苏州大学《线性代数》课程试卷库（第一卷）共 4 页

学院________________专业_________________成绩___________

年级__________学号______________姓名____________日期_____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								

一、　**填空题**（每小题 3 分，共计 30 分）

1、$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$中 x 一次项的系数为____________。

2、设 $A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 6 \end{vmatrix}$，则 $4A_{41}+3A_{42}+2A_{43}+A_{44}=$______________。

3、若二次型 f 的矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，则它的正惯性指数为_______。

4、设三阶方阵 A 的行列式 $|A|=3$，其伴随阵为 A^*，则$|A^*|=$__________。

5、设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,则 $(A+3E)^{-1}(A^2-9E)=$_____________。

6、已知向量组 $\alpha_1=(1,\ 2,\ -1,\ 1),\alpha_2=(2,\ 0,\ t,\ 0),\alpha_3=(0,\ -4,\ 5,\ -2)$的秩为 2，则 $t=$____________。

7、设$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}+a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+a_{33} & a_{33} \end{pmatrix}$,则初等矩阵 $A=$____________。

8、已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，若$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+k\alpha_1$ 也线性无关，则 k 为_________。

9、设三阶矩阵 A 的特征值为 1、2、3，则矩阵 $B=A^2-3A+E$ 的特征值为___________________。

10、若矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$相似，则 $y=$_________。

二、　计算行列式（10 分）　$D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$

三、（10 分）已知线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ x_2+2x_3+2x_4=1\\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b\\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1\end{cases}$

求（1）a,b 为何值时，方程组有唯一解？

（2）a,b 为何值时，方程组有无穷多组解，并用其导出组的基础解系求出其全部解。

四、（10 分）设$B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，且$AB-B=A$，求：$A$

五、（10 分）设二次型$f=2x^2+4y^2+4xy+4yz$，试写出对应的矩阵，并利用配方法化为标准型。

六、（10 分）证明：n 维正交向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关。

七、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，试求：

（1） A 的特征值和特征向量　　（2）正交矩阵 Q, 使 $Q^T AQ$ 为对角阵

八、（10 分）设 4 阶方阵 A 满足条件 $|3I + A| = 0, |A| < 0$，且 $AA^T = 2I$，求：A^* 的一个特征值（A^* 为 A 伴随阵）。

苏州大学《线性代数》课程试卷库（第二卷）共　　页

学院________________专业________________成绩___________

年级_________学号______________姓名____________日期_____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								

一、　（每题 3 分，共计 30 分）单项选择：

1、设 $f(x)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1-x & 1\\ 1 & 1 & 2-x\end{vmatrix}\neq 0$ 的充要条件是　　　　　　　　　[　　　]

(a) $x\neq 0$ 或 $x\neq 1$　(b) $x\neq 0$ 且 $x\neq 1$　(c) $x\neq 1$ 或 $x\neq 2$　(d) $x\neq 1$ 且 $x\neq 2$

2、已知 A,B 均为 n 阶方阵， I 为单位阵， $BCA=I$，则　　　[　　　]

(a) $ABC=I$　(b) $ACB=I$　(c) $BAC=I$　(d) $CBA=I$

3、已知 $m\times n$ 阶矩阵 A 的秩为 $n-1$，α_1,α_2 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个不同的解，k 为任意常数，则方程组 $Ax=0$ 的通解可表示为　　[　　　]

(a) $\alpha_1+k\alpha_2$　(b) $\alpha_2+k\alpha_1$　(c) $k(\alpha_1+\alpha_2)$　(d) $k(\alpha_1-\alpha_2)$

4、n 阶方阵 A 与对角矩阵相似的充分必要条件是　　　　　　[　　　]

(a)　矩阵 A 有 n 个特征值　(b)　矩阵 A 有 n 个线性无关的特征向量

(c)　$|A|\neq 0$　　　　　　(d)　矩阵 A 为实对称矩阵

填空题

5、二次型 $f=2x^2+3y^2-2xy+4yz$ 对应的矩阵为[　　　　　　　　　]

6、设 $A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & 0 & 2\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & 5 & 0\end{vmatrix}$，则 $A^{-1}=$[　　　　　　　　]。

7、若 A,B 均为 n 阶矩阵，且有 $|A|=-2, |B|=3,$ 则 $|-A^*B^{-1}|=$[　　　　　　]。

8、已知 $\beta=(1,\ 1,\ 2)$ 不能由 $\alpha_1=(2,\ 2,\ -1), \alpha_2=(0,\ 4,\ 8), \alpha_3=(-1,\ k,\ 3)$ 线性表出，则 $k=$[　　　　　　]。

9、设 n 阶方阵 A 满足每行元素之和都是 0，如果秩 $r(A)=n-1$，则齐次方程组 $Ax=0$ 的通解是[　　　　　　]。

10、设 3 阶矩阵 A 的特征值是 1，2，-1，设矩阵 $B=A^3-5A^2$，则 $|B|=$[　　　]。

二、　（10 分）计算行列式：$D_n=\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$

三、（10 分）讨论 k 为何值时，非齐次线性方程组 $\begin{cases} -x_1+x_2-kx_3=k \\ x_1+kx_2-x_3=1 \\ kx_1+x_2+x_3=k \end{cases}$

有唯一解，无解或有无穷多解？并在有无穷多解时利用基础解系求其全部解。

四、（10 分）设向量组 $A:\alpha_1=(1,\ 1,\ 1,\ 1)^T,\alpha_2=(0,\ 2,\ 2,\ 2)^T$，

$\alpha_3=(0,\ 0,\ 3,\ 1)^T$，$\alpha_4=(1,\ 3,\ 6,\ 4)^T$，

求：（1）A 的秩，（2）求 A 的一个极大线性无关组

五、（10 分）设：$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 4\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix}$，试求：

（1）A 的特征值和特征向量

（2）求可逆矩阵 P 及对角矩阵 Λ，使 $P^{-1}AP=\Lambda$

六、（10 分）如果 A 为非奇异矩阵，且 $AB=C, BA=D$，求证：$r(B)=r(C)=r(D)$

七、（10 分）已知 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，写出对应二次型，并化为标准型

八、（10 分）设 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ 且 $ABA^{-1}=B\ A^{-1}+3I$

求：B

苏州大学《线性代数》课程试卷库（第三卷）共 4 页

学院________________ 专业________________成绩____________

年级___________ 学号__________ 姓名___________日期______

题号	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								

一、 填空题：（30 分，每题 3 分）

1、多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & 3 & 1 & 2 \\ x & x & 0 & 1 \\ 2 & 1 & x & 4 \\ x & 2 & 1 & 4x \end{vmatrix}$ 的常数项为______________。

2、设 $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B_{3\times 3}$ 的列向量组线性无关，则 $r(AB)=$______________。

3、设三元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 中，矩阵 A 的秩为 2，且 $\mu_1=(1,\quad 2,\quad 2)^T$，

$\mu_2=(3,\quad 2,\quad 1)^T$ 是方程组的两个特解，则此方程组的全部解为________________

4、设 A 为三阶可逆矩阵，$|A|=2,$ 则 $|-2A^{-1}|=$______________。

5、若线性无关的向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_k$ 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示，则 k 与 m 之间的关系为 k_______m。

6、设向量组 $\alpha_1=(1,\quad 1,\quad 0,\quad 0)^T,\alpha_2=(0,\quad k,\quad 1,\quad 1)^T,\alpha_3=(0,\quad 0,\quad 1,\quad k)^T$，

$\alpha_4=(k,\quad 0,\quad 0,\quad 1)^T$ 线性无关的充要条件是 k_____________________。

7、设 A 是 n 阶正交矩阵，且 $A^*+A^T=0$，则 $|A|=$_______________。

8、若 n 阶矩阵 A 满足 $A^2=A$，则 A 的特征值 λ 为____________________。

9、设 $\alpha=(-1,\quad 2,\quad 1)^T,\beta=(2,\quad -1,\quad 2)^T$，则向量 α 与 β 的内积为_________。

10、设 A,B 均为三阶矩阵，且满足 $AB+I=A^2+B$，$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

则 $B=$__________________。

二、 （10 分）计算行列式：$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ -1 & -4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

三、 （10 分）设对称矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，求：

（1） A 的所有特征值和特征向量；

（2）正交矩阵 Q, 使 $Q^T AQ = \Lambda$ （Λ 为对角矩阵）。

四、　（10 分）k 满足什么条件时，下面的方程组有唯一解，无解，有无穷多解？有无穷解时利用基础解系求出全部解。

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -k \\ x_1 + 2x_2 + kx_3 = k^2 \\ 2x_1 + x_2 + k^2 x_3 = 0 \end{cases}$$

五、（10 分）设向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

（1） 判断向量组的线性相关性

（2）求向量组的一个极大线性无关组，并其余向量由极大无关组线性表示。

六、（10 分）已知 A 与 B 均为 n 阶矩阵， $AB=0,$ 求证：秩 A+秩 $B\le n$.

