

# 1 Fouriertheorie

## 1.1 Motivation

Die Fouriertheorie bietet eine neue Perspektive, um Signale und Funktionen zu analysieren, indem sie vom **Ortsraum** (z.B. Position, Zeit) in den **Frequenzraum** (z.B. Frequenz, Wellenlänge) wechselt.

- **Beispiele:**

- **Optik/Physik:** Lichtbeugung an einem Spalt. Ein Spalt kann mathematisch als **Rechteckfunktion** ( $rect(x)$ ) beschrieben werden. Das resultierende Beugungsmuster (die Amplitudenverteilung)  $B(\varphi)$  hat die Form einer **sinc-Funktion** ( $\frac{\sin x}{x}$ ). Die gemessene Intensität  $I(x)$  ist proportional zum Quadrat der Amplitude ( $I \propto B^2$ ), also eine  $sinc^2$ -Funktion.
- **Medizintechnik (MRT):** Ein MR-Scanner misst direkt Frequenzmuster im Fourierraum.
- **Menschliche Wahrnehmung:** Die Kontrastempfindlichkeit des Auges wird im Frequenzraum gemessen, oft mittels sinusförmiger Muster (sinusoidal gratings).

- **Kernidee:** Es besteht ein direkter Zusammenhang zwischen der Gestalt eines Objekts (Ortsraum) und seiner Amplitudenfunktion (Frequenzraum). Dieser Zusammenhang ist die **Fourier-Transformation**.

- **Erstes Fourier-Paar:**  $rect(x) \xrightarrow{FT} sinc(u)$ .

## 1.2 Mathematische Grundlagen

- **Vektorraum ( $R^n$ ):** Ein Raum, in dem Vektoren addiert und skalar multipliziert werden können.
- **Skalarprodukt:** Definiert Längen und Winkel.  $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i$ .
- **Basis:** Ein Satz linear unabhängiger Vektoren (z.B.  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ ), die den Raum aufspannen. Jeder Vektor  $\vec{v}$  ist eine Linearkombination der Basis:  $\vec{v} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2$ .
- **Funktionenräume:**
  - Die Elemente sind nun **Funktionen** statt Vektoren.
  - Diese Räume sind i.d.R. **unendlich-dimensional**.
  - **Ziel:** Finde **Basisfunktionen**, um (beliebige) Funktionen als Linearkombination dieser Basen darzustellen. Dies leistet die **Fouriertheorie**.

## 1.3 Die Fourier-Reihe (Fourier Series)

### Grundidee der Fourier-Reihe

Jede  **$2\pi$ -periodische Funktion**  $f(x)$ , die die **Dirichlet-Bedingungen** erfüllt, kann als unendliche Summe (Überlagerung) von Sinus- und Kosinusfunktionen dargestellt werden.

#### Dirichlet-Bedingungen :

1. Endliche Anzahl von Unstetigkeiten pro Periode.
2. Endliche Anzahl von Maxima und Minima pro Periode.
3. In jeder Periode integrierbar (d.h.  $\int |f(x)| dx < \infty$  pro Periode).

### 1.3.1 Analogie zum Vektorraum

- **Skalarprodukt für Funktionen:**  $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$ .

- **Orthogonale Basis:** Die Funktionen  $u_n(t) = \cos(nt)$  und  $v_n(t) = \sin(nt)$  bilden eine **orthogonale Basis** im Funktionenraum  $H$ . Das bedeutet, ihr Skalarprodukt ist 0, wenn sie nicht identisch sind (z.B.  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) \sin(mt) dt = 0 \forall n, m$ ).

### 1.3.2 Formeln der Fourier-Reihe

#### Reelle Fourier-Reihe

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Die **Fourier-Koeffizienten**  $a_n, b_n$  werden durch Projektion von  $f(x)$  auf die Basisfunktionen berechnet:

- $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$  (Der "Gleichanteil" oder Mittelwert)
- $a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx$  (für  $m > 0$ )
- $b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx$

- **Symmetrie-Eigenschaften:**

- **Gerade Funktion** ( $f(-t) = f(t)$ , z.B.  $\cos(x)$ ): Alle  **$b_n = 0$** .
- **Ungerade Funktion** ( $f(-t) = -f(t)$ , z.B.  $\sin(x)$ ): Alle  **$a_n = 0$**  (inkl.  $a_0$ ).

