# Übung 4: Gruppe 28

Niclas Kusenbach, 360227 Alicia Bayerl, 2633336
Mohamed Naceur Hedhili, 2957151 Selma Naz Öner, 2662640

November 19, 2025

## Aufgabe 4.1: Quiz

### a) (vgl. Slide 23)

- **Falsch:** Die Anzahl der Unstetigkeiten innerhalb einer Periode ist unendlich.
  $\rightarrow$ Es gibt eine endliche Anzahl von Unstetigkeiten innerhalb einer Periode.
- **Richtig:** Die Anzahl der Maxima und Minima innerhalb einer Periode ist endlich.
- **Falsch:** Die Funktion ist nicht in jeder Periode integrierbar.
  $\rightarrow$ Die Funktion ist in jeder Periode integrierbar (d.h., die Fläche unter dem Betrag der Funktion ist in jeder Periode endlich)

### b) Fourier Darstellung (vgl. Slide 61)

Die Fourier Darstellung ist die Zerlegung einer Funktion in ihre Frequenzbestandteile.

### c) (vgl. Slide 70)

Einer Faltung im **Ortsraum** entspricht einer **Multiplikation** im Frequenzraum.

## 4.2: Fourier Reihen

### a) Theoretischer Teil: Symmetrieeigenschaften

#### Bestimmten Sie, wann eine Funktion gerade und ungerade ist. (vgl. Slide 44)

Gerade Funktion: $f(-t) = f(t)$
Ungerade Funktion: $f(-t) = -f(t)$

**Geben Sie an, wie sich die Koeffizienten $a_n$ (für $n \geq 0$) und $b_n$ (für $n \geq 1$) für gerade Funktionen vereinfachen. (vgl. Slide 35, 37, 45)**

Für gerade Funktionen sind alle $b_n = 0$ und $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \qquad n \geq 0$

**Geben Sie an, wie sich die Koeffizienten $a_n$ (für $n \geq 0$) und $b_n$ (für $n \geq 1$) für ungerade Funktionen vereinfachen. (vgl. Slide 35, 37, 45)**

Für ungerade Funktionen sind alle $a_n = 0$, $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \qquad (n \geq 1)$.

## b) Praktischer Teil: Anwendung der Symmetrie

**Gegeben:** $f(x) = x$ im Intervall $[-\pi, \pi]$
**Gesucht:** $a_0,\ a_n,\ b_n$ für $n \geq 1$

### Symmetrieprüfung

$f(x) = x$ ist ungerade, da

$$f(-x) = -x = -f(x)$$

Deshalb vereinfachen sich die Fourierkoeffizienten auf:

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0.$$

### Berechnung von $b_n$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

Da $f(x)$ und $\sin(nx)$ ungerade sind, ist das Produkt grade. Vereinfacht:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx)\, dx$$

### Partielle Integration

$$u = x \Rightarrow u' = 1 v' = sin(nx) \Rightarrow v = -\frac{1}{n} \cos(nx)$$

$$\int x \sin(nx) dx = \left[ x \left( -\frac{1}{n} \cos(nx) \right) \right] - \int 1 \left( -\frac{1}{n} \cos(nx) \right) dx$$

1. $-\frac{x}{n} \cos(nx)$
2. $\frac{1}{n} \int \cos(nx) dx = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \sin(nx) = \frac{1}{n^2} \sin(nx)$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos(nx) + \frac{1}{n^2}\sin(nx)\right]_0^\pi \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos(n\pi) + \frac{1}{n^2}\sin(n\pi) - \left(-\frac{0}{n}\cos(0) + \frac{1}{n^2}\sin(0)\right)\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos(n\pi)\right) \\
&= -\frac{2}{n}\cos(n\pi)
\end{aligned}
$$

Da $\cos(n\pi) = (-1)^n$,

$$
b_n = -\frac{2}{n}(-1)^n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}
$$

**Ergebnis**

Die Fourier-Reihe lautet somit:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(0\cos(nx) + \frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin(nx)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin(nx)
\end{aligned}
$$

## 4.3: Faltung und Filterung

### a) Suche über Raum und Skalierung (vgl. Slide 68)

Der Ansatz heißt Sliding-Window-Approach.

### b) Schritte (vgl. Slide 68)

1. Ein Eingabebild wird in Ein-Pixel-Schritten horizontal und vertikal gescannt
2. Das Bild wird um den Faktor 1,2 verkleinert, die Suche wiederholt
3. Wiederholung

## 4.4: Komplexe Zahlen

$$
z_1 = 7 - 3i, \quad z_2 = 7 + 5i
$$

$$
\begin{aligned}
z_3 &= z_1 \cdot z_2 \\
&= (7-3i)(7+5i) \\
&= 7 \cdot 7 + 7 \cdot 5i - 3i \cdot 7 - 3i \cdot 5i \\
&= 49 + 35i - 21i - 15i^2 \\
&= 49 + 14i - 15i^2
\end{aligned}
$$

Da $i^2 = -1$, gilt:

$$
\begin{aligned}
z_3 &= 49 + 14i - 15 \cdot (-1) \\
&= 49 + 14i + 15 \\
&= 64 + 14i
\end{aligned}
$$