

# **Análisis de Torsión No Uniforme Por Elementos Finitos**

Eduardo Gianella Peredo

Facultad de Ingeniería en Ciencias de la Computación y Telecomunicaciones, Av. Busch  
s/n. Telfax : 3584776 Santa Cruz, Bolivia

Palabras clave: Torsión No Uniforme, Elementos Finitos.

## **Resumen**

El primer objetivo de este trabajo es la obtención de la función de alabeo de Saint Venant, para sección de forma cualquiera y considerando como centro de rotación al centro de corte de la sección. Se aborda el problema procurando solución numérica mediante el Método de los Elementos Finitos.

El segundo y último objetivo es la presentación de un análisis detallado de la Torsión no Uniforme de barras, incorporando la función de alabeo de Saint Venant al campo de desplazamientos.

## **Introducción**

El problema de torsión uniforme de barras prismáticas, formulado por Saint Venant, ha logrado ser resuelto, de manera exacta, para secciones transversales de forma simple [2]. Para formas complejas de secciones, la búsqueda de solución analítica cerrada se torna impracticable, resultando conveniente utilizar métodos numéricos para la obtención de soluciones aproximadas. Es de gran interés la determinación de la función de alabeo de Saint Venant, referida al centro de corte, y para obtenerla previamente se debe determinar la posición de este punto en la sección transversal.

Una vez obtenida la función de alabeo de Saint Venant, esta es incorporada en la cinemática de la barra, como es indicado en [10], para tomar en cuenta la torsión no uniforme de la barra.

Hay que destacar que el problema de torsión no uniforme es relevante en el ámbito de estructuras de barras con sección transversal de pared delgada abiertas, debido a la pequeña rigidez a torsión que estas secciones presentan.

En el análisis de torsión no uniforme, basado en la teoría estructural adoptada, son encontrados esfuerzos internos adicionales y sus correspondientes deformaciones energéticamente conjugadas.

## **Hipótesis Básicas**

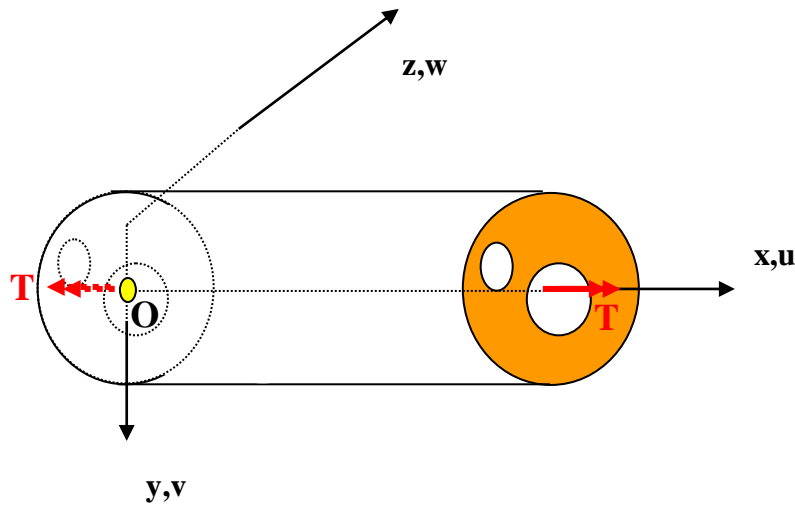


fig.1.

El problema de torsión uniforme en barras, ocurre cuando:

1. La barra es prismática.
2. La carga está constituida por una distribución de fuerzas superficiales actuando únicamente en las secciones extremas, y estáticamente equivalente, en cada sección, al momento torsor  $T$ .
3. No existe restricción al movimiento  $u$  en dirección del eje de la barra.

En la práctica, en la gran mayoría de los casos, las secciones transversales tienen la componente de desplazamiento  $u$  restringida, lo que ocasiona la aparición en escena de tensiones normales. Cuando esto sucede, enfrentamos el problema de Torsión no Uniforme.

## **Formulación de Saint Venant (Torsión Uniforme)**

Saint Venant utilizó, en el análisis de torsión uniforme, un procedimiento conocido con el nombre de semi-inverso, consistente en la imposición a priori de condiciones sobre el comportamiento estructural, y la posterior determinación del problema correspondiente a estas condiciones.