- **Beispiel (Rechteck-Schwingung):** Dies ist eine ungerade Funktion. Daher sind alle  $a_n = 0$ . Die  $b_n$  Koeffizienten sind  $\frac{4k}{n\pi}$  für ungerade  $n$  und 0 für gerade  $n$ .

$$f(x) = \frac{4k}{\pi} \left( \sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \dots \right)$$

(Die Folien 39-43 visualisieren, wie diese Summe die Rechteckfunktion approximiert).

#### Komplexe Fourier-Reihe

Mit der Euler-Identität ( $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$  und  $e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx)$ ) lässt sich die Reihe kompakter schreiben :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

## 1.4 Die Fourier-Transformation (FT)

#### Motivation der Fourier-Transformation

Erweiterung der Fourier-Reihe auf **nicht-periodische Funktionen**.

Dies geschieht durch einen Grenzübergang: Die Periode  $L$  der Funktion wird unendlich groß ( $L \rightarrow \infty$ ).

Dabei wird die **diskrete Summe** der Fourier-Reihe (über  $n$ ) zu einem **kontinuierlichen Integral** (über  $u$ ).

Das Spektrum ist nicht mehr diskret (Vielfache einer Grundfrequenz), sondern **kontinuierlich**.

## Das Fourier-Transformationspaar

- **Fourier-Transformation (FT):** (Analyse: Ortsraum  $\rightarrow$  Frequenzraum)

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi iut} dt$$

- **Inverse Fourier-Transformation (iFT):** (Synthese: Frequenzraum  $\rightarrow$  Ortsraum)

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{+2\pi iux} du$$

$f(x)$  ist oft reell, aber  $F(u)$  ist i.d.R. komplex:  $F(u) = \operatorname{Re}(F(u)) + i \operatorname{Im}(F(u))$ .

### 1.4.1 Wichtige Fourier-Transformationspaare

- **Rechteck-Funktion  $\leftrightarrow$  sinc-Funktion:**

–  $f(x) = \operatorname{rect}(x)$

–  $F(u) \propto \operatorname{sinc}(u)$

- **Dirac-Delta-Distribution  $\leftrightarrow$  Konstante:**

– Die **Dirac-Delta-Distribution**  $\delta(t)$  ist keine Funktion, sondern eine Distribution, definiert durch ihre **”Sampling-Eigenschaft”**:  $\int f(t)\delta(t-t')dt = f(t')$ .

–  $f(x) = \delta(x) \xrightarrow{FT} F(u) = 1$  (Ein Impuls im Ort enthält alle Frequenzen)

–  $f(x) = K \xrightarrow{FT} F(u) = K \cdot \delta(u)$  (Eine Konstante im Ort ist nur die Frequenz 0)

- **Kosinus  $\leftrightarrow$  Zwei Delta-Peaks:**

–  $f(x) = \cos(kx)$

–  $F(u) \propto (\delta(u-k) + \delta(u+k))$

– Eine reine Schwingung im Ortsraum entspricht zwei scharfen Peaks (diskreten Frequenzen) im Frequenzraum.

## 1.5 Faltung und Filterung

### Faltung (Convolution)

Das Faltungsintegral  $h(t)$  zweier Funktionen  $f$  und  $g$  ist definiert als:

$$h(t) = (f \circ g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx$$

Graphisch entspricht dies einer ”Spiegelung, Verschiebung, Multiplikation und Integration”.

- Bsp:  $\operatorname{rect}(x) \circ \operatorname{rect}(x) = \operatorname{triangle}(x)$ .

### Der Faltungssatz (Convolution Theorem)

Dies ist einer der wichtigsten Sätze der Fouriertheorie:

- Eine **Faltung im Ortsraum** entspricht einer **Multiplikation im Frequenzraum**.
- Eine **Multiplikation im Ortsraum** entspricht einer **Faltung im Frequenzraum**.

$$h(t) = f(t) \circ g(t) \xrightarrow{FT} H(u) = F(u) \cdot G(u)$$

### 1.5.1 Anwendung: Filterung

---

Der Faltungssatz ist die Grundlage für effiziente Filterung :

1. Ein Signal  $f(x)$  soll gefiltert werden.
2. Anstatt eine aufwändige Faltung im Ortsraum ( $f \circ g$ ) durchzuführen...
3. ...transformiert man Signal ( $f \rightarrow F$ ) und Filterfunktion ( $g \rightarrow G$ ) in den Frequenzraum.
4. Dort wird eine **einfache Multiplikation** durchgeführt:  $H(u) = F(u) \cdot G(u)$ .
5. Das Ergebnis  $H(u)$  wird zurück in den Ortsraum transformiert ( $H \rightarrow h$ ), um das gefilterte Signal  $h(x)$  zu erhalten.

