
Visual Computing

Niclas Kusenbach


LaTeX version:  SCHOUTER

Table of Contents

1 Einführung in Visual Computing	2	3.2.3 Prior und Likelihood in der Praxis	10
1.1 Grundlagen Visual Computing	2	3.3 Naive Bayes Klassifikator	10
1.2 Vier exemplarische Themenbereiche	2	3.3.1 Das Problem hoher Dimensionen	10
1.3 Wichtige Konzepte und Begriffe	2	3.3.2 Naive Bayes Entscheidungsregel	11
1.4 Empfohlene Literatur	2	3.4 Fallstudie: Gesichtsdetektion	11
1.5 Zusammenfassung	3	3.4.1 Sliding Window Ansatz	11
2 Wahrnehmung (Perception)	4	3.5 Erkennungsarten (Biometrie)	12
2.1 Motivation und Kognition (Motivation and Cognition)	4	4 Fouriertheorie	13
2.2 Das Visuelle System (The Visual System)	4	4.1 Motivation	13
2.2.1 Aufbau des Auges (Structure of the Eye)	4	4.2 Mathematische Grundlagen	13
2.2.2 Photorezeptoren (Photoreceptors)	5	4.3 Die Fourier-Reihe (Fourier Series)	13
2.3 Vorverarbeitung & Helligkeit (Preprocessing & Brightness)	6	4.3.1 Analogie zum Vektorraum	13
2.3.1 Signalverarbeitung in der Retina	6	4.3.2 Formeln der Fourier-Reihe	14
2.3.2 Optische Täuschungen (Optical Illusions)	6	4.4 Die Fourier-Transformation (FT)	14
2.3.3 Helligkeitswahrnehmung (Brightness Perception)	7	4.4.1 Wichtige Fourier-Transformationspaare	15
2.3.4 Auflösung und Kontrast (Resolution and Contrast)	7	4.5 Faltung und Filterung	15
2.4 Informationsextraktion: Tiefenwahrnehmung (Depth Perception)	7	4.5.1 Anwendung: Filterung	16
2.5 Aufmerksamkeit und Gedächtnis (Attention and Memory)	8	4.6 Abtastung von Signalen (Sampling)	16
3 Erkennung	9	4.6.1 Modell der Abtastung	16
3.1 Das Problem der Objekterkennung	9	4.6.2 Abtastung im Frequenzraum	16
3.1.1 Herausforderungen der Erkennung	9	4.6.3 Aliasing und das Abtasttheorem	16
3.1.2 Intuition: Wie funktioniert Erkennung?	9	4.7 Zusammenfassung der Konzepte	17
3.2 Bayes Decision Theory (BDT)	9		
3.2.1 Bayes-Entscheidungsregel (Fehlerminimierung)	10		
3.2.2 Likelihood Ratio Test (Spezialfall 2 Klassen)	10		

1 Einführung in Visual Computing

1.1 Grundlagen Visual Computing

Definition

Visual Computing ist die Kombination mehrerer Informatikbereiche, die im Wesentlichen mit Bildern und Modellen arbeiten.

- Umfasst **Computergrafik, Computer Vision, Mensch-Maschine-Interaktion, Mustererkennung und Maschinelles Lernen**.
- Enge Verbindung zwischen Computer Vision und Computer Graphics – keine getrennte Betrachtung.
- Zentrale Fragestellungen: Informationsgewinnung aus Daten, effiziente Extraktion relevanter Information.

1.2 Vier exemplarische Themenbereiche

1. **3D Internet:** Erweiterung des Dokumentbegriffs auf 3D-Modelle; Anwendungen in Bildung, Medizin, Kultur.
 - 3D-Web, AR/VR, digitale Kulturgüter, Metaverse.
 - Retro-Digitalisierung vs. Digital Creation (CultLab3D, Flickr-Photogrammetrie).
2. **Skalierbare Objektmodellierung und -erkennung:**
 - Ziel: Erkennung zehntausender Kategorien mittels semantischer Hierarchien.
 - Nutzung von Deep Learning (Convolutional NNs, Transferlernen, 3D-Objektdatenbanken).
3. **Big Data / Visual Analytics:**
 - Kombination von Datenanalyse, ML und Visualisierung zur explorativen Erkenntnisgewinnung.
 - Verarbeitung großer heterogener Datenmengen (z. B. 300 000 Flickr-Bilder von Rom).
4. **Scene Understanding (3D/4D):**
 - Modellierung und Analyse von Szenen in Raum und Zeit.
 - Kombination von Objekterkennung, Tracking, Semantik und Bewegungsanalyse.
 - Anwendungen: Autonomes Fahren, Robotik, Sicherheitsüberwachung, AAL.

1.3 Wichtige Konzepte und Begriffe

- **Deep Learning / Convolutional Networks** – Grundprinzipien, GPU-basierte Berechnungen.
- **Interpretierbarkeit (White-Box vs. Black-Box)** – KI-Erklärbarkeit, Bias und Ethik.
- **Visualisierung und Informationsvisualisierung** – Darstellung komplexer Daten.
- **3D Output und AR/VR Technologien** – z. B. Shapeways, Wikitude.
- **Digitale Kultur und Erhalt von Kulturgütern** – z. B. Project Mosul, 3D-Rekonstruktionen.

1.4 Empfohlene Literatur

Autor / Titel	Relevanz
Szeliski – <i>Computer Vision: Algorithms and Applications</i>	Fundamentale Algorithmen zur Bildverarbeitung und -analyse.

