

# 1 Bildrestaurierung und Deblurring

Diese Zusammenfassung behandelt die Methoden zur Wiederherstellung von Bildern, die durch Unschärfe (Blurring) und Rauschen (Noise) degradiert wurden. Wir bewegen uns von einfachen Filtern im Frequenzraum hin zu komplexen iterativen Verfahren mittels partieller Differentialgleichungen.

## 1.1 Problemstellung und Grundlagen

### 1.1.1 Das Bildmodell

Ein aufgenommenes Bild ist selten perfekt. Es wird mathematisch oft als eine Faltung des Originalbildes mit einem Kern (Blur-Kernel) plus Rauschen modelliert.

#### Das Degradationsmodell

Sei  $f$  das Originalbild,  $a$  der Faltungskern (z.B. eine Gaußglocke für Unschärfe) und  $n$  das additive Rauschen. Das beobachtete Bild  $g$  ist:

$$g = a(f) + n$$

Im Fourierraum (Faltung wird zur Multiplikation) gilt ohne Rauschen:

$$G = A \cdot F$$

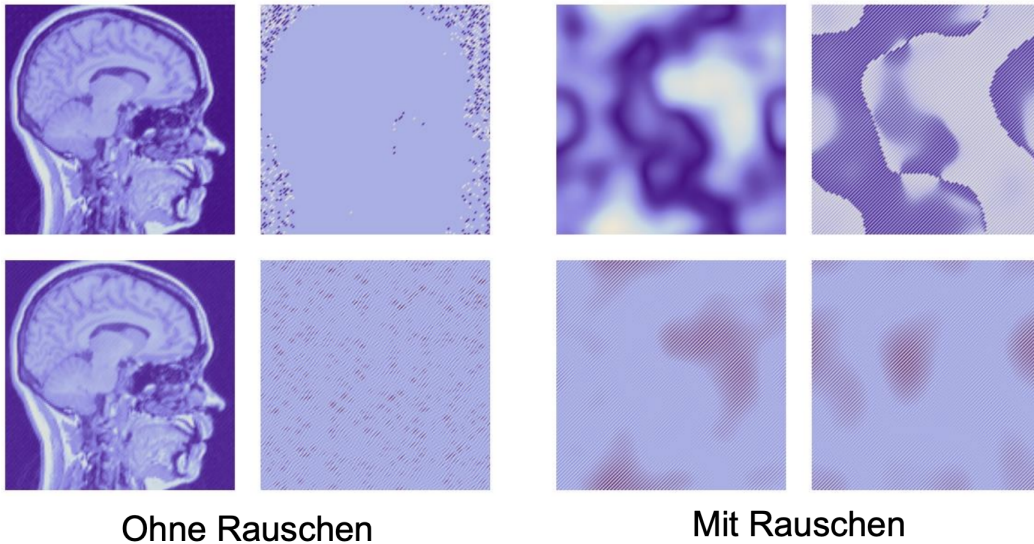
### 1.1.2 Der naive Ansatz: Inverser Filter

Theoretisch könnte man das Originalbild  $F$  einfach durch Division zurückgewinnen:

$$F = \frac{G}{A}$$

**Problem:** Dieser Ansatz ist in der Praxis instabil (Cheating).

1. Der Kernel  $A$  (oft ein Tiefpassfilter wie Gauß) hat bei hohen Frequenzen Werte nahe 0.
2. Division durch sehr kleine Zahlen führt zu riesigen Werten.
3. Da  $G$  auch Rauschen enthält ( $G = A \cdot F + N$ ), wird das Rauschen  $N$  durch die Division mit kleinen Werten von  $A$  massiv verstärkt.
4. Das Ergebnis enthält oft komplexe Zahlen und ist unbrauchbar.



### 1.1.3 Exkurs: Korrekt gestellte Probleme (Hadamard)

Ein mathematisches Problem ist **korrekt gestellt** (well-posed), wenn:

1. Eine Lösung existiert.
2. Die Lösung eindeutig ist.
3. Die Lösung stetig von den Daten abhängt (Stabilität).

**Deblurring ist ein nicht korrekt gestelltes Problem (ill-posed).** Kleine Änderungen im Input (Rauschen) führen zu riesigen Änderungen im Output (Ableitungen/Schärfung). Daher ist **Regularisierung** notwendig: Wir müssen zusätzliches Wissen (z.B. Glattheit) einbringen, um eine stabile Lösung zu finden.

## 1.2 Einschrittverfahren (Frequenzraum)

### 1.3 Der Wiener Filter

Der Wiener Filter ist die Standardlösung für das Problem des Inversen Filters. Er versucht, den Fehler zwischen dem geschätzten und dem echten Bild statistisch zu minimieren.