Las hipótesis establecidas por Saint Venant fueron:

1. Las secciones transversales no se deforman en su plano,  $\varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = 0$ .
2. Cada sección transversal rota  $\theta(x)$  en torno a x, y se alabea con desplazamiento u.

(x coincide con el eje de la barra)

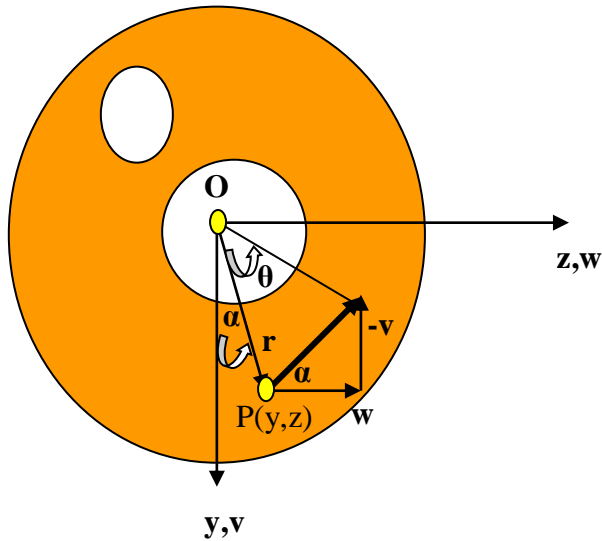


fig.2

La figura 2 ilustra el movimiento de rotación en el plano de una sección transversal, y permite deducir sendas expresiones para las componentes de desplazamiento v y w.

$$v = -r\theta\sin\alpha = -\theta y$$

$$w = r\theta\cos\alpha = \theta z$$

Estando todas las secciones solicitadas por el mismo momento torsor, se deduce que la deformación en todas ellas es la misma. Anotado  $\frac{d\theta}{dx} = \theta'$  constante, se define:

$$u = \theta' \psi(y, z)$$

donde la constante  $\theta'$  es la rotación específica de la proyección de la sección transversal de la barra en el plano y, z y  $\psi(y, z)$  es la función de alabeo de Saint Venant, considerando la rotación respecto a O.

Por otra parte, asumiendo que en  $x=0$ , la sección tiene rotación impedida, puede escribirse  $\theta(x) = \theta' x$ , de modo que

$$v = -\theta' xy$$

$$w = \theta' xz$$

Resumiendo:

$$u = \theta' \psi(y,z)$$

$$v = -\theta' xy$$

$$w = \theta' xz$$

Las expresiones anteriores constituyen el campo de desplazamientos de los puntos de la barra.

A partir del campo de desplazamiento, puede determinarse el campo de deformaciones:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\theta' + \theta' = 0;$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \theta' \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \theta' \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right)$$

Asumiendo el material homogéneo, isótropo y elástico lineal:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0;$$

$$\tau_{xy} = G\theta' \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right)$$

$$\tau_{xz} = G\theta' \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right)$$

En las expresiones anteriores E y G son respectivamente, el módulo de elasticidad y el módulo de corte del material.

Considerando el equilibrio en el dominio:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

introduciendo las expresiones de las tensiones tangenciales, se obtiene

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

Las restantes ecuaciones de equilibrio se reducen a identidades.

Considerando que la pared cilíndrica de la barra esta libre de fuerzas superficiales, se obtiene en esta parte del contorno, la siguiente expresión:

$$\tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z = 0, \text{ introduciendo la función de Saint Venant se llega a}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} n_y + \frac{\partial \psi}{\partial z} n_z = n_y z - n_z y$$

Finalmente utilizando la notación correspondiente a la derivada direccional, se obtiene

$$\frac{d\psi}{dn} = n_y z - n_z y$$

Se concluye entonces que la función de alabeo de Saint Venant es una solución del problema:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \text{ (Ecuación de Laplace)}$$

$$\frac{d\psi}{dn} = n_y z - n_z y \text{ (Condición de contorno de Newman)}$$

Este problema presenta soluciones que difieren apenas en una constante.

Imponiendo una condición esencial de contorno, la solución queda definida de manera única.

