基础物理学

第一章 质 点 运 动 学

运动学研究物质在空间位置的变化与时间的关系或运动的轨道问题。它只研究物质的机械运动状态，而不涉及引起运动和改变运动的原因。

1.1 参照系 坐标系 质点

一. 参照系

1.什么是参照系?

研究物体运动状态时选作参照的物体.

2.选参照系的原则

使物体运动在该参照系中最简单.

3.运动描述的相对性

相对于不同参照系, 同一运动物体表现出的运动规律是不一样的.

二. 坐标系

为标定物体空间位置而设置的坐标系统.

固定在参照系上， 相对于它，物体的位置、速度、加速度和轨道能进行定量描述。

正交坐标系 (直角坐标系) 极坐标系

球面坐标系 圆柱面坐标系

在同一参照系下选用不同的坐标系,描出的同一运动的物体的运动的规律是一样的.

三. 质点

物理学中的一个重要的模型

只有质量、位置，而没有形状、大小、结构的点。

可以作为质点处理的物体的条件：

大小和形状对运动没有影响或影响可以忽略。

（1）物体的形状、大小与所研究的运动无关，即在研究两个物体之间的相对运动时，如果两者间的距离比物体本身的大小大得多；

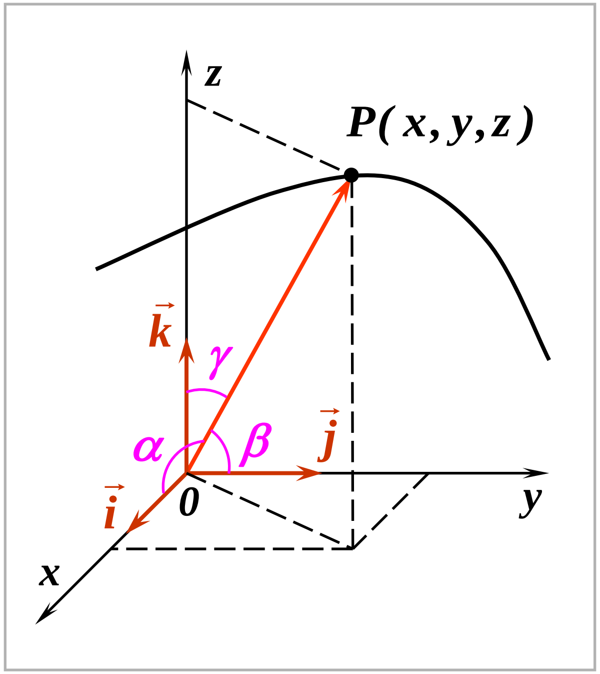
（2）物体各部分运动情况相同，即物体上任意一点的运动可以代表整个物体的运动。

1.2 描述质点运动学的物理量

一.位置矢量 (位矢 $\vec{r}$)

