|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Problem Chosen**  X | **2024**  **MCM/ICM**  **Summary Sheet** | **Team Control Number**  1234567 |

**Title**

**Summary**

Your summary

**Keywords:** keyword1; keyword2; keyword3; keyword4

Contents

[1 Introduction 3](#_Toc20186)

[1.1 Background 3](#_Toc7149)

[1.2 Restatement of the Problem 3](#_Toc31950)

[1.3 Our Work 3](#_Toc18970)

[2 Assumptions and Justifications 3](#_Toc24648)

[3 Notations 3](#_Toc12712)

[4 Problem 1: Model Establishment and Solution 3](#_Toc12028)

[4.1 Abc 3](#_Toc6933)

[4.1.1 Abc 3](#_Toc16697)

[5 Problem 2: Model Establishment and Solution 4](#_Toc2932)

[6 Problem 3: Model Establishment and Solution 4](#_Toc17155)

[7 Sensitivity Analysis 4](#_Toc13573)

[8 Strengths and Weaknesses 4](#_Toc17056)

[8.1 Strengths 4](#_Toc9693)

[8.2 Weaknesses 4](#_Toc29486)

[References 5](#_Toc5263)

[Appendices 6](#_Toc2333)

# Introduction

## Background

对于大多数动物物种(animal species)而言，它们都以雄性(male)和雌性(female)两种形式的性别为主，尽管有一些动物物种不太区分这两种性别。同时，许多物种在出生时的性别比例为1:1，有些物种却偏离了均匀的性别比例，这种现象被称为适应性性别比例变异(adaptive sex ratio variation)。例如，美国短吻鳄(American alligator)出生时的性别比例会受到巢穴温度的影响等。

海洋七鳃鳗(lampreys)就是一种存在适应性性别比例变异现象的物种，它们的性别比例会根据外部环境的影响而发生变化，如食物供应的变化会影响其在幼虫阶段的生长速率，从而最终影响了其成年后的性别。这些现象说明，一些物种，尤其是海洋七鳃鳗，具有根据资源可用性(resource availability)调整其性别比例(sex ratio)的能力，并且这种能力也为相应物种带来了一些优势与劣势。

## Restatement of the Problem

本次的研究主要探讨的是海洋七鳃鳗这一物种，研究其性别比例及它们对当地条件的依赖性，这涉及了物种如何根据资源可用性调整其性别比例以及这种能力带来的优势与劣势。为了进一步理解性别比例变化与生态系统两者之间的相互作用和相互影响，我们需要开发并检验一个模型，需要研究的问题包括：

·当七鳃鳗种群能够改变其性别比例时，对更大的生态系统有何影响？

·对七鳃鳗种群本身而言，有什么优势和劣势

·七鳃鳗引起的性别比例的变化，对于生态系统的稳定性有什么影响

·在一个生态系统中，如果七鳃鳗种群的性别比例存在变化，这个现象是否可能会为此生态系统中其他的生物，如寄生虫，提供一些优势？

## Our Work

1、通过对七鳃鳗为核心的七鳃鳗食物资源，七鳃鳗，七鳃鳗的捕食者三级生态生态系统进行分析，构建能够用于模拟捕食者和被捕食者之间相互作用的的Lotka-Volterra生态模型，进而分析当七鳃鳗的种群能够改变其性别比例时，对所处的生态系统的影响。

2、

# Assumptions and Justifications

* 七鳃鳗以鱼类为食，而这些鱼类的数量可以影响七鳃鳗的生长速度和性别比。
* 食物资源的变化会影响七鳃鳗性别比的变化，进而可能影响繁殖率和种群结构。
* 七鳃鳗的捕食者也依赖七鳃鳗作为食物来源，其数量可以由七鳃鳗的数量决定。

# Notations

The primary notations used in this paper are listed in Table 1.

