Übung 6

Niclas Kusenbach, 360227

8th January 2026

Task 1: Propositional Logic

1a) Logische Äquivalenzen

Beweisen Sie die Aussagen durch Umformung.

a) $P \Rightarrow Q \equiv \neg(P \wedge \neg Q)$

$$\begin{aligned} \text{Rechte Seite: } & \neg(P \wedge \neg Q) \\ \equiv \quad & \neg P \vee \neg(\neg Q) \quad \text{(De Morgan)} \\ \equiv \quad & \neg P \vee Q \quad \text{(Doppelte Negation)} \\ \equiv \quad & P \Rightarrow Q \quad \text{(Def. Implikation)} \quad \checkmark \end{aligned}$$

b) $(P \wedge Q) \Rightarrow R \equiv P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$

$$\begin{aligned} \text{Linke Seite: } & (P \wedge Q) \Rightarrow R \\ \equiv \quad & \neg(P \wedge Q) \vee R \\ \equiv \quad & \neg P \vee \neg Q \vee R \quad \text{(De Morgan)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Rechte Seite: } & P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \\ \equiv \quad & \neg P \vee (\neg Q \vee R) \\ \equiv \quad & \neg P \vee \neg Q \vee R \quad \checkmark \end{aligned}$$

1b) Logische Folgerung (Wahrheitstabellen)

Prüfen Sie die Folgerungen ($\models$).

a) $P \wedge Q \models P \vee Q$
Gilt. Wenn $P \wedge Q$ wahr ist ($P = 1, Q = 1$), dann ist $1 \vee 1 = 1$ (wahr).

b) $P \wedge \neg P \models Q$
Gilt. Die Prämisse $P \wedge \neg P$ ist ein Widerspruch (immer falsch). Aus Falschem folgt Beliebiges (*ex falso quodlibet*).

c) $P \Rightarrow (P \wedge Q) \models P \vee \neg Q$
Gilt NICHT. Gegenbeispiel: $P = 0, Q = 1$.
- Prämisse: $0 \Rightarrow (0 \wedge 1) \equiv$ Wahr.
- Konklusion: $0 \vee \neg 1 \equiv 0 \vee 0 \equiv$ Falsch.

1c) Konjunktive Normalform (KNF)

Umwandlung in KNF.

a) $(P \wedge Q) \Rightarrow (\neg P \Leftrightarrow Q)$

$$\begin{aligned} & \neg(P \wedge Q) \vee ((\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)) \\ \equiv\ & (\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \\ \equiv\ & \neg P \vee \neg Q \quad \text{(Absorption)} \end{aligned}$$

b) $((P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg P$

$$\begin{aligned} & \neg((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q) \vee \neg P \\ \equiv\ & \neg(\neg P \wedge \neg Q) \vee \neg P \\ \equiv\ & (P \vee Q) \vee \neg P \quad \equiv \quad \text{True (Tautologie)} \end{aligned}$$

c) $((\neg P \wedge Q) \vee (\neg R \wedge S)) \wedge (U \vee V)$

Distributivgesetz: $(A \wedge B) \vee (C \wedge D) \equiv (A \vee C) \wedge (A \vee D) \wedge (B \vee C) \wedge (B \vee D)$

Ergebnis: $(\neg P \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee S) \wedge (Q \vee \neg R) \wedge (Q \vee S) \wedge (U \vee V)$

d) $((\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee S)) \vee (U \wedge V)$

Ergebnis: $(\neg P \vee Q \vee U) \wedge (\neg P \vee Q \vee V) \wedge (\neg R \vee S \vee U) \wedge (\neg R \vee S \vee V)$

Task 2: Resolution

Beweis durch Widerspruch: Füge $\neg\psi$ zur KB hinzu und leite die leere Klausel ($\square$) ab.

2a)

Gegeben: KB $= \{P \wedge Q\}$, $\psi = (P \vee Q)$
Negiertes Ziel: $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$

Klauselmenge:

1. P
2. Q
3. $\neg P$ (aus negiertem Ziel)
4. $\neg Q$ (aus negiertem Ziel)

Resolution:

$$\text{(1) und (3)} \quad \rightarrow \quad \square \quad \text{(Widerspruch)}$$

2b)

Gegeben: KB $= \{P \vee Q, Q \Rightarrow (R \wedge S), (P \vee R) \Rightarrow U\}$, $\psi = U$
Negiertes Ziel: $\neg U$

Umwandlung in Klauseln:

- $Q \Rightarrow (R \wedge S) \equiv \neg Q \vee (R \wedge S) \rightarrow \{\neg Q \vee R, \quad \neg Q \vee S\}$
- $(P \vee R) \Rightarrow U \equiv (\neg P \wedge \neg R) \vee U \rightarrow \{\neg P \vee U, \quad \neg R \vee U\}$

Klauselmenge:

1. $P \vee Q$
2. $\neg Q \vee R$
3. $\neg Q \vee S$
4. $\neg P \vee U$
5. $\neg R \vee U$
6. $\neg U$ (Negiertes Ziel)

Resolutionsbeweis:

1.	Res. (6) $\neg U$ mit (5) $\neg R \vee U$	$\rightarrow$	$\neg\mathbf{R}$
2.	Res. (6) $\neg U$ mit (4) $\neg P \vee U$	$\rightarrow$	$\neg\mathbf{P}$
3.	Res. (neu) $\neg P$ mit (1) $P \vee Q$	$\rightarrow$	$\mathbf{Q}$
4.	Res. (neu) Q mit (2) $\neg Q \vee R$	$\rightarrow$	$\mathbf{R}$
5.	Res. (neu) R mit (neu) $\neg R$	$\rightarrow$	$\square$

Task 3: General Questions

3a) Probleme und Grenzen der Aussagenlogik

Haupteinschränkungen bei der Anwendung auf reale Probleme:

- **Mangelnde Ausdrucksstärke:** Objekte, Relationen und Quantoren ("Alle Menschen sind sterblich") können nicht direkt modelliert werden. Jedes Faktum muss einzeln atomar definiert werden.
- **Zustandsraum-Explosion:** Die Größe der Wahrheitstabellen wächst exponentiell (2^n). Bei vielen Variablen wird Inferenz unberechenbar (NP-vollständig).
- **Statische Natur:** Zeitliche Veränderungen (Temporal) oder Unsicherheiten (Probabilistik) sind in der klassischen Aussagenlogik nicht abbildbar.
- **Monotonie:** Annahmen können nicht zurückgenommen werden, wenn neue Informationen hinzukommen (kein "non-monotonic reasoning").