Übung 7

Niclas Kusenbach, 360227

19th January 2026

Aufgabe 1: Logik erster Stufe

1a) Es gibt mindestens zwei Berge.

Prädikat: $Berg(x)$: x ist ein Berg.
Um „mindestens zwei“ auszudrücken, müssen zwei existieren, die nicht identisch sind.

$$\exists x \exists y(Berg(x) \land Berg(y) \land \neg(x = y))$$

1b) Es liegt genau eine Münze in der Kiste.

Prädikate: $Muenze(x)$: x ist eine Münze, $InKiste(x)$: x liegt in der Kiste.
„Genau eine“ bedeutet: Es gibt eine (Existenz) und für alle anderen, die diese Eigenschaft haben, gilt, dass sie mit der ersten identisch sind (Einzigkeit).

$$\exists x(Muenze(x) \land InKiste(x) \land \forall y((Muenze(y) \land InKiste(y)) \to x = y))$$

1c) Ein Rechtsgeschäft, das gegen die guten Sitten verstößt, ist nichtig.

Prädikate: $RG(x)$: x ist Rechtsgeschäft, $Sittenwidrig(x)$: x verstößt gegen Sitten, $Nichtig(x)$: x ist nichtig.
Dies ist eine All-Aussage.

$$\forall x((RG(x) \land Sittenwidrig(x)) \to Nichtig(x))$$

Aufgabe 2: Resolution in FOL

2a) Formalisierung in FOL

Prädikate: $Hat(x, y)$, $Hund(x)$, $Heult(x)$, $Katze(x)$, $Maus(x)$, $LS(x)$ (Leichtschläfer).

Konstante: *John*.

i) Alle Hunde heulen in der Nacht.

$$\forall x(Hund(x) \rightarrow Heult(x))$$

ii) Jeder der Katzen hat, hat keine Mäuse.

$$\forall x((\exists y(Katze(y) \land Hat(x,y))) \rightarrow \neg\exists z(Maus(z) \land Hat(x,z)))$$

iii) Leichtschläfer haben nichts, was nachts heult.

$$\forall x(LS(x) \rightarrow \neg\exists y(Hat(x,y) \land Heult(y)))$$

iv) John hat eine Katze oder einen Hund.

$$\exists x(Hat(John,x) \land (Katze(x) \lor Hund(x)))$$

Ziel: Falls John ein Leichtschläfer ist, hat er keine Mäuse.

$$LS(John) \rightarrow \neg\exists z(Maus(z) \land Hat(John,z))$$

2b) Umformung in Klauselnormalform (CNF)

Wir negieren zunächst die zu beweisende Schlussfolgerung für den Widerspruchsbeweis.

Negierte Schlussfolgerung: Negation von $A \rightarrow B$ ist $A \land \neg B$.

$$\neg(LS(John) \rightarrow \neg\exists z(Maus(z) \land Hat(John,z)))$$

$$\equiv LS(John) \land \exists z(Maus(z) \land Hat(John,z))$$

Skolemisierung: Wir ersetzen $\exists z$ durch die Skolem-Konstante m_{aus}.

- $K_1 : \{LS(John)\}$
- $K_2 : \{Maus(m_{aus})\}$
- $K_3 : \{Hat(John, m_{aus})\}$

Umformung der Axiome: **Zu i) Hunde heulen:**

$$\forall x(\neg Hund(x) \lor Heult(x))$$

- $K_4 : \{\neg Hund(x_1), Heult(x_1)\}$

Zu ii) Katzenbesitzer haben keine Mäuse: Implikation auflösen ($A \rightarrow B \equiv \neg A \lor B$):

$$\forall x(\neg(\exists y(Katze(y) \land Hat(x,y))) \lor \neg(\exists z(Maus(z) \land Hat(x,z))))$$

Negation reinziehen (De Morgan & Quantorenwechsel):

$$\forall x((\forall y(\neg Katze(y) \lor \neg Hat(x,y))) \lor (\forall z(\neg Maus(z) \lor \neg Hat(x,z))))$$

Variablen umbenennen und Quantoren droppen:

- $K_5 : \{\neg Katze(y_2), \neg Hat(x_2, y_2), \neg Maus(z_2), \neg Hat(x_2, z_2)\}$

