1 Fouriertheorie

1.1 Motivation

Die Fouriertheorie bietet eine neue Perspektive, um Signale und Funktionen zu analysieren, indem sie vom **Ortsraum** (z.B. Position, Zeit) in den **Frequenzraum** (z.B. Frequenz, Wellenlänge) wechselt.

- **Beispiele:**
  - **Optik/Physik:** Lichtbeugung an einem Spalt. Ein Spalt kann mathematisch als **Rechteckfunktion** ($rect(x)$) beschrieben werden. Das resultierende Beugungsmuster (die Amplitudenverteilung) $B(\varphi)$ hat die Form einer **sinc-Funktion** ($\frac{\sin x}{x}$). Die gemessene Intensität $I(x)$ ist proportional zum Quadrat der Amplitude ($I \propto B^2$), also eine $sinc^2$-Funktion.
  - **Medizintechnik (MRT):** Ein MR-Scanner misst direkt Frequenzmuster im Fourierraum.
  - **Menschliche Wahrnehmung:** Die Kontrastempfindlichkeit des Auges wird im Frequenzraum gemessen, oft mittels sinusförmiger Muster (sinusoidal gratings).
- **Kernidee:** Es besteht ein direkter Zusammenhang zwischen der Gestalt eines Objekts (Ortsraum) und seiner Amplitudenfunktion (Frequenzraum). Dieser Zusammenhang ist die **Fourier-Transformation**.
- **Erstes Fourier-Paar:** $rect(x) \xrightarrow{FT} sinc(u)$.

1.2 Mathematische Grundlagen

- **Vektorraum (R^n):** Ein Raum, in dem Vektoren addiert und skalar multipliziert werden können.
- **Skalarprodukt:** Definiert Längen und Winkel. $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$.
- **Basis:** Ein Satz linear unabhängiger Vektoren (z.B. $\vec{e}_1, \vec{e}_2$), die den Raum aufspannen. Jeder Vektor $\vec{v}$ ist eine Linearkombination der Basis: $\vec{v} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$.
- **Funktionenräume:**
  - Die Elemente sind nun **Funktionen** statt Vektoren.
  - Diese Räume sind i.d.R. **unendlich-dimensional**.
  - **Ziel:** Finde **Basisfunktionen**, um (beliebige) Funktionen als Linearkombination dieser Basen darzustellen. Dies leistet die **Fouriertheorie**.

1.3 Die Fourier-Reihe (Fourier Series)

Grundidee der Fourier-Reihe

Jede **2π-periodische Funktion** $f(x)$, die die **Dirichlet-Bedingungen** erfüllt, kann als unendliche Summe (Überlagerung) von Sinus- und Kosinusfunktionen dargestellt werden.
Dirichlet-Bedingungen :
1. Endliche Anzahl von Unstetigkeiten pro Periode.
2. Endliche Anzahl von Maxima und Minima pro Periode.
3. In jeder Periode integrierbar (d.h. $\int |f(x)|dx < \infty$ pro Periode).

1.3.1 Analogie zum Vektorraum

- **Skalarprodukt für Funktionen:** $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$.

- **Orthogonale Basis:** Die Funktionen $u_n(t) = \cos(nt)$ und $v_n(t) = \sin(nt)$ bilden eine **orthogonale Basis** im Funktionenraum H. Das bedeutet, ihr Skalarprodukt ist 0, wenn sie nicht identisch sind (z.B. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\sin(mt)dt = 0\ \forall n, m$).

1.3.2 Formeln der Fourier-Reihe

Reelle Fourier-Reihe

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Die **Fourier-Koeffizienten** a_n, b_n werden durch Projektion von $f(x)$ auf die Basisfunktionen berechnet:

- $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ (Der "Gleichanteil" oder Mittelwert)
- $a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx$ (für $m > 0$)
- $b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)dx$

- **Symmetrie-Eigenschaften:**
  - **Gerade Funktion** ($f(-t) = f(t)$, z.B. $\cos(x)$): Alle $b_n = 0$.
  - **Ungerade Funktion** ($f(-t) = -f(t)$, z.B. $\sin(x)$): Alle $a_n = 0$ (inkl. a_0).
- **Beispiel (Rechteck-Schwingung):** Dies ist eine ungerade Funktion. Daher sind alle $a_n = 0$. Die b_n Koeffizienten sind $\frac{4k}{n\pi}$ für ungerade n und 0 für gerade n.

$$f(x) = \frac{4k}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \dots\right)$$

(Die Folien 39-43 visualisieren, wie diese Summe die Rechteckfunktion approximiert).

