# 微积分一答案

## §1.1 函数与映射

一、选择填空题：

1. 函数 $y=x-\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是( C )。

A. 有界函数　　B. 递减函数　　C. 奇函数　　D. 周期函数

2. 下列函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 能构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的是( AD )。

A. $y=f(u)=\dfrac{1}{\sqrt{u-1}}$，$u=\varphi(x)=x^2+1$

B. $y=f(u)=\lg(1-u)$，$u=\varphi(x)=x^2+1$

C. $y=f(u)=\arcsin u$，$u=\varphi(x)=x^2+2$

D. $y=f(u)=\arccos u$，$u=\varphi(x)=-x^2+2$

3. 若函数 $f(x)=\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2-1}$ 表示同一函数，则它们的定义域是 $[1,+\infty)$。

4. 函数 $y=x+\arctan\frac{x}{2}$ 的反函数是 $y=2\tan(x-\pi)$，$x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$

$\arctan\frac{x}{2}=y-\pi$　　$-\frac{\pi}{2}\leq\arctan\frac{x}{2}\leq\frac{\pi}{2}$

$\frac{x}{2}=\tan(y-\pi)$

$\therefore x=2\tan(y-\pi)$

$\therefore$ 反函数 $y=2\tan(x-\pi)$

二、求下列函数的定义域：

1. $y=\arccos(x-2)$。

解 $\because -1\leq x-2\leq 1$

$\therefore$ 定义域为 $[1,3]$

2. $y=\sqrt{1-2x}+\sqrt{e-e^{\left(\frac{3x-1}{2}\right)^2}}$

解 $\because \begin{cases}1-2x\geq 0\\ \left(\frac{3x-1}{2}\right)^2\leq 1\end{cases}$ 即 $\begin{cases}1-2x\geq 0\\ -1\leq\frac{3x-1}{2}\leq 1\end{cases}$

$\therefore$ 定义域为 $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$

三、设函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,1]$，求下列函数的定义域：

1. $f\left(x+\frac{1}{4}\right)+f\left(x-\frac{1}{4}\right)$。

解 $\because \begin{cases}0<x+\frac{1}{4}\leq 1\\ 0<x-\frac{1}{4}\leq 1\end{cases}$　$\therefore \begin{cases}-\frac{1}{4}<x\leq\frac{3}{4}\\ \frac{1}{4}<x\leq\frac{5}{4}\end{cases}$

定义域 $\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$

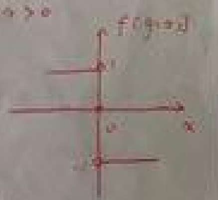
2. $f(1-\ln x)$。

解 $\because 0<1-\ln x\leq 1$

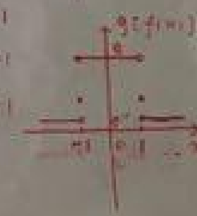
定义域 $[1,e)$

四、设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=e^x$，求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$，并作出这两个函数的图形。

解 $f[g(x)]=f(e^x)=\begin{cases}1, & |e^x|<1,\\ 0, & |e^x|=1,\\ -1, & |e^x|>1\end{cases}=\begin{cases}1, & x<0\\ 0, & x=0\\ -1, & x>0\end{cases}$




$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e, & |x|<1,\\ e^0, & |x|=1,\\ e^{-1}, & |x|>1\end{cases}=\begin{cases}e, & |x|<1\\ 1, & |x|=1\\ e^{-1}, & |x|>1\end{cases}$



五、1. 设 $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=3f(x)-2x$，求 $f(x)$.

解. 令 $\frac{x+1}{x-1}=t$，$x=\frac{t+1}{t-1}$，

于是 $f(t)=3f\left(\frac{t+1}{t-1}\right)-\frac{2t+2}{t-1}$

$=3[3f(t)-2t]-\frac{2t+2}{t+1}$

整理，得 $8f(t)=6t+2\frac{t+1}{t-1}$，

所以 $f(x)=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}\cdot\frac{x+1}{x-1}$，$x\neq 1$

$\left(\frac{3x^2-2x+1}{4(x-1)}\right)$

2. 设 $2f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=2x+\frac{3}{x}$，求 $f(x)$.

解. 由 $2f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=2x+\frac{3}{x}$，

以 $\frac{1}{x}$ 代 $x$，$2f\left(\frac{1}{x}\right)-f(x)=\frac{2}{x}+3x$，

所以 $f(x)=\frac{2}{3}x+\frac{8}{3x}$ $(x\neq 0)$



六、下列函数是由哪些基本初等函数复合而成的？

1. $y=e^{\tan^2 x}$.

解：$y=e^u$，$u=v^2$，$v=\tan x$

2. $y=\sqrt{\arcsin\frac{1}{x}}$.

解：$y=\sqrt{u}$，$u=\arcsin v$，$v=\frac{1}{x}$

七、证明：函数 $f(x)=\frac{x+2}{x^2+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

证明. $|f(x)|=\left|\frac{x+2}{x^2+1}\right|\leq\frac{|x|}{x^2+1}+\frac{2}{x^2+1}\leq\frac{\frac{1}{2}(x^2+1)}{x^2+1}+2=$

班级　　　　学号　　　　姓名

## §1.2 数列的极限　　§1.3 函数的极限

一、选择填空题：

1. 下列四个数列收敛的是（ B ）。

A. $1,2,2^2,2^3,\cdots$　　B. $1,0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{3},\cdots$

C. $1,0,\frac{3}{2},0,\frac{4}{3},\cdots$　　D. $\cos0,\cos\pi,\cos2\pi,\cos3\pi,\cdots$

2. 下列与 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 等价的叙述是（C, D）.［提示：可多选］

A. 对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，不等式 $x_n-a<\varepsilon$ 成立

B. 对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，有无穷多项 $x_n$ 使不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立

C. 对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，不等式 $|x_n-a|<c\varepsilon$ 成立，其中 $c$ 为正常数

D. 对于任给的 $m\in\mathbf{N}_+$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，不等式 $|x_n-a|<\frac{1}{m}$ 成立

3. “函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某一去心邻域内有界”是“$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在”的 必要 条件.

4. “函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处有定义”是“当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 有极限”的 无关 条件.

二、设 $x_n=\frac{1+(-1)^n}{n}$，$n=1,2,\cdots$.

(1) 对 $\varepsilon_1=0.1,\varepsilon_2=0.03,\varepsilon_3=0.007$，分别求出极限定义中相应的 $N$；

(2) 是否对 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 找到相应的 $N$，就可以证明 $x_n$ 趋于 0？

(3) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

解：$|x_n-0|\le\frac{2}{n}<\varepsilon$，$n>\frac{2}{\varepsilon}$，$N=[\frac{2}{\varepsilon}]+1$，

(1) $\varepsilon_1=0.1$，$N=21$，

$\varepsilon_2=0.03$，$N=67$，

$\varepsilon_3=0.007$，$N=286$.

(2) 不可以

(3) $\forall\varepsilon>0$，要使 $|x_n-0|\le\frac{2}{n}<\varepsilon$ 成立，取 $N=[\frac{2}{\varepsilon}]+1$，

当 $n>N$ 时，不等式 $|x_n-0|<\varepsilon$ 恒成立.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

班级　　　　学号　　　　姓名

三、根据函数极限的定义证明：

1. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}=-1$.

证：$\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\frac{x^2-5x+6}{x-2}-(-1)\right|=|x-2|<\varepsilon$，

只要取 $\delta=\varepsilon>0$，则当 $0<|x-2|<\delta$ 时，有

$\left|\frac{x^2-5x+6}{x-2}-(-1)\right|<\varepsilon$ 恒成立，故 $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}=-1$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1$.

证：$\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\frac{x^2}{x^2+1}-1\right|=\frac{1}{x^2+1}<\frac{1}{x^2}<\varepsilon$，

只要 $|x|>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$，取 $M=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}>0$，则当 $|x|>M$，

有 $\left|\frac{x^2}{x^2+1}-1\right|<\varepsilon$ 恒成立，故 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1$

四、设 $f(x)=\begin{cases}x-3, & |x|\le2,\\ 1-x, & |x|>2,\end{cases}$ 试讨论 $\lim\limits_{x\to-2}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to2}f(x)$.

解：$f(x)=\begin{cases}1-x, & x<-2\\ x-3, & -2\le x\le2\\ 1-x, & x>2\end{cases}$

$\because \lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-2^-}(1-x)=3$，
$\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}(x-3)=-5$，

$\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)\ne\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)$
故 $\lim\limits_{x\to-2}f(x)$ 不存在

$\because \lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}(x-3)=-1$，
$\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}(1-x)=-1$，

$\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=-1$
故 $\lim\limits_{x\to2}f(x)=-1$

五、证明：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$不存在.

证：$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1.$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1.$

$\because \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}\neq\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$不存在.

六、按极限定义证明：

1. 若$x_n\to a(n\to\infty)$，则$|x_n|\to|a|(n\to\infty)$，并举例说明反之未必成立.

证：$\because \lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ $\therefore \forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$n>N$时$|x_n-a|<\varepsilon$.

而$||x_n|-|a||<|x_n-a|<\varepsilon$，即对同样的$\varepsilon>0$，$\exists N>0$，

当$n>N$时，总有$||x_n|-|a||<\varepsilon$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.

反之不成立。如$|(-1)^n|\to 1\ (n\to\infty)$，但$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$不存在.

2. 若$|x_n|\to 0(n\to\infty)$，则$x_n\to 0(n\to\infty)$.

证：$\because \lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$.

$\therefore \forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$n>N$时$||x_n|-0|<\varepsilon$.

而$|x_n-0|=||x_n|-0|<\varepsilon$.

即对同样的$\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$n>N$时，

总有$|x_n-0|<\varepsilon$，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

## §1.4 无穷大与无穷小　§1.5 极限运算法则

1 $\begin{cases} x\to 0^-,\ \frac{1}{x}\to-\infty,\ 2^{\frac1x}\to 0,\ \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2^{\frac1x}-1}{2^{\frac1x}+1}=\dfrac{-1}{1}=-1 \\ x\to 0^+,\ \frac{1}{x}\to+\infty,\ 2^{\frac1x}\to+\infty,\ \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2^{\frac1x}-1}{2^{\frac1x}+1}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-1/2^{\frac1x}}{1+1/2^{\frac1x}}=1 \end{cases}$

一、选择题：

1. 当 $x\to0$ 时，函数 $\dfrac{2^{\frac1x}-1}{2^{\frac1x}+1}$ 的极限是( D ).

A. 1　　B. $-1$　　C. 0　　D. 不存在

2. 下列说法正确的是( D ).

A. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 都存在　反例 $\lim\limits_{x\to0}\frac1x$，$\lim\limits_{x\to0}(-\frac1x)$

B. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在　反例：$\lim\limits_{x\to0}\sin x=0$，$\lim\limits_{x\to0}x^2=0$，但 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x^2}=\infty$

C. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 都存在　反例：$\lim\limits_{x\to0}(\sin x)(\frac1x)=1$　但 $\lim\limits_{x\to0}\frac1x$ 不存在

D. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在而 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 必不存在

二、计算下列极限：

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac12+\frac1{2^2}+\cdots+\frac1{2^n}\right)$.

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac12}=2$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac1{2^2}\right)\left(1-\frac1{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac1{n^2}\right)$.

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac12)(1+\frac12)(1-\frac13)(1+\frac13)\cdots(1-\frac1n)(1+\frac1n)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac12\cdot\frac32\cdot\frac23\cdot\frac43\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac12\cdot\frac{n+1}{n}$

$=\frac12$.



3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x^2-x}{\cos^2x-x}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{\sin x^2}{x}-1}{\frac{\cos^2x}{x}-1}=\dfrac{-1}{-1}=1$.

4. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-(x+2)}{1+x+x^2}=-1$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x^2-x+4}(3\cos x+2)$.

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x^2-x+4}=0$，$|3\cos x+2|\le 5$

利用无穷小乘有界量是无穷小，

∴ 原式 $=0$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt n}-\sqrt{n-\sqrt n})$.

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^{1/2}}{\sqrt{n+3\sqrt n}+\sqrt{n-\sqrt n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt n}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt n}}}$

$=2$.

班级　　　　学号　　　　姓名

三、已知 $f(x)=\frac{px^2-2}{x^2+1}+3qx+5$，当 $x\to\infty$ 时，问，$p$、$q$ 取何值时 $f(x)$ 为无穷小量？$p$、$q$ 取何值时 $f(x)$ 为无穷大量？

解：$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{px^2-2}{x^2+1}+3qx+5\right)$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3qx^3+(5+p)x^2+3qx+3}{x^2+1}$

(1) $\begin{cases} 3q=0 \\ 5+p=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=-5 \\ q=0 \end{cases}$，当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 为无穷小量.

(2) $q\neq 0$，$p$ 为一切实数，当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 为无穷大量

四、已知 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=-5$，求常数 $a$、$b$.

解：由已知得有 $x^2+ax+b=(x-2)(x+k)$，

即 $\lim\limits_{x\to 2}(x+k)=-5$　$\therefore k=-7$.

$x^2+ax+b=(x-2)(x-7)$

$=x^2-9x+14$

$\begin{cases} a=-9 \\ b=14 \end{cases}$

班级　　　　学号　　　　姓名

五、已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$，求常数 $a$、$b$.

