Übung 8

Niclas Kusenbach, 360227

19th January 2026

Aufgabe 1: Rationalität und Wahrscheinlichkeitsaxiome

1a) Überprüfung der Rationalität

Gegeben sind die Überzeugungen:

$$P(A) = 0.4, \quad P(B) = 0.3, \quad P(A \vee B) = 0.5$$

Wir prüfen dies mit dem **Additionssatz** (Inklusions-Exklusions-Prinzip):

$$P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$$

Einsetzen der Werte:

$$0.5 = 0.4 + 0.3 - P(A \wedge B)$$
$$0.5 = 0.7 - P(A \wedge B)$$
$$P(A \wedge B) = 0.2$$

Da $0 \leq P(A \wedge B) \leq \min(P(A), P(B))$ gelten muss (und $0 \leq 0.2 \leq 0.3$ wahr ist), sind diese Überzeugungen **rational** und konsistent mit den Wahrscheinlichkeitsaxiomen.

Antwort: Ja, es ist rational. Der angenommene Wert für $P(A \wedge B)$ ist exakt **0.2**. (Der „Bereich" kollabiert hier zu einem Punktwert).

1b) Fall $P(A \vee B) = 0.7$

Wir nehmen nun an $P(A \vee B) = 0.7$. Wir wenden erneut den Additionssatz an:

$$0.7 = 0.4 + 0.3 - P(A \wedge B)$$
$$0.7 = 0.7 - P(A \wedge B)$$
$$P(A \wedge B) = 0$$

Erklärung: Diese Wahrscheinlichkeit ist **ebenfalls rational**. Es bedeutet lediglich, dass die Ereignisse A und B **disjunkt** (einander ausschließend) sind. Es gibt keine Überschneidung der Ereignisse, was in der Wahrscheinlichkeitstheorie ein valider Zustand ist.

Aufgabe 2: Wahrscheinlichkeitstheorie

2a) Äquivalenz der bedingten Unabhängigkeit

Zu zeigen ist die Äquivalenz von:
(1) $P(a, b|c) = P(a|c) \cdot P(b|c)$
(2) $P(a|b, c) = P(a|c)$
(3) $P(b|a, c) = P(b|c)$

Beweis (1) ⇔ (2): Nach der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit gilt:

$$P(a|b, c) = \frac{P(a, b|c)}{P(b|c)}$$

Setzt man (1) in den Zähler ein:

$$P(a|b, c) = \frac{P(a|c) \cdot P(b|c)}{P(b|c)} = P(a|c)$$

Damit ist (2) gezeigt. Umgekehrt führt Multiplikation von (2) mit $P(b|c)$ direkt zu (1).

Beweis (1) ⇔ (3): Analog gilt:

$$P(b|a, c) = \frac{P(a, b|c)}{P(a|c)}$$

Setzt man (1) ein:

$$P(b|a, c) = \frac{P(a|c) \cdot P(b|c)}{P(a|c)} = P(b|c)$$

Damit ist die Äquivalenz aller drei Aussagen gezeigt.

2b) Bestimmung von $P(h|e_1, e_2)$

Gesucht ist $P(h|e_1, e_2) = \frac{P(e_1,e_2|h)P(h)}{P(e_1,e_2)}$.

1. **Gegeben:** $P(E_1, E_2), P(H), P(E_1|H), P(E_2|H)$
   Nicht ausreichend. Wir benötigen $P(e_1, e_2|h)$. Da wir ohne weitere Annahmen (wie bedingte Unabhängigkeit) nicht von den Randwahrscheinlichkeiten $P(E_1|H)$ und $P(E_2|H)$ auf die Verbundwahrscheinlichkeit $P(E_1, E_2|H)$ schließen können, fehlt Information.
2. **Gegeben:** $P(E_1, E_2), P(H), P(E_1, E_2|H)$
   Ausreichend. Wir haben alle Terme für den Satz von Bayes:
   $$P(h|e_1, e_2) = \frac{P(e_1, e_2|h) \cdot P(h)}{P(e_1, e_2)}$$
3. **Gegeben:** $P(E_1|H, E_2), P(E_1), P(E_2|H), P(H|E_1)$
   Nicht ausreichend. Es ist schwierig, den gemeinsamen Nenner $P(e_1, e_2)$ oder den Zähler konsistent zu konstruieren, ohne $P(h)$ direkt zu haben oder die Abhängigkeit zwischen e_1 und e_2 vollständig zu kennen.

2c) Annahme: $P(E_1|H, E_2) = P(E_1|H)$

Dies impliziert bedingte Unabhängigkeit: $E_1 \perp E_2 \mid H$. Daraus folgt: $P(e_1, e_2|h) = P(e_1|h) \cdot P(e_2|h)$.

Neue Bewertung für 2b):

1. **Jetzt ausreichend.** Da $P(e_1, e_2|h)$ nun das Produkt $P(e_1|h)P(e_2|h)$ ist (beide gegeben), und $P(h)$ sowie $P(e_1, e_2)$ gegeben sind, ist die Berechnung möglich.
2. **Weiterhin ausreichend.** (Die zusätzliche Annahme schadet nicht).
3. **Jetzt ausreichend.** Wir müssen $P(h|e_1, e_2) \propto P(h)P(e_1|h)P(e_2|h)$ berechnen.
    - $P(e_2|h)$ ist gegeben.
    - $P(e_1|h)$ ist gegeben (da $P(e_1|H, E_2) = P(e_1|H)$).
    - $P(h)$ kann hergeleitet werden: Aus $P(h|e_1) = \frac{P(e_1|h)P(h)}{P(e_1)}$ folgt $P(h) = \frac{P(h|e_1)P(e_1)}{P(e_1|h)}$. Alle Terme rechts sind gegeben.
    - Der Nenner $P(e_1, e_2)$ ergibt sich durch Marginalisierung über H: $\sum_h P(h)P(e_1|h)P(e_2|h)$.