#### Wiener Filter

Anstatt einfach durch  $A$  zu teilen, wird der Ausdruck regularisiert:

$$F = \frac{A^*}{|A|^2 + R^2} \cdot G$$

Dabei ist:

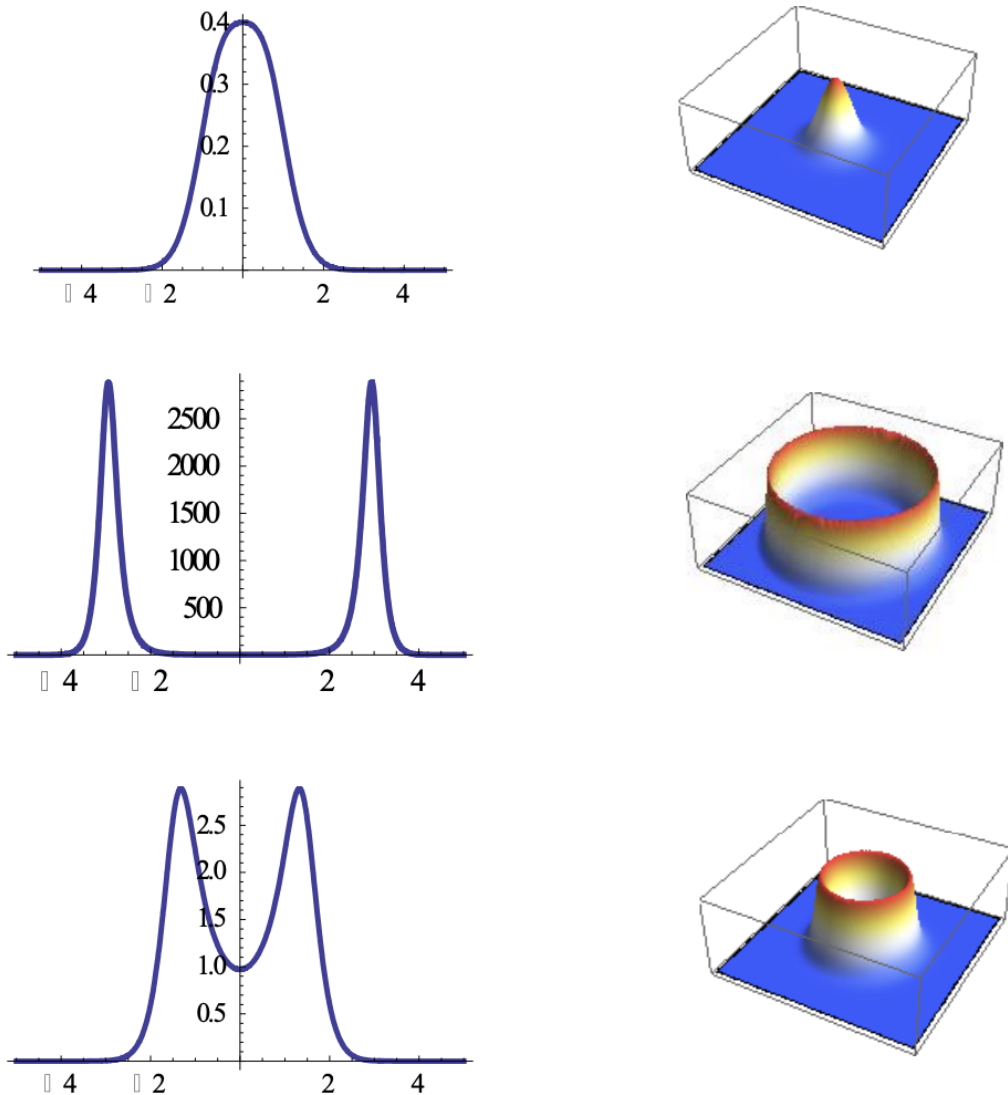
- $A^*$ : Die komplex konjugierte Matrix von  $A$ .
- $|A|^2 = A^*A$ : Das Leistungsdichtespektrum des Kernels.
- $R$ : Ein Parameter, der das Signal-Rausch-Verhältnis (SNR) repräsentiert.

#### 1.3.1 Funktionsweise und Interpretation von $R$

Der Term  $R^2$  im Nenner verhindert die Division durch Null.

- **$R$  ist groß (viel Rauschen/unsicheres Signal):** Der Filter wirkt wie ein **Tiefpass**. Er glättet das Bild, um das Rauschen zu unterdrücken, verliert aber Details. Der Term  $|A|^2$  wird gegenüber  $R^2$  vernachlässigbar.