七、（10 分）已知 A 三阶矩阵，$2I-A, I-A, I+A$ 都不可逆，则求：A 的所有特征值及 $|A|$

八、（10 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ 写出对应的二次型，并化为标准型

苏州大学《线性代数》课程试卷库（第四卷）共 4 页

学院________________ 专业________________成绩____________

年级___________ 学号__________ 姓名___________日期______

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

一、 （每题 3 分，共 30 分）是非题：

1、若方阵 A 与 B 相似，且 B 与 C 相似，则 A 与 C 相似。 （ ）

2、若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，则 α_3 能由 α_1 和 α_2 线性表示。 （ ）

3、可逆方阵 A 的转置矩阵 A^T 必可逆。 （ ）

4、设有矩阵 A、B，且 $A\ B$ 有意义，则 $A+B$ 必有意义。 （ ）

5、若方程组 $Ax=b(b\neq 0)$ 有无穷多解，则 $Ax=0$ 也有无穷多解。（ ）

选择题

6、设 A,B 均为 n 阶方阵，则必有___________。

(a) $|AB|=|BA|$ (b) $AB=BA$

(c) $|A+B|=|A|+|B|$ (d) $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$

7、若矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & \lambda+1\end{pmatrix}$ 的秩为 2，则 $\lambda=$________。

(a) 0 (b) 2 (c) -1 (d) 1

8、设有两个向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 $B:\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$，则________结论是正确的。

(a)若 A 线性无关，则 B 线性无关 (b)若 A 线性相关，则 B 线性相关
(c)若 B 线性无关，则 A 线性相关 (d)若 B 线性相关，则 A 线性相关

9、设非齐次线性方程组 $Ax=b$ 中，系数矩阵 A 为 $m\times n$ 矩阵，且 $r(A)=r$，则下列结论正确的是_________。

(a) $m=n$ 时方程组有唯一解 (b) $r=n$ 时方程组有唯一解
(c) $r=m$ 时方程组有解 (d) $r<n$ 时方程组有无穷多解。

10、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & -2\end{pmatrix}$, 则下列矩阵中非奇异矩阵是___________。

(a) $-2I+A$ (b) $I-A$ (c) $2I-A$ (d) $-3I-A$

二、　计算题（每题 10 分，共 20 分）

1、求行列式的值　$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$

2、已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$，求 $(A^*)^{-1}$

三、（10 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 3 & t \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，三阶矩阵 $B\neq 0, AB=0$，求：　t 和 $r(B)$

四、（10 分）设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&2&1\\1&2&1&3\\2&3&3&4\\3&5&4&7\end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$，求：齐次线性方程组$Ax=0$的一个基础解系和全部解。

五、（10 分）设三阶矩阵A的特征值为 1、2、3，对应的特征向量分别为$\alpha_1=(1,\ 1,\ 1)^T, \alpha_2=(1,\ 0,\ 1)^T, \alpha_3=(0,\ 1,\ 1)^T$，试求矩阵 A。

六、（10 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，求:

（1） A 的特征值和特征向量；（2）正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

七、（10 分）设向量 β 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示且表达式唯一，

证明：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。

苏州大学《线性代数》课程试卷库（第五卷）共 4 页

学院________________ 专业________________成绩____________

年级___________ 学号__________ 姓名___________日期______

题号	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								

一、填空题：（每题 3 分，共 30 分）

1、多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & x \\ 2 & 2 & 3 & x \\ -7 & 10 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中的常数项为____________。

2、若 A 为三阶可逆矩阵，且 $|A|=2$，则 $\left|(-2A^*)^T\right|=$__________。

3、设矩阵 A 满足 $A^2+A-4I=0$，则 $(A-I)^{-1}=$____________。

4、已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+1 \end{pmatrix}$ 的秩为 2，则 $a=$__________。

5、设 A 为 4×3 阶矩阵，$r(A)=2$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 则 $r(AB)=$________。

6、已知线性方程组 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ \quad -x_2 + 2x_3 = 2 \\ \quad \lambda(\lambda-1)x_3 = (\lambda-1)(\lambda-2) \end{cases}$ 无解，则 $\lambda=$__。

7、当 t_______时，向量组 $\alpha_1=(1,2,-2)$，$\alpha_2=(4,t,3)$，$\alpha_3=(3,-1,1)$ 线性无关。

8、设任意一个 n 维向量都是齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=0$ 的解向量，则 $r(A)=$__。

9、已知 λ 是 A 的特征值，A^* 是 A 的伴随阵，则 A^* 的特征值=__________。

10、已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 相似，则 $y=$__________。

二、（10 分） 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

三、（10 分）设矩阵 $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，且满足关系式 $AP=PB$，

求：A， A^5.

四、（10 分） $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2000} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2001}$

五、（10 分）线性方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = a \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = b \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 2 \end{cases}$

讨论当a,b为何值时，方程组有解，当方程组有解时，用其导出组的基础解系表示方程组的全部解。

六、（10 分）已知$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$，求：

（1）A的所有特征值和特征向量、（2）正交矩阵Q, 使$Q^{-1}AQ$为对角阵Λ。

七、（10 分）已知 $A=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 4 & a \\ a & 4 & -1 \\ 4 & b & 4 \end{pmatrix}$ 是正交阵，求：a,b 的值

八、（10 分）设 n 阶方阵 A,B 分别与对角阵 Λ_1,Λ_2 相似，

求证：分块矩阵 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 必与一个对角阵相似

苏州大学《线性代数》课程试卷库（第六卷）共 4 页

学院________________ 专业________________成绩____________

年级___________ 学号__________ 姓名___________日期______

题号	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								

一、填空题：（每题 3 分，共 30 分）

1、$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$=____________________。

2、设 A,B 均为 n 阶矩阵，$|A|=2,|B|=-3,\ \ A^*$ 是 A 的伴随矩阵，$\left|3A^*B^{-1}\right|=$______。

3、设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $(2A)^{-1}=$________________。

4、非齐次线性方程组 $A_{m\times n}X_{n\times 1}=b_{m\times 1}$ 有惟一解的充分必要条件是____________。

5、向量 $\alpha=(3,\ \ 1)^T$ 用 $\eta_1=(1,\ \ 2)^T,\eta_2=(2,\ \ 1)^T$ 线性表示的表达式__________。

6、设 $\alpha=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，矩阵 $A=\alpha\alpha^T,n$ 为正整数，则 $A^n=$_____________________。

7、若向量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} k \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ k \end{pmatrix}$ 线性相关，则 $k=$____________。

8、若 n 阶矩阵 A 有一个特征值为 2，则 $|A-2I|=$__________。

9、已知三阶矩阵 A 的特征值为 -1，3，-3，矩阵 $B=A+I$，则 $|B|=$_______。

10、设矩阵 $A\sim B$，其中 $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$,则 $a=$_________。

二、（10 分）计算行列式：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

三、(10 分) 线性方程组$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 7x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = a \\ 7x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = b \end{cases}$ 当 a,b 为何值时有解？在有解的情况下，利用其导出组的基础解系求其全部解。

四、（10 分）设 $AX+B=X$ ，其中 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$，求：$X$

五、（10 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ 相似，

求：（1）x；（2）可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$.

