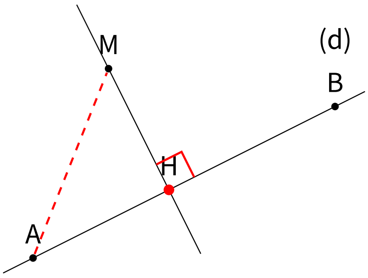
Chap 2 : Géométrie plane : triangles et coordonnées

par scott hamilton

1) Projeté orthogonal :

M est un point du plan
(d) est une droite du plan

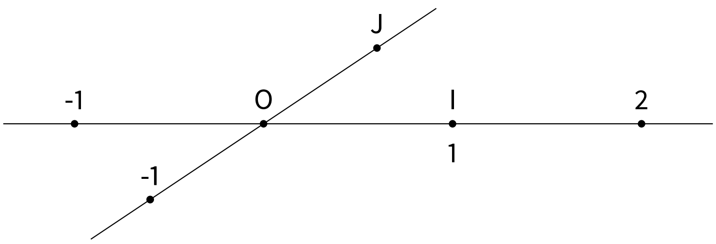
Si $M \notin (d)$, le projeté orthogonal de M sur (d) est l'intersection entre (d) et la perpendiculaire à (d) passant par M



On prend $A \in (d)$, $A \neq H$
MAH est rectangle en H donc son hypoténuse est MA donc MA est le coté le plus long (voir théorème de Pythagore) donc $MA > MH$
MH est bien la plus courte distance entre M et un point de la droite.

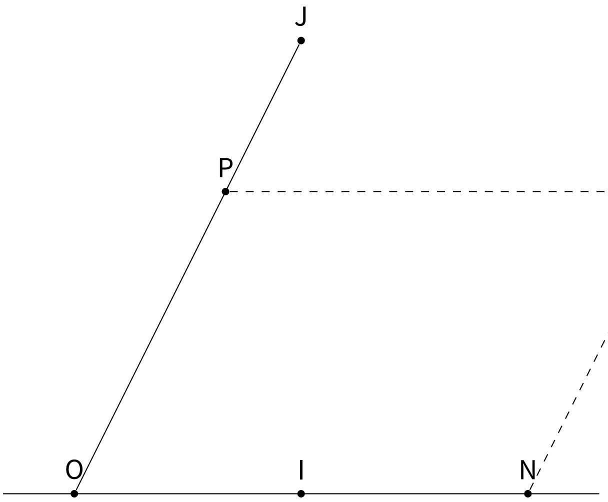
2) Coordonnées :

On définit un repère du plan par la donnée de 3 points non-alignés. L'origine d'abscisse et d'ordonnée 0, le point d'abscisse 1 et le point d'ordonnée 1.



si $(OI) \perp (OJ)$, le repère est orthogonal
si $OI = OJ$, le repère est normé
si $(OI) \perp (OJ)$ et $OI = OJ$, le repère est orthonormé.
Dans ce cas, on donne $OI = OJ = 1$

Dans un repère(O, I, J), M est un point du plan. On projette
M sur les deux axes : (OI) et (OJ) parallèlement aux directions des 2 axes.