Blundell – <i>An Introduction to Computer Graphics</i>	Grundlagen der 3D-Darstellung.
Dix et al. – <i>Human Computer Interaction</i>	Basis für Mensch-Maschine-Schnittstellen.
Burger & Burke – <i>Digitale Bildverarbeitung – algorithmische Einführung</i>	Mathematische Grundlagen für Bildverarbeitung.

1.5 Zusammenfassung

- Visual Computing verbindet Grafik, Vision und Interaktion.
- Vier Kernbereiche (3D Internet, Objekterkennung, Visual Analytics, Scene Understanding) bilden die strukturierende Grundlage der Vorlesung und sind klausurrelevant.
- Verständnis der praktischen Beispiele und Übungen ist essentiell für die Klausur.

2 Wahrnehmung (Perception)

2.1 Motivation und Kognition (Motivation and Cognition)

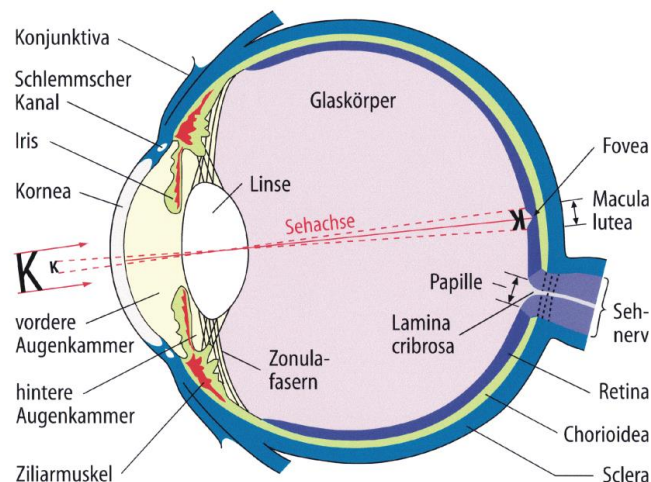
- **Warum VC? (Why VC?)** Die Leistungsfähigkeit von Rechnern wächst exponentiell (**Moore's Law**), aber die Kapazität von Menschen ist (fast) konstant (**Darwin's Law**). VC hilft, diese Lücke zu überbrücken.
- **Kognition (Cognition):** Sammelbegriff für alle Prozesse des Wahrnehmens und Erkennens (Denken, Erinnern, Lernen, etc.).
- **Modell der Informationsverarbeitung (Model of Information Processing):** Ein modulares 3-Stufenmodell:
 1. **Perception** (Wahrnehmung durch Sinne)
 2. **Decision** (Entscheidungsfindung im Gehirn)
 3. **Response** (Reaktion durch Körper)
- **Bearbeitungszeiten (Processing Times):** Jedes Untersystem benötigt Zeit.
 - Wahrnehmung (Perception): ≈ 100 ms
 - Entscheidung (Cognition): ≈ 70 ms
 - Reaktion (Motor): ≈ 70 ms
- **Wahrnehmung vs. Realität:** Was wir wahrnehmen, ist kein direktes Abbild der Realität, sondern eine partielle Hypothese, die auf unvollständiger Information basiert.

2.2 Das Visuelle System (The Visual System)

Visueller Reiz (Visual Stimulus)

Ein äußerer visueller Reiz ist **elektromagnetische Strahlung**. Sichtbares Licht liegt im Wellenlängenbereich von ca. 400nm (violett) bis 700nm (rot). Die Frequenz ν und Wellenlänge λ hängen über $\nu \cdot \lambda = c$ zusammen.

2.2.1 Aufbau des Auges (Structure of the Eye)



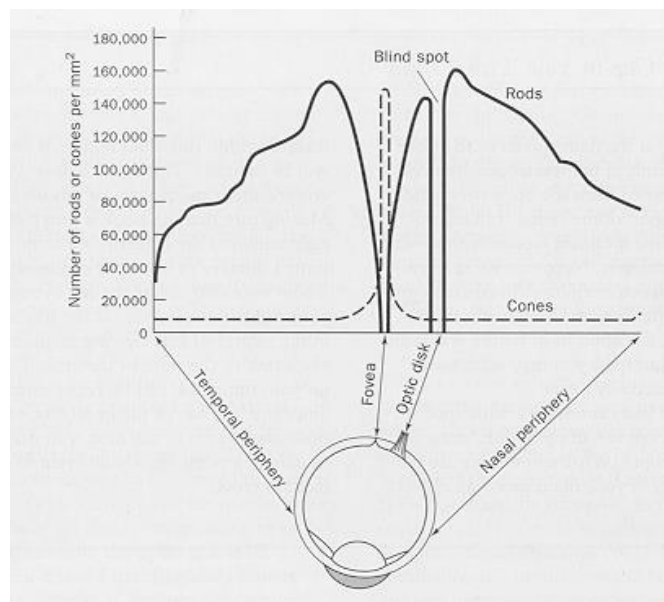
- **Optische Elemente:** Hornhaut (Kornea), Linse, Iris (Blende, 2-8mm), Glaskörper.

- **Linse (Lens):** Akkomodation (Scharfeinstellung).
- **Retina (Netzhaut):** Enthält die Photorezeptoren.
- **Fovea Centralis:** Bereich der höchsten Auflösung (im "gelben Fleck" / Macula lutea).
- **Blinder Fleck (Blind Spot):** Papilla nervi optici; Austrittspunkt des Sehnervs, keine Rezeptoren.