确定质点*P*某一时刻在坐标系里的位置的物理量

从坐标原点*O*指向质点位置*P*的有向线段 $\overrightarrow{op}$



位置矢量直角坐标中的表示

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

位矢的大小 $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

位矢的方向 $\cos\alpha = x/r$ ， $\cos\beta = y/r$ ， $\cos\gamma = z/r$

质点的运动方程

$$\vec{r}_{(t)} = x_{(t)}\vec{i} + y_{(t)}\vec{j} + z_{(t)}\vec{k}$$ —— 矢量运动方程

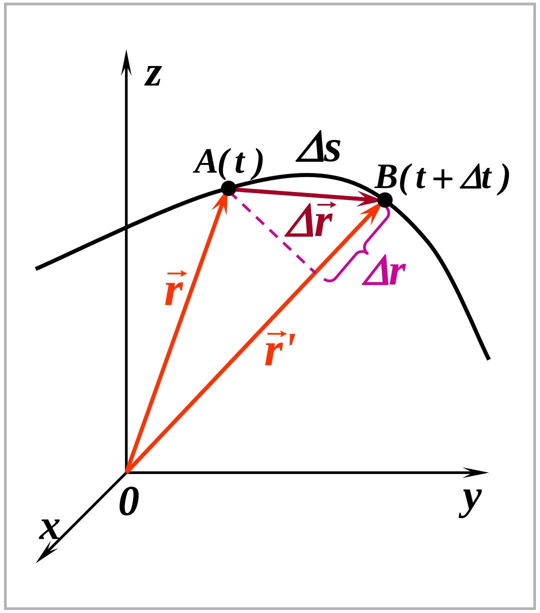
$$x = x_{(t)}, y = y_{(t)}, z = z_{(t)}$$ —— 标量运动方程

质点的轨道方程

$$f_{(x,y,z)} = 0$$

二. 位 移$\Delta\vec{r}$

在运动过程中，质点的位置矢量随时间t而变，是时间t 的函数



t 时刻： $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

$t+\Delta t$ 时刻： $\vec{r}\,'=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$

则质点在Δt时间内的位移为：

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}\,'-\vec{r}=(x'-x)\vec{i}+(y'-y)\vec{j}+(z'-z)\vec{k}$$

其大小 $\left|\Delta\vec{r}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

方向 由A指向B.

★ 路程Δs与位移$\Delta\vec{r}$

位移是在Δt时间间隔内位矢的增量

路程(Δs)是在Δt时间间隔内质点运动的路径长度.

区别:

1. 路程Δs: 标量 ； 位移$\Delta\vec{r}$: 矢量;

2. 一般 $\Delta s \neq |\Delta\vec{r}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

但在 $\Delta t \to 0$ 时 , $ds = |d\vec{r}|$

例、一个粒子在 t_1位于 $\vec{r}_1 = 5\vec{i} - 7\vec{j}$,在 t_2位于 $\vec{r}_2 = -3\vec{i} - 5\vec{j}$ 找出该时间间隔内的位移?

解:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$= (-3-5)\vec{i} + (-5+7)\vec{j}$$

$$= -8\vec{i} + 2\vec{j}$$

三. 速 度 $\vec{v}$ —— 反映运动的快慢程度

平均速度 $$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$\Delta t \to 0$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$ —— 瞬时速度(速度)

直角坐标系中

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

式中 $v_x = dx/dt$，$v_y = dy/dt$，$v_z = dz/dt$

大小

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2}$$

方向

质点所在位置的切线方向

单位: *m/s*

平均速率

$$\bar{v} = \Delta s/\Delta t$$

$$\Delta t \to 0$$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta s/\Delta t = ds/dt$$ —— 瞬时速率

在 $\Delta t \to 0$ 时， $ds = |d\vec{r}|$

瞬时速率是瞬时速度的大小.

四. 加速度 $\vec{a}$ —— 描述速度随时间变化的物理量

平均加速度 $$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$\Delta t \to 0$ $$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

—— 瞬时加速度

直角坐标系中 $$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

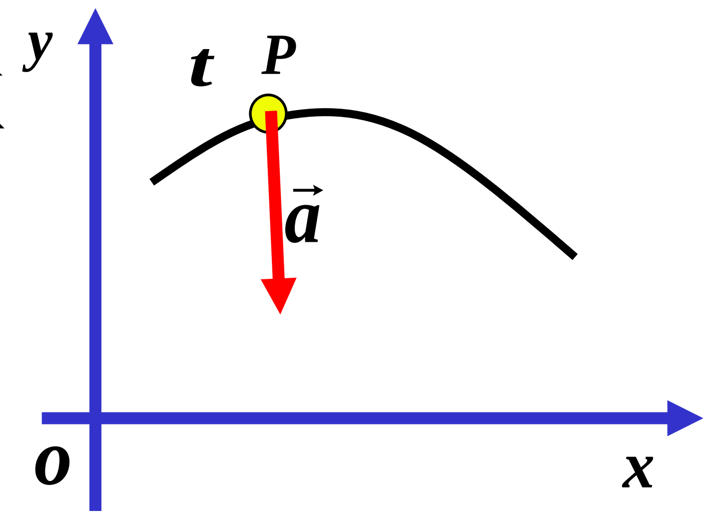
式中 $a_x = dv_x/dt = d^2x/dt^2$

$a_y = dv_y/dt = d^2y/dt^2$

$a_z = dv_z/dt = d^2z/dt^2$

大小: $a=|\vec{a}|=\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}$

方向: 直线运动中,a与v在一直线;
曲线运动中,a指向曲线凹的一面.



