Exercices de recherche opérationnelle

1 Programmes linéaires

Exercice 1

$$\left\{\begin{array}{rcl} \max(x+y) & = & ? \\ x+2y & \leqslant & 10 \\ 2x+y & \leqslant & 11 \\ x, y & \geqslant & 0 \end{array}\right.$$

*1) Représenter graphiquement le domaine des contraintes de ce **PL**.*

2) Trouver les sommets de ce domaine.

3) Déterminer un sommet optimal.

Exercice 2

$$\left\{\begin{array}{rcl} \max(x+2y) & = & ? \\ x-y & \leqslant & 0 \\ x+y & \geqslant & 2 \\ x, y & \geqslant & 0 \end{array}\right.$$

*1) Représenter graphiquement le domaine des contraintes D de ce **PL**..*

2) Vérifier que pour tout réel $t \geqslant 1$, $(t, t) \in D$.

3) Calculer $z(t, t)$ pour $t \geqslant 1$, puis $\lim\limits_{t \to +\infty} z(t, t)$.

*4) Le **PL** possède-t'il une solution ?*

Exercice 3

$$\left\{\begin{array}{rcl} \min(x) & = & ? \\ x-5y & \leqslant & 4 \\ x-y & \geqslant & 0 \\ x+y & \geqslant & 2 \\ x & \leqslant & 6 \\ x, y & \geqslant & 0 \end{array}\right.$$

*1) Représenter graphiquement le domaine des contraintes de ce **PL**.*

2) Trouver les sommets de ce domaine.

3) Déterminer un sommet optimal.

Exercice 4

$$\begin{cases} \max(20x+28y) & = & ? \\ -x+y & \leqslant & 2 \\ -x+4y & \geqslant & 2 \\ 2x+y & \geqslant & 5 \\ 5x+7y & \leqslant & 44 \\ x, y & \geqslant & 0 \end{cases}$$

*1) Représenter graphiquement le domaine des contraintes de ce **PL**.*

2) Trouver les sommets de ce domaine.

3) Déterminer un sommet optimal.

Exercice 5

$$\begin{cases} \max(-x+y) & = & ? \\ 2x-y & \geqslant & 2 \\ x-2y & \leqslant & 2 \\ x+y & \leqslant & 5 \\ x, y & \geqslant & 0 \end{cases}$$

*1) Représenter graphiquement le domaine des contraintes de ce **PL**.*

2) Trouver les sommets de ce domaine.

3) Déterminer un sommet optimal.

Exercice 6

$$\begin{cases} \max(2x-y) & = & ? \\ x-2y & \leqslant & 2 \\ x+y & \leqslant & 6 \\ y & \leqslant & 5 \\ x, y & \geqslant & 0 \end{cases}$$

*1) Représenter graphiquement le domaine des contraintes de ce **PL**.*

2) Trouver les sommets de ce domaine.

3) Déterminer un sommet optimal.

*4) Mettre le **PL** sous forme standard.*

Exercice 7

Une entreprise fabrique et vend des robes et des blouses de profits respectifs 8 €et 6 €. La dessin d'une robe requiert en moyenne 4 heures tandis qu'une blouse requiert environ 2 heures. Un tailleur prend 2 heures à faire une robe et 4 heures à faire une blouse. L'entreprise dispose chaque jour de 60 heures de temps pour dessiner les vêtements et de 48 heures de temps pour coudre ces vêtements. Combien de robes et de blouses l'entreprise doit-elle produire pour que son profit soit maximal ?

Exercice 8

Un agriculteur possède 90 *hectares dans lesquelles il peut planter soit du blé soit du maïs. Le blé nécessite* 16 *litres d'engrais et* 14 *litres d'insecticide par hectare. Le maïs nécessite* 8 *litres d'engrais et* 35 *litres d'insecticide par hectare.*
Le prix de vente au kilo du blé est de 1,63 *€et celui du maïs de* 0,87 *€. Sachant qu'un hectare fournit une tonne de blé et* 1,7 *tonnes de maïs et que l'agriculteur possède deux cuves : un de* 1336 *litres d'engrais et une de* 1715 *litres d'insecticide, de quoi devra se composer sa plantation pour maximiser ses revenus ?*

Exercice 9

Une usine fabrique deux produits P_1 et P_2. Chaque produit passe dans 3 ateliers A, B et C. La consommation d'énergie pour chaque produit dans chaque atelier est synthétisée dans le tableau suivant :

