier d'empirisme ou de behaviorisme l'attitude selon laquelle la signification d'un concept est donnée par la pratique, par l'action, par son emploi ?

La capacité à suivre une démonstration n'est pas seulement logique, elle est aussi psychologique, et il serait cohérent de reconnaître la pertinence de ce dernier aspect dans la description de l'essence des mathématiques. Or Wittgenstein dit explicitement qu'il ne veut rien savoir de l'incidence mentale sur le mathématique:

> Les processus mentaux, les joies, les dépressions, les instincts des gens dans leur travail, quel que soit leur intérêt sous d'autres rapports, cela ne m'intéresse pas. (7)

(J. Hadamard ne serait pas d'accord. Cf. *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*.)

Ce qui l'intéresse, dans l'essence des mathématiques, ce sont les preuves, les méthodes de démonstration. Or une méthode n'est jamais une fin en soi mais un moyen qui finalement permet de "voir" quelque chose. Les Anciens en étaient conscients: à quoi bon un chemin qui ne mène nulle part ? Dire qu'en mathématiques l'essentiel est la méthode, est aussi absurde que de prendre le chemin comme une fin, alors que ce qui compte, ce sont les faits mathématiques. René Thom, faisant remarquer le caractère secondaire de la preuve, avoue être convaincu que quand une personne a vu une vérité mathématique, il y aura toujours quelqu'un pour la démontrer.

## § 2. — Y A-T-IL UNE EXISTENCE SANS PREUVE ?

Pour Brouwer, à la base des mathématiques il y a l'intuition primordiale, les nombres, et à la base des nombres on trouve la deux-ité, la capacité à distinguer un instant d'un autre, un élément d'un autre. Les mathématiques sont le développement de cette intuition primordiale. Le temps de la conscience joue ici un rôle fondamental. L'intuition des nombres: voilà la base de l'intelligibilité, et il serait par conséquent inutile d'essayer de la définir.

Et quelle est alors la proposition de Wittgenstein ? Dans son ontologie il n'y a pas de place pour une base unique de l'intelligibilité, ni pour les objets dotés de propriétés universelles, ni pour rien d'essentiel d'ailleurs car "le monde est composé de faits". Il n'y a pas d'essence du nombre, ni d'essence des mathématiques. Avec sa manière typique de défaire l'unité de la r,alit,, de la d,couper en petits morceaux qu'il laisse ensuite sans lien entre eux, Wittgenstein, l'émietteur de la réalité, affirme que les classes de nombres entretiennent entre elles une sorte de ressemblance comme celle qui existe entre les membres d'une même famille. Rien n'empêche l'extension du concept de nombre, comme rien n'empêche que le concept ait des limites fixes : tout cela dépend de nous, de la fa‡on dont nous voulons employer les mots. (8)

Les problèmes concernant les nombres seraient des problèmes de grammaire, mais on connaît les difficultés qu'il y a à saisir la signification du mot "grammaire" chez Wittgenstein. Disons qu'on attend d'une grammaire qu'elle soit un algorithme, une série de règles susceptibles d'application mécanique qui permettent de distinguer les énoncés significatifs. Cette application peut continuer à l'infini car l'ensemble des énoncés corrects, dans une langue naturelle, n'a pas, apparemment, de limite supérieure. La grammaire semble être ainsi un modèle de quelque chose, une logique profonde ou, plutôt, selon moi, une sorte de topologie, à spécifier, qui nous permet de former des énoncés grammaticaux et de les reconnaître. Mais cette suggestion semble peu compatible avec la doctrine wittgensteinienne des jeux de langage, lesquels, étant individuellement autonomes, ne reconnaissent pas d'essence commune.