2.2.2 Photorezeptoren (Photoreceptors)

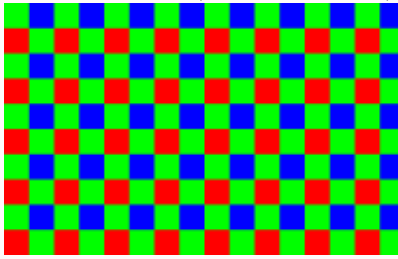
Es gibt zwei Haupttypen von Photorezeptoren auf der Retina:

- **Stäbchen (Rods):**
 - ca. 100-120 Mio.
 - Hauptsächlich außerhalb der Fovea.
 - Für **Nachtsehen (skotopisches Sehen)**.
 - Sehr lichtempfindlich, kein Farbsehen.
 - Empfindlichkeitsmaximum bei 498 nm (grün).
- **Zapfen (Cones):**
 - ca. 7-8 Mio.
 - Hauptsächlich **in der Fovea** (Bereich des schärfsten Sehens).
 - Für **Tagsehen (photopisches Sehen)**.
 - 3 Typen für Farbsehen:
 - * **S-Zapfen (Short):** Max. bei 420 nm (Blau).
 - * **M-Zapfen (Medium):** Max. bei 534 nm (Grün).
 - * **L-Zapfen (Long):** Max. bei 564 nm (Rot).



Bayer-Sensor

Digitale Kamerasensoren nutzen oft ein **Bayer-Muster**. Dies ist ein Farbfilter-Array, meist mit **50% Grün**, **25% Rot** und **25% Blau**. Grün ist privilegiert, da das menschliche Auge für Grün den größten Beitrag zur **Helligkeits- und Kontrastwahrnehmung** leistet (72% Grünanteil).

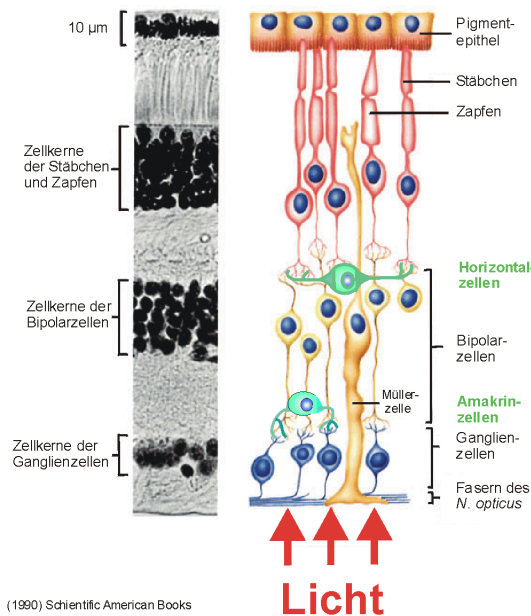


2.3 Vorverarbeitung & Helligkeit (Preprocessing & Brightness)

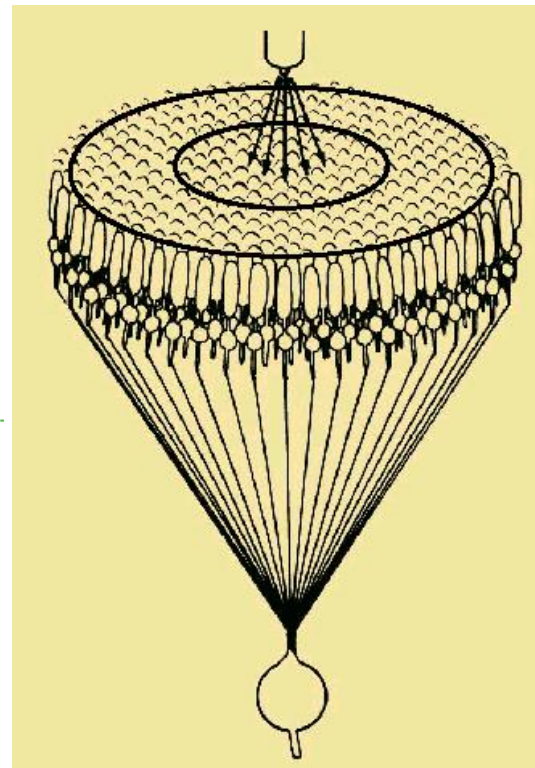
2.3.1 Signalverarbeitung in der Retina

Das Licht trifft (paradoxe Weise) erst auf die Ganglien- und Bipolarzellen, bevor es die Stäbchen und Zapfen erreicht.

- **Bipolar-Zellen:** Sammeln, gewichten und leiten Informationen weiter.
- **Horizontal- & Amakrin-Zellen:** Kombinieren Signale mehrerer Rezeptoren (räumlich) bzw. verarbeiten zeitliche Änderungen.
- **Ganglien-Zellen:** Integrieren Informationen, z.B. für **Kontrastwahrnehmung** durch Unterschied zwischen Zentrum und Peripherie (Center-Surround-Antagonismus).



(1990) Scientific American Books



2.3.2 Optische Täuschungen (Optical Illusions)

Diese frühe Signalverarbeitung führt zu Täuschungen, die zeigen, dass Wahrnehmung nicht objektiv ist:

- **Hermann-Gitter:** Graue Flecke erscheinen in den Kreuzungen eines weißen Gitters auf schwarzem Grund.

- **Mach-Bänder (Mach Bands):** An Kanten zwischen unterschiedlich hellen, aber homogenen Flächen werden helle/dunkle Bänder wahrgenommen, wo keine sind (eine Art "Überschwingen" der Wahrnehmung).
- **Simultankontrast (Simultaneous Contrast):** Die wahrgenommene Helligkeit einer Fläche hängt von der Helligkeit ihrer Umgebung ab. Ein identisches Grau erscheint auf schwarzem Grund heller als auf weißem Grund.