Consommation	P_1	P_2
Atelier A	1 *TW/h*	2 *TW/h*
Atelier B	1 *TW/h*	1 *TW/h*
Atelier C	1 *TW/h*	0 *TW/h*

Pour des raisons technique le nombre de TW/h est limité pour chaque atelier. Au maximum 6 *pour l'atelier A,* 4 *pour le B et* 3 *pour le C. Sachant que P_1 est deux fois plus rentable que P_2 quelle est la meilleur stratégie de production ?*

2 Programmes linéaire de première espèce

Exercice 10

$$\left\{\begin{array}{rcl} \max(2x_1 + x_2) & = & ? \\ 2x_1 - x_2 & \leqslant & 1 \\ -x_1 + x_2 & \leqslant & 1 \\ x_1, x_2 & \geqslant & 0 \end{array}\right.$$

1) *Justifier que ce **PL** est de première espèce.*
2) *Donner les variables d'écart.*
3) *Construire le tableau standard associé.*
4) *Résoudre le **PL** par la méthode du simplexe.*

Exercice 11

$$\begin{cases} \max(x_1 + x_2 + x_3) & = & ? \\ x_1 + x_2 & \leqslant & 15 \\ x_1 + x_3 & \leqslant & 10 \\ x_2 + x_3 & \leqslant & 15 \\ x_1, x_2, x_3 & \geqslant & 0 \end{cases}$$

1) *Justifier que ce **PL** est de première espèce.*
2) *Donner les variables d'écart.*
3) *Construire le tableau standard associé.*
4) *Résoudre le **PL** par la méthode du simplexe.*

Exercice 12

$$\begin{cases} \max(x_1 + 2x_2 - x_3) & = & ? \\ 8x_1 - x_2 + 7x_3 & \leqslant & 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 & \leqslant & 1 \\ x_1, x_2, x_3 & \geqslant & 0 \end{cases}$$

1) *Justifier que ce **PL** est de première espèce.*
2) *Donner les variables d'écart.*
3) *Construire le tableau standard associé.*
4) *Résoudre le **PL** par la méthode du simplexe.*

Exercice 13

$$\begin{cases} \max(x_1 + 3x_2) & = & ? \\ x_1 + x_2 & \leqslant & 7 \\ x_2 & \leqslant & 5 \\ 2x_1 - 5x_2 & \leqslant & 0 \\ -5x_1 + 2x_2 & \leqslant & 0 \\ x_1, x_2 & \geqslant & 0 \end{cases}$$

1) *Justifier que ce **PL** est de première espèce.*
2) *Donner les variables d'écart.*
3) *Construire le tableau standard associé.*
4) *Résoudre le **PL** par la méthode du simplexe.*

Exercice 14

$$\begin{cases} \max(-x_1 - x_2 + x_3) & = & ? \\ -2x_1 - x_2 + x_3 & \leqslant & 2 \\ x_1 & \leqslant & 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 & \leqslant & 0 \\ x_1, x_2, x_3 & \geqslant & 0 \end{cases}$$

1) *Justifier que ce **PL** est de première espèce.*
2) *Donner les variables d'écart.*
3) *Construire le tableau standard associé.*
4) *Résoudre le **PL** par la méthode du simplexe.*

Exercice 15

$$\begin{cases} \max(5x_1 + 2x_2 + 3x_3) & = & ? \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 & \leqslant & 12 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 & \leqslant & 4 \\ x_1 + x_3 & \leqslant & 7 \\ x_1, x_2, x_3 & \geqslant & 0 \end{cases}$$

1) *Justifier que ce **PL** est de première espèce.*
2) *Donner les variables d'écart.*
3) *Construire le tableau standard associé.*
4) *Résoudre le **PL** par la méthode du simplexe.*

Exercice 16

*Résoudre le **PL** de première espèce suivant, en discutant selon la valeur du paramètre réel α :*

$$\begin{cases} \max(\frac{1}{2}x + \alpha y) & = & ? \\ x & \leqslant & 30 \\ x + y & \leqslant & 20 \\ x, y & \geqslant & 0 \end{cases}$$

Exercice 17

*Résoudre le **PL** de première espèce suivant, en discutant selon la valeur du paramètre réel α :*

$$\begin{cases} \max(x + \alpha y) & = & ? \\ 2x + y & \leqslant & 10 \\ x + 2y & \leqslant & 8 \\ x, y & \geqslant & 0 \end{cases}$$

