

第三章 机械能守恒

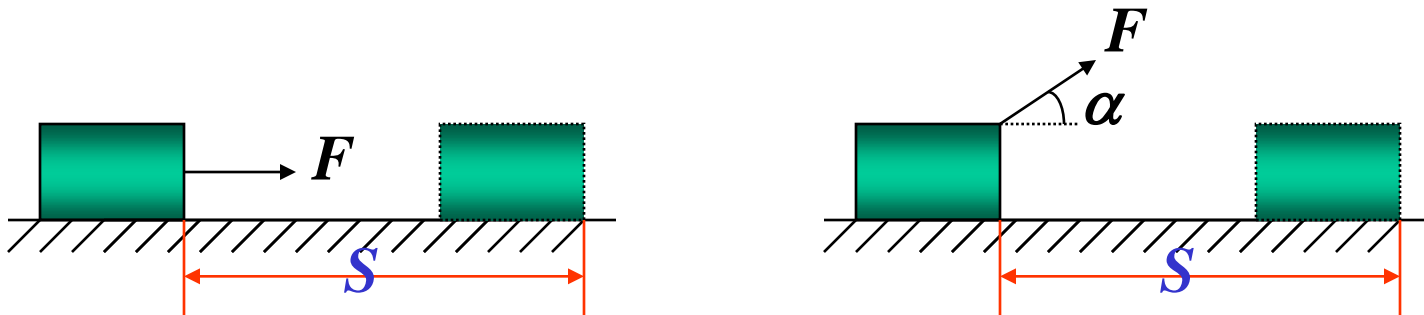
教学基本要求

1. 掌握变力做功的计算和动能定理的应用;
2. 掌握保守力做功特点及与相关势能的关系;
3. 明确功与能（动能、势能）关系与区别;
4. 掌握机械能守恒定律的物理意义及应用条件.

3.1 功 功率

一. 功 W

1. 恒力的功



$$W = F \cdot \cos \alpha \cdot S = \vec{F} \cdot \vec{S}$$

单位: 焦耳 (J), 牛顿·米 (N·m)

•功的量值不仅与力和位移的大小有关,而且还与这两者的夹角有关;

$\alpha < \frac{\pi}{2}$ ——— 力对物体作正功;

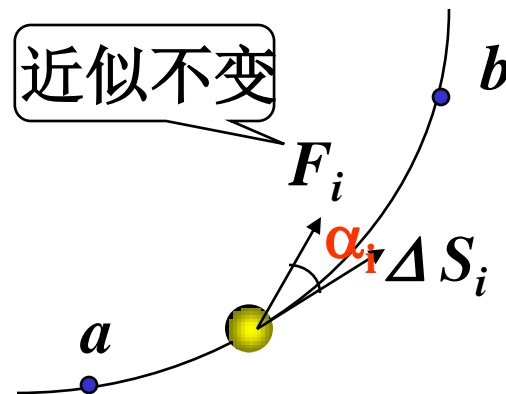
$\alpha > \frac{\pi}{2}$ ——— 力对物体作负功,或物体反抗力作功;

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ ——— 力不作功.

2. 变力的功

力 F_i 在位移 ΔS_i 中作的功为

$$\Delta W_i = \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{S}_i = F_i \cdot \cos \alpha_i \cdot \Delta S_i$$

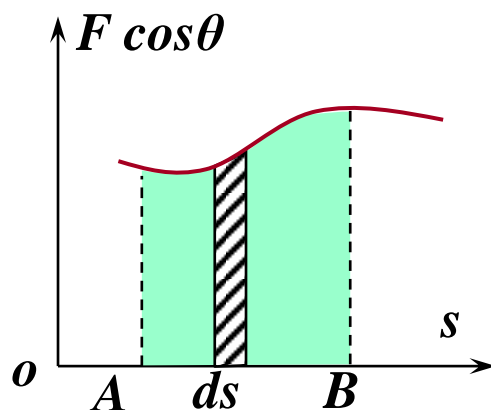


变力 F_i 在 ab 段作的功为

$$\begin{aligned} W &= \sum \Delta W_i \\ &= \sum \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{S}_i = \sum F_i \cdot \cos \alpha_i \cdot \Delta S_i \end{aligned}$$

$\Delta S_i \rightarrow 0$, 则

$$W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_a^b F \cos \alpha dS$$



曲线下的面积 \rightarrow 功

3. 如果有许多力同时作用于一物体上,则合力的功等于各分力的功的代数和.

二. 功率 P

1. 瞬时功率 P

$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad \text{—— 平均功率}$$

$$\Delta t \rightarrow 0$$

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} \quad \text{—— 瞬时功率}$$

$$\text{或 } P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} F \cdot \cos \alpha \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t} = F \cdot \cos \alpha \cdot v = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

瞬时功率等于力在速度方向的分量和速度大小的乘积.