解 $b=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-x+1}-ax)(\sqrt{x^2-x+1}+ax)}{\sqrt{x^2-x+1}+ax}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1-a^2)x^2+1-x}{\sqrt{x^2-x+1}+ax}$

$\therefore 1-a^2=0 \Rightarrow a=\pm 1$，

$a=1$，$b=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-x}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=-\frac{1}{2}$

$a=-1$，$b=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-x}{\sqrt{x^2-x+1}-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1}=\infty$（无

综上 $\begin{cases} a=1 \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases}$

六、证明：函数 $y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1]$ 内无界，但不是 $x\to 0^+$ 时的无穷大.

证 (1) 因为 $\forall M>0$，在 $(0,1]$ 中总可以找到点 $x_0$，使 $f(x_0)>M$

如：$x_0=\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}$ $(k\in N^+)$，$f(x_0)=2k\pi+\frac{\pi}{2}$.

当 $k$ 充分大，可使 $f(x_0)>M$

所以 $y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 内无界.

(2) $\forall M>0$，$\delta>0$，总可以找到点 $x_0$，使 $0<x_0<\delta$，但 $f(x_0)$

如 $x_0=\frac{1}{2k\pi}$ $(k\in N^+)$ 当 $k$ 充分大，$0<x_0<\delta$.

但 $f(x_0)=2k\pi\sin(2k\pi)=0<M$，

所以 $y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 不是 $x\to 0^+$ 时的无穷大

## §1.6 极限存在准则 §1.7 无穷小的比较

一、选择填空题：

1. 下列极限正确的是（ C ）.

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1}=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{-1}=-1\end{cases}$

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\pi/2\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\pi/2\end{cases}$  B. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=1$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=1$  D. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$  $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\sin x=0$

2. 当 $x\to0$ 时，在下列 4 个无穷小量中，比其他 3 个更高阶的无穷小量是（ D ）.

A. $\ln(1+x^2)\sim x^2$  B. $e^x-1\sim x$  C. $\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3$  D. $1-\cos x^2\sim\frac{1}{2}x^4$

3. 若 $x\to0$ 时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小，则 $a=$ ___-4___.

二、计算下列极限. 利用 $(1+x)^a-1\sim ax$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-ax^2)^{\frac14}-1}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac14(-ax^2)}{x^2}=1$

$\therefore -\frac{a}{4}=1 \Rightarrow a=-4$

1. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{2x}{x^2+1}$.

解. 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\frac{2x}{x^2+1}=2$. （$x\to\infty$时, $\sin\frac{2x}{x^2+1}\sim\frac{2x}{x^2+1}$）

$\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x$

$=\frac{\sin x}{\cos x}(1-\cos x)$

$\sim x\cdot\frac{1}{2}x^2$

2. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$.

解. 原式 $=\lim\limits_{x\to a}\frac{-2\sin\frac{x-a}{2}\sin\frac{x+a}{2}}{x-a}$

$=-\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\sin\frac{x+a}{2}=-\sin a$

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x+x^2\sin\frac{1}{x}}{(1+\cos x)x}$.

解. 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{(1+\cos x)x}+\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac1x}{(1+\cos x)\cdot x}$

$=\frac12\lim\limits_{x\to0}\frac{3x}{x}+\frac12\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac1x$

$=\frac32+\frac12\times0$

$=\frac32$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{x-1}$.

解. 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}}\right]^{-1}\cdot\left[\left(1+\frac{-2}{x}\right)^{-1}\right]$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}}\right]^{-1}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x}\right)^{-1}$

$=e^{-1}\cdot1=e^{-1}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$.

解. 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac1x\right)^x}{\left(1+\frac1x\right)^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{-1}{x}\right)^{(-x)(-1)}}{\left(1+\frac1x\right)^x}$

$=\frac{e^{-1}}{e}=e^{-2}$

6. $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}$.

解. 原式 $=\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}\cdot\frac{2\cdot3x}{\sin x}}$

又 $\because\lim\limits_{x\to0}\frac{2\cdot3x}{\sin x}=6$

从而原式 $=e^6$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{\arcsin x^2\cdot\ln(1+\sin x)}$.

解. 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(\cos x-1)}{\cos x\, x^2\cdot\sin x}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$.

三、利用极限存在准则证明或计算：

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2+1}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n-1}\right)$.

解.

$\dfrac{1}{n^2+n-1}+\dfrac{2}{n^2+n-1}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n-1}\leq\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2+1}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n-1}\leq\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n-1}+\dfrac{2}{n^2+n-1}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n-1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n-1}=\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\dfrac{1}{2}$

由夹逼定理 原式 $=\dfrac{1}{2}$.

2. 设 $b>0$，$b_1>0$，$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(b_n+\dfrac{b}{b_n}\right)$，$n=1,2,3,\cdots$.

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在；

(2) 求出 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

(证:1) $b_n=\dfrac{1}{2}\left(b_{n-1}+\dfrac{b}{b_{n-1}}\right)\geq\sqrt{b_{n-1}\cdot\dfrac{b}{b_{n-1}}}=\sqrt{b}$,

$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{b}{b_n^2}\right)\leq\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{b}{b}\right)=1$

$\therefore$ $\{b_n\}$ 单调减少，且有下界，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在.

(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$，则 $A=\dfrac{1}{2}\left(A+\dfrac{b}{A}\right)$

$\Rightarrow A=\sqrt{b}$，$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\sqrt{b}$.

四、确定 $k$ 的值，使下列函数与 $x^k$，当 $x\to 0$ 时是同阶无穷小：

1. $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\sin x}}\cdot\dfrac{\tan x+\sin x}{x^k}$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x(1+\cos x)}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^k}=C\neq$

$\therefore k=1$.

2. $\sqrt[5]{3x^2-4x^3}$.

解. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{3x^2-4x^3}}{x^k}=\sqrt[5]{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-4x^3}{x^{5k}}}=C\neq$

$\therefore 5k=2$，$k=\dfrac{2}{5}$

抓小米

## §1.8　函数的连续性与间断点
## §1.9　连续函数的运算与初等函数的连续性
## §1.10　闭区间上连续函数的性质

$\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)$　$\frac{x}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{1}{\sin x}$

$\therefore e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{1}{\sin x}}$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=2$

**一、选择填空题：**

1. 函数 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x-1}}, & x\neq1,\\ 0, & x=1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处（ B ）.

A. 连续　　B. 不连续，但右连续　　C. 不连续，但左连续　　D. 左、右都不连续

2. $x=1$ 是函数 $f(x)=\arctan\frac{1}{1-x}$ 的（ B ）.

A. 连续点　　B. 跳跃间断点　　C. 可去间断点　　D. 无穷间断点

3. 方程 $x^3-3x-1=0$ 在区间（ A ）内至少有一个实根.

A. $(-2,-1)$　　B. $(-3,-2)$　　C. $(0,1)$　　D. $(2,3)$

4. 函数 $y=\frac{1}{\ln|x|}$ 的间断点有 ___3___ 个.　$x=0,-1,1$

5. 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，若 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=e^2$，则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=$ ___2___.

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$

**二、指出下列函数的间断点，并判定其类型，如果是可去间断点，请补充或者改变函数的定义使它连续：**

1. $f(x)=\frac{1+x}{1+x^3}$.

解．间断点．$x=-1$．

$\because\lim\limits_{x\to-1}\frac{1+x}{1+x^3}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{1}{1-x+x^2}=\frac{1}{3}$　$\therefore x=-1$ 是第一类可去间断点

补充定义．$f(x)=\begin{cases}\frac{1+x}{1+x^3}, & x\neq-1\\ \frac{1}{3}, & x=-1\end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=-1$ 连续

2. $f(x)=\cos^2\frac{1}{x}$.

解．$f(x)$ 在 $x=0$ 处无定义　$x=0$ 为间断点

又 $\lim\limits_{x\to0}\cos^2\frac{1}{x}$ 不存在

所以 $x=0$ 是第二类振荡间断点



3. $f(x)=\frac{1-\cos x}{x^3+x^2}$.

解，$f(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=-1$ 无定义

$\because\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^3+x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2(x+1)}=\frac{1}{2}$　$\therefore x=0$ 是第一类可去间断点

补充定义　$f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{x^3+x^2}, & x\neq0\\ \frac{1}{2}, & x=0\end{cases}$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续

$\because\lim\limits_{x\to-1}\frac{1-\cos x}{x^3+x^2}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{1-\cos x}{x^2(x+1)}=\infty$，$\therefore x=-1$ 是第二类无穷间断点

4. $f(x)=\frac{x}{\sin x}$.

解．间断点为 $\sin x=0$，即 $x=k\pi$（$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$）

$\because\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$　$\therefore x=0$ 是第一类可去间断点

补充定义，$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{\sin x}, & x\neq0\\ 1, & x=0\end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续．

$\because\lim\limits_{x\to k\pi}\frac{x}{\sin x}=\infty$（$k=\pm1,\pm2,\cdots$）

$\therefore x=k\pi$（$k=\pm1,\pm2,\cdots$）为第二类无穷间断点

**三、设函数** $f(x)=\begin{cases}\frac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{3}}, & x>0,\\ ae^{2x}, & x\leq0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 $a$ 的值.

解　$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}ae^{2x}=a$．

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{3}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-\tan x}{\frac{x}{3}}=-3$

$\because f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

$\therefore\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$　$\therefore a=-3$

四、讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+x^2}{x^{2n}+1}$ 的连续性.

解：$|x|<1$，$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n-1}=0$，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+x^2}{x^{2n}+1}=x^2$.

$|x|>1$，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+x^2}{x^{2n}+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{2n-2}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=\dfrac{1}{x}$.

$x=1$，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+1}{1+1}=1$.

$x=-1$，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-1+1}{1+1}=0$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}1/x, & x<-1\\ 0, & x=-1\\ x^2, & -1<x<1\\ 1, & x=1\\ x, & x>1\end{cases}$$

$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$，$(-1,1)$，$(1,+\infty)$ 内连续

$\because \lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{1}{x}=-1$，$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}x^2=1$

$\therefore x=-1$ 是第一类跳跃间断点.

$\because \lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x^2=1$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{x}=1$　$\therefore f(x)$ 在 $x=1$ 连续

五、设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且对任何 $x_1,x_2$，有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，证明：若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

证：$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，

$\lim\limits_{\Delta x\to0}f(x+\Delta x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}[f(x)+f(\Delta x)]$

$=f(x)+f(0)$　　$\left[\begin{array}{l}注：\because f(x)在x=0连续\\ \therefore \lim\limits_{\Delta x\to0}f(\Delta x)=f(0)\end{array}\right]$

$=f(x+0)=f(x)$

由 $x$ 的任意性知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.



六、设函数 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，且 $f(0)=f(2a)$，证明：在 $[0,a]$ 上至少存在一点 $\xi$ 使得 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

证：令 $F(x)=f(x)-f(x+a)$，则 $F(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续

$F(0)=f(0)-f(a)$，$F(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0)$

(1) 当 $f(0)=f(a)$ 时，$F(0)=0$，取 $\xi=0$，则 $f(\xi)=f(\xi+a)$

(2) 当 $f(0)\neq f(a)$ 时，$F(0)\cdot F(a)<0$

由零点定理知在 $(0,a)$ 内至少存在一点 $\xi$，使

$f(\xi)=f(\xi+a)$.

七、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，证明：在 $[a,b]$ 上至少存在一点 $\xi$，使 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

证：因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则一定存在 $M$ 和 $m$，使

$\forall x\in[a,b]$，有 $m\le f(x)\le M$.

从而 $m\le f(x_i)\le M$，$i=1,2,\cdots,n$，则

$nm\le f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\le nM$.

即 $m\le\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\le M$.

由介值定理知，至少存在一点 $\xi$，使

$f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$

## §2.1 导数的概念

一、选择填空题：

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x^3, & x\leq 1,\\ x^2, & x>1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的( B ).

A. 左、右导数都存在

B. 左导数存在，但右导数不存在

C. 左导数不存在，但右导数存在

D. 左、右导数都不存在

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-\frac{2}{3}}{x-1}=\infty$

$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}}{x-1}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=2$

2. 若 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数，则( C ).

A. $f'(0)$ 存在，且 $f'(0)=0$

B. $f'(0)$ 存在，但不一定为零

C. 若 $f'(0)$ 存在，则 $f'(0)=0$

D. $f'(0)$ 存在也不一定为零

$y=|x|$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 偶，但在 $x=0$ 不可导.

C. $f(-x)=f(x)$

$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(-x)-f(0)}{x-0}=-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(-x)-f(0)}{-x-0}=-f'(0)$

3. 设 $\Delta y=\dfrac{x}{1+x}\Delta x+o(\Delta x)$，则 $y'|_{x=1}=$ $\frac{1}{2}$.

$y'=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\left[\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right]=\dfrac{x}{1+x}$

4. 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$，则 $f'(0)=$ $n!$.

$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{x}=1\cdot2\cdots n=n!$

二、设 $f'(x_0)$ 存在，按照导数的定义计算 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-2h)}{h}$.

~~解 原式=~~

原式 $=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{[f(x_0+h)-f(x_0)]-[f(x_0-2h)-f(x_0)]}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+2\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{-2h}$

$=f'(x_0)+2f'(x_0)=3f'(x_0)$



三、按照导数的定义求 $y=\cos x$ 的导数.

解 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{-2\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}$

$=-\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)$

$=-\sin x$

$\therefore(\cos x)'=-\sin x$

四、讨论下列函数在点 $x=0$ 的连续性和可导性.