Exercice 18

*Résoudre le **PL** de première espèce suivant, en discutant selon la valeur du paramètre réel α :*

$$\begin{cases} \max((2+\alpha)x + \frac{3}{2}y) & = & ? \\ x & \leqslant & 400 \\ y & \leqslant & 700 \\ x+y & \leqslant & 800 \\ 2x+y & \leqslant & 1000 \\ x,y & \geqslant & 0 \end{cases}$$

3 Programmes linéaire de seconde espèce

Exercice 19

$$\begin{cases} \max(2x_1+x_2) & & \\ 3x_1+5x_2 & \leqslant & 16 \\ 4x_1-3x_2 & \leqslant & 26 \\ x_1+x_2 & \geqslant & 13 \\ x_1,x_2 & \geqslant & 0 \end{cases}$$

1) *Justifier que ce **PL** est de seconde espèce.*
2) *Construire le tableau artificiel.*
3) *Résoudre le **PL** par la méthode des deux phases.*

Exercice 20

$$\begin{cases} \max(7x_1+2x_2+3x_3) & & \\ x_1+x_2+x_3 & \leqslant & 15 \\ 4x_1-x_2+3x_3 & = & 34 \\ x_1,x_2,x_3 & \geqslant & 0 \end{cases}$$

1) *Justifier que ce **PL** est de seconde espèce.*
2) *Construire le tableau artificiel.*
3) *Résoudre le **PL** par la méthode des deux phases.*

Exercice 21

$$\left\{\begin{array}{rcl} \max(x_1+3x_2) & & \\ x_1+5x_2 & \leqslant & 34 \\ 5x_1+2x_2 & \leqslant & 16 \\ x_1+x_2 & \geqslant & 4 \\ x_1, x_2 & \geqslant & 0 \end{array}\right.$$

1) *Justifier que ce **PL** est de seconde espèce.*
2) *Construire le tableau artificiel.*
3) *Résoudre le **PL** par la méthode des deux phases.*

Exercice 22

$$\left\{\begin{array}{lcccccl} \max(& x_1 & + & x_2 &) & & \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leqslant & 24 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & \leqslant & 133 \\ & 6x_1 & + & 4x_2 & \geqslant & 45 \\ & x_1 & & & \geqslant & 5 \\ & x_1 & , & x_2 & \geqslant & 0 \end{array}\right.$$

1) *Justifier que ce **PL** est de seconde espèce.*
2) *Construire le tableau artificiel.*
3) *Résoudre le **PL** par la méthode des deux phases.*

Exercice 23

$$\left\{\begin{array}{rcl} \max(x_1+x_2+x_3) & & \\ x_1+2x_2+3x_3 & \leqslant & 24 \\ 2x_1+3x_2+3x_3 & \leqslant & 45 \\ x_1+2x_2+x_3 & \geqslant & 25 \\ x_1, x_2, x_3 & \geqslant & 0 \end{array}\right.$$

1) *Justifier que ce **PL** est de seconde espèce.*
2) *Construire le tableau artificiel.*
3) *Résoudre le **PL** par la méthode des deux phases.*

Exercice 24

$$\left\{\begin{array}{rcl} \max(4x_1+2x_2+x_3) & & \\ x_1+x_2+x_3 & \leqslant & 14 \\ x_1+3x_2+2x_3 & \geqslant & 20 \\ 3x_1-x_2-2x_3 & = & 51 \\ x_1, x_2, x_3 & \geqslant & 0 \end{array}\right.$$

1) *Justifier que ce **PL** est de seconde espèce.*
2) *Construire le tableau artificiel.*
3) *Résoudre le **PL** par la méthode des deux phases.*

Exercice 25

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \max(3x & + & 2y & + & 2z &) & \\ x & - & y & - & 2z & \leqslant & 12 \\ 2x & - & 3y & - & 3z & \leqslant & 30 \\ x & + & y & + & 2z & \geqslant & 50 \\ x & , & y & , & z & \geqslant & 0 \end{array}\right.$$

1) *Justifier que ce **PL** est de seconde espèce.*
2) *Construire le tableau artificiel.*
3) *Résoudre le **PL** par la méthode des deux phases.*

Exercice 26

$$\left\{\begin{array}{lrcrcr} \max(& x_1 & + & x_2 &) & \\ & x_1 & + & 3x_2 & \leqslant & 20 \\ & 2x_1 & + & 5x_2 & \leqslant & 60 \\ & 5x_1 & + & 3x_2 & \geqslant & 45 \\ & x_1 & , & x_2 & \geqslant & 0 \end{array}\right.$$

1) *Justifier que ce **PL** est de seconde espèce.*
2) *Construire le tableau artificiel.*
3) *Résoudre le **PL** par la méthode des deux phases.*

