

Chap 2 : Géométrie plane : triangles et coordonnées

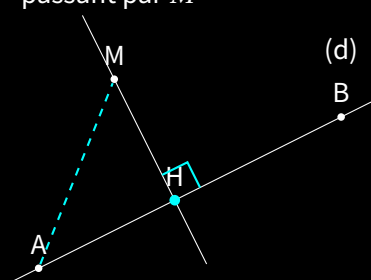
par scott hamilton

1) Projeté orthogonal :

M est un point du plan

(d) est une droite du plan

Si $M \notin (d)$, le projeté orthogonal de M sur (d) est l'intersection entre (d) et la perpendiculaire à (d) passant par M



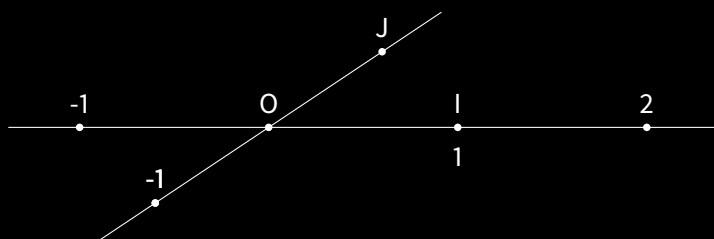
On prend $A \in (d)$, $A \neq H$

MAH est rectangle en H donc son hypoténuse est MA donc MA est le côté le plus long (voir théorème de Pythagore) donc $MA > MH$

MH est bien la plus courte distance entre M et un point de la droite.

2) Coordonnées :

On définit un repère du plan par la donnée de 3 points non-alignés. L'origine est le point d'abscisse 1 et le point d'ordonné 1.



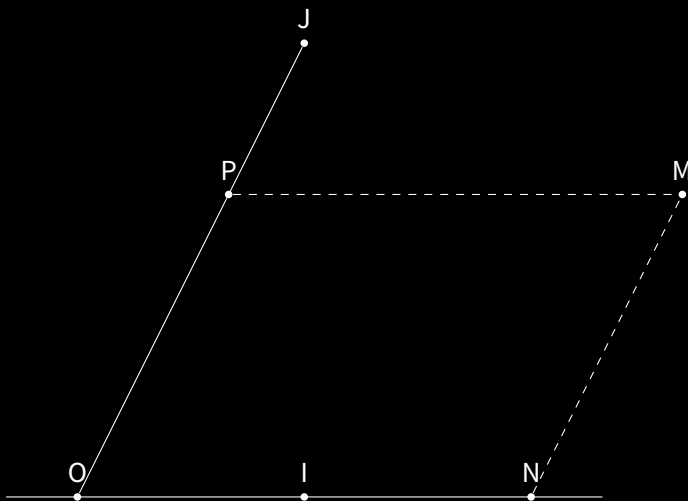
si $(OI) \perp (OJ)$, le repère est orthogonal

si $OI = OJ$, le repère est normé

si $(OI) \perp (OJ)$ et $OI = OJ$, le repère est orthonormé.

Dans ce cas, on donne $OI = OJ = 1$

Dans un repère (O, i, j) , M est un point du plan. On projette M sur les deux axes : (OI) et (OJ) parallèlement aux directions des 2 axes.