单位: 瓦特 (W), 焦耳/秒 (J/S)

2. 由功率求功

$$\because P = \frac{dW}{dt}$$

$$\Rightarrow dW = Pdt$$

$$\Rightarrow W = \int_t^{t'} dW = \int_t^{t'} Pdt$$

3.2 动能 动能定理

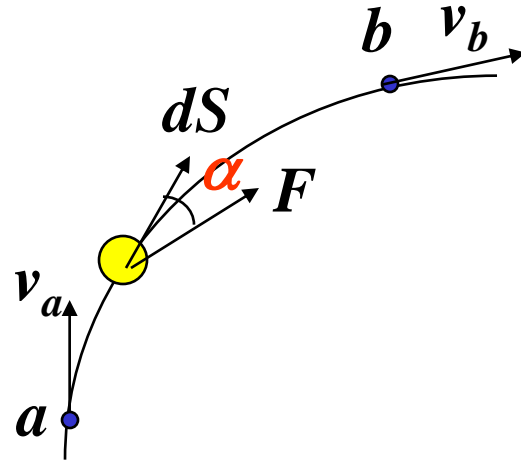
一. 动能 动能定理

合外力 F 是变力

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

$$\therefore W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

$$= \int_a^b F \cdot \cos \alpha \cdot dS$$



$$\because F \cos \alpha = ma_{\tau} \quad a_{\tau} = \frac{dv}{dt} \quad v = \frac{dS}{dt}$$

$$\therefore W = \int_a^b F \cdot \cos \alpha \cdot dS$$

$$= \int_{v_a}^{v_b} mv dv$$

$$= \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2$$

引入动能 E_k

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

则 F 对物体作的功

$$W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{S} = E_k - E_{k0}$$

合外力对物体所作的功等于物体动能的增量.

▲ 质点系的动能定理:

设质点系由 n 个质点组成。

第 i 个质点所受外力和内力之和:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{i\text{外}} + \vec{F}_{i\text{内}} = \vec{F}_{i\text{外}} + \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} \quad (j \neq i)$$

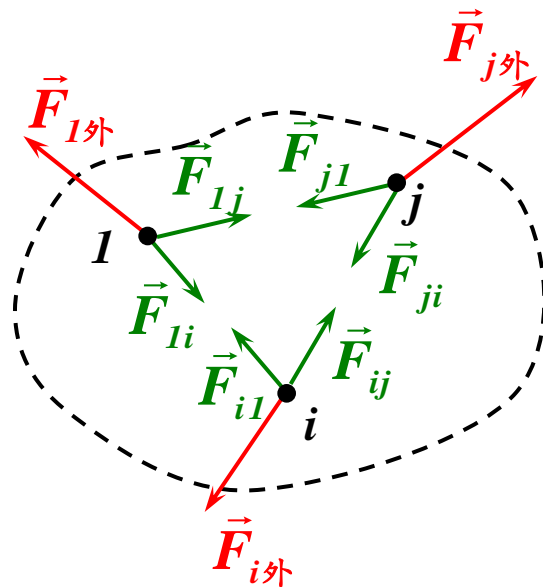
由质点的动能定理:

$$W_i = \int_{A_i}^{B_i} \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \int_{A_i}^{B_i} \vec{F}_{i\text{外}} \cdot d\vec{r} + \sum_{j=1}^n \int_{A_i}^{B_i} \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r} = \Delta E_{ki}$$

$$W = \sum_{i=1}^n W_i = \sum_{i=1}^n \int_{A_i}^{B_i} \vec{F}_{i\text{外}} \cdot d\vec{r} + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \int_{A_i}^{B_i} \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r} \right) = \sum_{i=1}^n \Delta E_{ki} = \Delta E_k$$

外力的功

内力的功



质点系的动能定理:

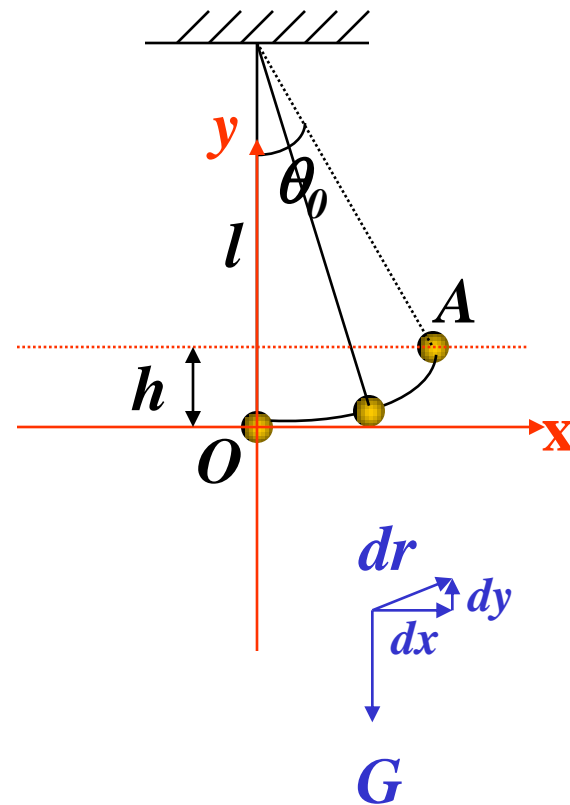
外力和内力对质点系所做的功等于质点系动能的增量。

例1.一质量为 m 的小球,通过轻质细绳悬挂在天花板上,将小球沿圆弧从O点运动到A点,细绳与竖直方向夹角为 θ_0 . 求在此过程中重力作的功?已知绳长为 l .