单位: m/s^2

★运动学中的两类问题

(1) 微分问题： $\vec{r}=\vec{r}(t) \quad \Rightarrow \quad \vec{v}=\vec{v}(t) \quad \Rightarrow \quad \vec{a}=\vec{a}(t)$

$$\boxed{\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}} \qquad \boxed{\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2 r}{dt^2}}$$

(2) 积分问题：

已知：$\vec{v}=\vec{v}(t)$ 和初始条件 $\vec{r}_0=\vec{r}(t_0)$，求 $\vec{r}=\vec{r}(t)$

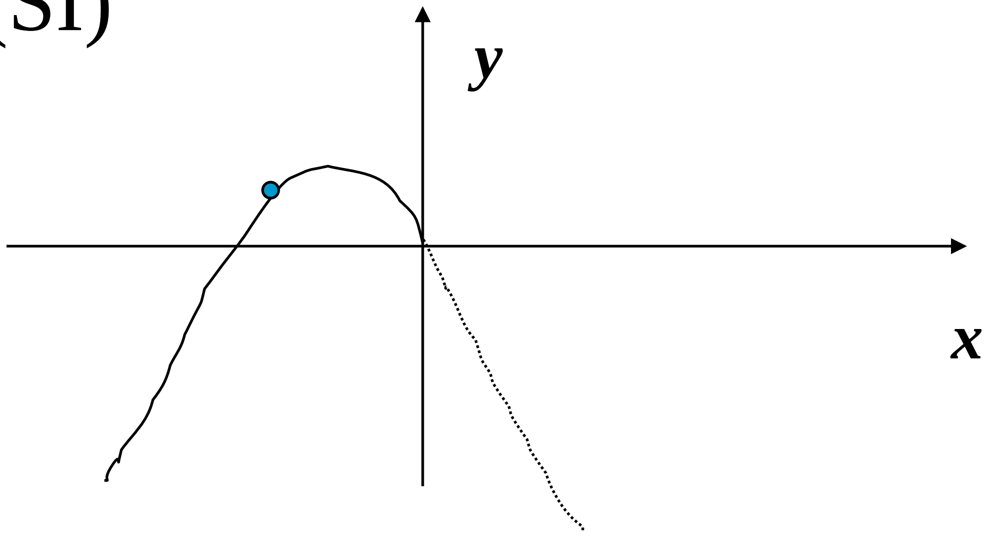
$$\boxed{\vec{r}=\vec{r}_0+\int_{t_0}^{t}\vec{v}(t)\cdot dt}$$

已知：$\vec{a}=\vec{a}(t)$ 和初始条件 $\vec{v}_0=\vec{v}(t_0)$，求 $\vec{v}=\vec{v}(t)$

$$\boxed{\vec{v}=\vec{v}_0+\int_{t_0}^{t}\vec{a}(t)\cdot dt}$$

例：一质点运动轨迹为抛物线

$$\begin{cases} x = -t^{2} & \text{(SI)} \\ y = -t^{4} + 2t^{2} & \text{(SI)} \end{cases}$$



求：x= -4m时（t>0)

粒子的速度、速率、

加速度。

解：

$$\begin{cases} x = -t^2 \quad \text{(SI)} \\ y = -t^4 + 2t^2 \quad \text{(SI)} \end{cases}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -2t \xRightarrow{t=2} v_x = -4\,m/s$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -4t^3 + 4t \xRightarrow{t=2} v_y = -24\,m/s$$

$$\vec{v} = -4\vec{i} - 24\vec{j}\ m/s \qquad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 4\sqrt{37}\,m/s$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -2ms^{-2}$$