> L'étude des "jeux de langage" c'est l'étude des formes primitives du langage ou des langues primitives. Pour étudier les problèmes du vrai et du faux, de l'accord ou du désaccord d'une proposition avec la réalité, de la nature de l'affirmation, de la déduction, de l'interrogation, nous avons tout avantage à nous référer à ces tournures primitives du langage où les formes de la pensée ne sont pas encore engagées en des processus complexes, aux implications obscures. (9)

Les interprètes de Wittgenstein semblent unanimes à reconnaître que les jeux de langage (I) sont autonomes, (II) sont la source de la clarté d'une expression; (III) qu'il est possible d'apprendre les règles par entraînement et imitation une fois que l'on commence à jouer; et (IV) que les explications sont concrètes, données par des exemples particuliers. Voilà ce que j'avais à l'esprit en affirmant, il y a un instant, que Wittgenstein défait la réalité.

Pour un réaliste, comme pour un intuitionniste, l'existence d'un objet mathématique jouit d'une certaine indépendance par rapport à la preuve. Le réaliste reconnaît une ontologie abstraite, l'existence d'objets et des propriétés en soi, en dehors de nous. L'intuitionniste, je pense à Brouwer, propose l'hypothèse que les êtres mathématiques sont des actes. Or, selon Wittgenstein, quiconque rend l'existence indépendante de la preuve n'a pas de concept clair d'existence. Jusque là l'opinion n'est pas ontologique et elle est même recevable car il arrive souvent aux mathématiciens de manipuler un objet ou une propriété avant de les définir. L'histoire de la discipline en témoigne, un exemple est l'emploi de l'infini avant Cantor. Mais Wittgenstein ne s'arrête pas là : "En réalité, existence est ce que l'on prouve avec ce qu'on appelle "preuve d'existence"". L'existence est absolument indiscernable de sa preuve (nominalisme). (10)

D'après les rationalistes classiques comme Descartes, les êtres physiques ont besoin d'une cause ou raison suffisante pour passer de l'essence à l'existence, mais la situation des êtres mathématiques est différente car là l'essence est indiscernable de l'existence. D'un point de vue mathématique, existe ce qui est possible, c'est-à-dire ce qui n'est pas contradictoire. Mais Wittgenstein, comme les intuitionnistes, voit dans les êtres mathématiques une différence entre l'essence et l'existence ; c'est pourquoi la non-contradiction ne suffit pas : il faut une cause ou raison suffisante pour que le possible s'actualise. Une telle cause est la volonté humaine chez Brouwer, elle est la preuve constructive pour les constructivistes.

Wittgenstein, comme les intuitionnistes (ou constructivistes) ne fait confiance ni au principe du tiers exclu (pour toute proposition p, la proposition [p ou (non-p)] est vraie) ni à la loi de la double négation (la négation d'un énoncé vrai est fausse ; la négation d'un énoncé faux est vraie) en tant que procédures capables de prouver l'existence de quelque chose. Le tiers exclu et la loi de la double négation sont utiles dans la preuve par réduction à l'absurde, mais d'après le constructivisme, ce type de preuve montre que quelque chose est possible mais non pas actuel. C'est pourquoi en arithmétique intuitionniste la disjonction p ou q prend un sens constructif si et seulement si on sait qu'au moins l'un des membres est vrai, et que l'on peut dire lequel.

L'exigence de construction effective laisse sans signification cognitive des énoncés du type : " il y a sept 7 consécutifs dans l'expansion décimale de $\pi$ " car nous ne savons pas si l'énoncé est vrai ou faux. Il peut être vrai dans certains modèles, et faux dans d'autres. (Rappelons que les "chasseurs de décimales de $\pi$ " ont utilisé des méthodes différentes bien que complémentaires telles que la cyclométrie (Archimède) ou la trigonométrie (F. Viète)).