- **$R$  ist klein (wenig Rauschen):** Der Filter nähert sich dem **inversen Filter** an ( $R \approx 0 \Rightarrow \frac{A^*}{|A|^2} = \frac{1}{A}$ ). Er schärft das Bild stark (Hochpass), verstärkt aber Rauschen, falls vorhanden.
- **$R$  optimal gewählt:** Der Filter agiert als **Bandpass**. Er entfernt Rauschen in Frequenzen, wo das Signal schwach ist, und invertiert den Blur dort, wo das Signal stark ist.



**Vorteil:** Schnell und einfach zu implementieren (ein globaler Filter).

**Nachteil:** Ein globaler Parameter  $R$  für das ganze Bild. Keine lokale Anpassung an Kanten vs. flache Regionen.

## 1.4 Mehrschrittverfahren (Iterative Methoden)

Um lokale Verbesserungen zu ermöglichen, nutzen wir iterative Verfahren im Ortsraum (statt Frequenzraum).

## 1.5 Scale-Space und Diffusionsgleichung

Deblurring kann als Umkehrung von Blurring verstanden werden.

- **Blurring:** Entspricht physikalisch der Wärmeleitungsgleichung (Heat Equation) oder **linearen Diffusion**.

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \Delta L = L_{xx} + L_{yy}$$

Die Lösung dieser Gleichung über die Zeit  $t$  ist die Faltung des Bildes mit einem Gauß-Kern. Das Bild wird unschärfer.

- **Deblurring (Schärfen):** Man kann versuchen, den Laplace-Operator ( $\Delta L$ ) zu subtrahieren (ähnlich „Unsharp Masking“).

$$L_{neu} = L_{alt} - t \cdot \Delta L$$

Fügt man höhere Ableitungen (Taylor-Reihe) hinzu, kann man das Bild theoretisch rekonstruieren, aber das Verfahren ist instabil (Rauschen wird verstärkt).

## 1.6 Nichtlineare Diffusion (Perona-Malik)

Die lineare Diffusion ( $\partial_t L = \Delta L$ ) glättet alles gleichmäßig – Rauschen *und* Kanten. Das Ziel ist aber: **Rauschen glätten, Kanten erhalten (oder schärfen)**.

Dazu führen wir einen variablen Diffusionskoeffizienten  $c$  ein.

### Perona-Malik Gleichung

$$\partial_t L = \nabla \cdot (c(|\nabla L|^2) \nabla L)$$

#### 1.6.1 Der Koeffizient $c$

Die Funktion  $c(\cdot)$  steuert die Diffusion abhängig von der lokalen Kantenstärke (Gradientenbetrag  $|\nabla L|$ ).

- **Flache Regionen (kleiner Gradient):**  $c \approx 1$ . Wir wollen maximale Diffusion zur Rauschunterdrückung.
- **Kanten (großer Gradient):**  $c \approx 0$ . Die Diffusion wird gestoppt, um die Kante nicht zu verwischen.

Ein typisches Modell für  $c$ :

$$c(|\nabla L|^2) = \frac{1}{1 + \frac{|\nabla L|^2}{k^2}} \quad \text{oder} \quad c = e^{-\frac{|\nabla L|^2}{k^2}}$$

#### 1.6.2 Der Parameter $k$ (Contrast Parameter)

$k$  fungiert als Schwellenwert („Soft-Threshold“):

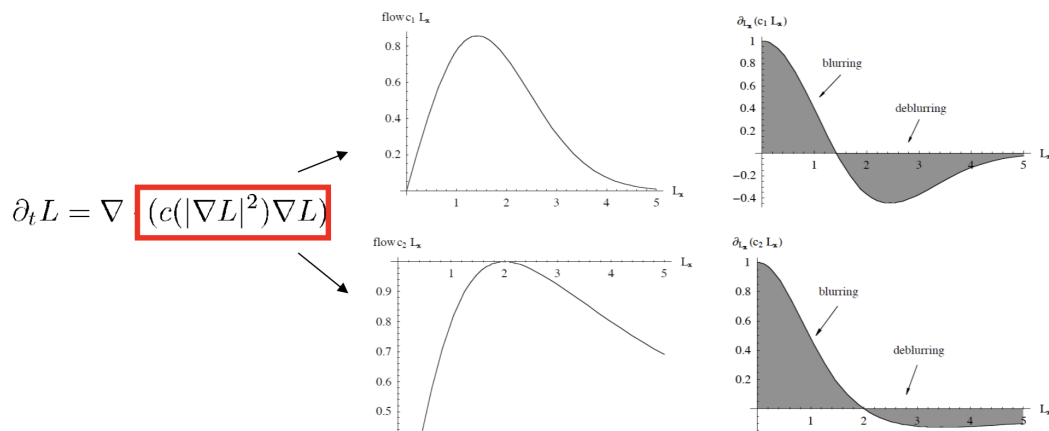
- Gradienten  $< k$ : Werden als Rauschen interpretiert → **Glättung (Blurring)**.
- Gradienten  $> k$ : Werden als Kanten interpretiert → **Schärfung (Deblurring/Inverse Diffusion)**.