1. $y=|\sin x|$.　$y=f(x)=|\sin x|$

解 (1) $\left.\begin{aligned}&\lim\limits_{x\to0^-}|\sin x|=\lim\limits_{x\to0^-}(-\sin x)=0,\\&\lim\limits_{x\to0^+}|\sin x|=\lim\limits_{x\to0^+}(\sin x)=0\end{aligned}\right\}\lim\limits_{x\to0}|\sin x|=0=|\sin 0|$

$\therefore |\sin x|$ 在 $x=0$ 处连续.

(2) $\left.\begin{aligned}&f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{|\sin x|-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-\sin x}{x}=-1\\&f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{|\sin x|-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1\end{aligned}\right\}f'_-(0)\neq f'_+(0)$

$\therefore |\sin x|$ 在 $x=0$ 处不可导.

2. $y=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

解：$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0 = f(0)$

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 极限不存在

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

五、设 $f(x)=\begin{cases} ax^2+1, & x\geq 1, \\ -x^2+bx, & x<1, \end{cases}$ 试求常数 $a,b$，使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导.

解：$f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(-x^2+bx) = -1+b \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(ax^2+1) = a+1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a+1=b-1 \\ b=a+2 \end{array}$

又 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导

$\left.\begin{array}{l} f'_-(1) = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{(-x^2+bx)-(a+1)}{x-1} \\ = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-x^2+(a+2)x-(a+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-[x-(a+1)](x-1)}{x-1} = a \\ f'_+(1) = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(ax^2+1)-(a+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{a(x^2-1)}{x-1} \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=2a \\ a=0 \end{array}$

$= \lim\limits_{x\to 1^+} a(x+1) = 2a$

$\therefore \begin{cases} a=0 \\ b=2. \end{cases}$

六、求曲线 $y=e^x$ 上在点 $(0,1)$ 处的切线方程和法线方程.

解：斜率 $k = y'(0) = (e^x)'|_{x=0} = e^x|_{x=0} = 1$

切线方程：$y-1 = 1\cdot(x-0)$ 即 $y=x+1$

法线方程：$y-1 = -1\cdot(x-0)$ 即 $y=-x+1$

七、设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且满足：

(1) $\forall x,y\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$；

(2) $f'(0)$ 存在.

证明：$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导.

证：由于 $\forall x,y\in(-\infty,+\infty)$，$f(x+y)=f(x)+f(y)$

故 $f(0)=f(0)+f(0) \Rightarrow f(0)=0$

$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$x+\Delta x\in(-\infty,+\infty)$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)+f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = f'(0)$

即 $f'(x)$ 存在，且 $f'(x)=f'(0)$.

## §2.2 函数的求导法则　　§2.3 高阶导数

$y^{(n)} = n! + (-3)^n e^{-3x}$

$y^{(n)}(0) = n! + (-3)^n$

一、选择题：

1. 设 $y=x^n+e^{-3x}$，则 $y^{(n)}(0)=$（ A ）.

A. $n!+(-3)^n$　　B. $n!$　　C. $n!+(-3)^{n-1}$　　D. $n!-3$

二、求下列函数的导数：

1. $y=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$.

$y = x^{\frac{7}{8}}$，　$y' = \frac{7}{8}x^{-\frac{1}{8}}$.

2. $y=\arcsin\frac{1}{x}$.

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{x})^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

3. $y=\frac{\cos x}{x}$.

$$y' = \frac{-x\sin x - \cos x}{x^2}$$

4. $y=\sin x^2\cdot\cos^2\frac{1}{x}$.

$$y' = 2x\cos x^2\cdot\cos^2\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\sin x^2\cdot\cos^2\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{x}$$

5. $y=e^{\arctan\sqrt{x}}$.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}e^{\arctan\sqrt{x}}$$



6. $y=\ln\ln\ln x$.

$$y' = \frac{1}{x\cdot\ln x\cdot(\ln\ln x)}$$

7. $y=\arctan\left(\ln\frac{1}{x}\right)$.

$$y' = -\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$$

8. $y=(\sec x)^3$.

$y' = 3(\sec x)^3\cdot\tan x$

9. $y=10^{5-2x}$.

$y' = (-2)10^{5-2x}\cdot\ln 10$.

10. $y=\frac{1-\ln x}{1+\ln x}$.

$$y' = -\frac{2}{x(1+\ln x)^2}$$

11. $y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$.

$y' = \sqrt{x^2-a^2}$

12. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)$$

班级　　　　学号　　　　姓名

13. $y=\ln(\sec x+\tan x)$.

$y' = \sec x$

14. $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}\ (a>0)$.

$y' = a^a x^{a^a-1} + a^{x^a}\ln a\,(x^a)' + a^{a^x}\ln a\cdot(a^x)'$

$= a^a x^{a^a-1} + a x^{a-1}\cdot a^{x^a}\ln a + a^{a^x+x}\ln^2 a$.

三、设 $x=g(y)$ 是 $\cancel{f(x)}\ y=\ln x+\arctan x$ 的反函数，求 $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

解. 由 $y=\frac{\pi}{4}$，知 $x=1$

$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{1+x^2}$，$g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{2}{3}$.

四、设 $y=\sin[f(x^2)]$，其中 $f$ 具有二阶导数，求 $\frac{dy}{dx}$.　　$\frac{d^2y}{dx^2}$

解，

$\frac{dy}{dx}=2xf'(x^2)\cos[f(x^2)]$.

五、设 $y=f\left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)$，$f'(x)=\arctan x^2$，求 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$.

解. 令 $u=\frac{3x-1}{3x+1}$，则 $y=f[u(x)]$.

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\arctan u^2\cdot\left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)'$

$=\arctan u^2\cdot\frac{6}{(3x+1)^2}$

$\therefore \frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=\frac{dy}{dx}\Big|_{\substack{x=0\\u=-1}}=6\cdot\arctan 1=\frac{3}{2}\pi$.

六、若 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2tx}$，求 $f'(t)$.

解. $f(t)=t\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{2t}=te^{2t}$.

$\therefore f'(t)=(2t+1)e^{2t}$

七、求下列导数的高阶导数：

1. $y=xe^x$，求 $y^{(n)}$.

解　$y'=(x+1)e^x$

$y''=(x+2)e^x$

$y'''=(x+3)e^x$

$\cdots$

$y^{(n)}=(x+n)e^x$

2. $y=\sin^4 x-\cos^4 x$，求 $y^{(n)}$.

解　$y=\sin^4x-\cos^4x=(\sin^2x-\cos^2x)(\sin^2x+\cos^2x)$

$=-\cos 2x$

$y^{(n)}=-2^n\cos\left(2x+\frac{n}{2}\pi\right)$

八、求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 $n$ 阶导数 $f^{(n)}(0)\ (n\geq 3)$.

解，由Leibniz公式及 $[\ln(1+x)]^{(k)}=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$ (k∈

$f^{(n)}(x)=x^2[\ln(1+x)]^{(n)}+C_n^1(x^2)'[\ln(1+x)]^{(n-1)}+C_n^2(x^2)''[\ln(1+x)$

$=x^2\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}+2nx\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}+n(n-1)\frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}}$

$\therefore f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^{n-1}\,n!}{n-2}$

## §2.4　隐函数及由参数方程所确定的函数的导数
## §2.5　函数的微分

一、设 $y=f(x)$ 是由方程 $x^3+y^3-\sin 3x+6y=0$ 所确定的隐函数，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解. 方程两边同时对 x 求导. $3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}-3\cos 3x+6\frac{dy}{dx}=0$

所以 $\frac{dy}{dx}=\frac{\cos 3x-x^2}{y^2+2}$

又 $y|_{x=0}=0$

从而 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\left.\left(\frac{\cos 3x-x^2}{y^2+2}\right)\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=\frac{1}{2}$.

二、设 $y=f(x)$ 是由方程 $e^{x+y}-xy=1$ 所确定的隐函数，求 $y''(0)$.

解. 易知 $y(0)=0$.

方程两边同时对 x 求导 $(1+y')e^{x+y}-y-xy'=0$ (*)

故 $y'(0)=-1$.

(*)式两边再对 x 求导. $(1+y')^2e^{x+y}+y''e^{x+y}-2y'-xy''=0$ (**)

将 $x=0$, $y=0$, $y'(0)=-1$ 代入上式(**). 得 $y''(0)=-2$.

三、用对数求导法求下列函数的导数：

1. $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

解. $\ln y=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

方程两边对 x 求导.

$\frac{1}{y}y'=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$\therefore y'=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]$





2. $y=\frac{(2x+1)^2\sqrt[5]{2-3x}}{\sqrt[3]{(3-x)^2}}$.

解. $\ln y=2\ln|2x+1|+\frac{1}{5}\ln|2-3x|-\frac{2}{3}\ln|3-x|$

方程两边对 x 求导.

$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{4}{2x+1}-\frac{3}{5(2-3x)}+\frac{2}{3(3-x)}$

$\therefore y'=\frac{(2x+1)^2\sqrt[5]{2-3x}}{\sqrt[3]{(3-x)^2}}\left(\frac{4}{2x+1}-\frac{3}{5(2-3x)}+\frac{2}{3(3-x)}\right)$

四、求参数方程 $\begin{cases}x=\ln\sqrt{1+t^2},\\ y=\arctan t\end{cases}$ 所确定的函数的导数 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解. $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t}{1+t^2}}=\frac{1}{t}$.

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{dx}=\frac{\frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{t}{1+t^2}}=-\frac{1+t^2}{t^3}$.

五、设 $y=y(x)$ 是由方程组 $\begin{cases}x=3t^2+2t+3,\\ e^y\sin t-y+1=0\end{cases}$ 确定的隐函数，求 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$.

解. 先求 $\frac{dy}{dx}$. $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{e^y\cos t}{(2-y)(6t+2)}$

由 $x=3t^2+2t+3$, 知 $\frac{dx}{dt}=6t+2$

由 $e^y\sin t-y+1=0$. 利用隐函数求导法知 $\frac{dy}{dt}=\frac{e^y\cos t}{2-y}$. 又 $y|_{t=0}=1$

从而 $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=e$

再求 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$

$=\frac{\left(\frac{dy}{dt}e^y\cos t-e^y\sin t\right)(2-y)(6t+2)-e^y\cos t\left[6(2-y)-\frac{dy}{dt}(6t+2)\right]}{(2-y)^2\cdot(6t+2)^3}$

从而 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=\frac{2e^2-3e}{4}$.

六、求曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点(0,1)处的切线方程.

解. 方程两边对x求导,

$$(y+xy')\cos(xy)+\frac{1}{y-x}(y'-1)=1$$

将 $x=0$, $y=1$ 代入上式, $y'|_{(0,1)}=1$.

切线方程 $y=x+1$.

七、求曲线 $\begin{cases}x=\cos^3 t,\\ y=\sin^3 t\end{cases}$ 上对应于点 $t=\frac{\pi}{6}$ 处的法线方程.

解. $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{3\sin^2 t\cdot\cos t}{-3\cos^2 t\cdot\sin t}=-\tan t$

$\frac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{6}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. 法线斜率 $k=\sqrt{3}$

法线方程: $y-(\frac{1}{2})^3=\sqrt{3}\left(x-(\frac{\sqrt{3}}{2})^3\right)$

八、选择题:

1. 设 $f(x)$ 可导,且 $f'(x_0)=3$,则 $\Delta x\to 0$ 时,$f(x)$ 在点 $x_0$ 处的微分 $dy$ 与 $\Delta x$ 相比较是( B ). $dy|_{x=x_0}=f'(x_0)\Delta x=3\Delta x$

A. 等价无穷小　B. 同阶无穷小　C. 低阶无穷小　D. 高阶无穷小

2. 设 $f(u)$ 可导,当 $y=f(x^2)$ 在 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时,相应的 $\Delta y$ 的线性主部为 0.1,则 $f'(1)=$( D ). $0.1=df(x^2)=2xf'(x^2)\Delta x=-2f'(1)\times(-0.1)\Rightarrow f'(1)=\frac{1}{2}$

A. −1　B. 0.1　C. 1　D. 0.5

3. "$f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可微"是"$f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续"的( C ).

A. 充分且必要条件　B. 必要非充分条件

C. 充分非必要条件　D. 既非充分也非必要条件

九、当 $x=1$,且(1) $\Delta x=1$,(2) $\Delta x=0.1$,(3) $\Delta x=0.01$ 时,分别求出函数 $f(x)=x^2-3x+5$ 的改变量及微分,并加以比较,判断是否能得出结论:当 $\Delta x$ 愈小,二者愈近似.

解 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(2x-3)\Delta x+(\Delta x)^2$

$dy=f'(x)\Delta x=(2x-3)\Delta x$

(1) $x=1$, $\Delta x=1$ 时, $\Delta y=0$, $dy=-1$

(2) $x=1$, $\Delta x=0.1$ 时, $\Delta y=-0.09$, $dy=-0.1$

(3) $x=1$, $\Delta x=0.01$ 时, $\Delta y=-0.0099$, $dy=-0.01$

所以, 当 $\Delta x$ 愈小时, 二者愈近似.





十、求下列函数的微分:

1. $y=\ln\sqrt{1-x^3}$.

$dy=\frac{3x^2}{2(x^3-1)}dx$

2. $y=e^{-x}\cos x$.

$dy=-e^{-x}(\sin x+\cos x)dx$

3. $y=\arcsin\sqrt{x}$.

$dy=\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}dx$

4. $y=\tan^2(1+x^2)$.

$dy=4x\tan(1+x^2)\sec^2(1+x^2)dx$

十一、求下列各式的近似值:

1. $\sqrt[3]{8.02}$.