2.3.3 Helligkeitswahrnehmung (Brightness Perception)

- Helligkeit (Brightness) ist **keine absolute Größe**, sondern subjektiv.
- Sie ist u.a. abhängig von der Reizstärke (Leuchtdichte), der Adaption an vorherige Leuchtdichten und der Umgebungsleuchtdichte.
- **Weber-Fechnersches Gesetz:** Beschreibt den Zusammenhang zwischen Reizintensität (R) und Hellempfindung (L).
 - **Webersches Gesetz (Schwelle):** $\Delta L = \frac{\Delta R}{R} = \text{const.}$ (minimaler Kontrast für Wahrnehmung ca. 0.8%)
 - **Fechnersches Gesetz:** $L = c_1 \times \log R$
 - **Stevensches Gesetz (State-of-the-Art):** $E = c_2 \times R^k$ (für Licht $k = 0.3$)

2.3.4 Auflösung und Kontrast (Resolution and Contrast)

- **Sehschärfe (Visual Acuity):** Die Fähigkeit, kleine Details zu erkennen, ist begrenzt. Z.B. Punktschärfe ca. 1 Bogenminute ($1'$).
- **Kontrastempfindlichkeit (Contrast Sensitivity):** Gemessen mit Sinus-Mustern (sinusoidal gratings).
- **Contrast Sensitivity Function (CSF):** Beschreibt die Auflösung im Frequenzraum. Zeigt, dass das Auge für mittlere Ortsfrequenzen (ca. 2-5 Zyklen/Grad) am empfindlichsten ist und die Empfindlichkeit zu sehr hohen (Details) und sehr niedrigen Frequenzen (langsame Übergänge) abfällt.

2.4 Informationsextraktion: Tiefenwahrnehmung (Depth Perception)

Das visuelle System nutzt verschiedene Hinweisreize (**Depth Cues**), um Raumwahrnehmung zu erzeugen.

- **1. Binokulare Cues (Zwei Augen):**
 - **Disparität / Parallaxe:** Der Haupt-Cue. Da die Augen getrennt sind, sehen sie leicht unterschiedliche Bilder. Das Gehirn fusioniert diese.
 - **Positive Parallaxe:** Objekte erscheinen *hinter* der Bildebene.
 - **Negative Parallaxe:** Objekte erscheinen *vor* der Bildebene.
 - **Akkommodation** (Linsenanpassung) und **Konvergenz** (Augenstellung).
- **2. Pictorial Depth Cues (Monokular / Bildlich):**
 - **Linearperspektive:** Parallele Linien konvergieren in der Ferne.
 - **Verdeckung (Occlusion):** Ein Objekt, das ein anderes verdeckt, wird als näher wahrgenommen.
 - **Texturgradient:** Texturen werden mit der Entfernung dichter und feiner.
 - **Atmosphärische Tiefe:** Entfernte Objekte erscheinen blasser und bläulicher.
 - **Schattenwurf (Shadows):** Wichtig für Position und Form; Annahme: Licht kommt von oben.
 - Weitere: Fokus/Blur, Vertraute Größe, Höhe im Gesichtsfeld, etc..
- **3. Dynamische Depth Cues (Bewegung):**
 - **Bewegungsparallaxe (Motion Parallax):** Objekte, die näher sind, bewegen sich bei einer Kopfbewegung scheinbar schneller als entfernte Objekte.

- **Kinetischer Tiefeneffekt (Kinetic Depth Effect):** 3D-Struktur wird aus der 2D-Projektion einer Bewegung extrahiert (z.B. "Structure from Motion").

Die Depth Cues sind nicht redundant, sondern **additiv** und werden je nach Aufgabe (Task) **flexibel gewichtet**.

2.5 Aufmerksamkeit und Gedächtnis (Attention and Memory)

- **Frühe Wahrnehmung (Preattentive Processing):** Bestimmte Merkmale (Farbe, Größe, Richtung, Schattierung) werden sehr schnell (ca. ≈ 10 ms) und parallel verarbeitet, bevor die bewusste Aufmerksamkeit greift. **Verbindungen** von Merkmalen (z.B. "roter Kreis") erfordern Aufmerksamkeit.
- **Aufmerksamkeit (Attention):** Dient als **Filter** oder "Gateway to Memory".
- **Veränderungsblindheit (Change Blindness):** Unfähigkeit, große Änderungen in einer Szene zu bemerken, wenn die Aufmerksamkeit abgelenkt ist (z.B. durch Flimmern). Dies zeigt, dass wir kein vollständiges Bild der Welt im Kopf haben.
- **Arbeitsgedächtnis (Working Memory):**
 - Schneller Zugriff (ca. 70 ms), schneller Verfall (ca. 200 ms).
 - Sehr begrenzte Kapazität: 7 ± 2 "**Chunks**" (Miller, 1956).
 - "Chunks" sind sinnvolle Einheiten (z.B. DA, TU, VC, VL statt DATUVCVL).
- **Langzeitgedächtnis (Long-term Memory):**
 - Nahezu unbegrenzte Kapazität.
 - Langsamerer Zugriff (ca. 100 ms).

3 Erkennung

3.1 Das Problem der Objekterkennung

3.1.1 Herausforderungen der Erkennung

Menschliche Wahrnehmung ist Computern weit überlegen. Die Erkennung ist schwierig aufgrund von:

- **Mehrdeutigkeit & Illusionen:** (z.B. Don Quixote-Gesicht, Mona Lisa-Mosaik, ambivalente Elefantenbeine).
- **Tarnung & Verdeckung:** (z.B. Bev Doolittles Pferde im Schnee).
- **Kontext:** Die Interpretation von Teilen hängt stark vom Gesamtkontext ab (z.B. verschwommene Straßenszene, Punktwolken-Wörter).
- **Fehler im Kontext:** M.C. Escher-Bilder sind *lokal* konsistent, aber *global* unmöglich.