练习 $a_y = ?$ $\quad a_y = -12t^2 + 4 = -44(ms^{-2})$

$$\vec{a} = -2\vec{i} - 44\vec{j}\ m/s^2$$

例. 设质点做二维运动： $\vec{r}=2t\vec{i}+(2-t^2)\vec{j}$

求t=0秒及t=2秒时质点的速度，并求后者的大小和方向。

解： $\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=2\vec{i}-2t\vec{j}$

$t=0s \quad \vec{v}_0=2\vec{i} \qquad t=2s \quad \vec{v}_2=2\vec{i}-4\vec{j}$

大小： $v_2=\sqrt{2^2+4^2}=4.47m/s$

方向： $\theta=\arctan\dfrac{-4}{2}=-63^\circ 26'$

θ为$\overrightarrow{v_2}$与x轴的夹角

例　已知某质点的运动方程为：

$$\vec{r}=[(2t^2-1)\vec{i}+(2-t^3)\vec{j}](m)(t>0)$$

求：

（1）轨道方程；

（2）*t*=0（*s*）至 *t*=2（*s*）内的平均速度；

（3）*t*=0（*s*）和 *t*=2（*s*）时的瞬时速度；

（4）*t*=0（s）至 *t*=2（s）内的平均加速度;

（5）*t*=0（*s*）和 *t*=2（s）时的瞬时加速度。

解:

（1） $\begin{cases} x = 2t^2 - 1 \\ y = 2 - t^3 \end{cases} \rightarrow y = 2 - (\frac{x+1}{2})^{3/2} (x > -1)$

（2） $\vec{r}_0 = -\vec{i} + 2\vec{j}, \vec{r}_2 = 7\vec{i} - 6\vec{j} \rightarrow \Delta\vec{r} = (8\vec{i} - 8\vec{j})(m)$

$$\overline{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = (4\vec{i} - 4\vec{j})(m/s)$$

（3） $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 4t\vec{i} - 3t^2\vec{j}$

$$\vec{v}_0 = 0, \vec{v}_2 = (8\vec{i} - 12\vec{j})(m/s)$$

（4） $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 4t\vec{i} - 3t^2\vec{j} \rightarrow \vec{v}_0 = 0, \quad \vec{v}_2 = 8\vec{i} - 12\vec{j}$

$$\overline{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = (4\vec{i} - 6\vec{j})(m/s^2)$$

（5） $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 4\vec{i} - 6t\vec{j}$

$$\vec{a}_0 = \frac{d\vec{v}}{dt} = 4\vec{i}(m/s^2), \vec{a}_2 = (4\vec{i} - 12\vec{j})(m/s^2)$$

例. 一质点在平面内依规律$x=t^2$沿曲线$y=x^3/320$运动，x、y的单位为cm，t为s，求第2秒末和第4秒末的瞬时速度?

解:

$$\because x = t^2, y = \frac{x^3}{320} = \frac{t^6}{320}$$

$$\therefore v_x = \frac{dx}{dt} = 2t \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{3}{160} t^5$$

第2秒末

注意: 微分，细心，再细心！！Carefully!!

$$v_{x2} = 4.0cm/s, v_{y2} = 0.6cm/s$$

$$\therefore \vec{v}_2 = v_{x2}\vec{i} + v_{y2}\vec{j} = 4.0\vec{i} + 0.6\vec{j}(cm/s)$$

例. 若某物体沿x轴正向运动,$a=4t$,$t=0$时,停在$x=10m$处,求:r?