解 利用 $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{x}{3}$ (|x|很小) 取 $x=\frac{0.02}{8}=0.0025$

$\sqrt[3]{8.02}=\sqrt[3]{8+0.02}=2(\sqrt[3]{1+0.0025})\approx 2(1+\frac{1}{3}\times 0.0025)$

$\approx 2.00167$

2. $\arctan 1.02$.

解 令 $f(x)=\arctan x$, $x_0=1$, $\Delta x=0.02$

$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

$\arctan 1.02=\arctan(1+0.02)\approx f(1)+f'(1)\Delta x$

$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\times 0.02\approx 0.79$

$\approx 45°34'25''$

## §3.1 中值定理　　§3.2 洛必达法则

一、选择题：

1. 使 $f(x)=\sqrt[3]{x^2(1-x^2)}$ 满足罗尔定理条件的区间是（ A ）。

A. $[0,1]$　　B. $[-1,1]$　　C. $[-2,2]$　　D. $\left[-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right]$

2. 下列极限存在且能使用洛必达法则的是（ D ）。

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=1$　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$　　C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$　　D. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}$　2

二、设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$，证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$。

分析 结论 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$

即 $[xf(x)]'|_{x=\xi}=0$

证 令 $F(x)=xf(x)$，

则 $F(x)\in C[0,1]$

$F(x)\in D(0,1)$

$F(0)=0$，$F(1)=f(1)=0$

由 Rolle 定理，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使

$F'(\xi)=0$ 即 $f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$

三、设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且 $f(0)=f(2)=0$，$f(1)=2$，试证，在 $(0,2)$ 内存在一点 $\xi$，使得 $f'(\xi)=1$。

分析 结论 $f'(\xi)-1=0$

$[f'(x)-1]|_{x=\xi}=0$

$(f(x)-x)'|_{x=\xi}=0$

令 $F(x)=f(x)-x$

证 令 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)\in C[0,2]$

$F(x)\in D(0,2)$

$F(0)=0$，$F(1)=f(1)-1=1$，$F(2)=f(2)-2=-2$。

因 $F(0)\neq F(2)$，所以 $F(x)$ 不能在 $[0,2]$ 上用 Rolle 定理

而 $F(1)\cdot F(2)<0$，故由零点定理，存在 $x_0\in(1,2)$，使

$F(x_0)=0$，于是对 $F(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上用 Rolle 定理

四、证明：当 $x\geq1$ 时，有 $\arctan x+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$。

证 令 $f(x)=\arctan x+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$，

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\frac{2(1+x^2)-2x\cdot2x}{(1+x^2)^2}=0\quad(x>1)$$

所以 $x>1$ 时，$f(x)=C$（常数），由连续性知

$C=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)=\arctan1+\frac{1}{2}\arcsin1=\frac{\pi}{2}$

从而 $x\geq1$ 时，$\arctan x+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$





五、证明：对任意的实数 $x_1,x_2$，恒有 $|\sin x_1-\sin x_2|\leq|x_1-x_2|$。

证 若 $x_1=x_2$，结论显然成立

若 $x_1\neq x_2$，不妨设 $x_2<x_1$，则对 $\sin x$ 在 $[x_2,x_1]$

上用 Lagrange 中值定理

$|\sin x_1-\sin x_2|=|\cos\xi(x_1-x_2)|\leq|x_1-x_2|$，$\xi\in(x_2,x_1)$

六、证明：当 $a>b>0$ 时，$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$。

证 令 $f(x)=\ln x$，$f(x)$ 在 $[b,a]$ 上满足 Lagrange 定理条件，

从而至少存在一点 $\xi\in(b,a)$，使 $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=f'(\xi)=\frac{1}{\xi}$

因 $a>\xi>b>0$，所以 $\frac{1}{a}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{b}$，即

$\frac{1}{a}<\frac{\ln a-\ln b}{a-b}<\frac{1}{b}$

从而有 $\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$

七、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导，且 $f(a)=f(b)=1$，试证明存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$。

结论 $e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]=e^{\xi}$

$(e^x f(x))'|_{x=\eta}$

令 $F(x)=e^x f(x)$ 在 $[a,b]$ 上用 Lagrange 中值定理

$\frac{e^b f(b)-e^a f(a)}{b-a}=e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]$　$(a<\eta<b)$

又 $f(b)=f(a)=1$ 即 $\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]$

再对 $e^x$ 在 $[a,b]$ 上用 Lagrange 中值定理

$\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^{\xi}$　$a<\xi<b$

$\therefore e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]=e^{\xi}$

八、求下列极限：

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\sin x}$.　$[\frac{0}{0}]$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2(1+x)}=\dfrac{1}{2}$.

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^2(e^x-1)}$.　$[\frac{0}{0}]$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{6}$.

3. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\tan7x}{\ln\tan2x}$.　$[\frac{\infty}{\infty}]$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{\tan7x}\cdot\sec^27x\cdot7}{\frac{1}{\tan2x}\cdot\sec^22x\cdot2}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\tan2x}{\tan7x}\cdot\dfrac{\sec^27x}{\sec^22x}\cdot\dfrac{7}{2}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x}{7x}\cdot\dfrac{\sec^27x}{\sec^22x}\cdot\dfrac{7}{2}=1$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{\ln x}$.　$[\frac{\infty}{\infty}]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}\cdot\frac{-1}{1+x^2}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x}{1+x^2}}{\arctan x-\frac{\pi}{2}}\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}}{\frac{1}{1+x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=-1$.

5. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.　$(\infty-\infty)$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\ln x}{x\ln x+x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x+1}{\ln x+2}=\dfrac{1}{2}$.

另解 6. 令 $t=\ln(1+\frac{1}{x})$，$1+\frac{1}{x}=e^t$，$x=\dfrac{1}{e^t-1}$，$x\to\infty$，$t\to0$

原式 $=\lim\limits_{t\to0}\left[\dfrac{1}{e^t-1}-\dfrac{t}{(e^t-1)^2}\right]$ $(\infty-\infty]$

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{e^t-1-t}{(e^t-1)^2}\ (\frac{0}{0})=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{e^t-1}{2(e^t-1)\cdot e^t}=\dfrac{1}{2}$.





6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.　$(\infty-\infty)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}\ \overset{令y=\frac{1}{x}}{\underset{x\to\infty,\ y\to0}{=}}\ \lim\limits_{y\to0}\dfrac{y-\ln(1+y)}{y^2}\ [\frac{0}{0}]=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{1-\frac{1}{1+y}}{2y}$

$=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{1}{2(1+y)}=\dfrac{1}{2}$

7. $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$.　$[0\cdot\infty]$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{2}}\cdot\sin\dfrac{\pi x}{2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-1}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to1}\sin\dfrac{\pi x}{2}$

$=\dfrac{2}{\pi}$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right]$.　$[\infty\cdot0]$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+\frac{1}{x})^x-e}{\frac{1}{x}}\ \overset{令t=\frac{1}{x}}{=}\ \lim\limits_{t\to0}\dfrac{(1+t)^{\frac{1}{t}}-e}{t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)}-e}{t}$

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)}\cdot\frac{\frac{t}{1+t}-\ln(1+t)}{t^2}}{1}=\lim\limits_{t\to0}e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)}\cdot\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t-(1+t)\ln(1+t)}{t^2(1+t)}$

$=e\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1-\ln(1+t)-1}{2t+3t^2}=-e\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln(1+t)}{2t+3t^2}=-e\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t}{2t+3t^2}=-\dfrac{e}{2}$

9. $\lim\limits_{x\to0}(1+xe^x)^{\frac{1}{x}}$.

$=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln(1+xe^x)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+xe^x)}{x}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{xe^x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}e^x}=e$

10. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$.

$=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$

$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{1}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}=e^0=1$.

8. 另解.

$\lim\limits_{x\to\infty}x\left[e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}-e\right]$

$=\lim\limits_{x\to\infty}xe\left[e^{x\ln(1+\frac{1}{x})-1}-1\right]$

$=e\lim\limits_{x\to\infty}x\left[x\ln(1+\frac{1}{x})-1\right]$

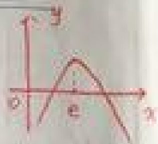
$\overset{令\frac{1}{x}=t}{=}e\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\ln(1+\frac{1}{x})-1}{\frac{1}{x}}$

$=e\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\frac{\ln(1+t)}{t}-1}{t}$

$=e\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln(1+t)-t}{t^2}$

$\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}=0$

当 $0<x<e$, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调增



## §3.3 泰勒公式　§3.4 函数单调性和曲线的凹凸性

当 $x>e$, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调减

而 $f(e)=k>0$, $f(x)$ 在 $(0,e)$ 有一个零点 在 $(e,+\infty)$ 内有一个零点

一、选择填空题.

1. $f(x)=(2-x)^4$ 的 3 阶麦克劳林展开式的余项 $R_3(x)=$( A )(式中 $0<\theta<1$).

A. $x^4$　　B. $\frac{1}{4!}(\theta x)^4$　　C. $\frac{-1}{4!}(\theta x)^4$　　D. $-x^4$

2. $y=2^x$ 的麦克劳林公式中 $x^n$ 项的系数是 $(\ln 2)^n/n!$.

3. 设常数 $k>0$, 函数 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内零点的个数为( B ).

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln x-\frac{x}{e}+k\right]$

$=\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{e}\right]$ $+\infty$ $-\frac{1}{e}$

4. 曲线 $y=x^3-x^2$ ( C ).　$y'=3x^2-2x$, $y''=6x-2=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$

A. 没有拐点　　B. 有两个拐点

C. 有一个拐点　　D. 有三个拐点

二、按 $x-4$ 的幂展开多项式 $f(x)=x^4-5x^3-x^2+4$.

$f(x)=f(4)+f'(4)(x-4)+\frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(4)}{n!}(x-4)^n+R_n(x)$

$f'(x)=4x^3-15x^2-2x$, $f''(x)=12x^2-30x-2$, $f'''(x)=24x-30$, $f^{(4)}(x)=24$.

$n\geq5$, $f^{(n)}=0$,

又 $f(4)=-76$, $f'(4)=8$, $f''(4)=70$, $f'''(4)=66$, $f^{(4)}(4)=24$, $\cdots f^{(n)}(4)=0$ $(n\geq5)$

$R_n(x)=0$.

故 $f(x)=-76+8(x-4)+35(x-4)^2+11(x-4)^3+(x-4)^4$.

三、求函数 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ 在 $x=0$ 处带拉格朗日型余项的 $n$ 阶泰勒展开式.

$f(x)=\frac{2}{1+x}-1$, $f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^k\,2\cdot k!}{(1+x)^{k+1}}$, $(k=1,2,\cdots,n+1)$.

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$

$=1-2x+2x^2-\cdots+(-1)^n2x^n+(-1)^{n+1}\frac{2x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}}$ $(0<\theta<1)$

$=e\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}$

$=e\lim_{t\to0}\frac{-t}{2t(1+t)}$

$=-\frac{e}{2}$





四、利用泰勒公式求下列极限.　$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x)$

1. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3})$.

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}-\sqrt[4]{1-\frac{2}{x}}}{\frac{1}{x}}\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt[3]{1+3t}-\sqrt[4]{1-2t}}{t}$

$=\lim_{t\to0^+}\frac{[1+\frac{1}{3}(3t)+o(t)]-[1+\frac{1}{4}(-2t)+o(t)]}{t}$

$=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{3}{2}t+o(t)}{t}=\frac{3}{2}$

2. $\lim_{x\to0}\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\ln\frac{2+x}{2-x}\right)$.　$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x)$

$=\lim_{x\to0}\left\{1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\left[\ln(1+\frac{x}{2})-\ln(1-\frac{x}{2})\right]\right\}$

$=\lim_{x\to0}\left\{1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}(\frac{x}{2})^2+\frac{1}{3}(\frac{x}{2})^3+o(x^3)\right)-\left(-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}(-\frac{x}{2})^2+\frac{1}{3}(-\frac{x}{2})^3+o(x^3)\right)\right\}$

$=\lim_{x\to0}\left\{1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{24}x^3+\frac{x}{2}+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{24}x^3+o(x^3)\right)\right\}$

$=\lim_{x\to0}\left\{1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\left(x+\frac{1}{12}x^3+o(x^3)\right)\right\}$

$=\lim_{x\to0}\left[1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{12}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right]=\frac{11}{12}$.

3. $\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$.

$=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2!}\times\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})x^4+o(x^4))}{[(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2))-(1+x^2+o(x^2))]x^2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{8}x^4+o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4+o(x^4)}=-\frac{1}{12}$

$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x)$

$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+R_{2m+1}(x)$

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$

五、求函数 $y=x^3-3x^2-9x+6$ 的单调区间.

解. $y'=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)=3(x-3)(x+1)$

令 $y'=0$ 得驻点 $x_1=-1,\ x_2=3$.

| $x$ | $(-\infty,-1)$ | $-1$ | $(-1,3)$ | $3$ | $(3,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | ↗ | | ↘ | | ↗ |

单调递增区间: $(-\infty,-1)$ 和 $(3,+\infty)$

单调递减区间: $(-1,3)$

六、证明下列不等式:

1. 当 $x>0$ 时, $1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$.

证 令 $f(x)=1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}$,

$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}>0 \quad (x>0)$

因 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, 故 $f(x)$ 在 $x>0$ 时单调增加

且 $f(0)=0$ 故 $x>0$ 时 $f(x)>f(0)$

即 $1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}>0 \quad \therefore 1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$

2. 当 $0<a<b<\pi$ 时, $b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a$.