La même situation se présente (nous ne connaissons pas la valeur de vérité) concernant les énoncés qui font appel à l'infini (ensemble infini, tendre à l'infini, etc.) car, dans la pratique, seul le fini a un sens clair. Dans la pratique et dans le meilleur des cas, seul l'infini potentiel aurait un sens, celui qui évoque la possibilité d'aller au-delà d'une limite donnée, dans les termes d'Aristote, "ce en dehors de quoi il y a toujours quelque chose". Par exemple, tout nombre premier en admet un autre qui le suit et nous disons alors que la série des nombres premiers est illimitée. Par contre, l'infini actuel de Cantor, conçu comme une prise de conscience simultanée de tous les éléments d'un ensemble infini tel que l'ensemble des entiers naturels, serait inintelligible.

Les physicalistes peuvent prolonger cette réserve sur l'utilisation du mot "infini" en faisant remarquer que l'infini n'implique rien d'autre que notre capacité, psychologique et biologique, à itérer un processus, et que cette capacité, ayant comme siège un cerveau fini, est forcément limitée. Ainsi, rien dans notre expérience, nécessairement finie, n'équivaut à l'infini actuel. On sait que pendant longtemps l'infini actuel a été condamné en mathématiques et on constate que sa vie, du point de vue de la compréhension conceptuelle, continue à être difficile. Mais il faut se garder de présupposer, sans examen critique, la finitude du cerveau. Un argument attribuable à René Thom peut s'exprimer ainsi : le cerveau est composé d'un nombre élevé de neurones et chaque neurone est composé d'un nombre considérable de molécules. Si les molécules vibrent, on doit prendre en considération les paramètres de position de chacune d'entre elles. On obtient une dimension énorme, et si l'on admet que l'espace dans lequel la molécule vibre est continu, alors on récolte des paramètres continus. On n'échappe pas au continu. (11)

Selon Wittgenstein, le principe du tiers exclu se comporte comme un tableau ou une image que nous essayons d'imposer à la réalité, mais il laisse entendre que rien d'essentiel ne nous oblige à faire cela et que seul un dieu pourrait se payer le luxe d'exclure une troisième possibilité. (12) Mais le rejet du tiers exclu par Wittgenstein n'est pas catégorique dans tous les contextes. En effet, d'après son conventionnalisme, si un mathématicien choisit d'utiliser l'expression "p ou non-p" comme un énoncé nécessairement vrai, alors il aurait le droit d'employer le tiers exclu comme règle d'inférence. Ensuite, Wittgenstein et Brouwer considèrent que les mathématiques sont une activité plutôt qu'une théorie. (13)

Mais la similarité de pensée entre ces deux hommes s'arrête là car, contrairement à l'avis de Wittgenstein, Brouwer reconnaît l'existence d'objets abstraits qui seraient des constructions mentales indépendantes du langage ; il ne pense pas que le langage soit essentiel aux mathématiques. Les intuitions mathématiques sont des actes qui peuvent ou non être exprimés verbalement. (14) Dans ses notes autobiographiques, Einstein révèle qu'il ne fait aucun doute que la pensée progresse, en grande partie, sans le concours des symboles ou des mots et qu'elle s'achemine, bien que non exclusivement, de façon inconsciente. D'un autre côté, nous comprenons que le philosophe, pour qui le langage naturel est indispensable, succombe à la tentation de généraliser et tire la conclusion — erronée — qu'il n'y a pas de pensée sans langage.

## § 3. — LES MATHÉMATIQUES SONT-ELLES ESSENTIELLEMENT ALGORITHMIQUES ?

Selon Wittgenstein, le sens d'un concept est son emploi et il est donné dans la proposition :

> La signification n'est-elle réellement que l'emploi du mot ? N'est-elle pas la façon dont cet usage intervient dans la vie ? ... Le sens de la proposition, c'est le rôle qu'elle joue dans le calcul. Quelque chose n'est une proposition que dans un langage. Comprendre une proposition signifie comprendre un langage. (15)

L'unité de signification n'est plus le mot ni l'énoncé, mais un tout plus vaste, le langage — holisme alors ? Puisque le langage est structuré par des règles, Wittgenstein s'est enfermé dans une conception algorithmique des mathématiques, ce qui est clair aussi par son insistance sur le (prétendu) caractère essentiel du calcul et de la preuve.