Zu iii) Leichtschläfer:

$$\forall x(\neg LS(x) \vee \neg \exists y(Hat(x, y) \wedge Heult(y)))$$

$$\forall x(\neg LS(x) \vee \forall y(\neg Hat(x, y) \vee \neg Heult(y)))$$

- $K_6 : \{\neg LS(x_3), \neg Hat(x_3, y_3), \neg Heult(y_3)\}$

Zu iv) Johns Tier: Skolemisierung von $\exists x$: Wir ersetzen x durch Skolem-Konstante a (Animal).

$$Hat(John, a) \wedge (Katze(a) \vee Hund(a))$$

Dies ergibt zwei Klauseln:

- $K_7 : \{Hat(John, a)\}$
- $K_8 : \{Katze(a), Hund(a)\}$

2c) Resolutionsbeweis

Wir versuchen, die leere Klausel $\square$ abzuleiten.

1. **Schritt 1:** Johns Tier a heult nicht (aus Leichtschläfer-Eigenschaft).
   Resolviere K_6 und K_1:

   $$\{\neg LS(x_3), \neg Hat(x_3, y_3), \neg Heult(y_3)\} + \{LS(John)\}$$

   Unifikation: $\sigma = \{x_3/John\}$
   $\Rightarrow R_1 : \{\neg Hat(John, y_3), \neg Heult(y_3)\}$
2. **Schritt 2:** Verknüpfung mit Johns Tier a.
   Resolviere R_1 und K_7:

   $$\{\neg Hat(John, y_3), \neg Heult(y_3)\} + \{Hat(John, a)\}$$

   Unifikation: $\sigma = \{y_3/a\}$
   $\Rightarrow R_2 : \{\neg Heult(a)\}$
3. **Schritt 3:** Tier a ist kein Hund (da Hunde heulen).
   Resolviere R_2 und K_4:

   $$\{\neg Heult(a)\} + \{\neg Hund(x_1), Heult(x_1)\}$$

   Unifikation: $\sigma = \{x_1/a\}$
   $\Rightarrow R_3 : \{\neg Hund(a)\}$
4. **Schritt 4:** Tier a ist eine Katze (Disjunktion auflösen).
   Resolviere R_3 und K_8:

   $$\{\neg Hund(a)\} + \{Katze(a), Hund(a)\}$$

   Keine Unifikation nötig.
   $\Rightarrow R_4 : \{Katze(a)\}$

5. **Schritt 5:** Widerspruch zur Maus (Katzenbesitzer-Regel).
   Resolviere R_4 und K_5:

   $$\{Katze(a)\} + \{\neg Katze(y_2), \neg Hat(x_2, y_2), \neg Maus(z_2), \neg Hat(x_2, z_2)\}$$

   Unifikation: $\sigma = \{y_2/a\}$
   $\Rightarrow R_5 : \{\neg Hat(x_2, a), \neg Maus(z_2), \neg Hat(x_2, z_2)\}$
6. **Schritt 6:** Spezialisierung auf John (da John a besitzt).
   Resolviere R_5 und K_7:

   $$\{\neg Hat(x_2, a), \neg Maus(z_2), \neg Hat(x_2, z_2)\} + \{Hat(John, a)\}$$

   Unifikation: $\sigma = \{x_2/John\}$
   $\Rightarrow R_6 : \{\neg Maus(z_2), \neg Hat(John, z_2)\}$
   (Bedeutung: John besitzt keine Maus).
7. **Schritt 7:** Kollision mit der Annahme, John habe Maus m_{aus}.
   Resolviere R_6 und K_2:

   $$\{\neg Maus(z_2), \neg Hat(John, z_2)\} + \{Maus(m_{aus})\}$$

   Unifikation: $\sigma = \{z_2/m_{aus}\}$
   $\Rightarrow R_7 : \{\neg Hat(John, m_{aus})\}$
8. **Schritt 8:** Abschluss.
   Resolviere R_7 und K_3:

   $$\{\neg Hat(John, m_{aus})\} + \{Hat(John, m_{aus})\}$$

   $\Rightarrow \square$ (Leere Klausel)

Da die leere Klausel abgeleitet werden konnte, ist der Widerspruchsbeweis erbracht. Die ursprüngliche Behauptung ist wahr.