六、（10 分）设二次型 $f = 2x^2 + 4y^2 + 4xy + 4yz$，试写出对应的矩阵，并利用配方法化为标准型。

七、（10 分）设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$，求 A 的特征值和特征向量。

八、（10 分）证明：如果 A 是 $n(n \geq 2)$ 阶矩阵，当 $r(A) = n-1$ 时，试证：$r(A^*) = 1$

苏州大学《线性代数》课程试卷库（第七卷）共 4 页

学院__________________ 专业__________________成绩______________

年级____________ 学号___________ 姓名____________日期______

题号	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								

一、（每题 3 分，共 30 分）单项选择题：

1、若 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 6$，则 $\begin{vmatrix} a_{12} & 2a_{11} & 0 \\ a_{22} & 2a_{21} & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} =$（　　　）

(a)　12　　(b)　-12　　(c)　18　　(d)　0

2、设 A,B 都是 n 阶矩阵，且 $AB=0$，则下列一定成立的是（　　　）

(a)　$A=0,$ 或 $B=0$　　　　(b)　A,B 都不可逆

(c)　A,B 中至少有一个不可逆　　　　(d)　$A+B=O$

3、已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 线性相关，则下列结论正确的是 （　　　）

(a)　$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 中一定含有零向量。

(b)　$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 中必有两个向量的对应分量成比例。

(c)　$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 中每一个向量都可用其余 $s-1$ 个向量线性表示。

(d)　$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 中至少有一个向量可用其余 $s-1$ 个向量线性表示。

4、设 n 阶矩阵 A 的秩 $r<n$，则在 A 的 n 个行向量中（　　　）

(a) 必有 r 个行向量线性无关 。

(b) 任意 r 个行向量均可构成极大线性无关组。

(c) 任意 r 个行向量均线性无关。

(d) 任一行向量均可由其他 r 个行向量线性表示。

5、设 A,B 为 n 阶矩阵，且 A 与 B 相似，I 为 n 阶矩阵，则结论正确的是（　　　）

(a)　$\lambda I-A=\lambda I-B$　　　　(b)　A 与 B 有相同的特征值和特征向量

(c)　A 与 B 都相似于一个对角矩阵　　(d)　$cI-A$ 与 $cI-B$ 相似（c 为任意常数）

6、设三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，则 $x=$（　　　）

(a)　-1　　(b)　0　　(c)　1　　(d)　2

是非题

7、若 A 和 B 都是 n 阶对称阵，则 AB 也是对称阵。 （ ）

8、若 n 阶矩阵 A 与 B 相似，则存在可逆矩阵 P，使得 $P^T AP = B$。 （ ）

9、已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则向量组 $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$ 也线性无关 （ ）

10、若 A 为满秩方阵，则 A 的特征值不为零。 （ ）

二、（10 分） 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2-n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$

三、（10 分）已知 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，写出对应二次型，并化为标准型

四、（10 分）线性方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + ax_3 + 7x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 = b \end{cases}$

（1） 讨论a,b取何值时，方程组有解？无解？

（2） 当有解时，试用其导出组的基础解系表示其全部解

五、（10 分） 已知向量$\alpha = (1, \quad k, \quad 1)^T$是矩阵$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$的逆矩阵$A^{-1}$的特征向量，求常数$k$的值

六、（10 分）已知向量组 A: $\alpha_1=(2,\ 1,\ 1,\ 1)$，$\alpha_2=(-1,\ 1,\ 7,\ 10)$，$\alpha_3=(3,\ 1,\ -1,\ -2)$，$\alpha_4=(8,\ 5,\ 9,\ 11)$，求：它的一个极大无关组，并将其余向量用此极大无关组线性表示。

七、（10 分）已知实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$，求正交阵 Q，对角阵 Λ，使得

$$Q^T AQ=\Lambda$$

八、（10 分）设正交矩阵 Q 的特征值为 λ，证明：$|\lambda|=1$

苏州大学《线性代数》课程试卷库（第八卷）共 4 页

学院__________________ 专业__________________成绩_____________

年级____________ 学号___________ 姓名____________日期_______

题号	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								

一、填空题：（每题 3 分，共 30 分）

1、$\begin{vmatrix} 1 & 2a & a^2 \\ 1 & a+b & ab \\ 1 & 2b & b^2 \end{vmatrix} =$________________________。

2、若 n 阶矩阵 A,B,C，满足 $ABC=I$，则 $C^{-1}=$ ___________________。

3、设 A 为 2001 阶矩阵，且满足 $A^T=-A$，则$|A|=$ ________________ 。

4、设 $A,\overline{A}$ 分别为线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵与增广矩阵，则 $Ax=b$ 有解的充分必要条件是_________________________________。

5、设 A,B 均为 $m\times n$ 矩阵，若 A 的列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 可由 B 的列向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性表示，则 $r(A)$ 与 $r(B)$ 的关系为________________________。

6、已知 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a_1+c_1 & 2b_1 & c_1 \\ a_2+c_2 & 2b_2 & c_2 \\ a_3+c_3 & 2b_3 & c_3 \end{pmatrix}$，则初等矩阵 $X=$_________________。

7、已知向量组 $\alpha_1=(1,\ -2,\ 3),\alpha_2=(0,\ t-1,\ 2),\alpha_3=(0,\ 0,\ 3)$ 的秩为 2 ，则 $t=$___________________。

8、若 3 阶矩阵 A 的 3 个特征值分别为 –1，1，8，则 $|A|=$__________________。

9、已知 $\lambda=2$ 是三阶矩阵 A 的一个特征值，$\alpha_1=(1,\ 2,\ 0)^T,\alpha_2=(1,\ 0,\ 1)^T$ 是对应于 λ 的特征向量，$\beta=\alpha_1-2\alpha_2$，则 $A\beta=$_________________________。

10、设 A 为实对称矩阵，α_1,α_2 分别为对应于两个不同特征值 λ_1,λ_2 的特征向量，则 α_1,α_2 的内积 $(\alpha_1,\alpha_2)=$______________。

二、（10 分）如果 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = m,$ 则求 $\begin{vmatrix} a_1+3b_1 & b_1+2c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+3b_2 & b_2+2c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+3b_3 & b_3+2c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}$

三、（10 分）设矩阵 A, B 满足 $A^*BA = 2BA - 8I$，其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$， 求 B

四、（10 分）设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，$B$ 是非零的 3 阶矩阵，且 $AB = 0$，求：t 的值

五、（10 分）线性方程组$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 2 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 3x_4 = a + 1 \\ -x_1 - 11x_2 + 5x_3 + 4x_4 = -4 \end{cases}$

当a为何值时有解？在有解的情况下，利用基础解系求其全部解。

六、（10 分）给定向量组$A = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$，求向量组的一个极大无关组，并将其余向量由此极大无关组表示；

七、（10 分）若矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$，求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$。

八、证明题：（10 分）

设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 n 阶方阵，且 $r(A)=n$，试证：如果 $AB=A$，则 $B=I$

苏州大学《线性代数》课程试卷库（第九卷）共 4 页

学院________________ 专业________________成绩____________

年级___________ 学号__________ 姓名___________日期______

题号	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								

一、（每题 3 分，共 30 分，）单项选择题：

1、行列式 $A=\begin{vmatrix}0&1&0&5\\0&2&2&6\\3&3&0&7\\0&4&0&8\end{vmatrix}=$ （　　）

(a) -12　　(b) -24　　(c) -36　　(d) -72

2、设 A,B 都是 n 阶可逆矩阵，则 AB 的伴随矩阵 $(AB)^*=$ （　　）

(a) A^*B^*　　(b) $|AB|A^{-1}B^{-1}$　　(c) $B^{-1}A^{-1}$　　(d) B^*A^*

3、向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s(s\ge 2)$ 线性相关，该向量组的秩为 r，则必有（　　）

(a) $r=s$　　(b) $r>s$　　(c) $s=r+1$　　(d) $r<s$

4、n 阶矩阵 A,B 均为可逆矩阵，若 $C=\begin{pmatrix}O&B\\A&O\end{pmatrix}$，则 $C^{-1}=$ （　　）

(a) $\begin{pmatrix}A^{-1}&O\\O&B^{-1}\end{pmatrix}$　　(b) $\begin{pmatrix}O&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{pmatrix}$　　(c) $\begin{pmatrix}O&A^{-1}\\B^{-1}&O\end{pmatrix}$　　(d) $\begin{pmatrix}B^{-1}&O\\O&A^{-1}\end{pmatrix}$