Or les théorèmes d'incomplétude de Gödel montrent que la pensée n'est pas algorithmique. Le premier théorème peut s'énoncer de la façon suivante : (I) si l'arithmétique formelle n'est pas contradictoire, il existe une formule F de l'arithmétique formelle telle que ni F ni non-F ne sont démontrables à l'intérieur de cette théorie-là. Mais c'est surtout ce que l'on peut appeler le deuxième théorème d'incomplétude de Gödel qui montre de façon plus nette le caractère non-algorithmique de la pensée: (II) Si l'arithmétique formelle n'est pas contradictoire, sa non-contradiction n'est pas démontrable par les méthodes formalisables dans l'arithmétique formelle. (Rappelons que ce résultat a mis fin à l'espoir du programme formaliste de Hilbert, c'est-à-dire à l'idée selon laquelle il est possible d'axiomatiser complètement les mathématiques). Il suit de ces théorèmes que nous sommes capables de *voir* une vérité non obtenue par une suite de procédures en nombre fini portant sur un nombre fini de données. Un système logique, laissé à lui-même, est incapable d'assurer sa propre description. Le vrai n'équivaut pas au démontrable. Il n'est sans doute pas inutile d'ajouter que la communauté mathématique considère que ce résultat est définitif.

Ce thème est intéressant et difficile,(16) mais on voit mal comment on pourrait l'aborder sans étudier la dynamique mentale. Or Wittgenstein a déclaré que les processus mentaux ne l'intéressent pas. Gödel avait plus d'une raison de faire remarquer que Wittgenstein n'avait pas compris ses travaux et que les derniers écrits de son compatriote signifient une régression, ou, dans les termes de S. Hawking, une déchéance par rapport à l'ensemble de la tradition philosophique consacrée à l'étude de problèmes plutôt qu'à l'analyse linguistique.

Voici, encapsulée, une autre vision de la pensée mathématique. Alain Connes(17) distingue trois niveaux de la pensée mathématique. Le premier est défini par la faculté de calculer, d'appliquer une recette toute faite, ce qui existe déjà dans les ordinateurs. Il n'y a ni compréhension de ce qui est fait ni conscience de sa valeur. Le deuxième niveau, plus sophistiqué, exige une compréhension du problème traité qui détermine une stratégie en vue d'un but. Pour cela il faut comprendre la signification de ce que l'on fait. Les opérations y sont hiérarchisées. Le choix d'une stratégie exprime un certain degré de liberté de l'esprit, mais à aucun moment on n'observe de distance entre le fonctionnement du cerveau et l'objet auquel il s'applique. Enfin, tout ce qui est nécessaire pour la résolution du problème existe déjà. À la différence du premier niveau, on ne voit pas ici comment on pourrait programmer une machine capable d'évaluer ce qu'elle fait. Connes est d'avis que chez l'homme le sentiment de frustration, la tension ou le plaisir accomplissent la fonction évaluative. Il faudrait s'arranger pour introduire dans le programme une fonction similaire aux sentiments humains susceptible d'orienter et d'évaluer la stratégie de la machine pensante. Autrement, on ne voit pas pourquoi la machine chercherait à se perfectionner.

La situation du troisième niveau, le plus élevé, est différente : il y a découverte de nouvelles zones de la réalité mathématique; de nouveaux problèmes surgissent et de nouvelles voies de résolution se font jour. Le mathématicien croit y voir une certaine dissociation entre l'activité cérébrale et la pensée. On a l'impression que l'esprit s'occupe d'une tâche différente pendant que de façon interne, subconsciente, le problème suit son cours dans le cerveau. C'est comme si l'esprit, dans la recherche de signification, se laissait guider par la cohérence de la réalité mathématique indépendante du cerveau. Cela me fait penser que la conscience agit comme un démiurge qui modèle le cerveau en s'inspirant de l'ordre du monde intelligible. Mais toutes ces considérations échappe à l'approche wittgensteinienne car la pensée et le mental en sont explicitement exclus : "Les propositions mathématiques n'expriment aucune pensée". (*Tractatus* , 6.21).