Komplexe Fourier-Reihe

Mit der Euler-Identität ($e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$ und $e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$) lässt sich die Reihe kompakter schreiben :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

1.4 Die Fourier-Transformation (FT)

Motivation der Fourier-Transformation

Erweiterung der Fourier-Reihe auf **nicht-periodische Funktionen**.
Dies geschieht durch einen Grenzübergang: Die Periode L der Funktion wird unendlich groß ($L \to \infty$).
Dabei wird die **diskrete Summe** der Fourier-Reihe (über n) zu einem **kontinuierlichen Integral** (über u).
Das Spektrum ist nicht mehr diskret (Vielfache einer Grundfrequenz), sondern **kontinuierlich**.

Das Fourier-Transformationspaar

- **Fourier-Transformation (FT):** (Analyse: Ortsraum → Frequenzraum)

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi iut}dt$$

- **Inverse Fourier-Transformation (iFT):** (Synthese: Frequenzraum → Ortsraum)

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{+2\pi iux}du$$

$f(x)$ ist oft reell, aber $F(u)$ ist i.d.R. komplex: $F(u) = \mathrm{Re}(F(u)) + i\ \mathrm{Im}(F(u))$.

1.4.1 Wichtige Fourier-Transformationspaare

- **Rechteck-Funktion ↔ sinc-Funktion:**
  - $f(x) = rect(x)$
  - $F(u) \propto sinc(u)$
- **Dirac-Delta-Distribution ↔ Konstante:**
  - Die **Dirac-Delta-Distribution** $\delta(t)$ ist keine Funktion, sondern eine Distribution, definiert durch ihre **"Sampling-Eigenschaft":** $\int f(t)\delta(t-t')dt = f(t')$.
  - $f(x) = \delta(x) \xrightarrow{FT} F(u) = 1$ (Ein Impuls im Ort enthält alle Frequenzen)
  - $f(x) = K \xrightarrow{FT} F(u) = K \cdot \delta(u)$ (Eine Konstante im Ort ist nur die Frequenz 0)
- **Kosinus ↔ Zwei Delta-Peaks:**
  - $f(x) = \cos(kx)$
  - $F(u) \propto (\delta(u-k) + \delta(u+k))$
  - Eine reine Schwingung im Ortsraum entspricht zwei scharfen Peaks (diskreten Frequenzen) im Frequenzraum.

1.5 Faltung und Filterung

Faltung (Convolution)

Das Faltungsintegral $h(t)$ zweier Funktionen f und g ist definiert als:

$$h(t) = (f \circ g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx$$

Graphisch entspricht dies einer "Spiegelung, Verschiebung, Multiplikation und Integration".

- Bsp: $rect(x) \circ rect(x) = triangle(x)$.

Der Faltungssatz (Convolution Theorem)

Dies ist einer der wichtigsten Sätze der Fouriertheorie:

- Eine **Faltung im Ortsraum** entspricht einer **Multiplikation im Frequenzraum**.
- Eine **Multiplikation im Ortsraum** entspricht einer **Faltung im Frequenzraum**.

$$h(t) = f(t) \circ g(t) \quad \xrightarrow{FT} \quad H(u) = F(u) \cdot G(u)$$

1.5.1 Anwendung: Filterung

Der Faltungssatz ist die Grundlage für effiziente Filterung :

1. Ein Signal $f(x)$ soll gefiltert werden.
2. Anstatt eine aufwändige Faltung im Ortsraum ($f \circ g$) durchzuführen...
3. ...transformiert man Signal ($f \to F$) und Filterfunktion ($g \to G$) in den Frequenzraum.
4. Dort wird eine **einfache Multiplikation** durchgeführt: $H(u) = F(u) \cdot G(u)$.
5. Das Ergebnis $H(u)$ wird zurück in den Ortsraum transformiert ($H \to h$), um das gefilterte Signal $h(x)$ zu erhalten.