3.1.2 Intuition: Wie funktioniert Erkennung?

Objekterkennung basiert auf zwei Hauptkomponenten:

1. **Lokale Beschreibung / Merkmale:** (z.B. Augen, Nase, Mund bei einem Gesicht).
2. **Globale Anordnung der Merkmale:** (z.B. relative Positionen und Größen der Merkmale zueinander).

Weitere wichtige Aspekte sind Segmentierung und Szenenkontext.

Pictorial Structure (Fischler & Elschlager, 1973) Ein klassisches Modell zur Objekterkennung, das diese Intuition formalisiert.

- **Teile (Parts):** 2D-Bildfragmente (lokale Merkmale).
- **Aufbau (Structure):** Die Anordnung der Teile, oft modelliert durch "Federn", die die relative Position und Deformation beschränken.

Herausforderungen für dieses Modell sind **Deformationen** (Teile ändern ihre Position) und **Durcheinander** (Clutter, irrelevante Merkmale im Hintergrund).

3.2 Bayes Decision Theory (BDT)

Die BDT ist ein mathematisches Framework zur optimalen Entscheidungsfindung unter Unsicherheit. Ihr Ziel ist es, Klassifikationsentscheidungen so zu treffen, dass die **erwartete Fehlklassifikationsrate minimiert** wird. Sie nutzt dazu Wahrscheinlichkeiten als formale Beschreibung von Unsicherheit.

Die drei Kernkonzepte der BDT

1. **A Priori (Prior) $P(C_k)$:** Die Wahrscheinlichkeit einer Klasse C_k , *bevor* wir Daten x beobachtet haben. Der Prior kodiert unser Vorwissen oder unsere Erwartungen über die Häufigkeit von Klassen. Wichtig: Priors wirken wie ein "Bias" zugunsten bestimmter Klassen.
2. **Klassenspezifische Dichte (Likelihood) $p(x|C_k)$:** Die Wahrscheinlichkeit (genauer: Wahrscheinlichkeitsdichte), die Merkmalsausprägung x zu beobachten, *unter der Annahme*, dass die wahre Klasse C_k ist. Sie beschreibt also, wie typisch ein bestimmtes Datenmuster x für eine Klasse ist. Hinweis: Likelihood ist eine Funktion in x , nicht in der Klasse.
3. **A Posteriori (Posterior) $P(C_k|x)$:** Nachbeobachtete Wahrscheinlichkeit einer Klasse, *nachdem* wir x kennen. Dies ist genau die Größe, die wir für die eigentliche Entscheidung benötigen.

Bayes' Theorem (Verbindung der Konzepte)

$$P(C_k|x) = \frac{p(x|C_k) P(C_k)}{p(x)}$$

Die Evidenz

$$p(x) = \sum_j p(x|C_j) P(C_j)$$

stellt sicher, dass die Posterior-Wahrscheinlichkeiten normiert sind. Wichtig: Für die Entscheidung ist $p(x)$ oft irrelevant, da es für alle Klassen gleich ist.

$$\text{Posterior} = \frac{\text{Likelihood} \times \text{Prior}}{\text{Evidenz}}$$

3.2.1 Bayes-Entscheidungsregel (Fehlerminimierung)

Wir wählen die Klasse mit der größten posterioren Wahrscheinlichkeit:

$$C^*(x) = \arg \max_k P(C_k|x).$$

Da der Nenner $p(x)$ konstant ist, genügt:

$$C^*(x) = \arg \max_k p(x|C_k) P(C_k).$$

Intuition: Die Likelihood misst, wie gut die Daten zu einer Klasse passen; der Prior berücksichtigt, wie plausibel diese Klasse im Voraus ist. Der Schnittpunkt der Produkte $p(x|C_k)P(C_k)$ bildet die **Entscheidungsgrenze**.

3.2.2 Likelihood Ratio Test (Spezialfall 2 Klassen)

Für zwei Klassen C_1 und C_2 :

$$\text{Entscheide } C_1 \text{ wenn: } \frac{p(x|C_1)}{p(x|C_2)} > \frac{P(C_2)}{P(C_1)}.$$

Links: datengetriebene Evidenz, Rechts: Schwellwert aus Vorwissen. So sieht man explizit, wie ein starker Prior eine Entscheidung "umkippen" kann.

3.2.3 Prior und Likelihood in der Praxis

Die Trennung zwischen Datenmodell (Likelihood) und Vorwissen (Prior) ermöglicht robuste Modelle:

- **Spracherkennung:** Likelihood = akustisches Modell; Prior = Sprachmodell. Das Sprachmodell zieht uns aus akustischen Mehrdeutigkeiten heraus.
- **Bildverarbeitung:** Likelihood = Appearance Model; Prior = Kontextwissen über sinnvolle Objekte am Ort.

3.3 Naive Bayes Klassifikator

3.3.1 Das Problem hoher Dimensionen

Für d Merkmale:

$$x = (x_1, \dots, x_d)$$

müssten wir die gemeinsame Dichte $p(x|C_k)$ im d -dimensionalen Raum schätzen. Dies benötigt exponentiell viele Daten: **Fluch der Dimensionalität**. Schon wenige Dutzend Dimensionen machen klassische Dichteschätzung praktisch unmöglich.