## §. — Y A-T-IL UNE NÉCESSITÉ DERRIÈRE LES RÈGLES ?

En ce qui concerne la théorie de la connaissance, la nécessité apparaît clairement en deux contextes, en mathématiques et en physique. En physique, le nécessité prend la forme de la transmission d'une énergie, d'une force ou d'une information. C'est ce que le rapport causal essaie de décrire. En mathématiques, la nécessité apparaît sous la forme de la déduction, et les mathématiques peuvent être conçues comme le domaine de la déduction pure. En principe, si les axiomes ont un sens, tout a un sens parce qu'il est transmis dans la déduction. Il se trouve que l'une des raisons principales pour lesquelles un mathématicien, quand il réfléchit sur ce qu'il fait, peut aboutir au platonisme, est la nécessité avec laquelle les faits mathématiques s'imposent à lui. On se laisse guider par les rails de la nécessité. Le statut de cette notion est central à la conception des mathématiques, et l'idée qu'on entretient à son égard détermine une philosophie.

Dans le *Tractatus*, la nécessité est assignée à la logique, mais dans la *Grammaire Philosophique* (et ensuite dans les *Recherches Philosophiques*), la nécessité disparaît au profit de quelques idées qui par certains côtés — mais quelques-uns seulement, car Wittgenstein est un penseur indépendant — peuvent être apparentées au conventionnalisme et au pragmatisme. Wittgenstein subordonne la nécessité au choix d'une règle ou au choix d'une grammaire, d'un jeu de langage. Ces règles seraient identiques à leur emploi, ce qui veut dire qu'elles ne sont pas une manifestation d'une réalité en soi. "On ne peut pas creuser derrière les règles, car il n'y a rien derrière elles".(18)

Deux points de repère pour bien saisir la spécificité de l'idée de Wittgenstein sur la nécessité sont encore le pragmatisme et le réalisme. Voyons d'abord ce que propose Quine. Dans la mesure où les mathématiques contribuent à passer logiquement d'un énoncé d'observation à un autre, elles partagent le contenu empirique de ces énoncés, et l'apparence de nécessité n'est que le reflet de notre prudence devant la possibilité indésirable de modifier trop profondément le champ cognitif.

Remarquez qu'on ne retient ici des mathématiques que leur rôle logique, elles doivent "sauver les phénomènes", i.e. en rendre compte. Le principe directeur, selon Quine, est la maxime de la mutilation minimale : "tâchez de perturber aussi peu que possible la totalité de la science, toutes choses étant égales par ailleurs". (19) Attendu que les effets des vérités mathématiques sont d'une grande portée et dans beaucoup de domaines, on comprend aisément que les vérités mathématiques soient particulièrement bien protégées : voilà tout ce que l'on doit voir, selon Quine, dans la nécessité mathématique. Mais Wittgenstein, contrairement aux néopositivistes, ne se donne pas comme finalité intouchable le progrès de la connaissance ; les sciences seraient-elles des jeux de langage parmi d'autres ?

D'après le réalisme, il n'y a qu'une nécessité, la nécessité naturelle, qui se manifeste sous la forme du rapport causal (la transmission d'une force en physique), ou sous la forme de la transmission du sens en mathématiques. Il existe un champ cognitif hiérarchiquement organisé. Le principe de l'organisation est la nécessité. L'histoire de la connaissance, et en particulier le développement de la physique, est l'histoire de la recherche de nécessité. Si l'on cherche des théories de plus en plus abstraites, profondes et unifiées, c'est pour lier les phénomènes à une nécessité. Cela permet de placer en tête la métaphysique conçue comme la science de la nécessité pure, ensuite les mathématiques, la mécanique rationnelle suivie par les autres disciplines de la physique, et ainsi de suite dans une échelle telle que celle proposée par A. Comte, sauf qu'ici la métaphysique est placée en tête. L'idée de base est qu'il existe un seul monde doté d'une seule nécessité, rationalité ou signification (selon moi, métaphysiquement, ces trois concepts ne font qu'un seul) saisissable finalement par un seul grand système scientifico-métaphysique. (20) Toute conception différente contiendra des composants sceptiques, et celle de Wittgenstein est une illustration de cette affirmation. (21)