5、n 阶矩阵 A 可与对角矩阵 Λ 相似的充分必要条件是 （　　）

(a) A 有 n 个线性无关的特征向量　　(b) A 有 n 个不同的特征值

(c) A 的 n 个列向量线性无关　　(d) A 有 n 个非零的特征值

6、设 A 的特征多项式 $|\lambda I-A|=(\lambda+1)(\lambda+4)(\lambda-1)$，则 $|A|=$（　　）

(a) 4　　(b) 1　　(c) -1　　(d) -4

是非题

7、线性方程组 $Ax=0$ 只有零解，则 $Ax=b(b\ne 0)$ 有唯一解。 （　）

8、若存在一组数 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$ 成立，则

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 线性无关。 （　）

9、设 n 阶矩阵 A 是奇异阵，则 A 中必有一列向量是其余列向量的线性组合。（　）

10、设 A,B 都是 n 阶矩阵，且 $|A|\neq 0$，则 AB 与 BA 必相似。 （ ）

二、（10 分）计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$

三、（10 分）设 A,B 为 3 阶矩阵，且满足方程 $A^{-1}BA = 6A + BA,\ A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$，

求 B

四、（10 分）线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2 \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_1+2x_3+2x_4+6x_5=6 \\ 4x_1+5x_2+3x_3+3x_4-x_5=4 \end{cases}$

利用其导出组的基础解系求出方程组的全部解。

五、（10 分）已知向量组$A:\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\-3\\5\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\\p+2\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-2\\-6\\10\\p\end{pmatrix}$

求（1）p 为何值时，向量组线性相关？

（2）此时求向量组的一个极大无关组，并将其余向量由该极大无关组线性表出。

六、（10 分） 设 3 阶矩阵 A 的特征值分别为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1,\lambda_3=3$，对应的特征向量依次为 $\xi_1=(1,\quad -1,\quad 0)^T$，$\xi_2=(1,\quad -1,\quad 1)^T$，$\xi_3=(0,\quad 1,\quad -1)^T$

求：矩阵 A

七、（10 分）设二次型 $f=2y^2+3z^2+4xy-2yz$，（1）表示为矩阵形式，（2）将其化为标准型。

八、（10 分）设 $A^2=I$，但 $A\neq I$，证明：$|A+I|=0$

苏州大学《线性代数》课程试卷库（第十卷）共 4 页

学院________________ 专业________________成绩____________

年级___________ 学号__________ 姓名___________日期______

题号	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								

一、填空题：（每题 3 分，共 30 分）

1、排列 $(n-1)\cdots\cdots 3\cdot 2\cdot 1\cdot n$ 的逆序数为 __________________。

2、设 3 阶方阵 A，满足 $|A|=3$，则 $|A^{*}+A^{-1}|=$ __________________。

3、若方程组 $\begin{cases} x_1+x_2=a_1 \\ x_2+x_3=a_2 \\ x_3+x_4=a_3 \\ x_4+x_1=a_4 \end{cases}$ 有解，则常数 a_1,a_2,a_3,a_4 应满足关系式________________________ 。

4、已知 $X\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a_1 & 2b_1 & 2c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2+a_3 & b_2+b_3 & c_2+c_3 \end{pmatrix}$，则 $X=$__________________。

5、设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，则向量组 $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$ 线性_______________。

6、齐次线性方程组 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 的基础解系所含解向量的个数为______________。

7、设 3 阶方阵 $A\neq 0$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$，且 $AB=0$，则 $t=$________________。

8、设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 相似，则 $x=$_________________。

9、设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，则 A 的两个特征值之和为_________________。

10、已知 A 是 n 阶方阵，满足 $A^2=I$，则 A 的特征值 $\lambda=$_____________。

二、（10 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{pmatrix}$，且 $|A|=4$，$|B|=1$，

求：$|A+B|$

三、（10 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $A^* X = A^{-1} + 2X$，其中 A^* 是 A 的伴随阵，求：矩阵 X

四、（10 分）已知 A, B 均是 3 阶矩阵，将 A 中第 3 行的 -2 倍加至第 2 行得到矩阵 A_1，将 B 中第 2 列加至第 1 列得到矩阵 B_1，又知 $A_1B_1=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$,求 AB

五、（10 分）给定线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+x_4=3 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4=2 \\ 2x_1+x_2+5x_3+4x_4=7 \end{cases}$ 用其导出组的基础解系表示其全部解。

六、（10 分）设向量组：$\alpha_1=(1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 3)^T$，$\alpha_2=(-1,\ \ -3,\ \ 5,\ \ 1)^T$

$\alpha_3=(3,\ \ 2,\ \ -1,\ \ p+2)^T$，$\alpha_4=(-2,\ \ -6,\ \ 10,\ \ p)^T$，

求（1） p 为何值时，该向量组线性相关？

（2）此时向量组的秩和一个极大线性无关组。

七、（10 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$，求：

(1) A 的特征值和特征向量， (2) 正交矩阵 Q，使 $Q^T AQ$ 为对角阵

八、证明题：（10 分）已知 n 阶实对称矩阵 A 满足 $A^2+6A+8I=0$，证明：

（1） $A+3I$ 是可逆矩阵；（2） $A+3I$ 是正交矩阵。

苏州大学《线性代数》课程试卷库（第十一卷）共 4 页

学院________________专业________________成绩___________

年级__________学号______________姓名____________日期______

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九
得分									

一、选择题：（本题 15 分，每小题 3 分）

1．设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\0&1&-1&3&2\\0&0&0&3&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，则矩阵 A 的秩为　　　　[　　]

（A） 0　　（B） 2　　（C） 3　　（D） 4

2．行列式 $\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&\lambda_1\\0&0&\cdots&\lambda_2&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\\lambda_n&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}$ 的值为　　　　[　　]

（A）0　（B）$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$　（C）$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$　（D）$-\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

3．假设 A 是 3 阶方阵，特征值分别为 0，1，2，则　　　　[　　]

（A）矩阵 A 的秩 $r(A)=3$　　（B）行列式 $|A^TA|=1$

（C）行列式 $|A+E|=0$　　（D）矩阵 $(A+E)^{-1}$ 的特征值分别为 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}$

4．已知 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m>2)$ 线性无关，则　　　　[　　]

（A） 对任意一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 都有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$。

（B） $m>n$ 。

（C） 对任意 n 维向量 β，有 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性相关。

（D） $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m>2)$ 中任意两个向量均为线性无关。

5．设矩阵 $A_{m\times n}$ 的秩 $r(A)=m<n$， B 为 n 阶方阵，则　　　　[　　]

（A） $A_{m\times n}$ 的任意 m 阶子式均不为零。　（B）当秩 $r(B)=n$ 时有秩 $r(AB)=m$ 。

（C） $A_{m\times n}$ 的任意 m 个列向量均线性无关。（D） $|A^TA|\neq 0$

二、**填空题**：（本题 15 分，每小题 3 分）

1．设 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & b & c \\ x^2 & a^2 & b^2 & c^2 \\ x^3 & a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$，且 $a\neq b\neq c$，则方程 $f(x)=0$ 的全部根为_____

2．已知 A,B 为 4 阶方阵，且 $|A|=-2,\ |\mathrm{B}|=3$，则 $|A^{-1}B^{-1}|=$______________。

3．设 A,B 为可逆矩阵，则 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}=$____________。

4．当 $t=$_______时，向量组 $\alpha_1=(0,\quad 4,\quad 2-t),\alpha_2=(2,\quad 3-t,\quad 1),$

$\alpha_3=(1-t,\quad 2,\quad 3)$ 线性相关。

5．若 3 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=3,\lambda_3=1,$ 则 $|A|=$____________。