Die Naive-Unabhängigkeitsannahme Um das Problem zu umgehen, wird angenommen:

$$p(x|C_k) = p(x_1, \dots, x_d|C_k) \approx \prod_{i=1}^d p(x_i|C_k).$$

Das heißt: Die Merkmale sind *bedingt unabhängig* gegeben die Klasse. Diese Annahme ist oft falsch, aber in vielen Anwendungen erstaunlich effektiv, weil:

- Abhängigkeiten zwischen Merkmalen sich teilweise gegenseitig ausgleichen,
- Die Entscheidung meist nur eine Rangordnung braucht (MAP), nicht exakte Wahrscheinlichkeiten.

3.3.2 Naive Bayes Entscheidungsregel

Durch Einsetzen der Zerlegung:

$$C^*(x) = \arg \max_k P(C_k) \prod_{i=1}^d p(x_i|C_k).$$

Lernen bedeutet:

1. Schätzen der Priors $P(C_k)$ (Häufigkeiten).
2. Schätzen der eindimensionalen Dichten $p(x_i|C_k)$ für alle Merkmale und Klassen.

Log-Space (Numerische Stabilität) Da Produkte kleiner Wahrscheinlichkeiten numerisch instabil sind:

$$C^*(x) = \arg \max_k \left[\log P(C_k) + \sum_{i=1}^d \log p(x_i|C_k) \right].$$

Logarithmen ersetzen Multiplikationen durch Additionen, ohne die Entscheidung zu verändern.

3.4 Fallstudie: Gesichtsdetektion

Ein Beispiel für **Appearance-Based Methods**: Modelle werden direkt aus (großen) Bilddatensammlungen gelernt.

3.4.1 Sliding Window Ansatz

- Ein Fenster (z.B. 19×19 Pixel) wird über das gesamte Bild geschoben.
- Bei jeder Position wird entschieden: "Gesicht" (C_1) oder "Kein Gesicht" (C_2).
- Das Bild wird skaliert (z.B. Faktor 1.2 verkleinert) und der Vorgang wiederholt sich, um Gesichter aller Größen zu finden.

Fallstudie: Schneiderman & Kanade (1998) Ein sehr erfolgreicher Gesichtsdetektor, der auf Naive Bayes basiert.

- **1. Repräsentation (Merkmale x_i): Wavelet-Koeffizienten** an bestimmten Frequenzen, Orientierungen und **Positionen** (f_i, u_i, v_i). Dies kodiert sowohl lokale Merkmale (Kanten) als auch deren globale Anordnung (Position).
- **2. Trainingsdaten:**
 - *Positive Beispiele* (C_1): Tausende von Bildern, die Gesichter enthalten (normalisiert).
 - *Negative Beispiele* (C_2): Tausende von Bildern, die *keine* Gesichter enthalten.
- **3. Klassifikator & Lernen:** Naive Bayes. Das "Lernen" besteht darin, die Wahrscheinlichkeiten $P(x_i|C_{\text{face}})$ und $P(x_i|C_{\text{non-face}})$ für jedes Merkmal x_i zu schätzen. Dies geschieht durch **Zählen (Erstellen von Histogrammen)** in den positiven und negativen Trainingsdatensätzen.
- **Multi-View:** Um Gesichter aus verschiedenen Winkeln zu erkennen, werden separate Detektoren trainiert (z.B. Frontal, Linksprofil, Rechtsprofil) und die Ergebnisse kombiniert.

3.5 Erkennungsarten (Biometrie)

Gesichtserkennung ist ein biometrisches Verfahren. Man muss zwischen verschiedenen Aufgaben unterscheiden:

- **Detektion:** (Face vs. Non-Face) Ist überhaupt ein Objekt (Gesicht) vorhanden?
- **Verifikation (1:1):** "Bin ich das?" (z.B. Smartphone entsperren).
 - Eine Person gibt ihre Identität an (z.B. Nutzer-ID).
 - Das System vergleicht die aktuelle Probe **nur mit dem einen** gespeicherten Template dieser ID.
 - Ausgabe: Ja / Nein.
- **Identifikation (1:n):** "Wer ist das?" (z.B. Überwachung).
 - Eine Person zeigt nur ihr Merkmal (Gesicht).
 - Das System vergleicht die Probe mit **allen n** Templates in der Datenbank.
 - Ausgabe: Eine Kandidatenliste (die m besten Treffer, $m \ll n$).

4 Fouriertheorie

4.1 Motivation

Die Fouriertheorie bietet eine neue Perspektive, um Signale und Funktionen zu analysieren, indem sie vom **Ortsraum** (z.B. Position, Zeit) in den **Frequenzraum** (z.B. Frequenz, Wellenlänge) wechselt .

- **Beispiele:**

- **Optik/Physik:** Lichtbeugung an einem Spalt. Ein Spalt kann mathematisch als **Rechteckfunktion** ($rect(x)$) beschrieben werden . Das resultierende Beugungsmuster (die Amplitudenverteilung) $B(\varphi)$ hat die Form einer **sinc-Funktion** ($\frac{\sin x}{x}$) . Die gemessene Intensität $I(x)$ ist proportional zum Quadrat der Amplitude ($I \propto B^2$), also eine $sinc^2$ -Funktion .
- **Medizintechnik (MRT):** Ein MR-Scanner misst direkt Frequenzmuster im Fourierraum .
- **Menschliche Wahrnehmung:** Die Kontrastempfindlichkeit des Auges wird im Frequenzraum gemessen, oft mittels sinusförmiger Muster (sinusoidal gratings) .
- **Kernidee:** Es besteht ein direkter Zusammenhang zwischen der Gestalt eines Objekts (Ortsraum) und seiner Amplitudenfunktion (Frequenzraum) . Dieser Zusammenhang ist die **Fourier-Transformation** .
- **Erstes Fourier-Paar:** $rect(x) \xrightarrow{FT} sinc(u)$.