La vision wittgensteinienne de la nécessité et de la signification selon laquelle celles-ci dépendent des règles choisies, d'un calcul ou d'un jeu de langage, est un argument conventionnaliste contre l'unité du monde et de la raison. Contrairement à ce qui avait été reconnu dans le *Tractatus*, on trouve dans les *Recherches Philosophiques* qu'il n'y a rien de commun aux diverses formes de langage, que chaque jeu de langage est autonome, l'incorporation d'une forme de vie. En mathématiques comme ailleurs, "ce qui doit être accepté, le donné, est, ainsi pourrait-on dire, les formes de vie". (22)

D'aucuns, par exemple M. Dummett, (23) ont cru voir dans l'insistance de Wittgenstein sur le choix des règles, un conventionnalisme radical. Cette interprétation n'est pas impossible, mais, à ma connaissance, Wittgenstein ne dit pas explicitement que nous choisissons les règles arbitrairement. Puisque la notion-clé est celle de forme de vie, il faudrait faire la liste des composants des formes de vie. Comment ne pas y inclure les contraintes biologiques, et comment ne pas voir en elles des éléments naturels et universels qui expriment, à leur tour, des contraintes mathématiques et physiques ?

Seule une description adéquate de l'extension du concept de forme de vie pourrait nous éclairer sur le degré du conventionnalisme wittgensteinien, mais le philosophe autrichien dirait sans doute que la tâche serait sans fin puisque, pour l'accomplir, on doit faire appel à des formes de vie. On risque de parcourir un cercle qui aboutit à une forme de scepticisme typiquement wittgensteinien.

## § 5. — À QUOI BON UNE MATHÉMATIQUE SANS MÉTAPHYSIQUE ?

La série des jeux de langage n'est pas organisée hiérarchiquement, leurs régularités ne sont pas subordonnées à une régularité supérieure. Il n'est donc pas étonnant que Wittgenstein en arrive à couper la philosophie (pour autant qu'il lui laisse une chance d'exister) des mathématiques,(24) et qu'ensuite il coupe les mathématiques de la métamathématique, l'une des raisons pour lesquelles il ne semble pas avoir compris, ou ne pas avoir voulu comprendre, la pertinence des travaux de Gödel ou de Tarski.(25) Le *Tractatus* niait la possibilité d'une métamathématique et nous savons qu'une telle attitude est erronée. La méta-mathématique touche les mathématiques, et dans la mesure où la métamathématique est une philosophie, on ne peut pas dire, comme Wittgenstein, que la philosophie laisse tout tel quel.

Une option différente consiste à dire que les mathématiques, comme la philosophie, sont des idées, des êtres vivants qui s'unissent pour engendrer de nouvelles idées qui, à leur tour, se développent et meurent, laissant une descendance. Des générations ennemies peuvent s'entretuer, alors que quelques-uns de leurs membres mélangent leur sang. L'histoire des mathématiques ressemble à l'histoire humaine. Autrement on ne comprendrait pas que des idées philosophiques puissent précéder certaines idées mathématiques, ou que des idées en physique puissent contribuer au progrès des mathématiques, et inversement.