三、（本题 10 分） 已知 $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

求：（1）D 的代数余子式 A_{12}　　　（2）$A_{11}+A_{21}+2A_{31}+2A_{41}$

四、（本题 10 分）已知 $A=\begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ -5 & -3 & 1 \\ 6 & 4 & -1 \end{bmatrix}$，且 $A^2-AB=E$，求：B

五、（本题 10 分） 设向量组$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $\alpha_3=\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}$, $\alpha_4=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$

（1）求它的一个极大无关组和秩，并将其余向量由极大无关组线性表示。

（2）求向量组的一个正交向量组。

六、（本题 10 分） 已知 $\alpha_1=(1,\ 4,\ 0,\ 2)^T$， $\alpha_2=(2,\ 7,\ 1,\ 3)^T$，

$\alpha_3=(0,\ 1,\ -1,\ a)^T$, $\beta=(3,\ 10,\ b,\ 4)^T$

试讨论（1）a,b 取何值时，β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示；

（2）a,b 取何值时，β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，并写出此表达式。

七、（本题 10 分）已知$\xi=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$是矩阵$A=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{bmatrix}$的一个特征向量，利用此条件 （1）确定常数$a,b$；

（2）确定特征向量ξ对应的特征值λ

八、（本题 10 分）将二次型$f=3y^2+4z^2+6xy+2xz$化为标准型。

九、（本题 10 分）证明题

设A是n阶正交矩阵，且$|A|<0$，证明：$|A+E|=0$

苏州大学《线性代数》课程试卷库（第十二卷）共 4 页

学院________________专业________________成绩___________

年级__________学号______________姓名____________日期______

题号	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								

一、填空题：（每小题 3 分，共计 30 分）

1、设方程 $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & x & 3 & 3 \\ 3 & 3 & x & 4 \\ 4 & 4 & 4 & x \end{vmatrix} = 0,$ 方程的解是________________________。

2、设 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$，则 $X =$________________。

3、设矩阵 A 是可逆的三阶矩阵，且 $|A| = 3$，则 $(A^*)^{-1} =$____________。

4、设向量组 $\alpha_1 = (1, \ -6, \ 1)$，$\alpha_2 = (2, \ 3, \ 5)$，$\alpha_3 = (3, \ 7, \ 8)$，$\beta = (7, \ -2, \ t)$

当 $t =$_________时，β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示。

5、设 A 是方阵且满足 $A^2 + A - 8E = 0$，$(A - 2E)^{-1} =$________________。

6、当 $t =$_________时，向量组 $\alpha_1 = (1, \ 2, \ 3)$，$\alpha_2 = (2, \ 3, \ 1)$，$\alpha_3 = (1, \ 3, \ t)$ 线性相关。

7、已知 A, B 为 4 阶方阵，且 $|A| = -2,\ |B| = 3$，则 $|(AB)^{-1}| =$_____________。

8、设 5 元线性齐次方程组 $AX = 0$，其基础解系由 3 个解向量组成，则 $r(A) =$_

9、设 $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，则 A^2 可与对角阵 $\Lambda =$_____________相似。

10、设 A 是三阶方阵，且 $|A - E| = |A + 2E| = |2A + 3E| = 0$，则 $|A + E| =$________。

二、判断题：（每小题 2 分，共计 10 分）

1、已知 A 是对称矩阵，则 AA^{-1} 也是对称矩阵。 [ ]

2、设A是$m\times n$阶矩阵，且$r(A)=r<m<n$，A经过初等变换可化为$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。

[　　　]

3、已知向量组α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_s中任意两个向量都不成比例，则向量组线性无关。

[　　　]

4、若方程组$AX=0$有非零解，则方程组$AX=b$有无穷多个解。 [　　　]

5、如果A与B相似，则它们有相同的特征值和特征向量。 [　　　]

三、（本题 10 分）　　设 $(\frac{1}{2}A)^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，求：矩阵$A$

四、（本题 10 分）　已知向量$\alpha_1=(1,\quad 2,\quad 3)$，$\alpha_2=(4,\quad 5,\quad 6)$，$\alpha_3=(7,\quad 8,\quad 9)$，

求：向量组α_1，$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$的秩与一个极大无关组

五、（本题 10 分）　已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3&2&1\\2&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$

满足 $AXB^T=(BC)^T$，求矩阵 X

六、（本题 10 分）

已知线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+ax_3=1\\ax_1+ax_2+x_3=1\\(a+1)x_1+(a+1)x_2+(a+1)x_3=2\end{cases}$

讨论 a 的取值与方程组之间的关系，且在有解时求解。

七、（本题 10 分） 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

（1） 求 A 的特征值与特征向量；

（2） 求正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}(A^2+2A+E)Q$ 为对角矩阵。

八、（本题 10 分） 设向量组 α_1, α_2, α_3 线性无关，向量组 α_2, α_3, α_4 线性相关，

试证：α_1 不能由 α_2, α_3, α_4 线性表示。

苏州大学《线性代数》课程试卷库（第十三卷）共 4 页

学院________________ 专业________________成绩____________

年级___________ 学号__________ 姓名___________日期______

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九
得分									

一、 选择题:（每题 3 分，共计 15 分）

1、已知$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=3$，则$\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{31}-5a_{21} & 3a_{21} \\ a_{12} & 2a_{32}-5a_{22} & 3a_{22} \\ a_{13} & 2a_{33}-5a_{23} & 3a_{23} \end{vmatrix}=$ [ ]

（A） 18 （B） -18 （C） -9 （D） 27

2、如果满足[ ]条件，则矩阵A与矩阵B相似。

（A） $|A|=|B|$ （B）A与B有相同的特征多项式

（C）$r(A)=r(B)$ （D）n阶矩阵A与B有相同的特征值且n个特征值各不相同

3、设A为$m\times n$阶矩阵，C是n阶非奇异阵，$B=AC$，若$r(A)=r$，$r(B)=r_1$，则

[ ]

（A）$r>r_1$ （B）$r<r_1$ （C）$r=r_1$ （D）r与r_1的关系依C而定

4、设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关 ，则下列向量组线性相关的是 [ ]

（A）$\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_1$ （B）$\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

（C）$\alpha_1-\alpha_2, \alpha_2-\alpha_3, \alpha_3-\alpha_1$ （D）$\alpha_1+\alpha_2, 2\alpha_2+\alpha_3, 3\alpha_3+\alpha_1$

5、设线性方程组$Ax=b$有n个未知量，m个方程，且$r(A)=r$，则 [ ]

（A）$r=m$时，方程组有解 （B）$r=n$时，方程组有唯一解

（C）$m=n$时，方程组有唯一解 （D）$r<n$时，方程组有无穷多解

二、填空题:（每题 3 分，共计 15 分）

1、设$\alpha=(1, \ 1, \ 1), \beta=(2, \ 2, \ 2)$，$A=\alpha^T\beta$，则$r(A)=$___________。

2、设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$是$n$维列向量，$A=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性无关的充要条件是$|A|$_____________。

3、若$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & x & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$, 则$x =$____________。

4、设 3 阶方阵A的三个特征值为 1，2，3，则A^*的三个特征值为_________，

___________，___________。

5、设三阶方阵A满足 $|A| = \dfrac{1}{2}$, 且$B = (2A^2)^{-1} - 2(A^{-1})^2$，则$|B| =$______________。

三、（10 分）计算行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$

四、（10 分）设方阵A满足$A^2 + A - 8E = 0$，

（1） 证明：$A - 2E$ 可逆；

（2） 设矩阵X 与A满足关系式$AX + 2(A + 3E)^{-1}A = 2X + 2E$，求$X$

五、（10 分）设
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = a \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = b \end{cases}$$

讨论当a,b为何值时，方程组有解，当方程组有解时，用其导出组的基础解系表示方程组的全部解。

六、（10 分）向量组 A：$\alpha_1 = (1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1)$，$\alpha_2 = (0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1)$，

$\alpha_3 = (1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1)$，$\alpha_4 = (-3,\ -2,\ 3,\ 0,\ -1)$，

求：（1） A 的秩及一个极大无关组；

（3） 将 A 的每一个向量用极大无关组线性表示。

七、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 2 & a+1 & 2a & 3a+1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，存在 3 阶非零方阵 B 使 $BA=0$，求 a

