第五章 流 体 力 学

液体和气体都是具有流动性的连续介质，统称流体。

主要内容：

(1）流体静力学—帕斯卡原理、阿基米德原理；

(2）流体动力学—伯努利方程及其应用。

§5-1 流体静力学

例题： 设大气密度与压强成正比，求大气压强随高度的变化。

设海平面处高度坐标为零，y 轴竖直向上，则：

$$dp = -\rho g dy$$

根据题意：

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0}$$

$$\therefore \quad dp = -\frac{\rho_0}{p_0} p g dy \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} g dy$$

积分： $\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} g \int_0^y dy$ 得： $\boxed{p = p_0 e^{-\rho g y / p_0}}$

如：$\rho_0 = 1.293 kg/m^3$，$p_0 = 1.013 \times 10^5 P_a$，$y = 8848m$（珠峰）

得： $p = 0.33 p_0 = 0.33\ atm$

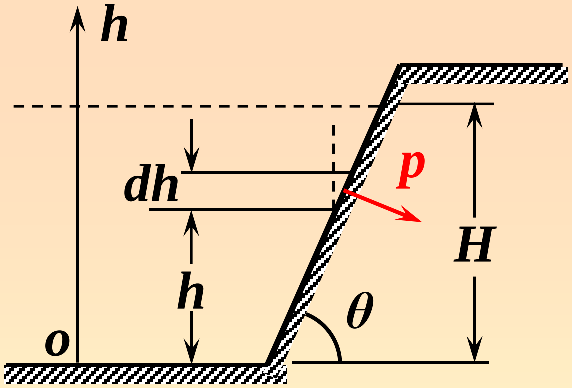
例题5-1：大坝迎水面与水平方向夹角$\theta=60°$，水深$H=10m$，求每米长大坝受水的总压力和水平压力有多大？