解: $$v=\int a\,dt=\int 4t\,dt=2t^2+c_1$$

$t=0$时, $v_0=0$

$\therefore c_1=0$

$\therefore v=2t^2\ \ (\mathrm{m/s})$

$$x=\int v\,dt=\int 2t^2\,dt=2t^3/3+c_2$$

$t=0$时, $x_0=10$

$\therefore c_2=10$

$\therefore x=2t^3/3+10\ \ (m)$

例. 一质点由静止开始作直线运动，初始加速度为a_0，以后加速度均匀增加，每经过τ秒增加a_0，求经过 t 秒后质点的速度和运动的距离。

解：据题意知，加速度和时间的关系为：

$$a = a_0 + \frac{a_0}{\tau} t \qquad \because a = \frac{dv}{dt} \therefore dv = a dt$$

（直线运动中可用标量代替矢量）

$$v = \int a dt = \int (a_0 + \frac{a_0}{\tau} t) dt = a_0 t + \frac{a_0}{2\tau} t^2 + c_1$$

$$\because t = 0 \text{时} v = 0 \therefore c_1 = 0 \qquad v = a_0 t + \frac{a_0}{2\tau} t^2$$

$$\boldsymbol{a = a_0 + \frac{a_0}{\tau} t} \qquad v = \frac{dx}{dt} \qquad dx = v\,dt$$

$$\therefore x = \int v\,dt = \int (a_0 t + \frac{a_0}{2\tau} t^2) dt = \frac{a_0}{2} t^2 + \frac{a_0}{6\tau} t^3 + c_2$$

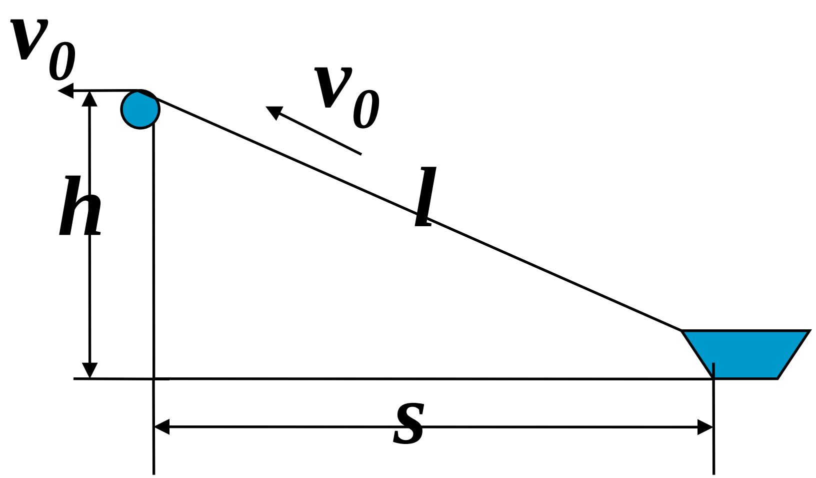
$$\because t = 0 \text{时} x = 0 \therefore c_2 = 0 \qquad x = \frac{a_0}{2} t^2 + \frac{a_0}{6\tau} t^3$$

$$\boldsymbol{\int_0^v dv = \int_0^t (a_0 + \frac{a_0}{\tau} t) dt} \qquad \boldsymbol{v = a_0 t + \frac{a_0}{2\tau} t^2}$$

$$\boldsymbol{\int_0^x dx = \int_0^t (a_0 t + \frac{a_0}{2\tau} t^2) dt} \qquad \boldsymbol{x = \frac{a_0}{2} t^2 + \frac{a_0}{6\tau} t^3}$$

综合举例

例. 已知一人以匀速v_0通过定滑轮拉动一小船,问小船距离岸为s时的瞬时速度v,瞬时加速度a?已知岸高为h.