Imaginez les mathématiques anciennes sans leurs racines mythiques ou poétiques — elles deviennent une curiosité sans lendemain. Et comment comprendre la naissance du calcul infinitésimal en dehors de son contexte physique et métaphysique? Plus près de nous, les travaux de Gödel acquièrent une nouvelle dimension quand on est informé de son optimisme rationaliste, de son espoir de voir la métaphysique devenue science exacte. Albert Lautman l'a dit admirablement :

> En voulant supprimer les liaisons entre la pensée et le réel, comme en refusant de donner à la science la valeur d'une expérience spirituelle, on risque de n'avoir qu'une ombre de science.

Il faudrait admettre que les faits mathématiques existent dans la nature pré-humaine avant d'exister de fa‡on consciente en tant que connaissance. Les mathématiques, comme science, émergent d'un cerveau soumis à des contraintes physiques et biologiques. Imaginons donc que les entités mathématiques sont faites d'une certaine matière dont les propriétés sont à spécifier. On peut penser ici au référent du concept de point matériel de la mécanique.

Si on conçoit, par contre, les êtres mathématiques comme des entités absolument trans-physiques, on ne peut pas rendre compte du fait que les mathématiques jouent un rôle constitutif (elles ne sont pas juste une application externe à un contenu qui préexiste) dans la théorie de la physique mathématique. Si cette théorie est littéralement vraie, et si elle contient une partie mathématique inéliminable, il s'ensuit que les entités mathématiques présupposées sont réelles. La vérité implique l'existence. Les domaines de la physique bien mathématisés tels que la gravitation et l'électromagnétisme suggèrent que le monde platonicien et le monde sensible ne font qu'un (monisme), et l'affirmation selon laquelle la constitution mathématique des lois dans ces domaines est le résultat du hasard, ou d'une harmonie préétablie, signifie qu'on renonce à comprendre.

Wittgenstein fait un long chemin en sens inverse du réalisme métaphysique car les règles ne déterminent rien. Nous sommes censés choisir les règles et leurs applications. L'objectivité ne serait autre chose que l'accord de la communauté scientifique qui partage un jeu de langage et une forme de vie.(26) Difficile, dans ce cas, de rendre justice au progrès de la connaissance, de décrire convenablement l'enchaînement des théorèmes et des découvertes pendant de nombreux siècles. Le réaliste s'efforce de proposer, par contre, une vision unifiée de la connaissance grâce à l'unité de la nécessité.

L'histoire des mathématiques enseigne que la solution de nombreux problèmes n'est possible que grâce au rapprochement de domaines mathématiques qui restaient mutuellement indifférents. Un exemple récent est la solution de la conjecture de Fermat à laquelle j'ai fait allusion : elle a été rendue possible parce que les travaux de géométrie algébrique avaient réussi à lier la conjecture à des domaines bien explorés des mathématiques. L'histoire d'un tel énoncé est paradigmatique, et sa description détaillée serait d'une grande valeur pour saisir l'essence des mathématiques. Il y a fort à parier que les points de vue non-réalistes, comme celui de Wittgenstein qui défont l'unité et la nécessité de la réalité, auraient du mal à rendre compte d'une pareille histoire.

## CONCLUSION

Comment ne pas rabaisser le monde mathématique et l'activité mentale qui arrache des faits à l'inconscient, si on ne considère que "les livres de compte des mathématiciens" ? (27) Quand on lit Wittgenstein, on retire l'impression que sa vision ne peut ni être celle d'un mathématicien, ni être applicable aisément à la fa‡on dont les mathématiques sont faites, ou à la fa‡on dont elles constituent une partie indispensable des théories les plus développées. Il existe des théorèmes profonds dont les conséquences se font sentir loin. Les nombres complexes sont des composants essentiels de la mécanique quantique, et les notions de singularité et de bifurcation sont fondamentales pour la physique et la biologie théorique, etc. On sait l'importance accordée à la mesure et aux lois quantitatives dans la science moderne : comment comprendre ce fait sans réduire les phénomènes, partiellement, à la géométrie de l'espace-temps ?