取大坝底部为坐标原点，h轴竖直向上，则高h处的压强为：

$$p=\rho g(H-h)$$

大坝上宽为1m，高为dh的面元受到水的压力为：

$$df=pdS=\frac{\rho g}{\sin\theta}(H-h)dh$$



积分得大坝所受总压力为：

$$f=\frac{1}{2}\rho gH^2\frac{1}{\sin\theta}=5.66\times10^5\ N$$

水平压力为：$f_{水平}=\frac{1}{2}\rho gH^2=4.90\times10^5\ N$

例题： 海水密度$\rho=1.028\times10^3kg/m^3$，

冰块密度$\rho'=0.917\times10^3kg/m^3$。

求：冰山在海面上方的体积与海面下方的体积之比。

设冰山在海面上的体积为V_1，在海面下的体积为V_2，则：

$$\rho' g(V_1+V_2)=\rho g V_2$$

$$\rho' V_1=(\rho-\rho')V_2$$

即：

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\rho-\rho'}{\rho'}=12.1\%$$

§5-2 流体的流动

1、理想流体：

完全不可压缩的无粘滞流体称为理想流体。

液体不易被压缩，而气体的可压缩性大。当气体可自由流动时，微小的压强差即可使气体快速流动，从而使气体各部分的密度差可以忽略不计。

流体内各部分间实际存在着内摩擦力，它阻碍着流体各部分间的相对运动，称为粘滞性。但对于很“稀”的流体，可近似看作是无粘滞的。

忽略内摩擦的作用，实际上是假定流体流动时无能量的损耗。很多实际流体（水、酒精、气体等）可近似看作无粘滞流体。

2、定常流动、流线和流管：

流动的流体中每一点的流速矢量 $\vec{v}$ 构成一个流速场。

一般，空间各点的流速随时间变化：

$$\vec{v}=\vec{v}(x、y、z、t)$$

称为流体的不定常流动。

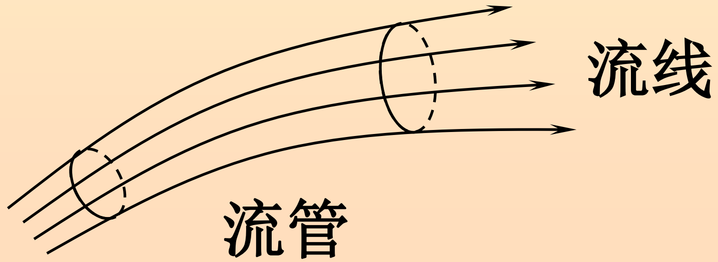
特殊情况下，流速不随时间变化：

$$\vec{v}=\vec{v}(x、y、z)$$

称为流体的定常流动，或稳定流动。

为直观描述流体流动的情况，引入流线的概念：在流速场中画出一系列曲线，曲线上每一点的切线方向即为该点流速矢量的方向。

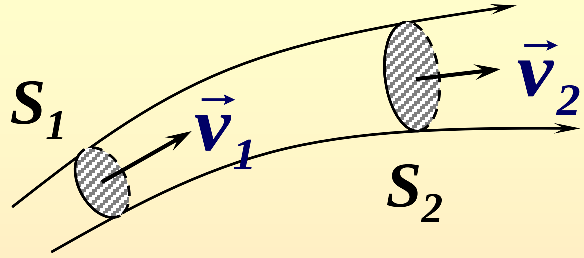
➢理想流体流速场中每一点都有确定的流速方向，所以流线不会相交。



在流体内某点附近取垂直于流线的面元，则通过该面元边界的流线围成一细管，称为流管。

➢由于流线不相交，所以流管内、外的流体都不会穿过流管壁。

3、流体的连续性原理：



在定常流动的理想流体内任取一流管。

因为流体不可压缩，所以流体密度 ρ 不变。

单位时间内从流管一端流入的流体等于从另一端流出的流体：

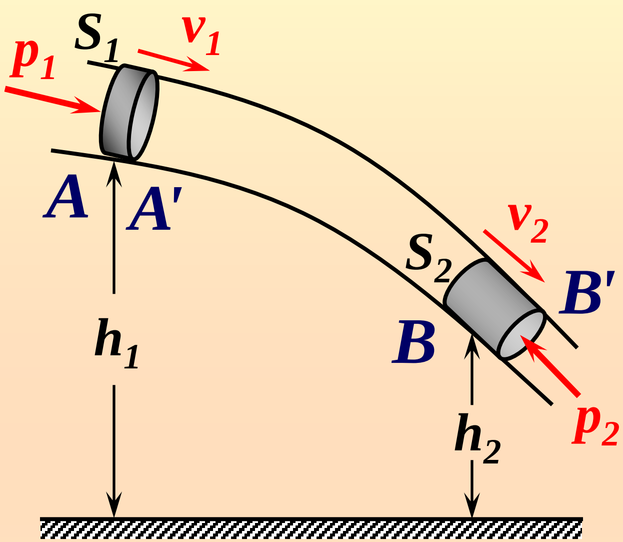
$$\rho v_1 S_1 \Delta t = \rho v_2 S_2 \Delta t = \text{常量}$$

或： $$v_1 S_1 = v_2 S_2 = \text{常量}$$

其中*vds*为单位时间内流过任一横截面的流体体积，称为流量。 $Q = vS$

以上两个方程称为流体的连续性原理。其物理实质为质量守恒。

§5-3 伯努利方程



在作定常流动的理想流体中任取一流管，用截面S_1、S_2截出一段流体。

在Δt时间内，S_1由A移至A'，S_2由B移至B'。

令：　$AA'=\Delta l_1$，$BB'=\Delta l_2$。

则：$\Delta V_1=S_1\Delta l_1$，$\Delta V_2=S_2\Delta l_2$。

因流体不可压缩，所以：$\Delta V_1=\Delta V_2=\Delta V$。

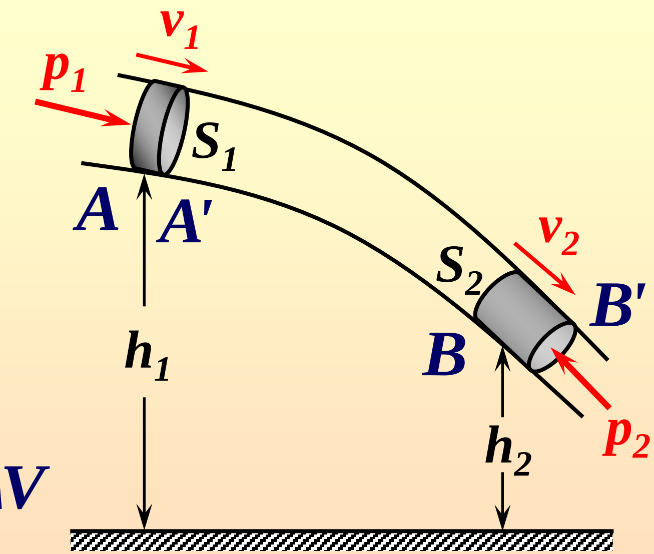
$A'B$段内流体在Δt时间内运动状态不变（定常流动），能量也不变。所以要计算Δt时间内整段流体的能量变化，只需要计算体积元ΔV_2与ΔV_1之间的能量差。

动能增量：$\Delta E_k = \frac{1}{2}\rho\Delta V \cdot v_2^2 - \frac{1}{2}\rho\Delta V \cdot v_1^2$

势能增量：$\Delta E_p = \rho g(h_2 - h_1)\Delta V$

外力作功：

$$\Delta W = p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2 = p_1 \Delta V - p_2 \Delta V$$