解: 设船与人的距离为l, 则 $s=\sqrt{l^2-h^2}$

按速度定义式,得 $v=\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{2l\dfrac{dl}{dt}}{2\sqrt{l^2-h^2}}=\dfrac{v_0\sqrt{h^2+s^2}}{s}$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot v$$

$$= \frac{dv}{ds} \cdot \frac{\sqrt{h^2 + s^2}}{s} \cdot v_0$$

$$= -\frac{h^2 \cdot v_0{}^2}{s^3}$$

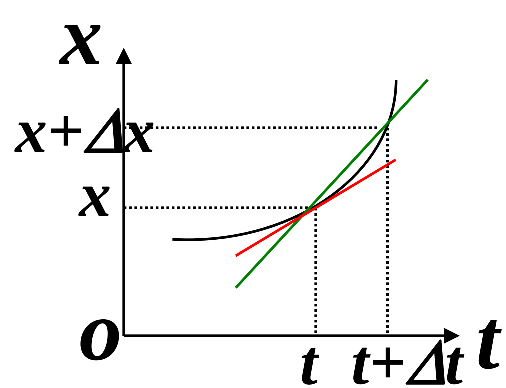
1.3 直线运动

直线运动中,位移,速度,加速度各矢量都在同一直线上,所以可把有关各量用标量来表示.