Table 1: Notations

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Symbol** | **Description** | **Unit** |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

# Problem 1: Model establishment and solution

## 问题分析

问题一需要分析当七鳃鳗的种群能够改变其性别比例时，对其所处的更大的生态环境的影响。为了分析的便捷性，我们可以将生态环境抽象为只含有七鳃鳗，七鳃鳗的食物层以及捕食七鳃鳗的捕食者三大结构，然后运用常用于描述捕食者和被捕食者之间的数量关系的Lotka-Volterra模型对三者直接的关系进行分析，尤其是引入七鳃鳗种群的性别比例这一参数后，对于整体的三者数量的影响，进而得到当七鳃鳗的种群能够改变其性别比例时，其所处的更大的生态环境的变化情况。

## Lotka-Volterra模型建立

在现实世界里,任何生物种群都处于某一群落中,且与别的种群发生着一定的联系,因此,在不同的种群之间既存在着相互依存,又有相互制约.捕食模型的动力学关系是生物数学研究的重要课题之一,至今已有很多学者根据两个物种间的相互作用关系及物种自身的特征建立模型,并对模型的动力学进行了研究. 考虑到年龄结构与环境等因素的影响,越来越多的研究开始讨论具有时滞的生物模型.如1990年,Aiello和Freedman建立并分析了如下具有常数成熟时滞的阶段结构种群模型:

其中和分别表示未成熟种群和成熟种群的密度;表示从出生到成熟所需要的时间;常数和分别表示未成熟种群的出生率和死亡率;表示成熟种群的死亡率.

在模型(1.1)的基础上,文献考虑了不同物种之间的相互作用,提出了具有阶段结构的Lotka-Volterra合作系统,利用线性化方法和上、下解方法研究了该系统的动力学行为,还建立了两物种成年个体相互合作的时滞反应扩散模型,证明了该模型连接零平衡点与唯一正平衡点的行波解的存在性.Alomari 和Gourley通过考虑两成年种群间的相互竞争作用,提出了下面具有时滞的LotkaVolterra竞争模型

其中U和V分别表示两竞争种群的成年种群密度；正的常数和分别表示两成年种群的出生率；表示种群在成熟过程中的死亡率；表示成熟种群的死亡率；和𝑐2分别表示两成年种群间的竞争效应;𝑓𝑢(𝑠),𝑓𝑣(𝑠)分别表示积分核函数;𝜙(𝑡)和𝜓(𝑡)是(−∞,0]上的连续函数且𝜙(0),𝜓(0)>0.

在分析不同种群的竞争作用时，整个生态系统的稳定性是一个我们经常关注的议题。Lotka-Volterra 模型中，我们很容易找到系统的平衡点，或者叫不动点（fixed point）。令,即