解: 法一:直接利用矢量快速求解

如图建立坐标系,则

$$\begin{aligned} W_G &= \int_O^A \vec{G} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_O^A (-mg \vec{j}) \cdot (dx \vec{i} + dy \vec{j}) \\ &= -mg \int_O^A dy \\ &= -mgh \\ &= -mgl(1 - \cos \theta_0) \end{aligned}$$



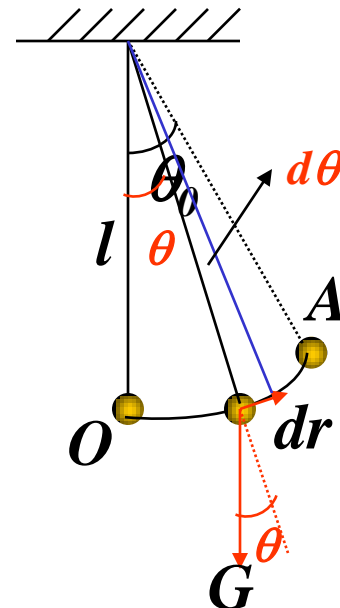
法二:常规求解

$$\begin{aligned}W_G &= \int_O^A \vec{G} \cdot d\vec{r} \\&= \int_O^A mg \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) dr \\&= \int_O^A -mg \sin \theta dr\end{aligned}$$

$\because dr$ 非常小, 可认为 $|dr| = dS$

$$\therefore dS = l d\theta$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow W_G &= \int_0^{\theta_0} -mgl \sin \theta d\theta \\&= -mgl(1 - \cos \theta_0)\end{aligned}$$



例2.一物体按规律 $x = ct^3$ 在媒质中作直线运动，式中 c 为常量， t 为时间。设媒介质对物体的阻力正比于速度的平方，阻力系数为 k ，试求物体由 $x=0$ 运动到 $x=l$ 时，阻力所作的功。

解：由 $x = ct^3$

可求物体的速度：

$$v = \frac{dx}{dt} = 3ct^2$$

物体受到的阻力为

$$f = -kv^2 = -9kc^2t^4 = -9kc^{2/3}x^{4/3}$$

阻力对物体所作的功为：

$$W = \int_0^l f dx = \int_0^l -9kc^{2/3}x^{4/3} dx = -27kc^{2/3}l^{7/3} / 7$$

例3. 一方向恒定的力 $F=6t$ (SI),作用在一质量为 2kg 的物体上,物体从静止开始运动.试求此作用力的瞬时功率及前 2s 内作的功?

解: $\because F = ma$

$$\therefore a = \frac{F}{m} = 3t(\text{m} / \text{s}^2)$$

$$\because t = 0, v_0 = 0$$

$$\therefore v = \int_0^t a dt = \int_0^t 3t dt = \frac{3}{2} t^2 (\text{m} / \text{s})$$

\therefore 作用力的瞬时功率为

$$P = Fv = 6t \times 1.5t^2 = 9.0t^3 (\text{W})$$

$$W = \int_0^2 P dt = \int_0^2 9.0t^3 dt = 36.0 (\text{J})$$

例. 一个力 F 作用在质量为 1.0 kg 的质点上, 使之沿 x 轴运动。已知在此力作用下质点的运动方程为

$$x = 3t - 4t^2 + t^3$$

(SI)。在0到4s的时间内, 求: (1) 力 F 的冲量大小 I ; (2) 力 F 对质点所作的功 W ; (3) 第2秒末的瞬时功率?

解: $v = \frac{dx}{dt} = 3 - 8t + 3t^2$

瞬时功率

$$v_0 = \dots, \quad v_4 = \dots$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t - 8$$

\therefore 力 F 的冲量为

$$F = ma$$

$$I = mv_4 - mv_0 = \dots$$

$$p = Fv = \dots$$

力 F 对质点做的功为

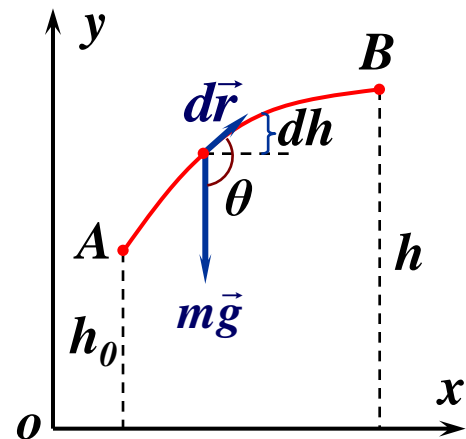
$$W = \frac{1}{2}mv_4^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \dots$$

3.3 势能 保守力

一. 重力的功、重力势能

一质点在重力场中沿曲线由A运动到B，
则重力做功：

$$\begin{aligned} W_{\text{重}} &= \int_A^B m\vec{g} \cdot d\vec{r} = \int_A^B (-mg \vec{j}) \cdot (dx \vec{i} + dy \vec{j}) \\ &= -mg \int_{h_0}^h dh = -(mgh - mgh_0) \end{aligned}$$



结论：重力做功与路径无关，只和质点的始、末位置有关。

因此：可定义一个与质点在重力场中位置（高度）有关的物理量，称为重力势能。

$$E_p = mgh$$

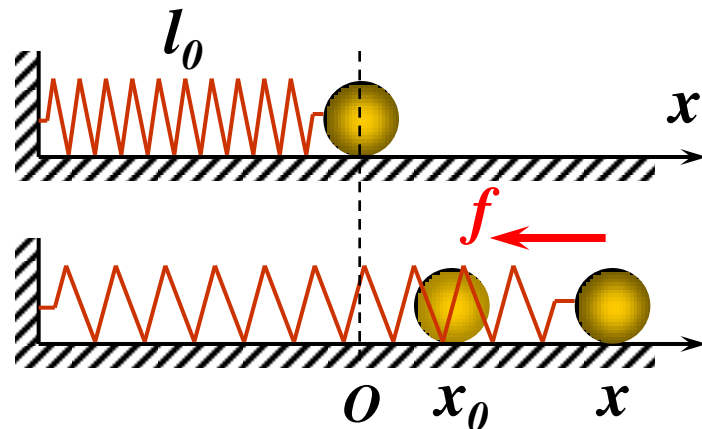
$$\therefore W_{\text{重}} = -(E_p - E_{p0}) = -\Delta E_p$$

