

Chap 1 : Ensembles de nombres

par scott hamilton

Démonstration :

prouver que racine de 2 n'est pas rationnel

On veut montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, on raisonne par l'absurde.

⇒ Comment s'écrit $\sqrt{2}$?

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{et } \begin{cases} PGCD(a, b) = 1 \\ a \text{ et } b \text{ sont premiers entre eux} \\ \frac{a}{b} \text{ est irréductible} \end{cases}$$

⇒ Montrer que a^2 est pair

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \text{ alors } a = \sqrt{2} \cdot b$$

$$\text{et } a^2 = 2 \cdot \underbrace{b^2}_{\in \mathbb{N}}$$

donc a^2 est pair

⇒ Montrer que a est pair

Supposons que a est, impair

$$a = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$$

$$a^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$a^2 = \underbrace{2(2k^2 + 2k)}_{\text{pair}} + 1$$

Or a^2 ne peut être impair.

Donc a n'est pas impair, a est pair.

⇒ Montrer que b est pair

$$a = 2k, k \in \mathbb{N}$$

$$a^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

$$2b^2 = 4k^2$$

$$b^2 = 2 \underbrace{k^2}_{\in \mathbb{Z}}$$

b^2 est pair b est pair

⇒ Conclure : donc $\frac{a}{b}$ n'est pas irréductible

(a et b ont 2 comme diviseur commun) donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$