八、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求（1）特征值和特征向量；

（2）正交矩阵 Q，使 $Q^T AQ$ 为对角阵。

九、（10 分）设 A 为正交矩阵，证明：A 的伴随阵 A^* 也是正交矩阵。

苏州大学《线性代数》课程试卷库（第十四卷）共 4 页

学院________________ 专业________________成绩____________

年级___________ 学号__________ 姓名___________日期______

题号	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								

一、填空题：（每题 3 分，共 30 分）

1、行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ -b & 0 & c & 0 \\ d & 0 & 0 & -e \\ f & g & h & i \end{vmatrix}=$__________________________。

2、设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 均为 4 维列向量，且 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1)$，

$B=(\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3)$，$C=(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1+\beta_2)$，如果 $|A|=a, |B|=b$，

则 $|C|=$___________________。

3、设方阵 A 满足 $A^2+2A+3E=0$，则 $A^{-1}=$___________________。

4、设向量 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$，矩阵 $A=\alpha\beta^T$，则 $A^6=$_________________。

5、设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & -3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，并且 A 的列向量组线性相关，则 $t=$________。

6、设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，$B=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$，存在矩阵 P 使得 $PA=B$，

则 $P=$_________________。

7、如果 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关，当 n 阶实方阵 A 满足 ____________

条件时，向量组 $A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_n$ 也线性无关。

8、设 A 为 n 阶可逆矩阵，其行向量可由 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性表出，则 s 满足______。

9、设 n 阶矩阵 A 的各行元素之和均为 0，且 $r(A)=n-1$，则齐次线性方程组 $Ax=0$ 的通解为______________________________。

10、设 λ 为 n 阶非奇异方阵 A 的一个特征值，则 $(A^*)^3 - 2E$ 必有特征值________。

二、（10 分）计算行列式 $D = \begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

三、（10 分）设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$，求 A^{-1}

四、（10 分）设 A,B,C 为三阶可逆方阵，

（1）化简等式 $(BC^T-E)^T(AB^{-1})^T+[(BA^{-1})^T]^{-1}$；

（2）当 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$， $C=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}$时，求出上式结果.

五、（10 分）求下列向量组的秩和一个极大无关组，并把其余向量用极大无关组线性表示.

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\-4\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\3\\-4\\1\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}2\\-5\\8\\-3\end{pmatrix},\ \alpha_4=\begin{pmatrix}5\\26\\-9\\-12\end{pmatrix},\ \alpha_5=\begin{pmatrix}3\\-4\\1\\2\end{pmatrix}$$

六、（10 分）已知方程组$\begin{cases}(1-\lambda)x_1+(1-\lambda)x_2+ \quad x_3=1+\lambda\\(1-2\lambda)x_1+(1-\lambda)x_2+ \quad x_3=1\\ \quad x_1+ \quad x_2+(1-\lambda)x_3=1\end{cases}$

（1）问λ为何值时，方程组有唯一解、无解或有无穷多解？

（2）在有无穷多解时求出通解.

七、（10 分）问a取何值时矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\-2&a&3\end{pmatrix}$ A可对角化

八、（10 分）设$\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$是正交矩阵A的两个特征值，α,β是对应的特征向量，证明：α与β正交

苏州大学《线性代数》课程试卷库（第十五卷）共 4 页

学院________________ 专业________________成绩____________

年级___________ 学号__________ 姓名___________日期______

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九
得分									

一、选择题：（每题 3 分，共计 15 分）

1、已知 $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，则 $A^*=$ [ ]

（A）$\begin{pmatrix}1&-2\\-3&4\end{pmatrix}$ （B）$\begin{pmatrix}1&-3\\-2&4\end{pmatrix}$ （C）$\begin{pmatrix}4&2\\3&1\end{pmatrix}$ （D）$\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}$

2、设 n 阶矩阵 A 与 B 相似，则下列结论必成立的是 [ ]

（A）$\lambda E-A=\lambda E-B$，其中 λ 为 A 与 B 的特征值

（B）对于任意常数 t，有 $|tE-A|=|tE-B|$

（C）存在对角矩阵 Λ，使得 A 与 B 都相似于 Λ

（D）当 λ_0 是 A 与 B 的特征值时，n 元齐次线性方程组 $(\lambda_0E-A)x=0$ 与 $(\lambda_0E-B)x=0$ 同解

3、设 A 为 n 阶矩阵，且 $A^k=0$（k 为正整数），则 [ ]

（A）$A=0$ （B）A 有一个不为零的特征值

（C）A 的特征值全为零 （D）A 有 n 个线性无关的特征向量

4、设 A 为 n 阶方阵，$r(A)=n-3$，且向量组 α_1，α_2，α_3 是 $Ax=0$ 的三个线性无关的解向量，则 $Ax=0$ 的基础解系可以是 [ ]

（A）$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$ （B）$\alpha_2-\alpha_1,\alpha_3-\alpha_2$，$\alpha_1-\alpha_3$

（C）$2\alpha_2-\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_3-\alpha_2$，$\alpha_1-\alpha_3$ （D）$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_2$,-$2\alpha_3-\alpha_1$

5、设向量组 α_1，$\alpha_2,\cdots,\alpha_n$（$n\geq 2$）线性相关，那么向量组内 [ ] 可由向量组内其余向量线性表示。

（A）任何一个向量 （B）没有一个向量

（C）至少有一个向量 （D）至多有一个向量

二、填空题：（每题 3 分，共计 15 分）

1、设向量 $\alpha=(1,\ a,\ b)$ 与 $\beta=(2,\ 2,\ 2)$，$\gamma=(3,\ 1,\ 3)$ 都正交，则 $a=$__________，$b=$___________。

2、设 A，B 为 3 阶方阵，且 $|A|=-1,|B|=2$，则 $\left|2(A^TB^{-1})^2\right|=$ ________。

3、设 4 阶方阵 A 的秩为 2，则其伴随阵 A^* 的秩是___________。

4、线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$ 当 $\lambda=$________时，有无穷多组解。

5、设 3 阶方阵 A 的三个特征值为 1，2，3，则 A^*A^{-1} 的三个特征值为________，__________，__________。

三、（10 分）计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix}2&-5&1&2\\-3&7&-1&4\\5&-9&2&7\\4&-6&1&2\end{vmatrix}$

四、（10 分）设方阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\-2&-5&2\\-4&-10&3\end{pmatrix}$，

1、证明：A 可逆；2、求 $(A^*)^{-1}$；3、解矩阵方程 $A^*X=A+A^{-1}$.

五、（10 分）设线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+3x_4+7x_5=0 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=0 \end{cases}$

用基础解系表示方程组的全部解

六、（10 分）向量组 A：$\alpha_1=(1,\ -2,\ -1,\ -2,\ 2)$，$\alpha_2=(4,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3)$，

$\alpha_3=(2,\ 5,\ 4,\ -1,\ 0)$，$\alpha_4=\left(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \frac{1}{3}\right)$，

（1） 证明向量组α_1，α_2，α_3,α_4线性相关；

（2） 求向量组的一个极大无关组；

（3） 将其余向量用极大无关组线性表示。

七、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，求 A 特征值和特征向量；

八、（10 分）利用正交变换将二次型 $f=x^2+2y^2-4xy$ 化为标准型。

九、（10 分）设非零数 λ_0 是正交矩阵 A 的一个特征值，

证明：$\dfrac{1}{\lambda_0}$ 也是 A 的特征值

苏州大学《线性代数》课程试卷库（第十六卷）共 4 页

学院________________ 专业________________成绩____________

年级___________ 学号__________ 姓名___________日期______

题号	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								

一、 判断题：（每题 2 分，共 12 分，认为正确的打“ √ ”，否则打“ × ”）

1、若方阵 A、B、C， $AB = AC$，且 $A \neq 0$，则 $B = C$。 （ ）

2、每一个秩为 r 的 n 阶矩阵 A，总可以经过一系列的初等行变换化为矩阵 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。 （ ）

3、n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，则 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \cdots, \alpha_m$ 也线性无关。 （ ）