En las secciones transversales ubicadas en los extremos de la barra, las condiciones de equilibrio establecen lo siguiente

$$Q_y = \iint_D \tau_{xy} dy dz = 0$$

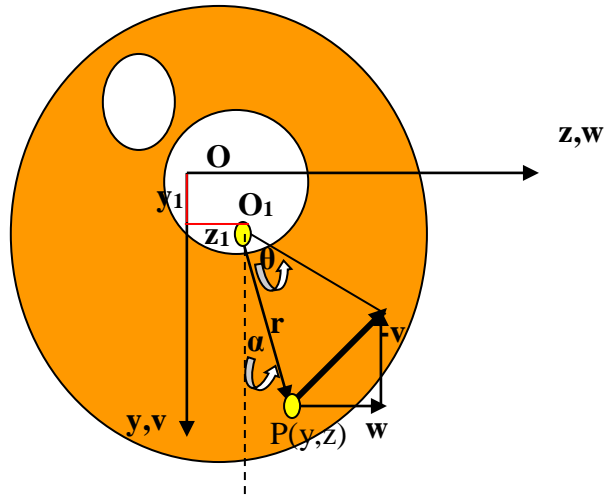
$$Q_z = \iint_D \tau_{xz} dy dz = 0$$

$$T = \iint_D [\tau_{xz} y - \tau_{xy} z] dy dz$$

Las dos primeras corresponden a identidades, mientras que la tercera permite la determinación de la Inercia a Torsión de la barra, mediante la siguiente expresión

$$I_t = \iint_D \left[ y^2 + z^2 + \frac{\partial \psi}{\partial z} y - \frac{\partial \psi}{\partial y} z \right] dy dz$$

### Efecto del cambio de centro de rotación



Sea  $\psi(y, z)$  una solución de la ecuación de Laplace, respecto a un centro de rotación arbitrario "O".

Sea "O1" un nuevo centro de rotación, con coordenadas  $y_1, z_1$ . La función de alabeo de Saint Venant respecto a este punto es  $\psi_1$ .

Los desplazamientos respecto al nuevo centro de rotación O1 resultan:

$$u_1 = \theta'(\mathbf{x})\psi_1(y, z)$$

$$v_1 = -\theta'(\mathbf{x})(z - z_1)$$

$$w_1 = \theta'(\mathbf{x})(y - y_1)$$

Las deformaciones se reescriben como:

$$\gamma_{xy} = \theta'(\mathbf{x}) \left[ \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - (z - z_1) \right]$$

$$\gamma_{xz} = \theta'(\mathbf{x}) \left[ \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + (y - y_1) \right]$$

Las nuevas expresiones para las tensiones son:

$$\tau_{xy} = G\theta'(\mathbf{x}) \left[ \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - (z - z_1) \right]$$

$$\tau_{xz} = G\theta'(\mathbf{x}) \left[ \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + (y - y_1) \right]$$

Introduciendo las expresiones de las tensiones en la ecuación de equilibrio, resulta:

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} = 0 \text{ de modo que } \psi_1(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \text{ es también solución de la ecuación de Laplace.}$$

Considerando el equilibrio en el contorno, se obtiene:

$$\left[ \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - (z - z_1) \right] n_y + \left[ \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + (y - y_1) \right] n_z = 0$$

$$\left[ \frac{\partial \psi_1}{\partial y} n_y + z_1 n_y \right] + \left[ \frac{\partial \psi_1}{\partial z} n_z - y_1 n_z \right] = n_y z - n_z y$$

$$\frac{\partial [\psi_1 + z_1 y - y_1 z] n_y}{\partial y} + \frac{\partial [\psi_1 + z_1 y - y_1 z] n_z}{\partial z} = n_y z - n_z y$$

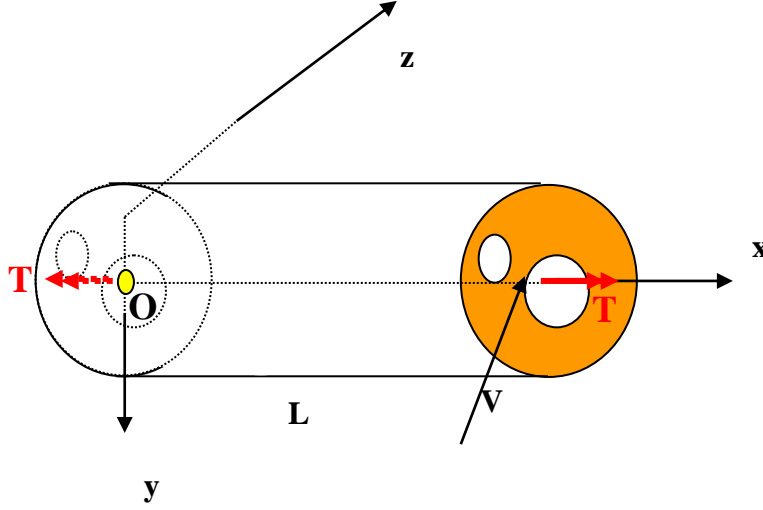
$$\frac{d[\psi_1 + yz_1 - zy_1]}{dn} = n_y z - n_z y \text{ con lo que queda demostrado que la función}$$