Dies führt zu einer Kantenverstärkung, da an der Kante Material „wegdiffundiert“ und sich aufstaut (Schockfilter-Effekt).

Das gleiche Blurring- und Deblurring-Verhalten wie das des Wiener Filters!

Blurring für kleine Gradienten, Deblurring für große Gradienten.

Die Graphen der Flüsse  $cL_x$  und  $\frac{\partial(cL_x)}{\partial L_x}$  für beide  $c$  mit  $k=2$ :



### 1.6.3 Probleme (Perona-Malik Paradox)

Das Modell ist mathematisch „ill-posed“ (inverser Diffusionsanteil ist instabil).

- Es entsteht ein „Staircasing“-Effekt (Bild wirkt blockig).
- Man benötigt eine **Stoppzeit**, da das Bild sonst in triviale Zustände degeneriert.
- Regularisierung ist nötig (z.B. Glättung des Gradienten vor der Berechnung von  $c$ ).

## 1.7 Variationsmethoden: Totale Variation (TV)

Anstatt eine PDE (Partielle Differentialgleichung) ad-hoc zu definieren (wie Perona-Malik), definieren wir zuerst eine **Energie**, die minimiert werden soll. Das Minimum dieser Energie ist unser gewünschtes Bild.

### Energie-Funktional

Wir suchen ein Bild  $L$ , das die Energie  $E(L)$  minimiert:

$$E(L) = \underbrace{\int |\nabla L| dx dy}_{\text{Regularisierung}} + \frac{\lambda}{2} \underbrace{\int (g - L)^2 dx dy}_{\text{Datentreue}}$$

- **Datentreue-Term (Data Fidelity):**  $\lambda(g - L)^2$ . Zwingt das Ergebnis  $L$  dazu, nahe am verrauschten Input-Bild  $g$  zu bleiben.
- **Regularisierungs-Term:**  $\int |\nabla L|$ . Dies ist die **Totale Variation (TV)**.

### 1.7.1 Warum Totale Variation?

Im Gegensatz zur Tikhonov-Regularisierung ( $\int |\nabla L|^2$ ), die quadratisch bestraft und zu glatten Kanten führt (Blurring), bestraft die TV-Norm ( $\int |\nabla L|$ ) lineare Anstiege weniger stark.

- TV erlaubt **sprunghafte Änderungen** (Kanten) im Bild.
- Es favorisiert stückweise konstante Bilder („Cartoon-Look“).
- Rauschen (kleine Oszillationen) erhöht die TV enorm und wird daher entfernt.

- Kanten (einmaliger Sprung) erhöhen die TV nur moderat und bleiben erhalten.

### 1.7.2 Anwendungen

---

- **Denoising:** Entfernt Rauschen extrem effektiv ohne Kanten zu verwischen.
- **Inpainting:** Kann fehlende Bildteile (Löcher, Schriftzüge) rekonstruieren, indem die Kanten in den fehlenden Bereich „hineinpropagiert“ werden (Level-Lines-Fortsetzung).

## 1.8 Zusammenfassung der Verfahren

---

Methode	Vorteil	Nachteil
<b>Inverser Filter</b>	Theoretisch exakt ohne Rauschen	Extrem instabil bei Rauschen (nicht nutzbar)
<b>Wiener Filter</b>	Stabil, berücksichtigt SNR, schnell	Globaler Filter, verwischt Kanten oder lässt Rauschen übrig
<b>Lineare Diffusion</b> (Heat Eq.)	Entfernt Rauschen sehr gut	Verwische alle Kanten (Tiefpass)
<b>Perona-Malik</b>	Kantenerhaltend, lokal adaptiv	Instabil (Paradox), benötigt Stoppzeit, Stair-casing
<b>Totale Variation</b>	Exzellente Kantenerhaltung, keine Stoppzeit nötig	Bevorzugt stückweise konstante Areale (Cartoon-Effekt)