$$x = x(t)\ ,\ v = dx/dt\ ,\ a = dv/dt = d^2x/dt^2$$

一. 用图示法表示直线运动的运动情况

1. 位移时间曲线（*x-t*曲线）



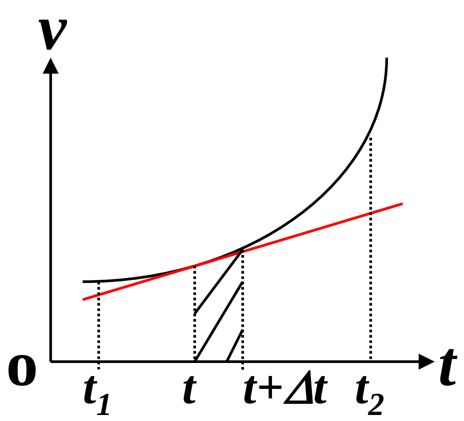
(1). 平均速度 $\overline{\vec{v}}$ —— 割线斜率

(2). 瞬时速度 $\vec{v}$ —— 切线斜率

(3). 质点运动方向 —— $v>0$, x轴正向

$v<0$, x轴负向

2. 速度时间曲线（*v-t*曲线）



(1). 瞬时加速度$\vec{a}$ —— 切线的斜率

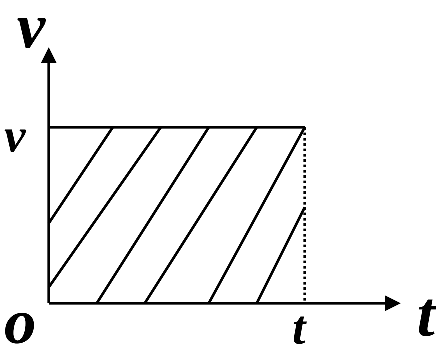
(2). 位移的量值 —— 阴影部分的面积

t_1到t_2时间段的位移为

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt$$

二. 几种常见直线运动

1. 匀速直线运动（$a=0$）



$x-x_0=vt \qquad \therefore\ x=x_0+vt$

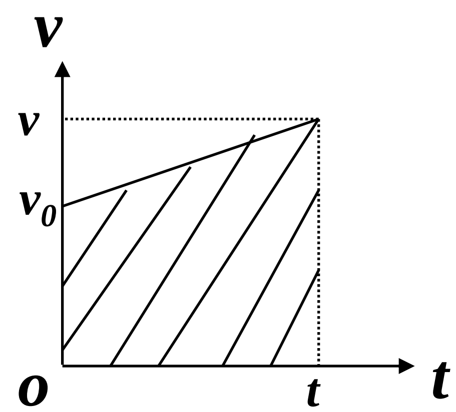
2. 匀变速直线运动（$a \neq 0, a$不变）

$$x - x_0 = \frac{v_0 + v}{2} t$$

$$v = v_0 + at$$

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$



$$x - x_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

3. 变速直线运动（$a \neq 0$, a变化）

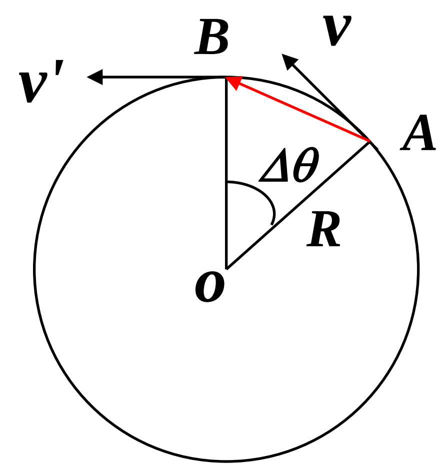
具体情况具体分析

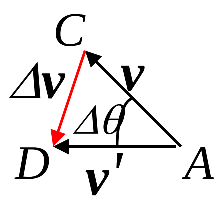
1.4 曲线运动

一. 圆周运动

1. 匀速圆周运动 （速率恒定不变, $\vec{v}$不是常量）

在Δt内，速度变化 $\Delta\vec{v}$





$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

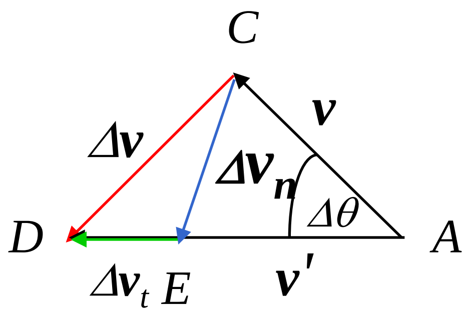
$\Delta t \to 0$

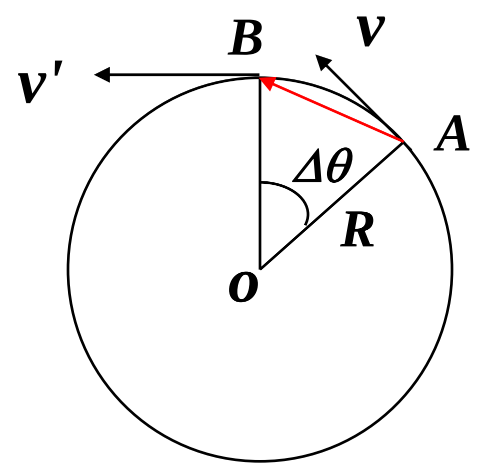
$a = v^2/R$

方向指向圆心.

2. 变速圆周运动

在Δt内，速度变化 $\Delta\vec{v}$





$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t}=\vec{a}_n+\vec{a}_\tau$$

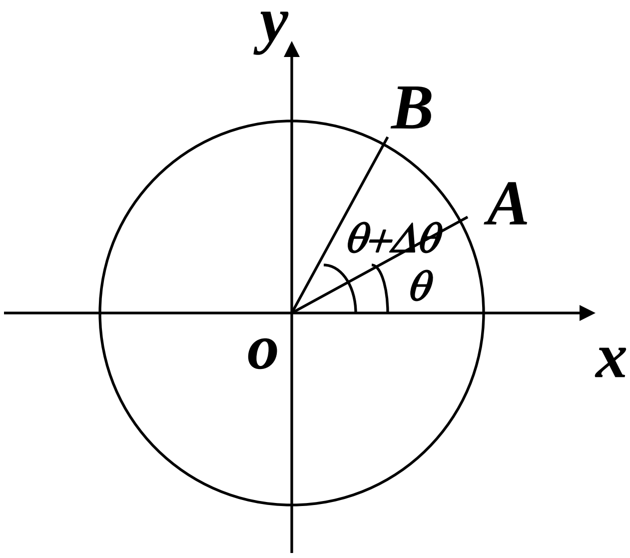
$a_n = v^2/R$ —— 法向加速度

$a_t = dv/dt$ —— 切向加速度

$$a=\sqrt{a_n^{\ 2}+a_t^{\ 2}} \qquad tg\,\theta=\frac{a_n}{a_t}$$

三. 圆周运动的角量表示

1. 几个基本概念



(1). 角位置: θ

(2). 角位移: $\Delta\theta$

单位: 弧度 (*rad*)