$\psi_1(\mathbf{y}, \mathbf{z}) + yz_1 - zy_1$  satisface la ecuación de Laplace y su condición de contorno, por lo tanto es otra solución del problema y como las soluciones de este problema difieren apenas por una constante, se tiene que  $\psi_1(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \psi(\mathbf{y}, \mathbf{z}) - yz_1 + zy_1 + C$

Si el punto  $\mathbf{O}_1$  coincide con centro de corte definido por Trefftz, entonces  $y_1 = y_c$ ,  $z_1 = z_c$  son las coordenadas de dicho centro, mientras que  $\psi_1 = \psi_c$  es la función de alabeo referida al centro de corte.

### Centro de corte definido por Trefftz

Considerando una barra prismática de longitud  $L$ , con rotación impedida en el extremo  $x=0$ .



Si se aplica un torsor  $T$  en su extremo libre, la energía de deformación resulta

$$U_T = \frac{L}{2G} \iint_A (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2) dA \quad \text{las tensiones } \tau_{xy}, \tau_{xz} \text{ son originadas por la torsión.}$$

Luego, manteniendo  $T$ , se aplica  $V$ , esta fuerza puede hacer rotar la sección generando trabajo adicional del torsor  $T$ . Entonces la energía de deformación resulta

$$U_{TF} = \frac{1}{2E} \iiint_V \sigma_x^2 dx dA + \frac{L}{2G} \iint_A [(\tau_{xy} + \tau_{xy}^*)^2 + (\tau_{xz} + \tau_{xz}^*)^2] dA$$

$U_{TF}$  es la energía de deformación debido a torsión y flexión combinadas, mientras que  $\tau_{xy}^*, \tau_{xz}^*$  son las tensiones originadas por la fuerza cortante  $V$ .

$$U_{TF} = \frac{1}{2E} \iiint_V \sigma_x^2 dx dA + \frac{L}{2G} \iint_A [(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2) dA + \frac{L}{2G} \iint_A [(\tau_{xy}^{*2} + \tau_{xz}^{*2}) dA + \frac{L}{2G} \iint_A [2\tau_{xy}\tau_{xy}^* + 2\tau_{xz}\tau_{xz}^*] dA$$

Trefftz define al centro de corte de la sección como aquel punto por donde debe pasar la fuerza de corte  $V$  para que el término de acoplamiento  $\frac{L}{2G} \iint_A [2\tau_{xy}\tau_{xy}^* + 2\tau_{xz}\tau_{xz}^*] dA$



Sea nulo, de modo que :

$$U_{TF}=U_T+U_F.$$

$$U_T = \frac{L}{2G} \iint_A [(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)] dA$$

$$U_F = \frac{1}{2E} \iiint_V \sigma_x^2 dx dA + \frac{L}{2G} \iint_A [(\tau_{xy}^{*2} + \tau_{xz}^{*2})] dA$$

A partir de la definición dada por Trefftz, obtenemos:

$$\iint_A [\tau_{xy} \tau_{xy}^* + \tau_{xz} \tau_{xz}^*] dA = 0$$

$$\iint_A [(\frac{\partial \psi_c}{\partial y} - z) \tau_{xy}^* + (\frac{\partial \psi_c}{\partial z} + y) \tau_{xz}^*] dA = 0$$

$$\iint_A [\frac{\partial \psi_c}{\partial y} \tau_{xy}^* + \frac{\partial \psi_c}{\partial z} \tau_{xz}^*] dA = - \iint_A [-z \tau_{xy}^* + y \tau_{xz}^*] dA$$

Aplicando el teorema de la divergencia sobre el término de la izquierda

$$\iint_A [y \tau_{xz}^* - z \tau_{xy}^*] dA = \iint_A [\psi_c (\frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^*}{\partial z})] dA - \oint_C \psi_c (n_y \tau_{xy}^* + n_z \tau_{xz}^*) dA$$