重力对质点所做的功等于质点重力势能增量的负值。

二. 弹性力的功、弹性势能

设弹簧自然伸长时，质点处在 O 点。

由胡克定律： $f = -kx$



当质点从 x_0 运动到 x 时，弹性力做功：

$$W_{\text{弹}} = -k \int_{x_0}^x x dx = -\left(\frac{1}{2} kx^2 - \frac{1}{2} kx_0^2 \right)$$

结论：弹性力做功与路径无关，只和质点的始、末位置有关。

定义：弹性势能 $E_p = \frac{1}{2} kx^2$

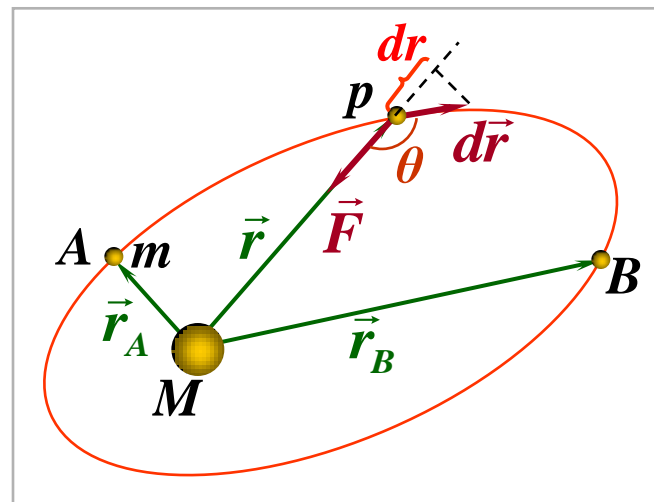
$$\therefore W_{\text{弹}} = -(E_p - E_{p0}) = -\Delta E_p$$

弹性力对质点所做的功等于质点弹性势能增量的负值。

三. 引力的功、引力势能

质量为 m 的质点在质量为 M 的质点的万有引力作用下沿曲线运动。 m 所受的引力为：

$$F = G \frac{mM}{r^2}$$



$$\begin{aligned} W_{\vec{F}} &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F \cos \theta \cdot ds = - \int_{r_A}^{r_B} \frac{GmM}{r^2} dr \\ &= - \left(-\frac{GmM}{r} \right)_{r_A}^{r_B} = - \left[\left(-\frac{GmM}{r_B} \right) - \left(-\frac{GmM}{r_A} \right) \right] \end{aligned}$$

结论：引力做功与路径无关，只和质点的始、末位置有关。

引力势能的零点通常取在无穷远处。

而空间某点处的引力势能定义为：将质点从该点移至无穷远处（势能零点）时，万有引力所做的功。

$$W_{引} = - \left[\left(-\frac{GmM}{r_B} \right) - \left(-\frac{GmM}{r_A} \right) \right]$$

令 $r_B \rightarrow \infty$ ，则A点的引力势能为：

$$E_{pA} = -\frac{GmM}{r_A}$$

$$\therefore W_{引} = -(E_{pB} - E_{pA}) = -\Delta E_p$$

引力对质点所做的功等于质点引力势能增量的负值。

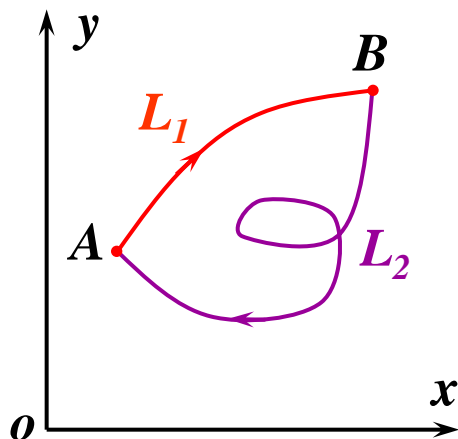
地球表面的物体所受的重力即为万有引力，在地面上不太高的 h 处，引力势能为：

$$E_p = -GmM_E \left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R} \right) \approx m \frac{GM_E}{R^2} h = mgh$$

其中： $g = \frac{GM_E}{R^2} \approx 9.80 \text{ m/s}^2$ 即为地球表面附近的重力加速度。

四. 保守力

运动路径是一闭和回路



$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{L_1}^B \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{L_2}^A \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{L_1}^B \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{L_2}^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

若某一力的功与运动物体所经历的路径无关,仅由运动物体的起点和终点位置决定,或者说沿任意闭合路径做功为零,则这一力称为保守力。

反之,不能满足 $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ 的力称为**非保守力** (如摩擦力等)。

★ 保守力: 万有引力(含重力) 弹性力 **静**电场力

五. 势能 E_p

与物体位置有关的能量称为物体的势能.

$$E_{P\text{重}} = mgh \quad (\text{地表}h=0\text{处的势能为零})$$

$$E_{P\text{弹}} = \frac{1}{2}kx^2 \quad (\text{弹簧无形变时的势能为零})$$

$$E_{P\text{引}} = -\frac{GMm}{R} \quad (\text{无穷远处的势能为零})$$

保守力作功

$$\begin{aligned} W &= E_{P0} - E_P \\ &= -(E_P - E_{P0}) \end{aligned}$$

保守力作的功,等于势能增量的负值.