$$ON = x \cdot OI \quad x > 0$$

$$OP = y \cdot OJ \quad y > 0$$

Si N est à droite de O

$$N \in [OI], x_M = x$$

$$\text{sinon } x_M = -x$$

Si $P \in [OJ]$

$$y_M = y$$

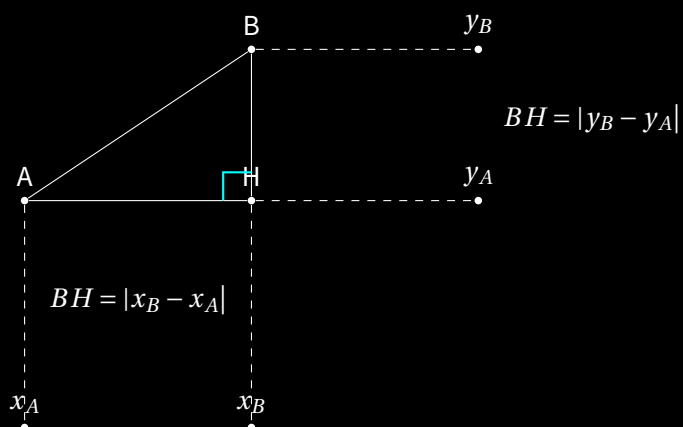
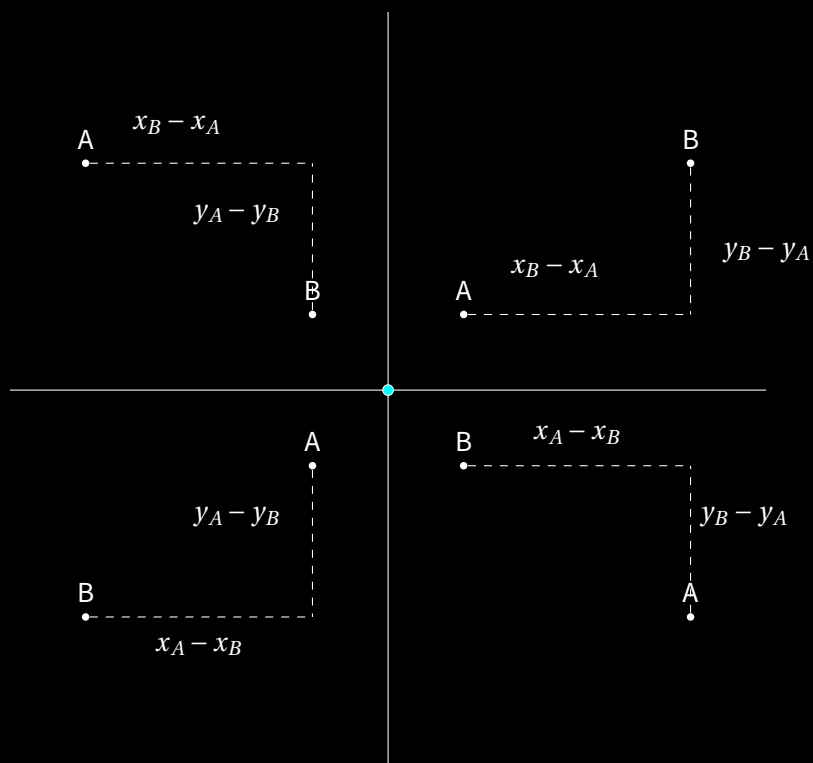
$$\text{sinon } y_M = -y$$

Les coordonnées de M sont ($\underbrace{x_M}_{\text{abscisse de M}}$; $\underbrace{y_M}_{\text{ordonnée de M}}$)

Distance entre deux points

Si (O, I, J) est orthonormé :

$$\left. \begin{array}{l} A(x_A; y_A) \\ B(x_B; y_B) \end{array} \right\} \text{deux points du plan}$$



Dans ABH, rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore :

$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$

$$\begin{aligned} AB^2 &= |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2 \\ &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \end{aligned}$$

car les carrés sont positifs

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

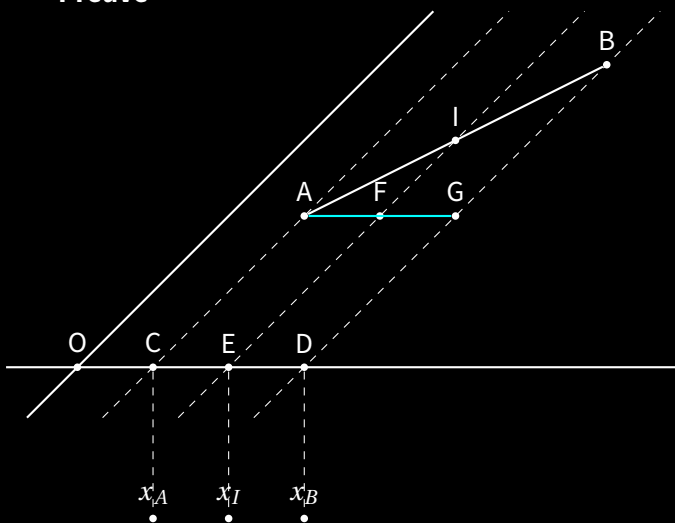
Milieu d'un segment :

$$\left. \begin{array}{l} A(x_A; y_A) \\ B(x_B; y_B) \end{array} \right\} \text{deux points}$$

I est le milieu de $[A; B]$

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Preuve



C, D, E sont les projetés de A, I, B sur l'axe des abscisses, en suivant la direction de l'axe des ordonnées. $(AG) \parallel (CD)$

A, I, B sont alignés

A, F, G sont alignés

$$(IF) \parallel (BG)$$

alors, d'après le théorème de Thalès

$$\frac{AF}{AG} = \frac{AI}{AB} = \frac{FI}{GB}$$

comme I est le milieu de $[AB]$:

$\frac{AI}{AB} = \frac{1}{2}$; donc $\frac{AF}{AG} = \frac{1}{2}$, comme A, F et G sont alignés,

F est le milieu de $[AG]$

Par construction : $(AC) \parallel (FE) \parallel (GD)$

et $(AG) \parallel (CD)$

Donc les côtés opposés de $AFEC$ et de $FGDE$

sont 2 à 2 parallèles, se sont des parallélogrammes.

donc leurs côtés opposés sont de même longueur, donc :

$$CE = EP$$

comme C, E, D sont alignés,

E est le milieu de $[CD]$

$$x_E = x_I$$

$$x_E = OE$$

$$= OC + CE$$

$$= OC + \frac{CD}{2}$$

$$= x_C + \frac{x_D - x_C}{2}$$

$$= x_A + \frac{x_B - x_A}{2}$$

$$= \frac{2x_A + x_B - x_A}{2}$$

$$= \frac{x_A + x_B}{2}$$