4.2 Mathematische Grundlagen

- **Vektorraum (R^n):** Ein Raum, in dem Vektoren addiert und skalar multipliziert werden können .
- **Skalarprodukt:** Definiert Längen und Winkel. $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i$.
- **Basis:** Ein Satz linear unabhängiger Vektoren (z.B. \vec{e}_1, \vec{e}_2), die den Raum aufspannen . Jeder Vektor \vec{v} ist eine Linearkombination der Basis: $\vec{v} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2$.
- **Funktionenräume:**
 - Die Elemente sind nun **Funktionen** statt Vektoren .
 - Diese Räume sind i.d.R. **unendlich-dimensional** .
 - **Ziel:** Finde **Basisfunktionen**, um (beliebige) Funktionen als Linearkombination dieser Basen darzustellen. Dies leistet die **Fouriertheorie**.

4.3 Die Fourier-Reihe (Fourier Series)

Grundidee der Fourier-Reihe

Jede **2π -periodische Funktion** $f(x)$, die die **Dirichlet-Bedingungen** erfüllt, kann als unendliche Summe (Überlagerung) von Sinus- und Kosinusfunktionen dargestellt werden .

Dirichlet-Bedingungen :

1. Endliche Anzahl von Unstetigkeiten pro Periode .
2. Endliche Anzahl von Maxima und Minima pro Periode .
3. In jeder Periode integrierbar (d.h. $\int |f(x)| dx < \infty$ pro Periode) .

4.3.1 Analogie zum Vektorraum

- **Skalarprodukt für Funktionen:** $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$.

- **Orthogonale Basis:** Die Funktionen $u_n(t) = \cos(nt)$ und $v_n(t) = \sin(nt)$ bilden eine **orthogonale Basis** im Funktionenraum H . Das bedeutet, ihr Skalarprodukt ist 0, wenn sie nicht identisch sind (z.B. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) \sin(mt) dt = 0 \forall n, m$).

4.3.2 Formeln der Fourier-Reihe

Reelle Fourier-Reihe

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Die **Fourier-Koeffizienten** a_n, b_n werden durch Projektion von $f(x)$ auf die Basisfunktionen berechnet:

- $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ (Der "Gleichanteil" oder Mittelwert)
- $a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx$ (für $m > 0$)
- $b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx$

- **Symmetrie-Eigenschaften:**

- **Gerade Funktion** ($f(-t) = f(t)$, z.B. $\cos(x)$): Alle **$b_n = 0$** .
- **Ungerade Funktion** ($f(-t) = -f(t)$, z.B. $\sin(x)$): Alle **$a_n = 0$** (inkl. a_0).

- **Beispiel (Rechteck-Schwingung):** Dies ist eine ungerade Funktion. Daher sind alle $a_n = 0$. Die b_n Koeffizienten sind $\frac{4k}{n\pi}$ für ungerade n und 0 für gerade n .

$$f(x) = \frac{4k}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \dots \right)$$

(Die Folien 39-43 visualisieren, wie diese Summe die Rechteckfunktion approximiert).

Komplexe Fourier-Reihe

Mit der Euler-Identität ($e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$ und $e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx)$) lässt sich die Reihe kompakter schreiben:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

4.4 Die Fourier-Transformation (FT)

Motivation der Fourier-Transformation

Erweiterung der Fourier-Reihe auf **nicht-periodische Funktionen**.

Dies geschieht durch einen Grenzübergang: Die Periode L der Funktion wird unendlich groß ($L \rightarrow \infty$).

Dabei wird die **diskrete Summe** der Fourier-Reihe (über n) zu einem **kontinuierlichen Integral** (über u). Das Spektrum ist nicht mehr diskret (Vielfache einer Grundfrequenz), sondern **kontinuierlich**.

Das Fourier-Transformationspaar

- **Fourier-Transformation (FT):** (Analyse: Ortsraum \rightarrow Frequenzraum)

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i u t} dt$$

- **Inverse Fourier-Transformation (iFT):** (Synthese: Frequenzraum \rightarrow Ortsraum)

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{+2\pi i u x} du$$

$f(x)$ ist oft reell, aber $F(u)$ ist i.d.R. komplex: $F(u) = \operatorname{Re}(F(u)) + i \operatorname{Im}(F(u))$.

4.4.1 Wichtige Fourier-Transformationspaare

- **Rechteck-Funktion \leftrightarrow sinc-Funktion:**

– $f(x) = \operatorname{rect}(x)$

– $F(u) \propto \operatorname{sinc}(u)$

- **Dirac-Delta-Distribution \leftrightarrow Konstante:**

– Die **Dirac-Delta-Distribution** $\delta(t)$ ist keine Funktion, sondern eine Distribution, definiert durch ihre **”Sampling-Eigenschaft”**: $\int f(t) \delta(t - t') dt = f(t')$.

– $f(x) = \delta(x) \xrightarrow{FT} F(u) = 1$ (Ein Impuls im Ort enthält alle Frequenzen)

– $f(x) = K \xrightarrow{FT} F(u) = K \cdot \delta(u)$ (Eine Konstante im Ort ist nur die Frequenz 0)

- **Kosinus \leftrightarrow Zwei Delta-Peaks:**

– $f(x) = \cos(kx)$

– $F(u) \propto (\delta(u - k) + \delta(u + k))$

– Eine reine Schwingung im Ortsraum entspricht zwei scharfen Peaks (diskreten Frequenzen) im Frequenzraum.

4.5 Faltung und Filterung

Faltung (Convolution)

Das Faltungsintegral $h(t)$ zweier Funktionen f und g ist definiert als:

$$h(t) = (f \circ g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(t - x) dx$$

Graphisch entspricht dies einer ”Spiegelung, Verschiebung, Multiplikation und Integration”.