3.4 机械能守恒定律

一. 功能原理

根据质点系的动能定理：

$$W = W_{\text{外}} + W_{\text{内}} = W_{\text{外}} + W_{\text{非保内}} + W_{\text{保内}} = E_k - E_{k0} = \Delta E_k$$

$$\because W_{\text{保内}} = -(E_p - E_{p0}) = -\Delta E_p$$

$$\therefore W_{\text{外}} + W_{\text{非保内}} = (E_k + E_p) - (E_{k0} + E_{p0})$$

定义：系统的总动能和总势能之和称为系统的机械能。

$$E = E_k + E_p$$

质点系的功能原理：外力和非保守内力对质点系所做的功等于系统机械能的增量。

$$W_{\text{外}} + W_{\text{非保内}} = E - E_0 = \Delta E$$

二. 机械能守恒定律

$$W_{\text{非保内}} + W_{\text{外}} = (E_{k2} + E_{P2}) - (E_{k1} + E_{P1})$$

$$\text{若 } W_{\text{非保内}} + W_{\text{外}} = 0$$

$$E_{k2} + E_{P2} = E_{k1} + E_{P1}$$

$$E = E_k + E_P = \text{常量}$$

当作用于质点系的外力和非保守内力不作功, 或者说系统仅受保守力作用时, 系统的总机械能保持恒定.

机械能守恒定律是能量转化和守恒定律在机械运动中的表现形式。

例5. 一弹簧倔强系数为 k ,一端固定在A点,一端连一质量为 m 的物体,靠在光滑的半径为 a 的圆柱体表面上,弹簧原长AB,在变力 F 作用下,物体极缓慢地沿表面从位置B移到C, 夹角为 θ_0 , 求力 F 作的功?

解: \because 缓慢移动近似为静止

$$\therefore \Delta E_k = 0$$

由功能原理, 得

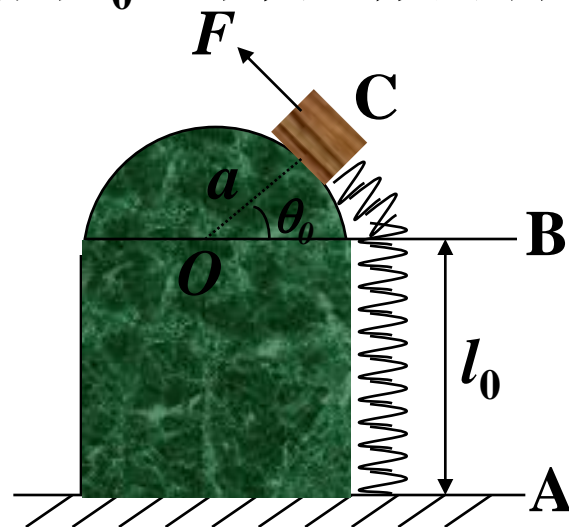
$$\therefore W_{\text{外}} + W_{\text{非保守内}} = E_2 - E_1$$

$$\therefore W_{\text{非保内}} = 0$$

$$\therefore W_F = (E_{k2} - E_{k1}) + (E_{PC} - E_{PB})$$

$$\therefore \Delta E_k = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore W_F &= mga \sin \theta_0 + \frac{1}{2} k (a \theta_0)^2 \\ &= mga \sin \theta_0 + \frac{1}{2} k a^2 \theta_0^2 \end{aligned}$$



功能原理

例6. 起重机用钢丝吊运一质量为 m 的物体, 以速度 v_0 作匀速下降. 问当起重机突然刹车时, 物体因惯性继续下降, 使钢绳再有微小的伸长是多少? (绳的倔强系数为 k , 重量不计). 这样突然刹车后, 绳受的最大拉力是多少?

解: 系统: 物体, 绳, 地球

设物体到达最低位置时的重力势能为零.

由机械能守恒定律, 得

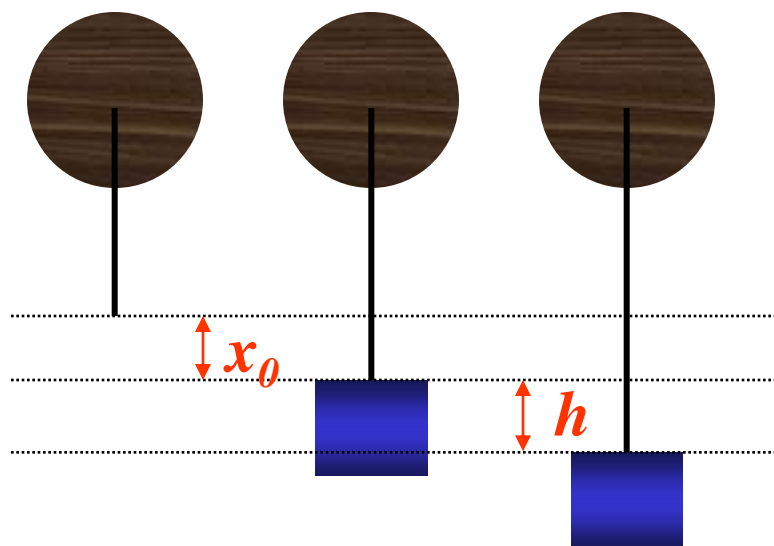
位置1: $E_1 = E_{k1} + E_{P1\text{弹}} + E_{P1\text{重}}$

$$= \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 + mgh$$

位置2: $E_2 = E_{k2} + E_{P2\text{弹}} + E_{P2\text{重}}$

$$= \frac{1}{2}k(x_0 + h)^2$$

$$\therefore \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 + mgh = \frac{1}{2}k(x_0 + h)^2$$