Dies ist oft (via *Fast Fourier Transform*, FFT) viel schneller als die direkte Faltung.

## 1.6 Abtastung von Signalen (Sampling)

---

### 1.6.1 Modell der Abtastung

---

- **Problem:** Ein kontinuierliches Signal  $f(x)$  muss in diskrete Werte  $f(n\Delta x)$  für die digitale Verarbeitung umgewandelt werden.
- **Mathematisches Modell:** Abtastung ist eine **Multiplikation** des Signals  $f(x)$  mit einer **Kamm-Funktion** (einer Kette von  $\delta$ -Impulsen im Abstand  $\Delta x$ ).

$$\hat{f}(x) = f(x) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n \cdot \Delta x)$$

### 1.6.2 Abtastung im Frequenzraum

---

- Laut Faltungssatz (Multiplikation im Ortsraum  $\rightarrow$  Faltung im Frequenzraum) wird das Spektrum  $F(u)$  des Signals mit der FT der Kamm-Funktion gefaltet.
- Die FT einer Kamm-Funktion (Abstand  $\Delta x$ ) ist wieder eine Kamm-Funktion (Abstand  $1/\Delta x$ ).
- **Folge:** Das Spektrum  $\hat{F}(u)$  des abgetasteten Signals ist eine **periodische Wiederholung** des Originalspektrums  $F(u)$ , wobei die Kopien den Abstand  $1/\Delta x$  haben.

### 1.6.3 Aliasing und das Abtasttheorem

---

Angenommen, das Signal ist **bandbegrenzt**, d.h. seine höchste Frequenz ist  $u_G$  ( $F(u) = 0$  für  $|u| > u_G$ ).

- **Fall 1: Korrekte Abtastung** ( $1/\Delta x > 2u_G$ )
  - Die Abtastfrequenz ( $1/\Delta x$ ) ist mehr als doppelt so hoch wie die maximale Signalfrequenz ( $u_G$ ).
  - Die periodischen Kopien von  $F(u)$  im Frequenzraum **überlappen nicht**.
  - Das Originalsignal kann **fehlerfrei rekonstruiert** werden (z.B. durch einen Tiefpassfilter, der nur die zentrale Kopie isoliert).
- **Fall 2: Unterabtastung** ( $1/\Delta x < 2u_G$ )
  - Die Abtastfrequenz ist zu niedrig.
  - Die Kopien von  $F(u)$  **überlappen sich**.
  - In den Überlappungsbereichen addieren sich Frequenzen. Hohe Frequenzen "erscheinen" fälschlicherweise als niedrige Frequenzen.
  - Dieser irreversible Fehler wird **Aliasing** genannt. (z.B. Wagenrad-Effekt bei Filmen , Moiré-Muster ).

### Abtasttheorem von Whittaker-Shannon

Eine bandbegrenzte Funktion (höchste Frequenz  $u_G$ ) kann aus ihren Abtastwerten  $f(n\Delta x)$  fehlerfrei rekonstruiert werden, wenn die Abtastfrequenz  $f_s = 1/\Delta x$  **mindestens doppelt so hoch** wie die höchste Signalfrequenz  $u_G$  ist.

$$f_s > 2u_G \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\Delta x} > 2u_G$$

Die Frequenz  $2u_G$  wird als **Nyquist-Frequenz** bezeichnet.

## 1.7 Zusammenfassung der Konzepte

- **Fourier-Reihe:**
  - **Für:**  $2\pi$ -periodische Funktionen.
  - **Spektrum:** **Diskret** (Vielfache einer Grundfrequenz).
  - **Formel:**  $f(x) = \sum c_n e^{inx}$ .
- **Fourier-Transformation:**
  - **Für:** Nicht-periodische Funktionen.
  - **Spektrum:** **Kontinuierlich**.
  - **Formel:**  $F(u) = \int f(t) e^{-2\pi i u t} dt$ .
- **Faltungssatz:**
  - $f(t) \circ g(t) \longleftrightarrow F(u) \cdot G(u)$
  - Ermöglicht effiziente **Filterung** im Frequenzraum.
- **Abtasttheorem:**
  - Abtastung (Multiplikation mit  $\delta$ -Kamm) im Ortsraum  $\rightarrow$  Periodisierung (Faltung mit  $\delta$ -Kamm) im Frequenzraum.
  - Zur Rekonstruktion muss die Abtastfrequenz  $f_s$  größer als die doppelte maximale Signalfrequenz  $u_G$  sein ( $f_s > 2u_G$ ), um **Aliasing** zu vermeiden.