可以解出两个平衡点：

第一个平衡点将两个种群的数量全部清零，将来自然也永远为零，是一个很无趣的平庸解。此外，如果的数量存在稍许偏离，它将立刻呈现指数增长，所以这还是个不稳定的平衡点。

更有意思的第二个平衡点将是我们接下来分析的重头。我们将证明，不论那些参数取值如何，这一定是稳定平衡点（stable fixed point）。

设和相比和有微小的偏离，记作

忽略高阶小量，Lotka-Volterra 方程可以重新写成

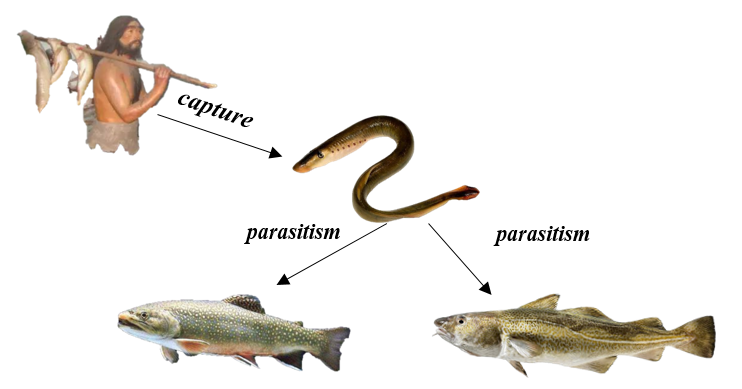
将上述两条式子进行合并，即可消去，得到只含有的方程

然后再引入频率，方程的通解可以写成：

其中A和B是由系统初始状态确定的常数。

将上述式子进行合并即可得到对应的的解：

以上解说明，若当猎物种群数量和猎食者种群数量偏离平衡点，将来的偏离也只会在平衡点附近随时间震荡，而且呈现出非常规律的周期性。两个种群数量波动的周期都为：



图？？ Lotka-Volterra生态模型图

## Lotka-Volterra模型求解

题目需要分析七鳃鳗种群的性别比例能够改变的情况时，对其所处的生态系统的影响。另外，根据题目可知，海洋七鳃鳗的性别比例会根据外部环境变化而变化——在食物供应较小的环境中，生长速率会更低，雄性的比例可以达到大约78%左右。在食物更容易获得的环境中，观察到雄性在种群中所占比例约为56%。根据此信息，可以得到所构建的生态系统模型中七鳃鳗种群的雄性比例参数在56%到78%之间。然后通过查找相关的资料，以及结合生态系统中能量等级传递时的能量传递效率（约10%），可以初始化该Lotka-Volterra模型的参数如下：