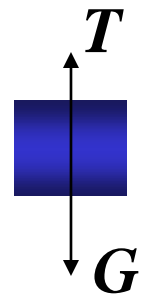


$$\text{又} \because G = T = kx_0$$

$$\therefore h = \sqrt{\frac{m}{k}} v_0$$

$$T_{\max} = k(x_0 + h)$$

$$= mg + \sqrt{km} v_0$$



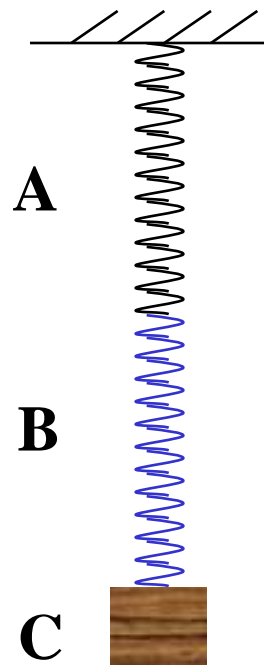
例8.一根劲度系数为 k_1 的轻弹簧A的下端，挂另一根劲度系数为 k_2 的轻质弹簧B，B的下端又挂一质量为 M 的重物C，求这一系统静止时两弹簧的伸长量之比和弹性势能之比。如果将此重物用手托起，让两弹簧恢复原长，然后松手任其下落，弹簧可伸长多少？弹簧对重物C的最大作用力有多大？

解：(1). 平衡时

$$\left\{ \begin{array}{l} F_A = F_B = Mg \\ F_A = -k_1 x_1 \\ F_B = -k_2 x_2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{k_2}{k_1}$$

$$E_{p1} : E_{p2} = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 : \frac{1}{2} k_2 x_2^2 = k_2 : k_1$$

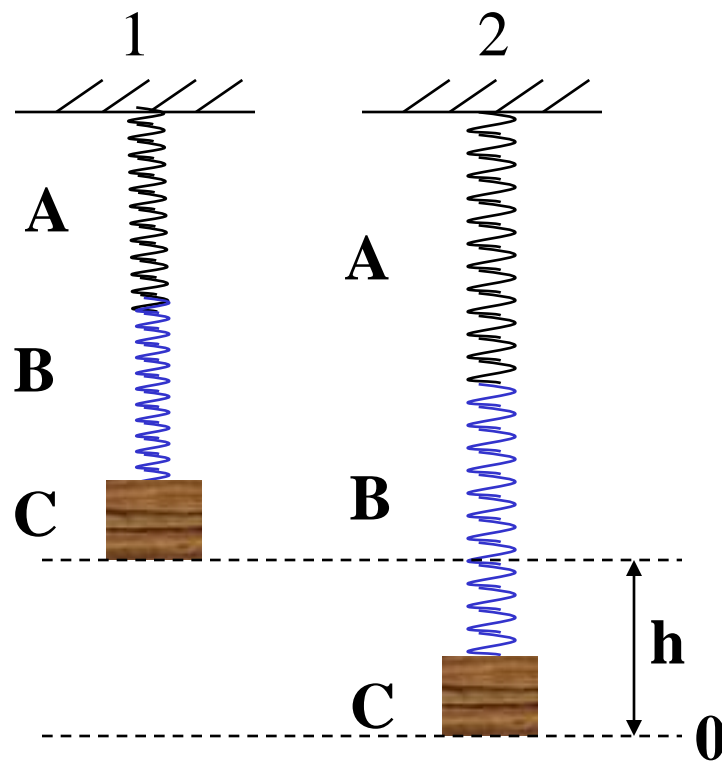


(2). 设弹簧原长时的弹性势能为零;
最低位置的重力势能为零.

由机械能守恒定律,得

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 + 0 + Mgh = \frac{1}{2}k_1x_1'^2 + \frac{1}{2}k_2x_2'^2 + 0 \\ x_1' + x_2' = h \\ \frac{x_1'}{x_2'} = \frac{k_2}{k_1} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow h = \frac{2(k_1 + k_2)Mg}{k_1k_2}$$



例9. 质量为 m_A 的物体A由高度为 h 处自由下落, 与一质量为 m_B 的物体B作完全非弹性碰撞. 物体B由一倔强系数为 k 的轻弹簧和地面上另一质量为 m_C 的物体C联接着. 现要使物体A与B碰撞从而压缩弹簧后又反弹时, 恰好能将下端的物体C提离地面, 试问物体A自由下落的高度为多少?