证. 令 $f(x)=x\sin x+2\cos x+\pi x$, $x\in[0,\pi]$, $x\cdot$

$f'(x)=\sin x+x\cos x-2\sin x+\pi = x\cos x-\sin x+\pi$,

$f''(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x<0$, $x\in(0,\pi)$.

则 $f'(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调减少 从而 $f'(x)>f'(\pi)=0$

即 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调增加 从而 $0<a<b<\pi$ 时,

$f(a)<f(b)$, 即 $b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a$.

七、求函数 $y=x+\frac{x}{x^2-1}$ 的凹凸区间及拐点.

解. 定义域 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

$y'=1+\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$　$y''=\frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}$　令 $y''=0$ 得 $x=0$



| $x$ | $(-\infty,-1)$ | $-1$ | $(-1,0)$ | $0$ | $(0,1)$ | $1$ | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | $-$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $+$ |
| $y$ | ∩ | 无 | ∪ | $0$ | ∩ | 无 | ∪ |

所以凹区间是 $(-1,0)$ 和 $(1,+\infty)$

凸区间是 $(-\infty,-1)$ 和 $(0,1)$

拐点 $(0,0)$

八、已知点 $(1,3)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点, 求 $a$, $b$ 的值.

解. $y'=3ax^2+2bx$, $y''=6ax+2b$,

由于 $(1,3)$ 为曲线拐点, 所以 $y''(1)=6a+2b=0$.

又 $(1,3)$ 在曲线上, 所以 $y(1)=a+b=3$.

从而 $a=-\frac{3}{2}$, $b=\frac{9}{2}$.

九、利用函数图形的凹凸性证明不等式:

$$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}\ (x>0,y>0,x\neq y).$$

证. 令 $f(t)=t\ln t$,

$f'(t)=\ln t+1$,

$f''(t)=\frac{1}{t}$.

在 $(0,+\infty)$ 内, $f''(t)>0$, 故 $f(t)$ 图形是凹的.

因此, 对任意 $x,y\in(0,+\infty)$,

$x\neq y$ 时有 $f\left(\frac{x+y}{2}\right)<\frac{f(x)+f(y)}{2}$

即 $\frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2}<\frac{x\ln x+y\ln y}{2}$,

$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}$

3. 由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=-2<0$ 由保号性知在 $x=0$ 某去心邻域 $\frac{f(x)}{x^2}<0$，即 $f(x)<0=f(0)$

由定义知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值.

## §3.5 函数的极值与最值 §3.6 函数图形的描绘

又 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=-2$ 知 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}\cdot x=-2\cdot0=0$

$\therefore x=0$ 是驻点.

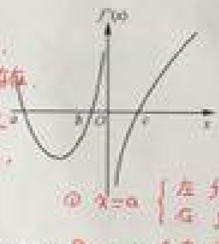
一、选择题.

1. 若函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取得极大值，则必有( D ).

A. $f'(a)=0$　　B. $f'(a)=0$ 且 $f''(a)<0$

C. $f''(a)<0$　　D. $f'(a)=0$ 或 $f(x)$ 在 $x=a$ 处不可导

2. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导数 $f'(x)$ 的图形如右图所示，则 $f(x)$ 有( C ).




由 $f'(a)=0, f'(b)=0$,
$f'(c)=0$, $f'(0)$ 不存在,
知 $f(x)$ 有三个驻点 $x=a$, $x=b$, $x=c$,
一个不可导点 $x=0$.

A. 一个极小值点和两个极大值点

B. 两个极小值点和一个极大值点

C. 两个极小值点和两个极大值点

D. 三个极小值点和一个极大值点

① $x=a$ $\begin{cases}左\ f'(x)>0\\右\ f'(x)<0\end{cases}\Rightarrow x=a$ 极大值点

② $x=b$ $\begin{cases}左\ f'(x)<0\\右\ f'(x)>0\end{cases}\Rightarrow x=b$ 极小值点

③ $x=c$ $\begin{cases}左\ f'(x)<0\\右\ f'(x)>0\end{cases}\Rightarrow x=c$ 极小值点

④ $x=0$ $\begin{cases}左\ f'(x)>0\\右\ f'(x)<0\end{cases}\Rightarrow x=0$ 极大值点.

3. 设 $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=-2$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的( B ).

A. 驻点但非极值点　　B. 驻点且为极大值点

C. 驻点且为极小值点　　D. 不可导的极值点

4. 曲线 $y=x\sin\frac{1}{x}$ ( A ).

$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=1$ 水平 $y=1$

$\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$

A. 只有水平渐近线　　B. 既有水平渐近线，又有垂直渐近线

C. 只有垂直渐近线　　D. 既无水平渐近线，又无垂直渐近线

二、1. 求函数 $y=\frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$ 的极值.

解 定义域 $(-\infty,+\infty)$, $y'=\frac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$. 驻点 $x=-2$, $x=0$

| $x$ | $(-\infty,-2)$ | $-2$ | $(-2,0)$ | $0$ | $(0,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $y$ | ↘ | 极小值 | ↗ | 极大值 | ↘ |

函数在 $x=-2$ 处取极小值 $\frac{8}{3}$

在 $x=0$ 处取极大值 4.

2. 求 $y=e^{-x^2}$ 的极值.

解. 定义域 $(-\infty,+\infty)$, $y'=-2xe^{-x^2}$. 令 $y'=0$, 驻点 $x=0$.

$y''=2(2x^2-1)e^{-x^2}$,

$y''(0)=-2<0$,

所以 $y(0)=1$ 为函数极大值





三、设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 所确定，求 $y=y(x)$ 的驻点，并判断是否为极值点.

解. 方程两边对 $x$ 求导 $6y^2\cdot y'-4y\cdot y'+2xy'+2y-2x=0$ (*)

令 $y'=0$. 得 $y=x$ 代入原方程 $x=1$, $y=1$.

再对(*)式两边对 $x$ 求导.

$(3y^2-2y+x)y''+(6y-2)(y')^2+2y'-1=0$

将 $x=1, y=1, y'=0$ 代入上式得 $y''(1)=\frac{1}{2}>0$, 故

$x=1$ 是函数 $y=y(x)$ 极小值点.

四、设 $y=y(x)$ 是由 $\begin{cases}x=t^3+3t+1,\\y=t^3-3t+1\end{cases}$ 确定的函数，求 $y=y(x)$ 的极值、凹凸区间和拐点.

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{3t^2-3}{3t^2+3}=\frac{t^2-1}{t^2+1}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)\frac{dt}{dx}=\frac{4t}{3(t^2+1)^3}$

令 $\frac{dy}{dx}=0$ 得 $t_1=1$, $t_2=-1$, 此时 $x_1=5$, $x_2=-3$

由于 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x_1=5}=\frac{1}{6}>0$, 故 $y=y(x)$ 在 $x=5$ 处取极小值 $y(5)=-1$.

由于 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x_2=-3}=-\frac{1}{6}<0$, 故 $y=y(x)$ 在 $x_2=-3$ 处取极大值 $y(-3)=3$.

令 $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, 得 $t=0$, 此时 $x=1$, 又 $x'(t)=3t^2+3>0$, $\therefore x(t)$ 是 $t$ 的增函数

$x<1$ 时 $t<0$, 从而 $\frac{d^2y}{dx^2}<0$; $x>1$ 时 $t>0$, 从而 $\frac{d^2y}{dx^2}>0$. $y=y(x)$ 凸区间 $(-\infty,1]$, 凹区间 $[1,+\infty)$

$(1,1)$ 为拐点

五、在平面上通过点 $P(4,9)$ 作一直线，使它在两坐标轴上的截距为正，且其和最小，求该直线的方程。

解：设过 $P(4,9)$ 直线方程 $y=kx+b$，由于过 $P(4,9)$，$\therefore b=9-4k$

其方程 $y=kx+(9-4k)$，

它在 $x$，$y$ 轴上截距分别为 $\frac{4k-9}{k}$，$9-4k$，

所求问题转化为求函数 $f(k)=9-4k+\frac{4k-9}{k}$ 在 $(-\infty,0)$ 内的最小值。

令 $f'(k)=-4+\frac{9}{k^2}=0$，得 $k=-\frac{3}{2}$。

由于 $f''(k)=-18k^{-3}>0\ (k<0)$，且 $f(k)$ 在 $(-\infty,0)$ 内只有一个驻点，因此，$f(k)$ 在 $k=-\frac{3}{2}$ 取最小值。

此时直线方程为 $y=-\frac{3}{2}x+15$。

六、在半径为 $a$ 的球中，求体积最大的内接圆锥。

解：设内接圆锥底圆半径 $r$，高 $h>r$。

$h=a+\sqrt{a^2-r^2}$

$V=\frac{\pi r^2}{3}\left(a+\sqrt{a^2-r^2}\right)\quad (r\in(0,a))$

令 $V'=\frac{\pi}{3}\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\left(2a\sqrt{a^2-r^2}+2a^2-3r^2\right)=0$ 得 $r_0=\frac{2\sqrt{2}}{3}a$。

根据实际意义 $V(r)$ 有最大值，且在 $(0,a)$ 内只有一个驻点，因此 $V$ 在该点取得最大值

$V(r_0)=\frac{32}{81}\pi a^3$。



七、作出函数 $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+3x-1$ 的图形。

八、作出函数 $y=\frac{1}{x}+4x^2$ 的图形。

## §4.1 不定积分的概念和性质 §4.2 换元积分法

一、填空题：

1. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\frac{1}{x}$，则 $f'(x)=$ $\frac{2}{x^3}$.　$f(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'$

2. 不定积分 $\int d(\arctan x)=$ $\arctan x+C$

3. 若 $\int f(x)dx=x^2e^{2x}+C$，则 $f(x)=$ $2x(1+x)e^{2x}$　$f(x)=(x^2e^{2x})'$

4. 设 $f(x)$ 的一个原函数是 $e^{x^2}$，则 $\int f'(x)dx=$ $2xe^{x^2}+C$.

二、求下列不定积分：　$\int f'(x)dx=f(x)+C$

1. $\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}dx$.

$=\int \frac{1-2x+x^2}{x^{\frac{1}{2}}}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}dx-2\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int x^{\frac{3}{2}}dx$

$=2x^{\frac{1}{2}}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$

2. $\int\left(\frac{3}{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$.

$=3\int\frac{1}{1+x^2}dx-\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$=3\arctan x-\arcsin x+C$

3. $\int\frac{4-x^4}{1+x^2}dx$.

$=\int\frac{3+(1-x^4)}{1+x^2}dx=3\int\frac{dx}{1+x^2}+\int\frac{(1-x^2)(1+x^2)}{1+x^2}dx$

$=3\arctan x+\int(1-x^2)dx=3\arctan x+x-\frac{1}{3}x^3+C$

4. $\int\frac{2\cdot 3^x-5\cdot 2^x}{3^x}dx$.

$=\int 2dx-5\int\left(\frac{2}{3}\right)^x dx$

$=2x-\frac{5}{\ln 2-\ln 3}\left(\frac{2}{3}\right)^x+C$

5. $\int\frac{x^2}{(x+4)^3}dx$.　令 $t=x+4$，$dt=dx$

$=\int\frac{(t-4)^2}{t^3}dt=\int\frac{t^2-8t+16}{t^3}dt$

$=\int\frac{1}{t}dt-8\int\frac{1}{t^2}dt+16\int t^{-3}dt$

$=\ln|x+4|+\frac{8}{x+4}-\frac{8}{(x+4)^2}+C$





6. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}}$

$=-\frac{1}{3}\int(2-3x)^{-\frac{1}{3}}d(2-3x)$

$=-\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}(2-3x)^{\frac{2}{3}}+C=-\frac{1}{2}\sqrt[3]{(2-3x)^2}+C$

三、一曲线通过点 $(e^2,3)$，且在任一点处的切线斜率等于该点横坐标的倒数，求此曲线的方程.

解　设曲线方程 $y=f(x)$

$y'=\frac{1}{x}$　∴ $y=\ln|x|+C$

又曲线过点 $(e^2,3)$　$3=\ln e^2+C\Rightarrow C=1$

∴所求曲线 $y=\ln|x|+1$

四、证明：函数 $\arcsin(2x-1)$，$\arccos(1-2x)$ 和 $2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ 都是 $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ 的原函数.

证　(1) $[\arcsin(2x-1)]'=\frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$

(2) $[\arccos(1-2x)]'=-\frac{-2}{\sqrt{1-(1-2x)^2}}=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$

(3) $\left(2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)'=2\cdot\frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1-x}}}\cdot\frac{1-x+x}{(1-x)^2}=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$

五、设 $f'(\tan^2 x)=\sec^2 x$，$f(0)=1$，求 $f(x)$.

$f'(\tan^2x)=\tan^2x+1$

令 $t=\tan^2x$

∴ $f'(t)=t+1$

$f(t)=\int(t+1)dt=\frac{t^2}{2}+t+C$

由 $f(0)=1\Rightarrow C=1$

∴ $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+1$

## §4.2　换元积分法(续)

一、填空题：

$(\lambda^2 \neq 0, a\neq 0)$

设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则有

(1) $\int f(ax+b)\mathrm{d}x=$ $\frac{1}{a}F(ax+b)+C$；　(2) $\int f(ax^3+b)x^2\mathrm{d}x=$ $\frac{1}{3a}F(ax^3+b)+C$ $(a\neq 0)$；

(3) $\int f\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=$ $-F(\frac{1}{x})+C$；　(4) $\int \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$ $2F(\sqrt{x})+C$；

(5) $\int \frac{f(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=$ $F(\ln x)+C$；　(6) $\int f(e^x)e^x\mathrm{d}x=$ $F(e^x)+C$；

(7) $\int f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x=$ $F(\sin x)+C$；　(8) $\int f(\tan x)\sec^2 x\mathrm{d}x=$ $F(\tan x)+C$；

(9) $\int f(\cot x)\csc^2 x\mathrm{d}x=$ $-F(\cot x)+C$；　(10) $\int \frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=$ $F(\arcsin x)+C$；

(11) $\int \frac{f(\arctan x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=$ $F(\arctan x)+C$；　(12) $\int (1+\ln x)f(x\ln x)\mathrm{d}x=$ $F(x\ln x)+C$；

(13) $\int \frac{xf(\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=$ $-F(\sqrt{1-x^2})+C$

二、求下列不定积分：

1. $\int \sqrt[3]{(1-2x)^2}\,\mathrm{d}x$.