El último término es nulo en el contorno lateral.

$$\iint_A [y \tau_{xz}^* - z \tau_{xy}^*] dA = \iint_A [\psi_c (\frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^*}{\partial z})] dA$$

El término de la izquierda resulta en el momento torsor que produce V respecto al centro de corte  $Ve_c$ , donde  $e_c$  representa la excentricidad de V respecto al centro de corte. Si V pasa por ese centro, el término es nulo.

$$\iint_A [\psi_c (\frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^*}{\partial z})] dA = 0$$

Por otra parte el equilibrio en dirección x exige

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\left(\frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^*}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{I_z V_y z - I_{yz} V_y y + I_{yz} V_z z - I_y V_z y}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

$$\iint_A [\psi_c y (I_{yz} V_y + I_y V_z) - \psi_c z (I_z V_y + I_{yz} V_z)] dA = 0 \text{ de esta expresión resultan dos}$$

condiciones que debe cumplir  $\psi_c$ .

$$\iint_A \psi_c y dA = 0$$

$$\iint_A \psi_c z dA = 0$$

Por otro lado para definir la función  $\psi_c$ , es requerido imponer un valor de ella en cualquier punto de la sección, lo que equivale a

$$\iint_A \psi_c dA = 0$$

### **Procedimiento para determinar las coordenadas del centro de corte**

Inicialmente se obtiene una solución  $\psi(y,z)$  respecto al centro de rotación arbitrario “O”, luego se elige el nuevo centro de rotación como el centro de corte de la sección, expresando  $\psi_c(y,z) = \psi(y,z) - yz_c + zy_c + C$

Finalmente se calculan las coordenadas de este punto, mediante la aplicación de las condiciones que respecto a él deben ser satisfechas:

$$\iint_A \psi_c dA = 0$$

$$\iint_A \psi_c y dA = 0$$

$$\iint_A \psi_c z dA = 0$$

Estas condiciones generan el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} A & S_y & -S_z \\ S_z & I_{yz} & I_z \\ S_y & I_y & I_{yz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ y_{cc} \\ z_{cc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\iint_D \psi dydz \\ -\iint_D \psi y dydz \\ -\iint_D \psi z dydz \end{bmatrix}$$

Donde A es el área de la sección,  $S_y, S_z$  son los momentos estáticos de la sección y  $I_y, I_{yz}$  los momentos de inercia de la sección.

Resolviendo el sistema, se obtienen las coordenadas del centro de corte de la sección.

### **Formulation Variacional del problema**

Para su resolución numérica por el método de los Elementos Finitos, el problema requiere de una formulación variacional, en este trabajo se utiliza el Método de Galerking.

Se parte de la ecuación diferencial y su condición de contorno:  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$ ,

$$\frac{d\psi}{dn} = n_y z - n_z y$$

Integrando la ecuación de Laplace multiplicada por la función de ponderación  $\bar{\psi}(y, z)$ , se obtiene:

$$\iint_D \bar{\psi} \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right] dydz = 0$$

A continuación, integrando por partes:

$$-\iint_D \left[ \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] dydz + \oint_C \bar{\psi} [zn_y - yn_z] ds = 0$$

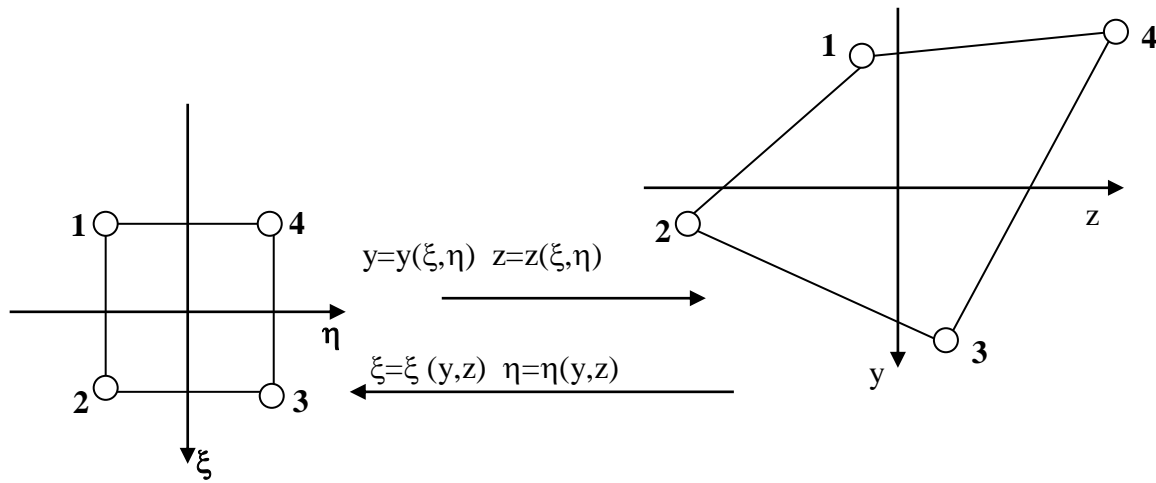
Utilizando el teorema de la divergencia la integral de contorno es transformada en integral sobre el dominio D:

$$\oint_C \bar{\psi} [zn_y - yn_z] ds = \iint_D \left[ \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} z - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} y \right] dydz, \text{ de modo que:}$$

$$-\iint_D \left[ \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] dy dz + \iint_D \left[ \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial y} z + \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial z} y \right] dy dz = 0$$

Esta es la ecuación de partida para la resolución numérica del problema por medio del Método de los Elementos Finitos, y el elemento utilizado es el isoparamétrico bilinear cuadrangular de cuatro nodos, que se describe a continuación.

### **Elemento Finito Isoparamétrico bilinear cuadrangular de cuatro nodos**



Después de encontrada la función  $\psi_c(y,z)$ , puede utilizarse para mejorar la la cinemática de las barras basada en la teoría de Euler- Bernoulli.

### **Conclusiones**

Conociendo las coordenadas del centro de corte, queda definida  $\psi_c(y,z)$ .

$\psi_c(y,z)$  es importante en las teorías estructurales de barras que consideran alabeo de las secciones por torsión.

El alabeo de las secciones por torsión no puede despreciarse en secciones de pared delgada.

### Ejemplo de aplicación

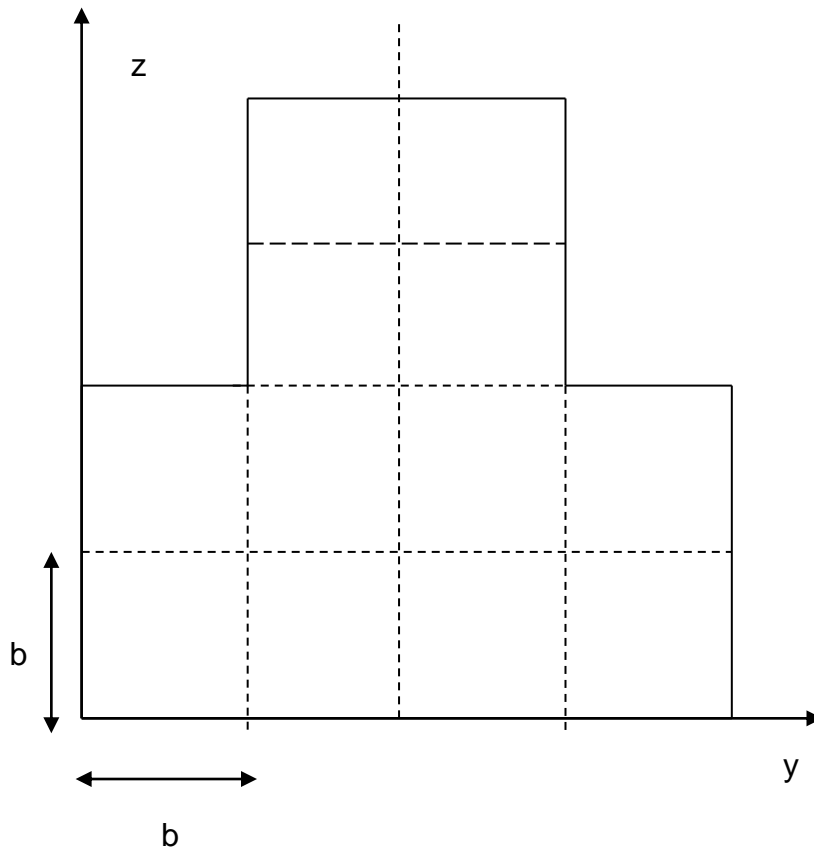
1.