4、有 n 阶矩阵 A，k 为一常数，，则 $|kA| = k|A|$。 （ ）

5、一个向量组的极大无关组中向量个数总是小于向量的维数。 （ ）

6、设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵，若 A 的秩为 m，则对任意 m 维列向量 b，方程组 $Ax = b$ 总有解。 （ ）

二、 选择题：（每题 3 分，共 18 分）

1、已知 A 是 3 阶方阵，$|A| = 2$, A^* 是它的伴随阵，则 $|2A^*| =$__________。

(a) 4 (b) 8 (c) 16 (d) 32

2、设向量组 $(1,\ 1,\ 0)$，$(3,\ 0,\ -9)$，$(1,\ 2,\ 3)$，$(1,\ -1,\ 6)$ 的秩是______。

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

3、设有向量组 A，向量组 B 是 A 的部分组，则下列结论正确的是________。

(a)若 A 线性相关，则 B 线性相关 (b)若 A 线性无关，则 B 线性无关

(c)若 B 线性无关，则 A 也线性相关 (d) A 的相关性与 B 的相关性没有联系

4、设 A 为正交阵， a_j 是 A 的第 j 列，则 a_j 与 a_j 的内积为_______。

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

5、如果齐次线性方程组 $A_{s\times n}x = 0$ 有非零解，那么_______。

(a) $s < n$ (b) $s = n$ (c) $s > n$ (d) 三种情况都有可能

6、设 A 是 n 阶矩阵，如果 $|A| = 0$，则 A 的特征值________。

(a) 全为零 (b) 全不为零 (c)至少有一个是零 (d) 可以是任意数

三、　计算题：

1、（10 分）求行列式的值　$D=\begin{vmatrix} 2+x & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2-x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2+y & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2-y \end{vmatrix}$

2、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix},$

求 C^{-1}

四、（10 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$ 且矩阵 X 满足

$AXA+BXB=AXB+BXA+E$，求矩阵 X

五、（10 分）求线性方程组$\begin{cases} x_2+2x_3+2x_4=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4=-1 \\ 4x_1+3x_2+2x_3+2x_4=-1 \end{cases}$ 的一个基础解系和全部解。

六、（10 分）已知 A 的特征值为 3，2，1，它们对应的特征向量为

$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$， 求 A

七、（10 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，求（1）$A$ 的特征值和特征向量；

（2）正交矩阵 Q 和对角阵 Λ，使 $Q^{-1}AQ=\Lambda$ 。

八、（10 分）证明：向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关的充要条件是向量组 $B:\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_1+\alpha_3$ 线性无关。

苏州大学《线性代数》课程试卷库（第十七卷）共 4 页

学院________________ 专业________________成绩____________

年级____________ 学号___________ 姓名____________日期______

题号	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								

一、填空题：（每题 3 分，共 30 分）

1、设α,β,γ为 3 维列向量，已知 3 阶行列式$\left|4\gamma-\alpha,\quad \beta-2\gamma,\quad 2\alpha\right|=40$，则行列式$\left|\alpha,\quad \beta,\quad \gamma\right|=$____________。

2、已知$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$，则$A^*=$______________________。

3、如果每一个n维向量都可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表出，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性__________。

4、设A,B均为n阶方阵，且 $|AB|=2$，则方程组$Ax=0$与$Bx=0$的非零解的个数为____________。

5、设实数a满足$|a|\neq 1$，且齐次线性方程组$\begin{pmatrix}2-a&2\\ 1/2&2-a\end{pmatrix}x=0$有非零解，则$a=$__________。

6、已知A，B均为n阶矩阵，A与B相似且方程组$Ax=b$有唯一解，则矩阵B的秩是_______________。

7、设 4 阶方阵A，且$r(A)=3$，则$r(A^*)=$________。

8、设向量组$\alpha_1=(1,2,3)$，$\alpha_2=(3,0,-1)$，$\alpha_3=(1,t,3)$两两正交，$t=$_______。

9、若A相似于矩阵$\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&-3\end{pmatrix}$，则$\left|A^{-1}\right|^3=$_______。

10、设n阶矩阵A的元素全为 1，则A的非零特征值为__________。

二、判断题：（每题 2 分，共 10 分，正确的打“ √ ”，否则打“ × ”）

1、设A,B均为n阶方阵，则$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$。 （ ）

2、设A是$m\times n$阶矩阵，若方程组$Ax=\beta(\neq 0)$的解不唯一，则$m<n$。 （ ）

3、如果向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性相关。

（　　）

4、设n阶矩阵A，C是正交矩阵，且$C^T AC = B$，则A,B有相同的特征值。（　　）

5、设A是n阶下三角矩阵，当$a_{ii} \neq a_{jj} \quad (i \neq j, i, j = 1,2,\cdots,n)$时，$A$相似于对角阵。

（　　）

三、（10 分）　计算行列式　$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

四、（10 分）设矩阵A,B满足关系式$AB = A + 2B$，且$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

求：B

五、（10 分）设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ $(m>1)$线性无关，且$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m$ ，判断向量组$\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots,\beta-\alpha_m$ 的线性相关性。

六、（10 分）线性方程组$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=2 \\ x_1+7x_2-4x_3+11x_4=\lambda \end{cases}$

（1） 讨论当λ为何值时，方程组无解？方程组有解？

（2）当方程组有解时，用其导出组的基础解系表示方程组的全部解。

七、（10 分）已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，求：（1） A 的所有特征值和特征向量；

（2）可逆矩阵 P 和对角阵 Λ，使 $P^{-1}AP=\ \Lambda$；（3） A^k

八、（10 分）设 n 阶实对称矩阵 A, B 相似，

求证：存在正交矩阵 Q ，使 $Q^T AQ = B$

苏州大学《线性代数》课程试卷库（第十八卷）共 4 页

学院________________专业________________成绩____________

年级__________学号______________姓名______________日期_____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								

一、 单项选择题：将正确选项填在横线上（每题 4 分，共计 20 分）

1、 下列命题正确的是 [ ]

(a) 若矩阵 $AB=E$，则 A 可逆且 $A^{-1}=B$。

(b) 若矩阵 A,B 均为 n 阶可逆，则 $A+B$ 必可逆。

(c) 若矩阵 A,B 均为 n 阶不可逆，则 $A+B$ 必不可逆。

(d) 若矩阵 A,B 均为 n 阶不可逆，则 AB 必不可逆。

2、设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，B 为 $m\times s$ 阶矩阵，已知矩阵方程 $AX=B$ 有解，则有 [ ]

(a) $r(A)\le r(B)$ (b) $r(A)\ge r(B)$ (c) $r(A)>0$ (d) $r(B)>0$

3、下列命题不正确的是 [ ]

(a) 若 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中没有零向量，则向量组必线性无关。

(b) 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 满足 $\sum_{i=1}^{m}k_i\alpha_i=0$，则必有 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$。

(c) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，即不存在不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得 $\sum_{i=1}^{m}k_i\alpha_i=0$。

(d) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，即对任意一组不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，必有 $\sum_{i=1}^{m}k_i\alpha_i\neq 0$。

4、已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 都是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，那么基础解系还可以是 [ ]

(a) $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$ (b) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$

(c) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3$ (d) $\alpha_1,\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_2$

5、下列 2 阶矩阵可对角化的是　　　　　　　　　　　　[　　　　]

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$　　(b) $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$　　(c) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$　　(d) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

二、 填空题：（每题 4 分，共 20 分）

1、设 4 阶方阵 $A=(\xi,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma)$，$B=(\eta,\ \beta,\ \gamma,\ \alpha)$，已知 $|A|=1, |B|=2,$ 则

$|A+B|=$__________________。

2、若 A 为 2×3 阶矩阵，$r(A)=2,$ 已知非齐次线性方程组 $Ax=b(b\neq0)$ 有解

α_1,α_2，且 $\alpha_1=(1,\ 2,\ 1)^T$, $\alpha_1+\alpha_2=(1,\ -1,\ 1)^T$, 则对应的齐次线性方程组

$Ax=0$ 的通解为_______________________。

3、已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 且 3 阶方阵 B 的秩为 2，则

$r(B)-r(AB)=$______________。

4、二次型 f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $f=$_________________。

5、已知 $\begin{pmatrix} x & -3 \\ y & -5 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ 相似，则 $x+y=$_______。

三、　（10 分）计算行列式： D= $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$

四、（10 分）设线性方程组$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$，求方程组的通解（用其导出组的基础解系表示）

五、（10 分）设向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} b \\ b+1 \\ 2b+1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ b+1 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ b+2 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，已知$\beta$ 可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，求b 及β 被$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 表示的表示式。

六、（10 分）设： $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$，试求 A 的特征值和特征向量

七、（10 分）如果 n 阶矩阵 A 满足 $A^2=A$，求证： $r(A)+r(A-E)=n$

八、（10 分）1，2，-1 是 3 阶方阵 A 的特征值，对应的特征向量分别为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$，已知 $B=A^3-2A$ ，求： B .