- Bsp: $\operatorname{rect}(x) \circ \operatorname{rect}(x) = \operatorname{triangle}(x)$.

Der Faltungssatz (Convolution Theorem)

Dies ist einer der wichtigsten Sätze der Fouriertheorie:

- Eine **Faltung im Ortsraum** entspricht einer **Multiplikation im Frequenzraum**.
- Eine **Multiplikation im Ortsraum** entspricht einer **Faltung im Frequenzraum**.

$$h(t) = f(t) \circ g(t) \xrightarrow{FT} H(u) = F(u) \cdot G(u)$$

4.5.1 Anwendung: Filterung

Der Faltungssatz ist die Grundlage für effiziente Filterung :

1. Ein Signal $f(x)$ soll gefiltert werden .
2. Anstatt eine aufwändige Faltung im Ortsraum ($f \circ g$) durchzuführen...
3. ...transformiert man Signal ($f \rightarrow F$) und Filterfunktion ($g \rightarrow G$) in den Frequenzraum .
4. Dort wird eine **einfache Multiplikation** durchgeführt: $H(u) = F(u) \cdot G(u)$.
5. Das Ergebnis $H(u)$ wird zurück in den Ortsraum transformiert ($H \rightarrow h$), um das gefilterte Signal $h(x)$ zu erhalten .

Dies ist oft (via *Fast Fourier Transform*, FFT) viel schneller als die direkte Faltung.

4.6 Abtastung von Signalen (Sampling)

4.6.1 Modell der Abtastung

- **Problem:** Ein kontinuierliches Signal $f(x)$ muss in diskrete Werte $f(n\Delta x)$ für die digitale Verarbeitung umgewandelt werden .
- **Mathematisches Modell:** Abtastung ist eine **Multiplikation** des Signals $f(x)$ mit einer **Kamm-Funktion** (einer Kette von δ -Impulsen im Abstand Δx) .

$$\hat{f}(x) = f(x) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n \cdot \Delta x)$$

4.6.2 Abtastung im Frequenzraum

- Laut Faltungssatz (Multiplikation im Ortsraum \rightarrow Faltung im Frequenzraum) wird das Spektrum $F(u)$ des Signals mit der FT der Kamm-Funktion gefaltet.
- Die FT einer Kamm-Funktion (Abstand Δx) ist wieder eine Kamm-Funktion (Abstand $1/\Delta x$).
- **Folge:** Das Spektrum $\hat{F}(u)$ des abgetasteten Signals ist eine **periodische Wiederholung** des Originalspektrums $F(u)$, wobei die Kopien den Abstand $1/\Delta x$ haben .

4.6.3 Aliasing und das Abtasttheorem

Angenommen, das Signal ist **bandbegrenzt**, d.h. seine höchste Frequenz ist u_G ($F(u) = 0$ für $|u| > u_G$) .

- **Fall 1: Korrekte Abtastung** ($1/\Delta x > 2u_G$)
 - Die Abtastfrequenz ($1/\Delta x$) ist mehr als doppelt so hoch wie die maximale Signalfrequenz (u_G) .
 - Die periodischen Kopien von $F(u)$ im Frequenzraum **überlappen nicht** .
 - Das Originalsignal kann **fehlerfrei rekonstruiert** werden (z.B. durch einen Tiefpassfilter, der nur die zentrale Kopie isoliert) .
- **Fall 2: Unterabtastung** ($1/\Delta x < 2u_G$)
 - Die Abtastfrequenz ist zu niedrig .
 - Die Kopien von $F(u)$ **überlappen sich** .
 - In den Überlappungsbereichen addieren sich Frequenzen. Hohe Frequenzen "erscheinen" fälschlicherweise als niedrige Frequenzen.
 - Dieser irreversible Fehler wird **Aliasing** genannt . (z.B. Wagenrad-Effekt bei Filmen , Moiré-Muster) .

Abtasttheorem von Whittaker-Shannon

Eine bandbegrenzte Funktion (höchste Frequenz u_G) kann aus ihren Abtastwerten $f(n\Delta x)$ fehlerfrei rekonstruiert werden, wenn die Abtastfrequenz $f_s = 1/\Delta x$ **mindestens doppelt so hoch** wie die höchste Signalfrequenz u_G ist .

$$f_s > 2u_G \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\Delta x} > 2u_G$$

Die Frequenz $2u_G$ wird als **Nyquist-Frequenz** bezeichnet.

4.7 Zusammenfassung der Konzepte

- **Fourier-Reihe:**

- **Für:** 2π -periodische Funktionen .
- **Spektrum:** **Diskret** (Vielfache einer Grundfrequenz) .
- **Formel:** $f(x) = \sum c_n e^{inx}$.

- **Fourier-Transformation:**

- **Für:** Nicht-periodische Funktionen .
- **Spektrum:** **Kontinuierlich** .
- **Formel:** $F(u) = \int f(t) e^{-2\pi i u t} dt$.

- **Faltungssatz:**

- $f(t) \circ g(t) \longleftrightarrow F(u) \cdot G(u)$
- Ermöglicht effiziente **Filterung** im Frequenzraum .

- **Abtasttheorem:**

- Abtastung (Multiplikation mit δ -Kamm) im Ortsraum \rightarrow Periodisierung (Faltung mit δ -Kamm) im Frequenzraum .
- Zur Rekonstruktion muss die Abtastfrequenz f_s größer als die doppelte maximale Signalfrequenz u_G sein ($f_s > 2u_G$), um **Aliasing** zu vermeiden .