由功能原理：

$$p_1\Delta V - p_2\Delta V = \frac{1}{2}\rho\Delta V \cdot v_2^2 - \frac{1}{2}\rho\Delta V \cdot v_1^2 + \rho g h_2 \Delta V - \rho g h_1 \Delta V$$

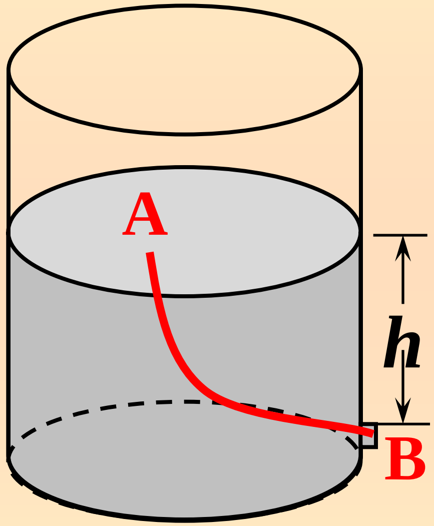
即：$$\boxed{p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2}$$

或：$$\boxed{p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{常量}}$$ 称为伯努利方程。

➢伯努利方程对定常流动的流体中的任一流线也成立。

例题 设有一大容器装满水，在水下面h处的器壁上有一个小孔，水从孔中流出，试求水的流速。

解：由于容器较大，水从小孔流出液面下降极慢，可以看作是稳定流动。在流体中任取一流线（如图）。



A: $v_A=0$，$p_A=p_0$，$h_A=h$

B: $v_B=?$，$p_B=p_0$，$h_B=0$

代入伯努利方程中

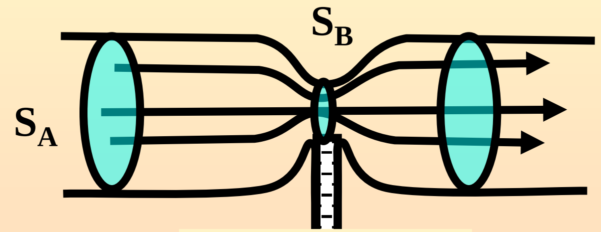
$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h_A = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g h_B$$

可得

$$v_B = \sqrt{2gh}$$

小孔处流速和物体自高度*h*处自由下落得到的速度是相同的。

例题水在截面积不同的水平管中作稳定流动，出口处的截面积为管的最细处的3倍。若出口处的流速为2 m s^{-1}，问最细处的压强为多少？若在此最细处开一个小孔，水会不会流出来？



解：

$$S_{出}V_{出}=S_{细}V_{细}$$

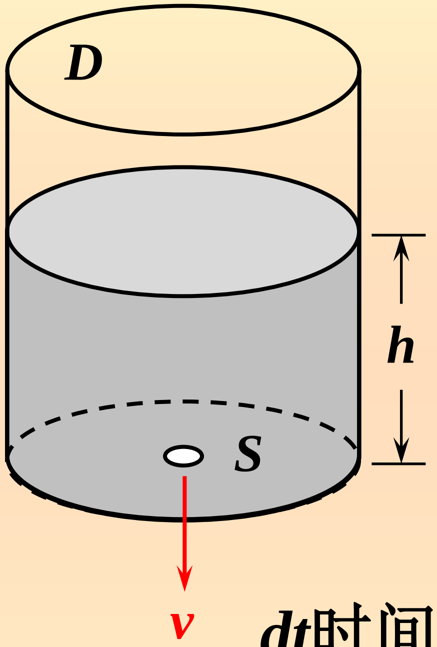
$$V_{细}=6m/s$$

选择一水平流线

$$P_0+\frac{1}{2}\rho v_{出}^2=P_{细}+\frac{1}{2}\rho v_{细}^2$$

$P_{细}=84000Pa < P_0$, 水不会流出来

习题5-11：直径为0.10m，高为0.20m的圆筒形容器底部有$1cm^2$的小孔。水流入容器内的流量为$1.4\times10^{-4}m^3/s$ 。求：(1)容器内水面能上升多高？(2)达到该高度后停止注水，水流完需时多少？



(1)由伯努利方程： $v=\sqrt{2gh}$

当水面升至最高时： $Q_V=vS=S\sqrt{2gh_m}$

$$\therefore\quad h_m=\frac{Q_V^2}{2gS^2}=0.10m$$

(2)容器内水的总体积： $V=\frac{1}{4}\pi D^2\times h$

dt时间内，容器内水的减少等于从小孔流出的流量：

$$dV=\frac{1}{4}\pi D^2\times dh=-S\sqrt{2gh}dt$$

积分得： $t=\frac{\pi D^2}{2S}\sqrt{\frac{h_m}{2g}}=11.2\,s$