$= -\frac{1}{2}\int (1-2x)^{\frac{2}{3}}\,d(1-2x)$

$= -\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}(1-2x)^{\frac{5}{3}}+C = -\frac{3}{10}(1-2x)^{\frac{5}{3}}+C$

2. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$.

$= 2\int \frac{d\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2} = 2\arctan\sqrt{x}+C$

3. $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin x-\cos x}}\mathrm{d}x$.

$= \int \frac{d(\sin x-\cos x)}{\sqrt{\sin x-\cos x}}$

$= 2\sqrt{\sin x-\cos x}+C$

4. $\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}$.

$= \int \frac{e^x}{1+(e^x)^2}dx = \int \frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2}$

$= \arctan e^x + C$

5. $\int \frac{\ln(\tan x)}{\cos x\sin x}\mathrm{d}x$.

$= \int \frac{\ln(\tan x)}{\tan x\cdot\cos^2 x}dx = \int \frac{\ln\tan x}{\tan x}d\tan x$

$= \int \ln\tan x\, d\ln\tan x = \frac{1}{2}(\ln\tan x)^2+C$

6. $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}\mathrm{d}x$.

$= \int \frac{d(x\ln x)}{(x\ln x)^2} = -\frac{1}{x\ln x}+C$

7. $\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

$= \int e^{\arcsin x}\,d\arcsin x$

$= e^{\arcsin x}+C$

8. $\int \sin 5x\cos 7x\mathrm{d}x$.

$= \frac{1}{2}\int(\sin 12x - \sin 2x)dx$

$= \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{24}\cos 12x + C$

9. $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x$.

$= \int \frac{\sin x\, d\sin x}{1+(\sin^2 x)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(\sin x)^2}{1+(\sin^2 x)^2} = \frac{1}{2}\arctan(\sin^2 x)+C$

10. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$.

$= \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,d(1+x^2)$

$= \sqrt{1+x^2}+C$

## §4.3 分部积分法　　§4.4 有理函数的积分

一、求下列不定积分：

1. $\int \ln(1-x)\,dx$.

$= x\ln(1-x)+\int \frac{x}{1-x}dx = x\ln(1-x)-\int\frac{1-x-1}{1-x}dx$

$= x\ln(1-x)-\int dx+\int\frac{1}{1-x}dx$

$= x\ln(1-x)-x-\ln|1-x|+C$

2. $\int x\tan^2 x\,dx$.

$= \int x(\sec^2x-1)\,dx$

$= \int x\sec^2x\,dx-\int x\,dx = \int x\,d\tan x-\frac{x^2}{2}$

$= x\tan x-\int\tan x\,dx-\frac{x^2}{2} = x\tan x+\ln|\cos x|-\frac{1}{2}x^2+C$

3. $\int xe^{1+x}\,dx$.

$\int x\,de^{1+x}$

$xe^{1+x}-\int e^{1+x}dx = xe^{1+x}-e^{1+x}+C$

4. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$. 令 $\sqrt{x}=t$, $x=t^2$, $dx=2t\,dt$

$= \int e^t\,2t\,dt = 2\int te^t\,dt$

$= 2\int t\,de^t = 2te^t-2\int e^t\,dt$

$= 2te^t-2e^t+C = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$

5. $\int \frac{x^2\arctan x}{1+x^2}dx$. $= \int\frac{(1+x^2)\arctan x-\arctan x}{1+x^2}dx$

$= \int\arctan x\,dx-\int\arctan x\,d\arctan x$

$= x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}dx-\frac{1}{2}(\arctan x)^2 = x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

$-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C$

6. $\int\frac{dx}{(x-1)^2(x^2+1)}$.

设 $\frac{dx}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$ $\Rightarrow A=-\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{2}$, $C=\frac{1}{2}$, $D=0$

原式 $= -\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{4}\ln(1+x^2)+C$

7. $\int\frac{dx}{x(x^4+1)}$.

$= \int\frac{x^3\,dx}{x^4(x^4+1)} = \frac{1}{4}\int\frac{dx^4}{x^4(x^4+1)} = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^4+1}\right)dx^4$

$= \frac{1}{4}\ln|x^4|-\frac{1}{4}\ln|x^4+1|+C$

$= \ln|x|-\frac{1}{4}\ln|x^4+1|+C$





8. $\int\frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$. $= \int\frac{2}{2+\cos x}dx-\int\frac{\sin x}{2+\cos x}dx = 2\int\frac{1}{1+2\cos^2\frac{x}{2}}dx+\int\frac{d(2+\cos x)}{2+\cos x}$

$= 2\int\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}(\sec^2\frac{x}{2}+1)}+\ln|2+\cos x| = 4\int\frac{d\tan\frac{x}{2}}{3+\tan^2\frac{x}{2}}+\ln|2+\cos x|$

$= \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+\ln|2+\cos x|+C$

9. $\int\frac{dx}{\sin x+\tan x}$. 令 $u=\tan\frac{x}{2}$, $x\in(-\pi,\pi)$, $\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$, $\tan x=\frac{2u}{1-u^2}$, $dx=\frac{2}{1+u^2}du$

$= \int\frac{\frac{2}{1+u^2}du}{\frac{2u}{1+u^2}+\frac{2u}{1-u^2}} = \frac{1}{2}\int\frac{1-u^2}{u}du = \frac{1}{2}\ln|u|-\frac{1}{4}u^2+C$

$= \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{4}\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2+C$

10. $\int\frac{dx}{2+\sin^2 x}$.

$= \int\frac{1}{\sin^2x(2\csc^2x+1)}dx = -\int\frac{d\cot x}{2\cot^2x+3} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\sqrt{2}\cot x}{(\sqrt{2}\cot x)^2+(\sqrt{3})^2}$

$= -\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\frac{\sqrt{2}\cot x}{\sqrt{3}}+C$

11. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^3}$. 令 $x=u^6$

$= \int\frac{6u^5\,du}{u^3(1+u^2)^3} = 6\int\frac{u^2}{(1+u^2)^3}du \xlongequal{t=1+u^2} 3\int\frac{t-1}{t^3}dt$

$= 3\int(t^{-2}-t^{-3})\,dt = \ldots = -\frac{3}{1+\sqrt[3]{x}}+\frac{3}{2(1+\sqrt[3]{x})^2}+C$

12. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

$= \int\frac{1}{(x-1)(x+1)}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$　令 $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=t$, $x=\frac{t^3+1}{t^3-1}$, $dx=\frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}$

$= -\frac{3}{2}\int dt = -\frac{3}{2}t+C = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C$

二、已知$(1+\sin x)\ln x$是$f(x)$的一个原函数，求$\int xf'(2x)dx$.

由已知 $\int f(u)\,du=(1+\sin u)\ln u+C$

则 $f(x)=[(1+\sin x)\ln x]'=\cos x\ln x+\frac{1+\sin x}{x}$

$\int xf'(2x)\,dx=\frac{1}{4}\int x\,df(2x)$

$= \frac{1}{2}xf(2x)-\frac{1}{2}\int f(2x)\,dx = \frac{1}{2}xf(2x)-\frac{1}{4}\int f(2x)\,d(2x)$

$= \frac{1}{2}x\left[\cos 2x\ln 2x+\frac{1+\sin 2x}{2x}\right]-\frac{1}{4}(1+\sin 2x)\ln 2x+C$

$= \frac{1}{2}x\cos 2x\ln 2x+\frac{1}{4}(1+\sin 2x)-\frac{1}{4}(1+\sin 2x)\ln 2x+C$

$= \frac{1}{2}x\cos 2x\ln 2x+\frac{1}{4}(1+\sin 2x)(1-\ln 2x)+C$

班级　　　　　　学号　　　　　　姓名

## §5.1　定积分的概念与性质　　§5.2　微积分的基本公式

一、填空题：

1. 比较定积分 $\int_1^2 x^2 dx$ 与 $\int_1^2 x^3 dx$ 的大小为 $\int_1^2 x^2 dx < \int_1^2 x^3 dx$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值为 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

3. $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt=$ $2x\sqrt{1+x^4}$ ；$\frac{d}{dx}\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt=$ $\sin x\, e^{-\cos^2 x}$ ；

$\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\sqrt{1-t^2}dt=$ $\sqrt{1-\cos^2 x}\,(-\sin x)-\sqrt{1-\sin^2 x}\,\cos x = -\sin x|\sin x| - \cos x|\cos x|$

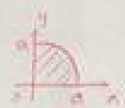
4. 设 $f(x)$ 为连续函数，且 $\int_0^{x^3-1} f(t)dt = x$，则 $f(8)=$ $\frac{1}{12}$

5. 设 $y=\int_0^x (t-1)(t-2)dt$，则 $y'(0)=$ $2$.

⑥ 积分上限函数 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\left(\frac{\sin t}{t}\right)' dt=$ $\frac{\sin x}{x}-\frac{2}{\pi}$.

二、利用定积分的几何意义计算：

1. $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx\ (a>0)$.



$=\frac{\pi}{4}a^2$

2. $\int_2^4 (x+1)dx$.

$=\frac{1}{2}(3+5)\times 2 = 8$

三、求下列极限：

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\cos t^2\,dt}{x^2}$ $\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\cdot\cos x^4}{2x} = 1$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}$ $\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)\cdot e^{x^2}}{xe^{2x^2}}$

$=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} 2\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}}{1} = 2$

班级　　　　　　学号　　　　　　姓名

四、设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续、单调增加，$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt$，证明：在 $(a,b)$ 内恒有 $F'(x)\geq 0$.

$F'(x)=\frac{f(x)\cdot(x-a)-\int_a^x f(t)dt}{(x-a)^2}$

积分中值定理 $\frac{f(x)(x-a)-f(\xi)(x-a)}{(x-a)^2}$　　$\xi\in[a,x]$.

$=\frac{f(x)-f(\xi)}{x-a}$　　由 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 单调增，故 $f(x)\geq f(\xi)$

从而 $F'(x)\geq 0$

五、计算下列各定积分：

1. $\int_1^8 \sqrt{x}(1-\sqrt[3]{x})dx$.

$=\int_1^8 (x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{5}{6}})dx = (\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{6}{11}x^{\frac{11}{6}})\Big|_1^8$

$=\cdots=\frac{113}{66}-\frac{48}{11}\sqrt[6]{8^5}=\frac{113}{66}-\frac{192}{11}\sqrt{2}$.

2. $\int_{-1}^2 f(x)dx$，其中 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\in[0,2],\\ x^2, & x\in[-1,0).\end{cases}$

$=\int_{-1}^0 x^2 dx+\int_0^2 (x+1)dx$

$=\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^0+(\frac{x^2}{2}+x)\Big|_0^2=\cdots=\frac{1}{3}+4=\frac{13}{3}$.

3. $\int_0^{2\pi}|\sin x|dx$.

$=\int_0^{\pi}\sin x\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}(-\sin x)dx$

$=\cdots=4$

4. $\int_1^4\frac{[x]}{x^2}dx$，其中 $[x]$ 表示实数 $x$ 的整数部分.

$=\int_1^2\frac{1}{x^2}dx+\int_2^3\frac{2}{x^2}dx+\int_3^4\frac{3}{x^2}dx$

$=-\frac{1}{x}\Big|_1^2-\frac{2}{x}\Big|_2^3-\frac{3}{x}\Big|_3^4$

$=\frac{13}{12}$.

# §5.3 定积分的换元法和分部积分法

一、填空题：

1. 定积分 $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^2dx}{1+x^2}=$ $2\int_0^{\pi}\frac{x^2}{1+x^2}dx=2\left[\int_0^{\pi}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx\right]=2\pi-2\arctan\pi$

2. 定积分 $\int_1^e \ln x dx=$ $x\ln x\Big|_1^e-\int_1^e dx=e-(e-1)=1$

3. $\int_{-1}^{1}(x+\sin x+1)\sqrt{1-x^2}dx=$ $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi}{2}$

4. 已知 $xe^x$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int_0^1 xf'(x)dx=$ $\int_0^1 x\,df(x)=xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x)dx$
$=f(1)-xe^x\Big|_0^1=f(1)-e=e$

二、计算下列各定积分：

1. $\int_1^{e}\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2x}}$. $=\int_1^e\frac{d\ln x}{\sqrt{1-\ln^2x}}=\arcsin(\ln x)\Big|_1^e$
$=\arcsin 1-\arcsin 0=\frac{\pi}{2}$.

2. $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3x-\sin^5x}dx$. $=\int_0^{\pi}\sin^{\frac{3}{2}}x\sqrt{1-\sin^2x}\,dx=\int_0^{\pi}\sin^{\frac{3}{2}}x\,|\cos x|\,dx$
$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}}x\cdot\cos x\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{\frac{3}{2}}x\cdot\cos x\,dx=\frac{4}{5}$.