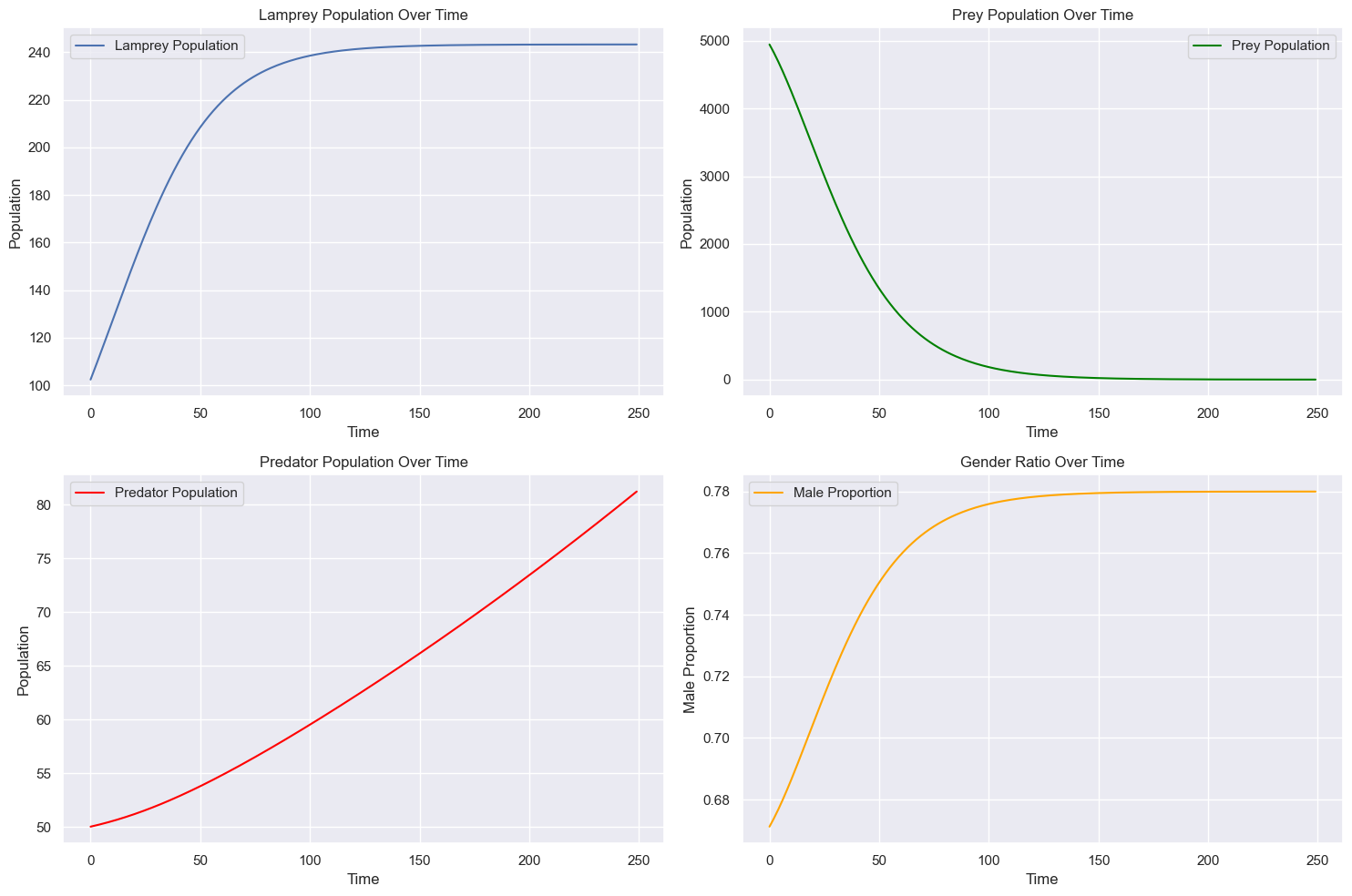
表？？ Lotka-Volterra模型初始参数表

|  |
| --- |
| # 参数定义  growth\_rate\_lamprey = 0.05  # 七鳃鳗的生长率  carrying\_capacity\_lamprey = 2000  # 七鳃鳗的承载力  initial\_population\_lamprey = 100  # 七鳃鳗的初始种群数量  growth\_rate\_prey = 0.08  # 食物资源的再生速度  carrying\_capacity\_prey = 10000  # 食物资源的承载力  initial\_population\_prey = 5000  # 食物资源的初始数量  growth\_rate\_predator = 0.02  # 捕食者的生长率  carrying\_capacity\_predator = 500  # 捕食者的承载力  initial\_population\_predator = 50  # 捕食者的初始种群数量  predation\_rate = 0.0005  # 捕食率  intraspecific\_competition\_rate\_lamprey = 0.01  # 七鳃鳗种内竞争率 |

基于所给定的种群生长率，种群的承载力以及种群的初始种群数量分别计算七鳃鳗种群，七鳃鳗对应的食物资源种群以及七鳃鳗捕食者种群数量在每个时间步长中的增长情况。然后运用欧拉方法来更新种群的数量——根据当前的种群数量和增长率，通过离散化的时间步长来估计下一个时间步长的种群数量，即根据以下公式进行计算：

其中，是当前时间步长的种群数量，是下一个时间步长的种群数量，是当前时间步长内的种群增长速率，是下一个时间步长内的种群增长率。

最终得到所建立的Lotka-Volterra模型中鳃鳗种群，七鳃鳗对应的食物资源种群以及七鳃鳗捕食者种群数量对应于七鳃鳗的性别比例的变化情况如下所示：



图？？ 七鳃鳗不同性别比例时，相应的生态系统三大层次种群数量的变化

从所得到的结果可以看出，随着七鳃鳗种群中的雄性比例的增加，该生态系统中的七鳃鳗数量不断增加，而其对应的食物资源种群的数量则在不断的下降。与此同时，七鳃鳗捕食者的数量也随着七鳃鳗种群中的雄性比例的不断增加而增加。由此分析可以得到，七鳃鳗种群中的性别比例确实会对其所处的生态系统产生一定程度的影响——随着七鳃鳗种群中雄性比例的不断增加，对其食物资源不利，但有益于七鳃鳗的捕食者。

# Problem 2: Model Establishment and Solution

# Problem 3: Model Establishment and Solution

# Sensitivity Analysis

# Strengths and Weaknesses

## Strengths



## Weaknesses



# References

[1]

[2]

[3]

[4]

# Appendices

|  |
| --- |
| Appendix 1 |
| Introduce: 简介 |
| 代码 |
| Appendix 2 |
| Introduce: 简介 |
| 代码 |