Wittgenstein touche les mathématiques par leur côté le moins intéressant, par le bas, par leurs aspects calculatoires. On ne voit pas comment une telle approche peut représenter une contribution à la philosophie des mathématiques. (Le géomètre a moins de chances de s'égarer sur la nature des mathématiques que le logicien car la géométrie, science fondamentale, est à la base de la mécanique, des autres sciences physiques, et sans doute aussi d'une bonne partie du langage usuel). Le plus grave est que les idées de Wittgenstein sur les mathématiques sont en grande partie impliquées par sa philosophie générale (par exemple, les notions de sens, de compréhension, de jeu de langage, de forme de vie) et les réserves émises sur sa philosophie des mathématiques se répercutent, comme par "contraposition", sur sa pensée en général.

## NOTES ET RÉFÉRENCES

1. L. Wittgenstein, *Grammaire Philosophique*, trad. Gallimard, Paris, 1980, p. 464.
2. *Ibid.*, p. 327.
3. ——— *Remarks on the foundations of mathematics*, New York, 1956, I, 32.
4. ——— *Grammaire Philosophique*, *op. cit.*, p. 368.
5. Cf. *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, textes réunis par Jen Largeault, Vrin, 1992, p. 257.
6. Philip Kitcher, *On the nature of mathematical knowledge*, Oxford University Press, 1983.
7. L. Wittgenstein, *Grammaire Philosophique, op. cit.*, p. 301.
8. ——— *Philosophical Investigations*, The Macmillan Company, New York, 3e édition, 1968, pp. 32-33.
9. ——— *Le Cahier bleu et le cahier brun*, trad. Gallimard, 1965, pp. 47-48.
10. ——— *Grammaire Philosophique, op. cit.*, p. 380.
11. R. Thom, *Prédire n'est pas expliquer*, Eshel, 1991, p. 67

12. L. Wittgenstein, *Philosophical Investigations, op. cit.*, p. 112.
13. *Ibid.*, p. 227.
14. Sur les rapports entre les idées de Wittgenstein et le constructivisme, on peut lire l'article de M. Dummett, "Wittgenstein's philosophy of mathematics", dans The Philosophical Review, Vol. LXVIII, 1959, pp. 324-348.
15. L. Wittgenstein, *Grammaire Philosophique, op. cit.*, pp.19, 30.
16. Voir, p.ex., R. Penrose, *The Emperor's New Mind. Concerning computers, minds, and the laws of physics*, Oxford University Press, 1989, ch. 2 et 10.
17. Cf. J. P. Changeux, A. Connes, *Matière à pensée*, O. Jacob, Paris, 1989, pp. 121-125.
18. L. Wittgenstein, *Grammaire Philosophique, op. cit.*, p. 248.
19. W.V.O. Quine, *Quiddities*, Harvard University Press, 1987, article "Necessity". Sur cette notion, on peut lire aussi l'article de H. Putnam "Analiticity and apriority: beyond Wittgenstein and Quine" dans *Realism and Reason*, Cambridge University Press, 1983.
20. Ce réalisme est développé (entre autres) dans mon livre *Théorie de l'intelligibilité*, Éditions Universitaires du Sud, 1994.
21. Sur le scepticisme de Wittgenstein on peut lire, entre autres, le texte de S. Kripke, *Wittgenstein. On rules and private language*, Harvard University Press, 1982.
22. L. Wittgenstein, *The Philosophical Investigations, op. cit.*, p. 226.
23. Cf. M. Dummett, "Wittgenstein's philosophy of mathematics", *op. cit.*
24. L. Wittgenstein, *The Philosophical Investigations*, *op. cit.*, p. 49.
25. Sur les rapports entre Wittgenstein et Gödel, et en particulier sur le jugement porté par Gödel sur Wittgenstein, on peut lire : Hao Wang, *Reflections on Kurt Gödel*, Massachusetts Institute of Technology, 1987.
26. L. Wittgenstein, *The Philosophical Investigations, op. cit.*, p. 88.
27. ——— *Grammaire Philosophique, op. cit.*, p. 301.

* * *