3. $\int_{-1}^{1}\frac{x\ln(1+x^2)+1}{1+x^2}dx$. $=\int_{-1}^{1}\frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx+\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx$
$=0+2\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=2\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}$.

③ $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_0^a[f(x)+f(-x)]dx$.

4. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2x\,dx}{1+e^{-x}}$. $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2x}{1+e^{x}}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2x}{1+e^{-x}}dx$
$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2x\left[\frac{1}{1+e^{x}}+\frac{1}{1+e^{-x}}\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos2x}{2}dx$
$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\sin2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$.

5. $\int_0^{n\pi}\sqrt{1-\sin2x}dx(n\in\mathbf{N})$. $=\int_0^{n\pi}|\sin x-\cos x|dx=\int_0^{n\pi}\sqrt{2}\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|dx$
$\sqrt{2}n\int_0^{\pi}\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|dx\xlongequal{t=x-\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}n\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}|\sin t|\,dt=\sqrt{2}n\int_0^{\pi}\sin t\,dt$
$=2\sqrt{2}n$ ② $\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$, $\int_0^{nT}f(x)dx=n\int_0^T f(x)dx$
$f(x+T)=f(x)$
其中 $f(x)$ 为T为周期连续函数





6. $\int_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}dx$. $\xlongequal{令x=3\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}9\sin^2t\sqrt{9-9\sin^2t}\,d(3\sin t)$
$=81\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t\cdot\cos^2t\,dt=81\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2t-\sin^4t)dt$
$=81\left(\frac{1!!}{2!!}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{81}{2}\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\right)=\frac{81}{16}\pi$

7. $\int_0^{2\pi}x|\sin x|dx$.
$=\int_0^{\pi}x\sin x\,dx-\int_{\pi}^{2\pi}x\sin x\,dx=-\int_0^{\pi}x\,d\cos x+\int_{\pi}^{2\pi}x\,d\cos x$
$=-x\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\,dx+x\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}-\int_{\pi}^{2\pi}\cos x\,dx=4\pi$.

8. $\int_0^2 xe^x dx$. $=\int_0^2 x\,de^x=xe^x\Big|_0^2-\int_0^2e^xdx$
$=2e^2-(e^2-1)=e^2+1$

9. $\int_1^e\sin(\ln x)dx$. $\xlongequal{t=\ln x}\int_0^1\sin t\,de^t=e^t\sin t\Big|_0^1-\int_0^1e^t\cos t\,dt$
$=e\cdot\sin1-\int_0^1\cos t\,de^t=e\cdot\sin1-[\cos t\cdot e^t\Big|_0^1+\int_0^1e^t\sin t\,dt]$
$=e\cdot\sin1-e\cdot\cos1+1-\int_0^1\sin t\,de^t$ ∴原式 $=\frac{1}{2}[e\sin1-e\cos1+1]$

10. $\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}dx$. $\xlongequal{令t=\sqrt{x}}\int_0^{\pi}2t^2\cdot\cos t\,dt=\int_0^{\pi}2t^2\,d\sin t$
$=2t^2\sin t\Big|_0^{\pi}+4\int_0^{\pi}t\,d\cos t=4t\cos t\Big|_0^{\pi}-4\int_0^{\pi}\cos t\,dt$
$=-4\pi$.

三、1. 设 $f(x)$ 是连续函数，求证：$\int_0^{2a}f(x)dx=\int_0^a f(x)dx+\int_0^a f(2a-x)dx$，并求 $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}dx$.

对 $\int_0^a f(2a-x)dx\xlongequal{令t=2a-x}-\int_{2a}^{a}f(t)dt=\int_a^{2a}f(x)dx$
∴ $\int_0^a f(x)dx+\int_0^a f(2a-x)dx=\int_0^a f(x)dx+\int_a^{2a}f(x)dx$
$=\int_0^{2a}f(x)dx$

$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi\sin x}{1+\cos^2x}dx$
$=-\pi\arctan(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}$

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，且 $f(x)=\frac{x}{1+\cos^2x}+\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\,dx$，求 $f(x)$。

设 $f(x)=\frac{x}{1+\cos^2x}+a$，则 $f(x)\sin x=\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}+a\sin x$
故 $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}dx+\int_{-\pi}^{\pi}a\sin x\,dx$
即 $a=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}dx+0$ （奇偶性）
$=2\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}dx\xlongequal{由1的}\frac{\pi^2}{2}$.

班级　　　　学号　　　　姓名

# §5.4 反常积分　§6.1 定积分的元素法

一、填空题.

1. 反常积分 $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}d(-x^2) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$

2. 反常积分 $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln\sqrt{x})^2} = \int_e^{+\infty}\frac{4dx}{x(\ln x)^2} = 4\int_e^{+\infty}\frac{d\ln x}{(\ln x)^2} = -\frac{4}{\ln x}\Big|_e^{+\infty} = 4$

3. 反常积分 $\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}-\frac{1}{2}\int_0^{1-\varepsilon}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-x^2) = \lim_{\varepsilon\to0^+}-\sqrt{1-x^2}\Big|_0^{1-\varepsilon} = -\lim_{\varepsilon\to0^+}[\sqrt{1-(1-\varepsilon)^2}-1] = 1$

4. 反常积分 $\int_1^2\frac{x}{\sqrt{x-1}}dx = \frac{8}{3}$.

5. 曲线 $y=\sqrt{x}$ 与直线 $y=x$ 所围成的图形的面积为 $\int_0^1(\sqrt{x}-x)dx=\frac{1}{6}$. 一般地,由连续曲线 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 与直线 $x=a$, $x=b$ 所围成的图形的面积为 $\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$

二、判定下列反常积分的收敛性,若收敛,计算反常积分的值.

1. $\int_0^{+\infty}e^{-2x}\cos x\,dx = \int_0^{+\infty}e^{-2x}d\sin x = e^{-2x}\sin x\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}\sin x\cdot e^{-2x}dx$

$= 0-2\int_0^{+\infty}e^{-2x}d(\cos x) = -2e^{-2x}\cos x\Big|_0^{+\infty}-4\int_0^{+\infty}\cos x\cdot e^{-2x}dx$

$= 2-4\int_0^{+\infty}e^{-2x}\cos x\,dx$ 循环积分 $\therefore\int_0^{+\infty}e^{-2x}\cos x\,dx=\frac{2}{5}$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+6} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x+2)^2+(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+2}{\sqrt{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}[\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})] = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

3. $\int_0^1\frac{x\,dx}{1-x^2} = \lim_{\varepsilon\to0^+}[-\frac{1}{2}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{d(1-x^2)}{1-x^2}] = -\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to0^+}[\ln(1-x^2)\Big|_0^{1-\varepsilon}]$

$= -\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to0^+}\ln[1-(1-\varepsilon)^2] = \infty$ 发散

4. $\int_0^2\frac{x}{\sqrt{|1-x|}}dx = \underbrace{\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x}}dx}_{A}+\underbrace{\int_1^2\frac{x}{\sqrt{x-1}}dx}_{B} = \frac{4}{3}+\frac{8}{3}=4$

其中 $A=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x}}dx$ 令 $t=\sqrt{1-x}$, $x=1-t^2$, $dx=-2t\,dt$

$=-\int_1^0\frac{1-t^2}{t}\cdot t\,dt = 2\int_0^1(1-t^2)dt = \frac{4}{3}$

同理 $B=\int_1^2\frac{x}{\sqrt{x-1}}dx=\frac{8}{3}$



$f'(k) = \frac{-(\ln2)^{1-k}[(\ln\ln2)(k-1)+1]}{(k-1)^2} = \frac{-(\ln2)^{1-k}\cdot\ln\ln2[k-1\cdots]}{(k-1)^2}$

班级　　　　学号　　　　姓名

三、当 $k$ 为何值时,反常积分 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 收敛? 当 $k$ 为何值时,此反常积分发散? 又当 $k$ 为何值时,此反常积分取得最小值?

$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k} = \int_2^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{(\ln x)^k}$

(1) $k=1$ 时, $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k} = \lim_{x\to+\infty}[\ln\ln x-\ln\ln2] = +\infty$ 发散

(2) $k<1$ 时, $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k} = \frac{1}{1-k}\lim_{x\to+\infty}[(\ln x)^{1-k}-(\ln2)^{1-k}] = +\infty$ 发散

(3) $k>1$ 时, $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k} = \frac{1}{1-k}\lim_{x\to+\infty}[(\ln x)^{1-k}-(\ln2)^{1-k}] = \frac{1}{k-1}(\ln2)^{1-k}$ 收敛

当 $k>1$ 时, 令 $f(k)=\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k} = \frac{1}{k-1}(\ln2)^{1-k}$, 令 $f'(k)=0$ ⇒

得驻点 $k_0=1-\frac{1}{\ln\ln2}$, 当 $1<k<k_0$ 时, $f'(k)<0$, $k>k_0$ 时 $f'(k)>0$, 故 $k_0$ 处取得最小值

即 $k=1-\frac{1}{\ln(\ln2)}$ 时, $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^k}dx$ 取最小值

四、证明: $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\int_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{1+x^4}$, 并求 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}$.

证:(1) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4} \overset{令x=\frac{1}{t}}{=} \int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}dt$

$=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$.

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4} = \int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2\sqrt{2}}[\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})] = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$

五、计算 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$ $(\alpha\geq0)$. 利用(4)结论.

$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} \overset{令x=\frac{1}{t}}{=} \int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}dt$

$=\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx =$

$=\frac{1}{2}[\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}+\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}]$

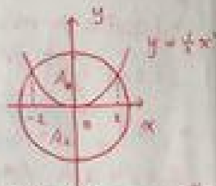
$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\arctan x\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$.

班级 学号 姓名

$\int_0^2 \sqrt{8-x^2}\,dx \xlongequal{令 x=2\sqrt{2}\sin t} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sqrt{2}\cos t \cdot 2\sqrt{2}\cos t\,dt = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$
$= \pi + 2$

## §6.2 定积分在几何学上的应用

一、求由下列各曲线所围成的图形的面积：



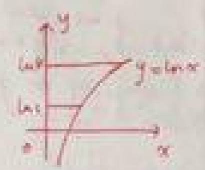

1. $y=\frac{1}{2}x^2$ 与 $x^2+y^2=8$（两部分都要计算）.

$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2 \\ x^2+y^2=8 \end{cases} \Rightarrow$ 交点 $(-2,2)$, $(2,2)$

$A_1=\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{1}{2}x^2\right)dx = 2\int_0^2 \left(\underbrace{\sqrt{8-x^2}}_{上面积分}-\frac{1}{2}x^2\right)dx = 2\pi+\frac{4}{3}$

$A_2 = 8\pi - A_1 = 6\pi - \frac{4}{3}$

2. $y=\ln x$ 与直线 $x=0, y=\ln 2, y=\ln 4$.




$A=\int_{\ln 2}^{\ln 4} |x|\,dy = \int_{\ln 2}^{\ln 4} e^y\,dy$

$= e^y\Big|_{\ln 2}^{\ln 4} = 2$

3. $\rho=2a\sin\theta\ (a>0)$. $\rho^2=2a\rho\sin\theta \Rightarrow x^2+y^2=2ay \Rightarrow x^2+(y-a)^2=a^2$


$A=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(2a\sin\theta)^2\,d\theta$

$=2a^2\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,d\theta$

$=2a^2\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \pi a^2$

4. $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t), 0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 与 $y=0$. （摆线一拱）


$A=\int_0^{2\pi a}|y|\,dx$

$\xlongequal[代入 y=a(1-\cos t)]{令 x=a(t-\sin t)} \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\,d[a(t-\sin t)]$

$=\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\,dt = a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt$

$=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt = a^2\int_0^{2\pi}\frac{3}{2}\,dt = 3\pi a^2$

班级 学号 姓名

二、由 $y=x^3, x=2, y=0$ 所围图形分别绕 $x$ 轴及 $y$ 轴旋转，计算所得两个旋转体的体积.

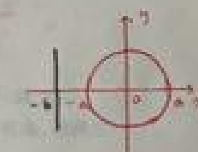

$V_x=\pi\int_0^2 y^2\,dx = \pi\int_0^2 x^6\,dx = \frac{\pi}{7}\cdot 2^7 = \frac{128}{7}\pi$

法1：$V_y=\pi\int_0^8 (x_2^2-x_1^2)\,dy = \pi\int_0^8 [4-(\sqrt[3]{y})^2]\,dy$

$=\pi\left[32-\frac{3}{5}\times 2^5\right]=\pi\left[32-\frac{3\times 32}{5}\right]=\frac{64}{5}\pi$

法2：$V_y=2\pi\int_0^2 x\cdot y\,dx = 2\pi\int_0^2 x^4\,dx = \frac{2}{5}\pi x^5\Big|_0^2 = \frac{64}{5}\pi$

三、求由圆盘 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 绕 $x=-b\ (b>a>0)$ 旋转所成旋转体的体积.




$V=\pi\int_{-a}^{a}\left[(b+\sqrt{a^2-y^2})^2-(b-\sqrt{a^2-y^2})^2\right]dy$

$=8\pi b\underbrace{\int_0^a\sqrt{a^2-y^2}\,dy}$ 定积分的几何意义

$=8\pi b\times\frac{\pi}{4}a^2$

$=2\pi^2a^2b$

四、由摆线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t), 0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 与 $y=0$ 所围成图形绕 $y=2a$ 旋转所成旋转体的体积.