解: 设 o 点为弹簧的自然长度的上端, a 为 m_A 与 m_B 反弹后恰能提起C的弹簧长度, 则

$$kx_0 = m_B g \quad ka = m_C g$$

A物下落末速度为

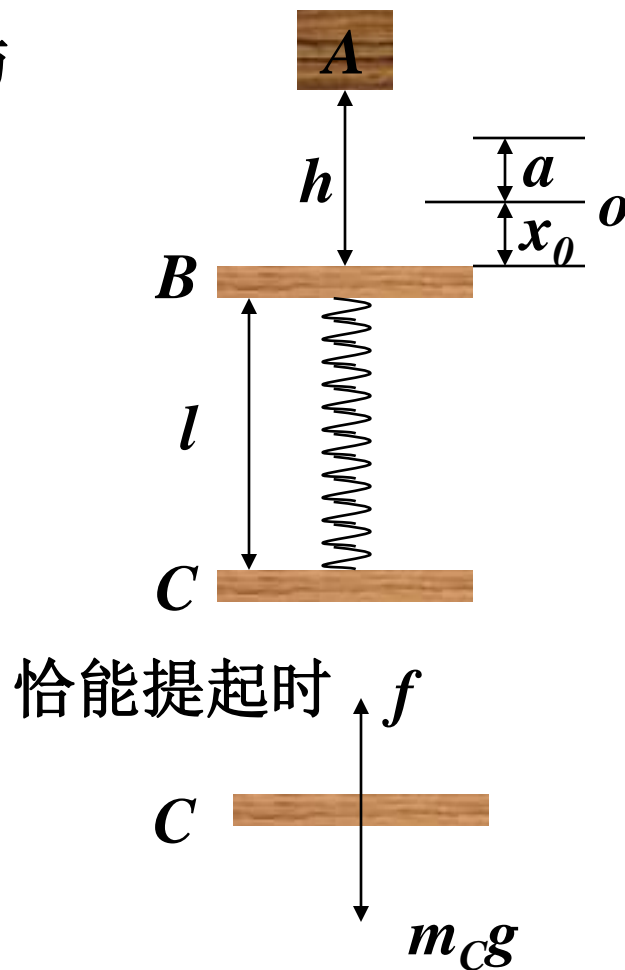
$$v_0 = \sqrt{2gh}$$

A与B碰撞过程中动量守恒, 则

$$m_A v_0 = (m_A + m_B) v$$

系统: A, B, C 物体, 弹簧, 地球

由机械能守恒定律, 得



取 O 为弹性零势能面; 最低位置为重力零势能面.

$$(m_A + m_B)gl + \frac{1}{2}(m_A + m_B)v^2 + \frac{1}{2}kx_0^2$$

$$= \frac{1}{2}ka^2 + (m_A + m_B)g(x_0 + a + l)$$

$$\Rightarrow h = \frac{g}{2m_A^2 k} [(m_A + m_B)(m_B + m_C)(m_B + m_C + 2m_A)]$$

★ 机械能守恒处理的基本过程:

1. 明确研究对象
2. 分析受力情况
3. 分析做功情况
4. 明确初、末状态
5. 列方程求解

3.5 碰撞

两个或两个以上的物体相互接近或发生接触时,在相对较短的时间内发生强烈相互作用的过程.

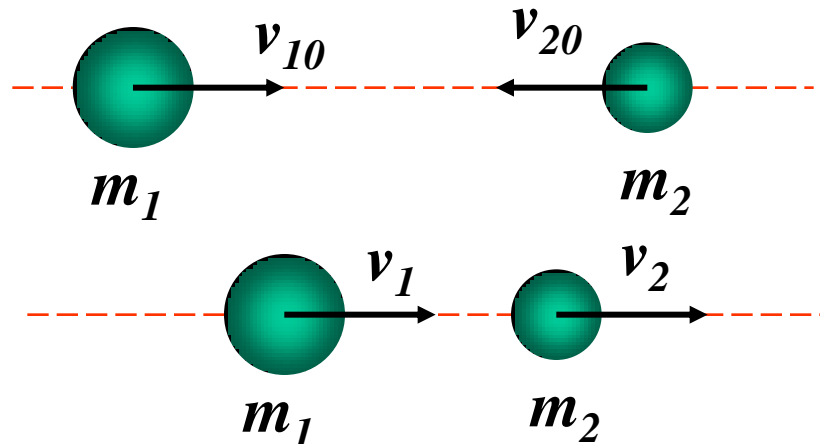


由于碰撞过程中相互作用的时间极短,外力的影响可以忽略不计,因此碰撞系统的总动量守恒

$$\sum \vec{p}_i = \text{常矢量}$$

一. 对心碰撞(正碰撞)

两球碰撞前后的速度在两球连心线上 (可以用标量表示)



▲ 碰撞定理

碰撞后两球的分离速度($v_2 - v_1$),与碰撞前两球的接近速度($v_{10} - v_{20}$)成正比,比值由两球的材料性质决定

$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}} \quad \text{—— 恢复系数}$$

$$e = 1$$

分离速度等于接近速度

完全弹性碰撞

$$e = 0$$

碰撞后两球速度相同

完全非弹性碰撞

$$0 < e < 1$$

非弹性碰撞

▲ 完全弹性碰撞 ($e = 1$)

动量守恒

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_{10} + m_2 v_{20}$$

恢复系数

$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}} = 1$$

可得

$$v_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_{10} + 2m_2 v_{20}}{m_1 + m_2}$$

$$v_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_{20} + 2m_1 v_{10}}{m_1 + m_2}$$

碰撞前

$$E_{\text{初}} = \frac{1}{2}m_1v_{10}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{20}^2$$

碰撞后

$$E_{\text{末}} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

$$= \frac{1}{2}m_1 \left[\frac{(m_1 - m_2)v_{10} + 2m_2v_{20}}{m_1 + m_2} \right]^2 + \frac{1}{2}m_2 \left[\frac{(m_2 - m_1)v_{20} + 2m_1v_{10}}{m_1 + m_2} \right]^2$$

$$= \frac{1}{2}m_1v_{10}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{20}^2 = E_{\text{初}}$$

碰撞前后,总动量守恒,总机械能不变

▲ 完全非弹性碰撞 ($e=0$)

$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}} = 0$$

碰撞前后,总动量守恒,两者合为一体,速度相同. ($v_2=v_1=v$).