4 Programmes linéaire en nombres entiers

Exercice 27

*Résoudre le **PLNE** suivant par la méthode **BB**.*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \max(x_1+x_2) & = & ? \\ 17x_1+2x_2 & \leqslant & 133 \\ 3x_1+5x_2 & \leqslant & 216 \\ x_1, x_2 & \geqslant & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 28

*Résoudre le **PLNE** suivant par la méthode **BB**.*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \max(x_1+x_2) & = & ? \\ 3x_1+17x_2 & \leqslant & 192 \\ 7x_1+x_2 & \leqslant & 101 \\ x_1, x_2 & \geqslant & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 29

*Résoudre le **PLNE** suivant par la méthode **BB**.*

$$\begin{cases} \max(22x_1 + 74x_2) & = & ? \\ 18x_1 + 19x_2 & \leqslant & 151 \\ x_1 + 8x_2 & \leqslant & 131 \\ x_1, x_2 & \geqslant & 0 \end{cases}$$

Exercice 30

*Résoudre le **PLNE** suivant par la méthode **BB**.*

$$\begin{cases} \max(76x_1 + 78x_2) & = & ? \\ 2x_1 + 13x_2 & \leqslant & 112 \\ 14x_1 + 3x_2 & \leqslant & 119 \\ x_1, x_2 & \geqslant & 0 \end{cases}$$

Exercice 31

*Résoudre le **PLNE** suivant par la méthode **BB**.*

$$\begin{cases} \max(87x_1 + x_2) & = & ? \\ x_1 + 11x_2 & \leqslant & 208 \\ 13x_1 + 7x_2 & \leqslant & 189 \\ 3x_1 + 18x_2 & \leqslant & 155 \\ x_1, x_2 & \geqslant & 0 \end{cases}$$

Exercice 32

*Résoudre le **PLNE** suivant par la méthode **BB**.*

$$\begin{cases} \max(53x_1 + 88x_2) & = & ? \\ 2x_1 + 12x_2 & \leqslant & 224 \\ 17x_1 + x_2 & \leqslant & 179 \\ 5x_1 + 18x_2 & \leqslant & 197 \\ x_1, x_2 & \geqslant & 0 \end{cases}$$

Exercice 33

*Résoudre le **PLNE** suivant par la méthode **BB**.*

$$\begin{cases} \max(87x_1 + 2x_2) & = & ? \\ 7x_1 + 11x_2 & \leqslant & 188 \\ 2x_1 + x_2 & \leqslant & 25 \\ 3x_1 + 14x_2 & \leqslant & 245 \\ x_1, x_2 & \geqslant & 0 \end{cases}$$

Exercice 34

*Résoudre le **PLNE** suivant par la méthode **BB**.*

$$\left\{\begin{array}{ccc} \max(x+y) & = & ? \\ 15x+10y & \leqslant & 95 \\ 5x+20y & \leqslant & 185 \\ (x,y) & \in & \mathbb{N}^2 \end{array}\right.$$

Exercice 35

*Résoudre le **PLNE** suivant par la méthode **BB**.*

$$\left\{\begin{array}{ccc} \max(x+y) & = & ? \\ 15x+10y & \leqslant & 100 \\ 5x+25y & \leqslant & 200 \\ (x,y) & \in & \mathbb{N}^2 \end{array}\right.$$

Exercice 36

*Résoudre le **PLNE** suivant par la méthode **BB**.*

$$\left\{\begin{array}{ccc} \max(2x+3y) & = & ? \\ 3x+7y & \leqslant & 100 \\ 4x+5y & \leqslant & 80 \\ 2x+y & \leqslant & 50 \\ x+2y & \leqslant & 30 \\ (x,y) & \in & \mathbb{N}^2 \end{array}\right.$$

Exercice 37

*Résoudre le **PLNE** suivant par la méthode **BB**.*

$$\left\{\begin{array}{ccc} \max(4x+7y) & = & ? \\ 2x+5y & \leqslant & 25 \\ 4x+3y & \leqslant & 18 \\ x+y & \leqslant & 12 \\ (x,y) & \in & \mathbb{N}^2 \end{array}\right.$$

Exercice 38

*Résoudre le **PLNE** suivant par la méthode **BB**.*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \max(83x_1+73x_2) & = & ? \\ 2x_1+15x_2 & \leqslant & 152 \\ 11x_1+x_2 & \leqslant & 200 \\ x_1,x_2 & \geqslant & 0 \end{array}\right.$$

(très long!)