Dies ist oft (via *Fast Fourier Transform*, FFT) viel schneller als die direkte Faltung.

1.6 Abtastung von Signalen (Sampling)

1.6.1 Modell der Abtastung

- **Problem:** Ein kontinuierliches Signal $f(x)$ muss in diskrete Werte $f(n\Delta x)$ für die digitale Verarbeitung umgewandelt werden.
- **Mathematisches Modell:** Abtastung ist eine **Multiplikation** des Signals $f(x)$ mit einer **Kamm-Funktion** (einer Kette von δ-Impulsen im Abstand Δx).

$$\hat{f}(x) = f(x) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n \cdot \Delta x)$$

1.6.2 Abtastung im Frequenzraum

- Laut Faltungssatz (Multiplikation im Ortsraum $\to$ Faltung im Frequenzraum) wird das Spektrum $F(u)$ des Signals mit der FT der Kamm-Funktion gefaltet.
- Die FT einer Kamm-Funktion (Abstand Δx) ist wieder eine Kamm-Funktion (Abstand $1/\Delta x$).
- **Folge:** Das Spektrum $\hat{F}(u)$ des abgetasteten Signals ist eine **periodische Wiederholung** des Originalspektrums $F(u)$, wobei die Kopien den Abstand $1/\Delta x$ haben.

1.6.3 Aliasing und das Abtasttheorem

Angenommen, das Signal ist **bandbegrenzt**, d.h. seine höchste Frequenz ist u_G ($F(u) = 0$ für $|u| > u_G$).

- **Fall 1: Korrekte Abtastung ($1/\Delta x > 2u_G$)**
  - Die Abtastfrequenz ($1/\Delta x$) ist mehr als doppelt so hoch wie die maximale Signalfrequenz (u_G).
  - Die periodischen Kopien von $F(u)$ im Frequenzraum **überlappen nicht**.
  - Das Originalsignal kann **fehlerfrei rekonstruiert** werden (z.B. durch einen Tiefpassfilter, der nur die zentrale Kopie isoliert).
- **Fall 2: Unterabtastung ($1/\Delta x < 2u_G$)**
  - Die Abtastfrequenz ist zu niedrig.
  - Die Kopien von $F(u)$ **überlappen sich**.
  - In den Überlappungsbereichen addieren sich Frequenzen. Hohe Frequenzen "erscheinen" fälschlicherweise als niedrige Frequenzen.
  - Dieser irreversible Fehler wird **Aliasing** genannt. (z.B. Wagenrad-Effekt bei Filmen , Moiré-Muster).

Abtasttheorem von Whittaker-Shannon

Eine bandbegrenzte Funktion (höchste Frequenz u_G) kann aus ihren Abtastwerten $f(n\Delta x)$ fehlerfrei rekonstruiert werden, wenn die Abtastfrequenz $f_s = 1/\Delta x$ **mindestens doppelt so hoch** wie die höchste Signalfrequenz u_G ist.

$$f_s > 2u_G \quad \textbf{oder} \quad \frac{1}{\Delta x} > 2u_G$$

Die Frequenz $2u_G$ wird als **Nyquist-Frequenz** bezeichnet.

1.7 Zusammenfassung der Konzepte

- **Fourier-Reihe:**
  - **Für:** 2π-periodische Funktionen.
  - **Spektrum:** **Diskret** (Vielfache einer Grundfrequenz).
  - **Formel:** $f(x) = \sum c_n e^{inx}$.
- **Fourier-Transformation:**
  - **Für:** Nicht-periodische Funktionen.
  - **Spektrum:** **Kontinuierlich**.
  - **Formel:** $F(u) = \int f(t)e^{-2\pi iut}dt$.
- **Faltungssatz:**
  - $f(t) \circ g(t) \longleftrightarrow F(u) \cdot G(u)$
  - Ermöglicht effiziente **Filterung** im Frequenzraum.
- **Abtasttheorem:**
  - Abtastung (Multiplikation mit δ-Kamm) im Ortsraum $\rightarrow$ Periodisierung (Faltung mit δ-Kamm) im Frequenzraum.
  - Zur Rekonstruktion muss die Abtastfrequenz f_s größer als die doppelte maximale Signalfrequenz u_G sein ($f_s > 2u_G$), um **Aliasing** zu vermeiden.