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = (m_1 + m_2) v \quad v = \frac{m_1 v_{10} + m_2 v_{20}}{m_1 + m_2}$$

碰撞前

$$E_{\text{初}} = \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2$$

碰撞后

$$E_{\text{末}} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2$$

$$\therefore \Delta E = E_{\text{初}} - E_{\text{末}} = \frac{m_1 m_2 (v_{10} - v_{20})^2}{2(m_1 + m_2)}$$

▲ 非弹性碰撞 ($0 < e < 1$)

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_{10} + m_2 v_{20}$$

$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}}$$

碰撞后 $v_1 = \frac{(m_1 - em_2)v_{10} + (1+e)m_2 v_{20}}{m_1 + m_2}$

$$v_2 = \frac{(1+e)m_1 v_{10} + (m_2 - em_1)v_{20}}{m_1 + m_2}$$

$$\therefore \Delta E = E_{\text{初}} - E_{\text{末}} = \frac{(1-e^2)m_1 m_2 (v_{10} - v_{20})^2}{2(m_1 + m_2)}$$

碰撞前后,总动量守恒,机械能不守恒.

例1. 游乐园中，两辆质量分别为 $m_1=250\text{kg}$, $m_2=280\text{kg}$ 的碰碰车，沿一条直线分别以 $v_{10}=4\text{m/s}$ 和 $v_{20}=5\text{m/s}$ 的速度发生了碰撞，碰撞后1号车以 $v_1=3\text{m/s}$ 的速度弹回。

求：（1）2号车的速度是多少；
（2）恢复系数是多少？

解： 碰撞前后动量守恒

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_{10} + m_2 v_{20}$$

$$250 \times 4 - 280 \times 5 = 250 \times (-3) + 280 v_2$$

得

$$v_2 = 1.25\text{m/s}$$

方向向右

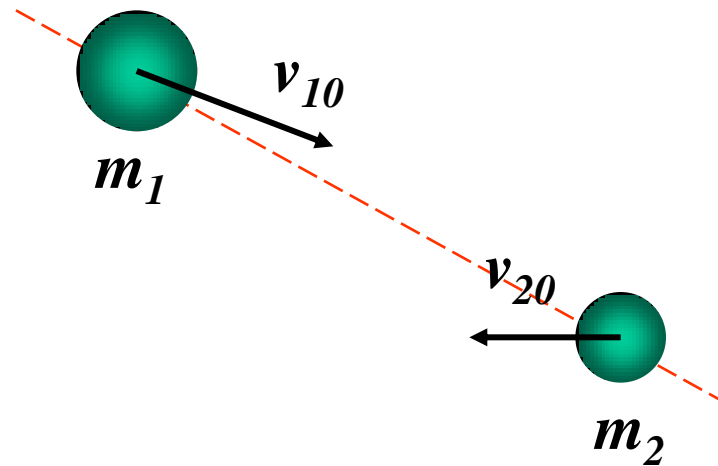
恢复系数为

$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}} = \frac{1.25 - (-3)}{4 - (-5)} = 0.36$$



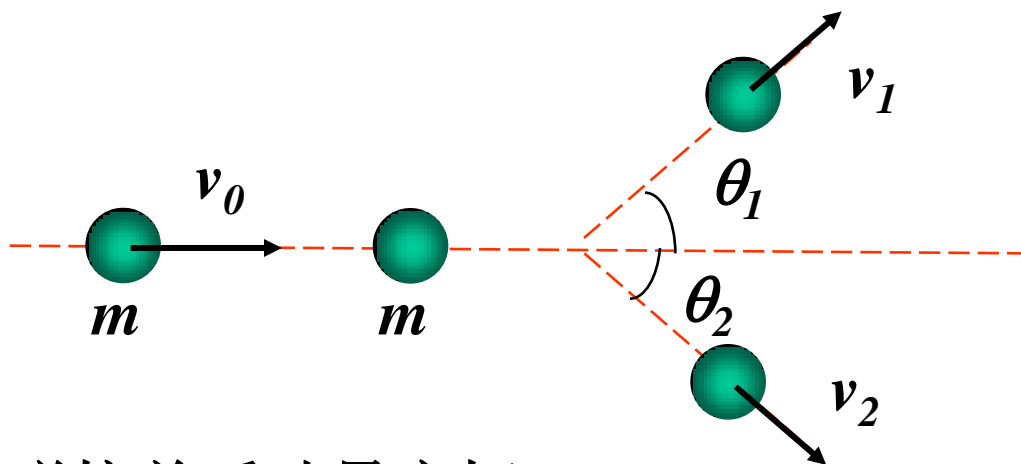
二. 非对心碰撞（斜碰）

两球碰撞前后的速度不在两球连心线上



斜碰中，恢复系数公式中的分离速度与接近速度是指沿碰撞接触处法线方向上的相对速度

例4. 试证两个质量相等的粒子发生弹性的非对心碰撞，如果其中有一个粒子原来处于静止，则碰撞后，它们总沿相互垂直的方向散射。



证明：碰撞前后动量守恒

$$m\vec{v}_0 + 0 = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$$

即

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

对上式两边平方，有

$$v_0^2 = v_1^2 + 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + v_2^2 \quad \cdots (1)$$

由于是弹性碰撞，有

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \quad \cdots(2)$$

比较（1）（2）两式，有

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$$

$$\text{即 } \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$$

1923年美国物理学家发现的康普顿散射，就是光子与静止的自由电子的 非对心碰撞