苏州大学《线性代数》课程试卷库（第十九卷）共 4 页

学院________________ 专业________________成绩____________

年级___________ 学号__________ 姓名___________日期______

题号	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								

一、单项选择题：（每题 3 分，共 15 分）

1、 4 阶行列式 D 的某一行所有元素及其余子式都等于 a，则 （ ）

(a) $D=0$ (b) $D=1$ (c) $D=4a$ (d) $D=4a^2$

2、设 A 是 $n\times m$ 阶矩阵，$r(A)=n$，则 （ ）

(a) AA^T 为可逆矩阵 (b) A^TA 为可逆矩阵

(c) AA^T 必与 E 相似 (d) A^TA 必与 E 相似

3、向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，向量组 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，则 （ ）

(a) α_4 未必能被 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示 (b) α_4 必能被 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示

(c) α_1 未必能被 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示 (d) α_1 必能被 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示

4、设 A 是 $m\times n$ 阶矩阵，齐次线性方程组 $AX=0$ 是 $AX=b$ 的导出组，则必有 （ ）

(a) 若 $AX=0$ 有解，则 $AX=b$ 有解
(b) 若 $AX=0$ 有非零解，则 $AX=b$ 有无穷多解
(c) 若 $AX=0$ 只有零解，则 $AX=b$ 有唯一解
(d) 若 $AX=b$ 有无穷多解，则 $AX=0$ 有无穷多解

5、设矩阵 A 与矩阵 B 相似，则必有 （ ）

(a) A,B 有相同的特征向量 (b) A,B 有相同的行列式

(c) A,B 相似于同一个对角矩阵 (d) 矩阵 $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-B$ 相等

二、填空题：（每题 3 分，共 15 分）

1、设 A 是 3 阶方阵，且 $|A|=3$，则 $\left||A|A^*\right|=$________________________。

2、若 n 阶矩阵 A，满足 $n\ge 2$，且 $r(A^*)=1$，则 $r(A)=$ ___________________。

3、设 $A=\begin{pmatrix}0 & A_1 & 0\\ 0 & 0 & A_2\\ A_3 & 0 & 0\end{pmatrix}$，其中 A_i $(i=1,2,3)$ 是可逆矩阵,则 $A^{-1}=$ _____________。

4、若矩阵$\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 1 & -1 & a & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$的秩为 2，则$a=$________________。

5、设三阶方阵 A 的三个特征值为 1,2,3，则 $6A^*$ 的三个特征值为_____，________，__________。

三、(10 分)计算行列式$A=\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ e & 0 & 0 & f \\ g & 0 & 0 & h \\ 0 & c & d & 0 \end{vmatrix}$

四、（10 分）线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+x_4=3 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4=2 \\ 2x_1+x_2+5x_3+4x_4=7 \end{cases}$，利用其导出组的基础解系求出方程组的全部解。

五、（20 分）已知向量$\alpha_1=\begin{pmatrix}a\\a\\a\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}a-1\\a\\a-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\a-1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

求（1）a为何值时，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关；

（2）a为何值时，β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$唯一线性表示；

（3）a为何值时，β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示；

（4）a为何值时，β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示且表达式不唯一。

六、（10 分） 将二次型 $f=x^2+y^2+z^2+4xy$ 化为标准型。

七、（10 分）矩阵 $A=\begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$，求：（1） A 的所有特征值和特征向量

（2）正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ=\Lambda(\Lambda$ 为对角矩阵）

八、（10 分）设 A 为 $n\times m$ 矩阵，B 为 $m\times n$ 矩阵，$n<m$，且 $AB=E$，证明：$r(B)=n$

苏州大学《线性代数》课程试卷库（第二十卷）共 4 页

学院________________ 专业________________成绩____________

年级___________ 学号__________ 姓名___________日期______

题号	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								

一、填空题：（每题 3 分，共 30 分）

1、设 A,B 都是 3 阶矩阵，且 $A=\begin{pmatrix}\alpha\\2\gamma_1\\3\gamma_2\end{pmatrix}$ ，$B=\begin{pmatrix}\beta\\\gamma_1\\\gamma_2\end{pmatrix}$，其中 $\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2$ 均为 3 维行向量，$|A|=15,|B|=3$，则行列式 $|A-B|=$____________。

2、已知方阵 A 满足 $aA^2+bA+cE=0$（其中 a,b,c 为常数，且 $c\neq 0$），则 $A^{-1}=$ __________________。

3、设 $\begin{vmatrix}1&1&0&0\\1&k&1&0\\0&0&k&2\\0&0&2&k\end{vmatrix}\neq 0$，则 k 应满足_______________ 。

4、设 β,α_1,α_2 线性相关，β,α_2,α_3 线性无关，则 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性_______________。

5、设 $\alpha_1=(1,\ \ 1,\ \ 1),\ \alpha_2=(a,\ \ 0,\ \ b),\ \alpha_3=(1,\ \ 3,\ \ 2)$ 线性相关，则 a,b 应满足关系式_______________。

6、设 A 满足 $A^2+2A+E=0$，则 A 的特征值为_______________。

7、设 A 为 n 阶方阵，$r(A)=n-3$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的三个线性无关的解向量，则 $Ax=0$ 的一个基础解系为 ________________________。

8、设 A 是 3×4 阶矩阵，$r(A)=2$，$B=\begin{pmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$，则 $r(BA)=$_____________。

9、设方阵 $A=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&4&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}$ 相似于对角矩阵 $\begin{pmatrix}5&&\\&t&\\&&-4\end{pmatrix}$，则 $t=$____________。

10、设有一个四元非齐次线性方程组 $Ax=b$，$r(A)=3$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为其解向量，且 $\alpha_1=(1,\quad 9,\quad 9,\quad 7)^T$，$\alpha_2+\alpha_3=(1,\quad 9,\quad 9,\quad 8)^T$，则此方程组的一般解为 ________________。

二、（10 分）计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} -n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -n & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & -n & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & -n \end{vmatrix}$

三、（10 分）设矩阵 $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 矩阵 X 满足 $X(E-C^{-1}B)^T C^T=E$，求：矩阵 X

四、（10 分）设矩阵 $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2a & 1 \\ -1 & \sqrt{2} & 2b \\ \sqrt{2} & 2c & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$，问当 a,b 为何值时，A 为正交矩阵；此时利用正交矩阵性质，求解线性方程组 $Ax=\left(1,\quad 1,\quad 1\right)^T$.

五、（10 分）给定线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + (2-\lambda)x_3 = 1 \\ (3-2\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = \lambda \\ (2-\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

讨论 λ 取何值时，方程组无解？有唯一解？有无穷多解？在有解时，求出其解。

六、（10 分）设向量组：$\alpha_1=(1,\ \ 1,\ \ 3,\ \ 1)^T$，$\alpha_2=(-1,\ \ 1,\ \ -1,\ \ 3)^T$

$\alpha_3=(5,\ \ -2,\ \ 8,\ \ -9)^T$，$\alpha_4=(-1,\ \ 3,\ \ 1,\ \ 7)^T$，求向量组的秩和一个极大线性无关组。

七、（10 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 5\end{pmatrix}$，求 A 的特征值和特征向量

八、证明题：（10 分）设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\beta_1=\alpha_1-\alpha_2$，

$\beta_2=2\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3$，证明：$\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性无关.