$b=0.1$  m.

Con la discretización indicada en la figura:

$y_{cc}=0.2$  m.

$z_{cc}=0.1499$  m.



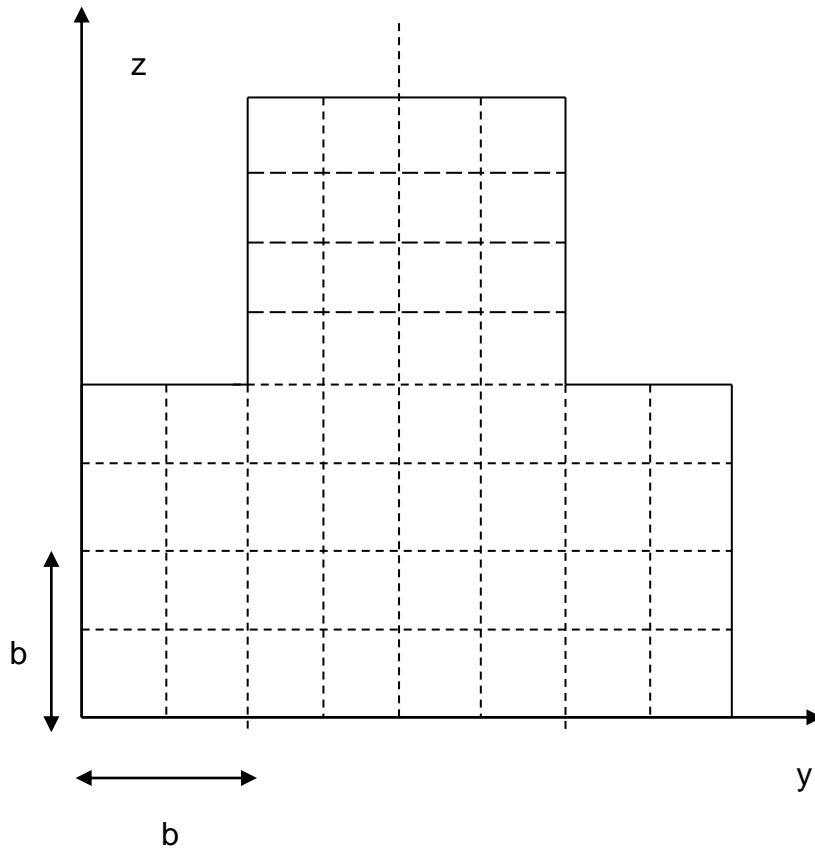
2.

$b=0.1$  m.

Con la discretización indicada en la figura:

$y_{cc}=0.2$  m.

$z_{cc}=0.1466$  m.



### Bibliografía

1. K. Washizu, "Variational Methods in Elasticity and Plasticity", 3<sup>rd</sup> Edn. Pergamon Press, New York,(1982).
2. S. P. Timoshenko and J. N. Goodier, Theory of Elasticity, 3<sup>rd</sup> Edn. McGraw-Hill,New York(1987).
3. J. F. Ely and O. C. Zienkiewicz, Torsion of compound bars-a relaxation solution, Int. J. Mech. Sci. **1**, 356-365, (1960).
4. A. K. Noor and C. M. Andersen, Mixed isoparametric elements for Saint Venant torsion , Comput. Meth. Appl. Mech. Engng. **6**, 195-218 (1975).
5. O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, "The Finite Element Method", Vol I,II, 3<sup>rd</sup> Edn. McGraw-Hill (1991).
6. L. O. Berrocal , "Elasticidad", 3<sup>rd</sup> Edn. McGraw-Hill (1998).
7. R. T. Chandrupatla, A. D. Belegundu, "Introducción al Estudio del Elemento Finito en Ingenieria", 2<sup>nd</sup> Edn. Prentice-Hall (1999).
8. E. Gianella, "Análisis de Torsión por el Método de los Elementos Finitos", Reporte IIT (2003).
9. Santos, Ana Paula Ferreira, Aprimoramento de formulação do MEF para barra geral laminada tridimensional pela consideração da cinemática de empenamento para seção qualquer, Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo (2008).
10. Pimenta, Paulo de Mattos, Fundamentos da Mecanica das Estruturas, Deprtamento de Estruturas e Fundacoes da Escola Politécnica da Universidade de Sao Paulo(2004).