$$\begin{cases} \text{逆时针} & \text{正} \\ \text{顺时针} & \text{负} \end{cases}$$

(3). 角速度 w

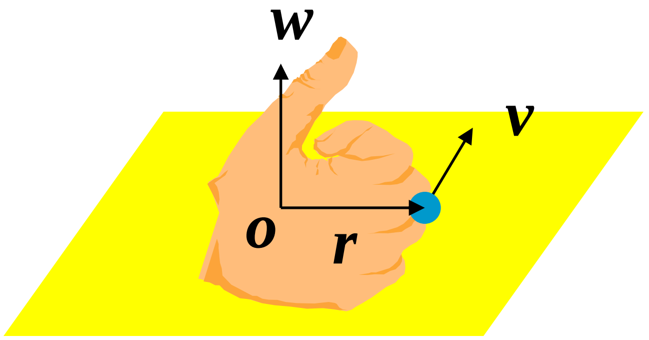
质点在Δt内 $\Delta\theta$的角位移

$\overline{w} = \Delta\theta/\Delta t$ —— 平均角速度

$\Delta t \to 0$

$$w = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\theta/\Delta t = d\theta/dt$$

单位：弧度/秒 (rad/s) 转/秒 (r/s) 转/分 (r/min)



(4). 角加速度 β

$t \rightarrow t + \Delta t \qquad w \rightarrow w + \Delta w$

$\bar{\beta} = \Delta w / \Delta t$ —— 平均角加速度

$\Delta t \rightarrow 0$

$$\beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta w / \Delta t = dw/dt$$

单位: 弧度/秒^2 (rad/s^2)

2. 运动方程

(1). 匀速圆周运动（$\beta=0$）

$$\theta = \theta_0 + wt$$

(2). 匀加速圆周运动（β是常量）

$$w = w_0 + \beta t \qquad \theta = \theta_0 + w_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2$$

3. 线量与角量的关系

$$\begin{cases} v = wR \\ a_n = v^2/R = Rw^2 \\ a_t = dv/dt = d(Rw)/dt = R\beta \\ \Delta s = R\Delta\theta \end{cases}$$

例. 一质点以R为半径作圆周运动,质点沿圆周所经历的路程可表达为$s = bt^2/2$,其中b是常数.求质点在时刻t的速率v,法向加速度a_n的大小,切向加速度a_t的大小及总加速度a?

解:

$$v=\frac{ds}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}bt^2\right)=bt$$

$$\therefore a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{b^2t^2}{R}$$

$$a_t=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}(bt)=b$$

$$\therefore a = \sqrt{a_n{}^2 + a_t{}^2} = b \cdot \sqrt{\frac{b^2 t^4}{r^2} + 1}$$

$$\tan\theta = \frac{a_n}{a_t} = \frac{bt^2}{R}$$

例.一质点沿半径为 10cm的圆周运动，其角坐标 (以弧度计)可用下式表示 $\theta = 2 + 4t^3$，其中 的单位是秒。试问：(1)在t=2s时，它的法向加速度和切向加速度各是多少？(2)当θ等于多少时其总加速度与半径成45°角？

解:（1） $w = \frac{d\theta}{dt} = 12t^2 \quad ,\beta = \frac{dw}{dt} = 24t$

$$\therefore a_n = rw^2 = 144rt^4 \quad ,a_t = r\beta = 24rt$$

$$t = 2s\text{时，} a_n = 230.4m/s^2, a_t = 4.8m/s^2$$

（2）

总加速度与半径成45°时，$a_n = a_t$

$$\Rightarrow t^3 = \frac{1}{6} \qquad \therefore \theta = 2.67rad$$