$ON = x \cdot OI \quad x > 0$

$OP = y \cdot OJ \quad y > 0$

Si N est à droite de O

$N \in [OI)$, $x_M = x$

sinon $\quad x_M = -x$

Si $P \in [OJ)$

$y_M = y$

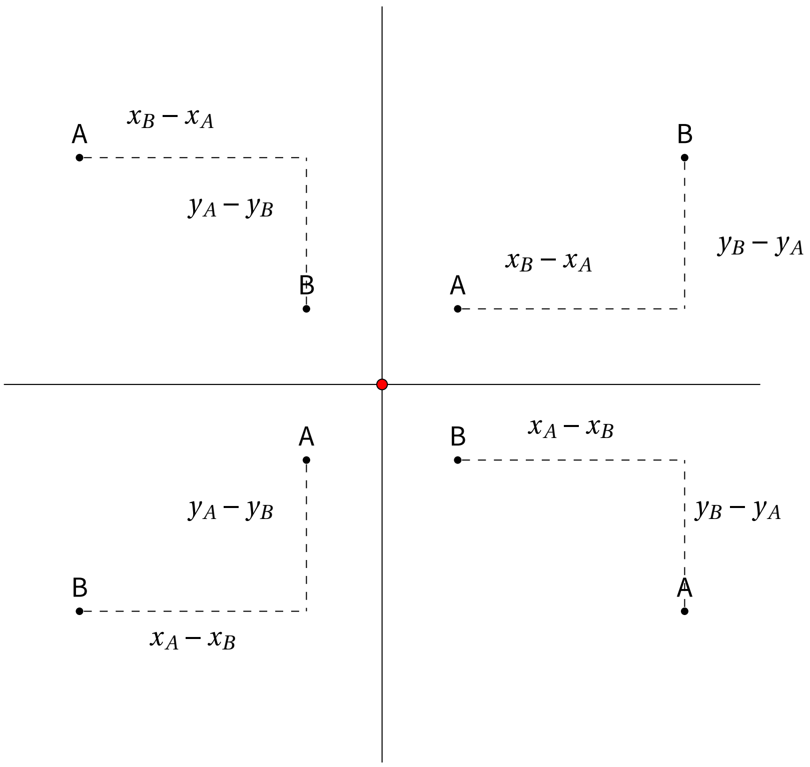
sinon $y_M = -y$

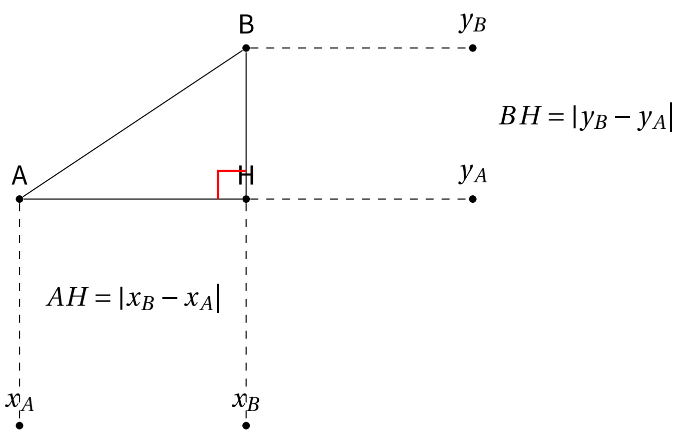
Les coordonnées de M sont ($\underbrace{x_M}_{\text{abscisse de M}}$; $\underbrace{y_M}_{\text{ordonnée de M}}$)

Distance entre deux points

Si (O, I, J) est orthonormé :

$\left.\begin{array}{l} A(x_A; y_A) \\ B(x_B; y_B) \end{array}\right\}$ deux points du plan


A
B
$x_B - x_A$
$y_A - y_B$
B
A
$x_B - x_A$
$y_B - y_A$
A
B
$y_A - y_B$
$x_A - x_B$
B
A
$x_A - x_B$
$y_B - y_A$


B
y_B
$BH = |y_B - y_A|$
A
H
y_A
$AH = |x_B - x_A|$
x_A
x_B

Dans ABH, rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore :

$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$

$$AB^2 = |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2$$

$$= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

car les carrés sont positifs

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

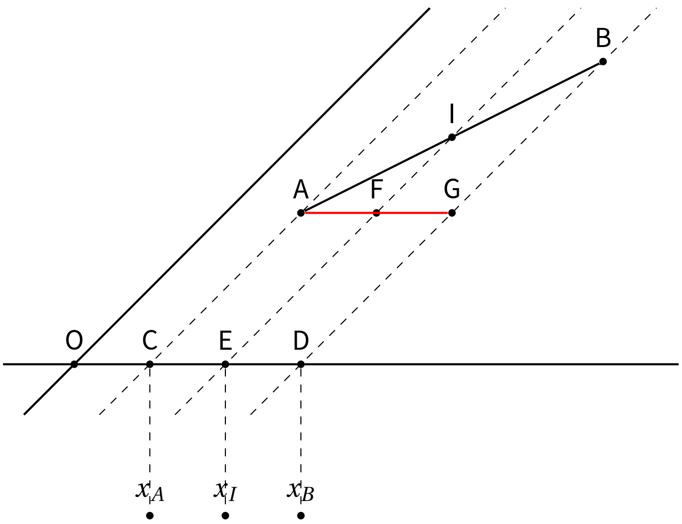
Milieu d'un segment :

$\left.\begin{array}{l} A(x_A; y_A) \\ B(x_B; y_B) \end{array}\right\}$ deux points

I est le milieu de $[A; B]$

$$I(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2})$$

Preuve



C, E, D sont les projetés de A, I, B sur l'axe des abscisses, en suivant la direction de l'axe des ordonnées. $(AG) \parallel (CD)$

A, I, B sont alignés
A, F, G sont alignés

$(IF) \parallel (BG)$
alors, d'après le théorème de Thalès

$\frac{AF}{AG} = \frac{AI}{AB} = \frac{FI}{GB}$

comme I est le milieu de $[AB]$:
$\frac{AI}{AB} = \frac{1}{2}$; donc $\frac{AF}{AG} = \frac{1}{2}$, comme A, F et G sont alignés,

F est le milieu de $[AG]$

Par construction : $(AC) \parallel (FE) \parallel (GD)$

et $(AG) \parallel (CD)$

Donc les côtés opposés de $AFEC$ et de $FGDE$
sont 2 à 2 parallèles, se sont des parallélogrammes.

donc leurs côtés opposés sont de même longueur, donc :

$CE = EP$
comme C, E, D sont alignés,

E est le milieu de $[CD]$

$x_E = x_I$

$x_E = OE$

$= OC + CE$

$= OC + \frac{CD}{2}$

$= x_C + \frac{x_D - x_C}{2}$

$= x_A + \frac{x_B - x_A}{2}$

$= \frac{2x_A + x_B - xA}{2}$

$= \frac{x_A + x_B}{2}$