$V=\pi\int_0^{2\pi a}\left[(2a)^2-(2a-y)^2\right]dx$

$\xlongequal[y=a(1-\cos t)]{令 x=a(t-\sin t)} 8\pi^2a^3-\pi\int_0^{2\pi}(2a-a+a\cos t)^2\,d\,a(t-\sin t)$

$=8\pi^2a^3-\pi\int_0^{2\pi}a^3[1+\cos t-\cos^2 t-\cos^3 t]\,dt$

$=7\pi^2a^3$

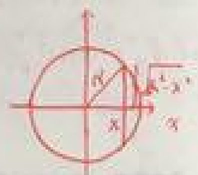
## §6.2 定积分在几何学上的应用(续)

一、计算底面是半径为 $R$ 的圆，而垂直于底面上一条固定直径的所有截面都是等边三角形的立体的体积.

$V=\int_{-R}^{R} A(x)\,dx$

$=\int_{-R}^{R}\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{R^2-x^2}\,dx$

$=\frac{4\sqrt{3}}{3}R^3$



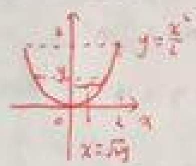


二、设一立体以抛物线 $x^2=2y$，直线 $y=2$ 所围图形为底，而垂直于 $y$ 轴的截面为等边三角形，求该立体的体积.

$V=\int_0^2 A(y)\,dy$

$=\int_0^2\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2y}\cdot\sqrt{3}\sqrt{2y}\,dy$

$=4\sqrt{3}$.





三、求曲线 $y=\ln\cos x\left(0\leqslant x\leqslant a<\frac{\pi}{2}\right)$ 的弧长.

$S=\int_0^a\sqrt{1+(y')^2}\,dx$

$=\int_0^a\sqrt{1+\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)^2}\,dx=\int_0^a\sqrt{1+\tan^2 x}\,dx$

$=\int_0^a\sec x\,dx=\ln|\sec x+\tan x|\Big|_0^a$

$=\ln|\sec a+\tan a|$

四、在摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ 上求分摆线第一拱成 3 : 1 的点的坐标.

设点 $M_0(x_0,y_0)$ 对应参数 $t_0$，$t_0\in[0,2\pi]$

则原点 O 到 $M_0$ 弧长.

$S(t_0)=\int_0^{t_0}\sqrt{[a(1-\cos t)]^2+(a\sin t)^2}\,dt$

$=a\int_0^{t_0}\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=2a\int_0^{t_0}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=4a\left(1-\cos\frac{t_0}{2}\right)$

取 $t_0=2\pi$，则摆线第一拱全长 $S(2\pi)=8a$.

由题设 $S(t_0)=\frac{3}{4}\cdot 8a=6a$ 即 $\cos\frac{t_0}{2}=-\frac{1}{2}$，$\frac{t_0}{2}=\frac{2}{3}\pi$.

$t_0=\frac{4}{3}\pi$.

从而 $x_0=a\left(\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$y_0=a\left(1-\cos\frac{4}{3}\pi\right)=\frac{3}{2}a$

五、求曲线 $\rho=1+\sin\theta$ 的全长. $M_0\left(a\left(\frac{4}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\frac{3}{2}a\right)$

$S=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1+\sin\theta)^2+[(1+\sin\theta)']^2}\,d\theta$

$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin\theta}\,d\theta$

$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta$

$=2\int_0^{2\pi}\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right|d\theta$

$=4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}|\sin t|\,dt$ $|\sin t|$ 以 $\pi$ 为周期

$4\int_0^{\pi}|\sin t|\,dt=8$

六、求曲线 $y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos t}\,dt$ 的长.

$S=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos x}\,dx$ 　 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos t}\,dt$

定义域 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos x}\,dx$

$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{x}{2}\,dx$

$=4\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=4.$

# 自测题一

## 一、选择题(每小题 3 分,共 15 分)

$f(x+2)=f(\underline{x+1}+1)=-f(x+1)=f(x)$

1. 若 $f(x+1)=-f(x)$,则( C ).

A. $f(x)$不一定是周期函数　　B. $f(x)$一定不是周期函数

C. $f(x)$是周期为 2 的周期函数　　D. $f(x)$是周期奇函数

2. 当 $x\to 0$ 时,下列四个无穷小量中阶数最高的是( D ).

A. $x$　　B. $\sin^2 x$ $\sim x^2$　　C. $\tan x^2$ $\sim x^2$　　D. $x^2-\sin x^2$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{\sin x^2}{x^2}\right)=1-1=0$

$\therefore x^2-\sin x^2=o(x^2)$

3. $x=0$ 是 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ 的( C ).

A. 连续点　　B. 可去间断点

C. 跳跃间断点　　D. 第二类间断点

$\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in \mathbb{N}^+$, 当 $n>N$, 有 $|a_n-a|<\varepsilon$

4. 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\neq 0$,则当 $n$ 充分大时,下列不等式正确的是( A ).

而 $||a_n|-|a||<|a_n-a|<\varepsilon$

$\therefore |a|-\varepsilon<|a_n|<|a|+\varepsilon$ 取 $\varepsilon=\frac{|a|}{2}$

A. $|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$　　B. $|a_n|<\dfrac{|a|}{2}$

反例 $a_n=\dfrac{a\cdot n-k}{n}$ ($k\geq 1$常数)

$a_n\to a$ ($n\to\infty$)

$a_n=\dfrac{a\cdot n-k}{n}\leq a-\frac{1}{n}$

C. $a_n>a-\dfrac{1}{n}$　　D. $a_n<a-\dfrac{1}{n}$

$a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$, C, D 错

5. 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调有界,$\{x_n\}$为数列,则下列说法正确的是( B ).

A. 若$\{x_n\}$收敛,则$\{f(x_n)\}$收敛　反例 $f(x)=\mathrm{sgn}(x)$, $x_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\to 0$, $\{f(x_n)\}$: $1,-1,1,-1,\cdots$

B. 若$\{x_n\}$单调,则$\{f(x_n)\}$收敛　因$\{x_n\}$单调,所以$f(x_n)$单调,且$f(x_n)$有界,应用单调有界准则

C. 若$\{f(x_n)\}$收敛,则$\{x_n\}$收敛　反例: $f(x)=\arctan x$, $x_n=n$, $f(x_n)=\arctan n\to\frac{\pi}{2}$, $x_n=n\to+\infty$.

D. 若$\{f(x_n)\}$单调,则$\{x_n\}$收敛　反例: $f(x)=\arctan x$, $x_n=n$, $f(x_n)=\arctan n$ 单调, $x_n=n\to+\infty$.

## 二、填空题(每小题 3 分,共 15 分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}=$ ___1___.

$1\leq\dfrac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{n!}\leq\dfrac{(n-2)\cdot(n-2)!}{n!}+\frac{1}{n}+1=\dfrac{n-2}{n(n-1)}+\frac{1}{n}+1$

2. 当 $x\to 0$ 时,$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$关于 $x$ 的无穷小的阶数是___$\frac{1}{8}$___.

2. $x+\sqrt{x}=\sqrt{x}(1+\sqrt{x})\sim\sqrt{x}$

$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt{x+\sqrt{x}}\sim\sqrt{\sqrt{x}}=x^{\frac{1}{8}}$ (?)

3. $\lim\limits_{x\to\infty}x\tan\dfrac{1}{x^2+1}=$ ___0___.　$x\to\infty$, $\tan\frac{1}{x^2+1}\sim\frac{1}{x^2+1}$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}=$ ___$-2\sqrt{2}$___. (分母有理化)

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}=$ ___1___.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{x^{\frac{1}{8}}}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x^{\frac{1}{4}}}}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^{\frac{3}{4}}+\sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x}}{x^{\frac{1}{2}}}}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^{\frac{3}{4}}+\sqrt{x^{\frac{1}{2}}+1}}=1$





## 三、计算题(每小题 10 分,共 40 分)

1. 设 $f(x)$满足方程 $af(x)+bf\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\sin x$,其中$|a|\neq|b|$,求 $f(x)$.

解 $\begin{cases}af(x)+bf(-\frac{1}{x})=\sin x & (1)\\ af(-\frac{1}{x})+bf(x)=\sin(-\frac{1}{x}) & (2)\end{cases}$

$(1)\times a$: $a^2f(x)+abf(-\frac{1}{x})=a\sin x$ (3)

$(2)\times b$: $abf(-\frac{1}{x})+b^2f(x)=b\sin(-\frac{1}{x})$ (4)

$(3)-(4)$: $(a^2-b^2)f(x)=a\sin x+b\sin\frac{1}{x}$

$f(x)=\dfrac{a\sin x+b\sin\frac{1}{x}}{a^2-b^2}$ ($|a|\neq|b|$)

2. 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$,求 $a$,$b$ 的值.

解: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-ax(x+1)-b(x+1)}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1-a)x^2-(a+b)x-b}{x+1}=0$

$\therefore\begin{cases}1-a=0\\ a+b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-1\end{cases}$

3. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{1}{2^2}\cdots\cos\dfrac{1}{2^n}$.

解. 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\cos\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2^2}\cdots\cos\frac{1}{2^n}\sin\frac{1}{2^n}}{2\sin\frac{1}{2^n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2^2}\cdots\sin\frac{1}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{1}{2^n}}$

$=\cdots$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin 1}{2^n\sin\frac{1}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin 1}{\dfrac{\sin\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}}=\sin 1$

4. $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解：原式 $= \lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{2+2^x-1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

$= \lim\limits_{x\to0^+}\left[\left(1+\frac{2^x-1}{2}\right)^{\frac{2}{2^x-1}}\right]^{\frac{2^x-1}{2x}}$

其中 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2^x-1}{2x} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^{x\ln2}-1}{2x}$ $(e^{x\ln2}-1\sim x\ln2)$

$= \lim\limits_{x\to0^+}\frac{x\ln2}{2x} = \frac{\ln2}{2}$

$= \ln\sqrt{2}$

∴原式 $= e^{\ln\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

注：另 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2^x-1}{2x} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{x\ln2}{2x} = \frac{\ln2}{2}$ $(a^x-1\sim x\ln a)$

四、解答题(每小题10分，共30分)

1. 已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)<a$，$f(b)>b$，试证：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\xi$.

证：令 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)\in C[a,b]$.

又 $F(a)=f(a)-a<0$

$F(b)=f(b)-b>0$

∴ $F(a)\cdot F(b)<0$

由零点定理知 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使

$F(\xi)=0$ 即 $f(\xi)=\xi$.



2. 设 $x_1=1$，$x_2=1+\frac{x_1}{x_1+1}$，$\cdots$，$x_n=1+\frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+1}$，试证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值.

证：显然 $x_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$

$x_2-x_1=1+\frac{x_1}{1+x_1}-x_1=\frac{1}{2}>0$,

假设 $x_k-x_{k-1}>0$，则

$x_{k+1}-x_k=\left(1+\frac{x_k}{1+x_k}\right)-\left(1+\frac{x_{k-1}}{1+x_{k-1}}\right)=\frac{x_k-x_{k-1}}{(1+x_k)(1+x_{k-1})}$

即 $x_{k+1}>x_k$，故 $\{x_n\}$ 单调递增.

又 $x_n=1+\frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+1}=1+\frac{x_{n-1}+1-1}{x_{n-1}+1}=2-\frac{1}{x_{n-1}+1}$

即 $\{x_n\}$ 有界.

由单调有界准则 $\{x_n\}$ 收敛，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 则

$A=1+\frac{A}{1+A}$，又 $A>0$ 故 $A=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3. 设 $f(x)=\frac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$，求 $f(x)$ 的间断点及其类型.

解(1)对 $x=0$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处无定义.

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x(x-1)}{(-x)(x-1)(x+1)}=-1$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x(x-1)}{x\cdot(x-1)(x+1)}=1$

} $x=0$ 是第一类跳跃间断点

(2)对 $x=1$，$f(x)$ 在 $x=1$ 处无定义.

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{x(x-1)}{|x|(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$

∴ $x=1$ 是第一类可去间断点

(3)对 $x=-1$，$f(x)$ 在 $x=-1$ 处无定义

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\frac{x(x-1)}{|x|(x-1)(x+1)}=-\lim\limits_{x\to-1}\frac{1}{x+1}=\infty$

∴ $x=-1$ 是第二类无穷间断点.

$f'(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x^2-1)\varphi(x)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}(x+1)\varphi(x)=2\varphi(1)$

$f'(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{-(x^2-1)\varphi(x)}{x-1}=-\lim_{x\to1^-}(x+1)\varphi(x)=-2\varphi(1)$

$\varphi(1)=0$

班级　　　　　　学号　　　　　　姓名

# 自测题二

$f(a)=0$

$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\varphi(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\varphi(x)=0$

**一、选择题**(每小题 3 分,共 15 分)

1. 设 $f(x)=(x-a)\varphi(x)$,其中 $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ 且 $\varphi(a)=2$,则 $f'(a)=$( C ).

A. 2　　　B. $a$　　　C. 0　　　D. 不存在

2. 设 $f(x)$ 可导,$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$.若 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导,则必有( A ).

A. $f(0)=0$　　　B. $f'(0)=0$

C. $f(0)+f'(0)=0$　　　D. $f(0)-f'(0)=0$

$F(x)$ 在 $x=0$ 可导 ⇒ 连续 ⇒ $\lim f(x)=f(0)$

$F'(0)=\lim\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim\frac{f(x)(1+|\sin x|)-f(0)}{x}$

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)(-\sin x)}{x}=-\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-f(0)\\ \lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)\end{cases}$　$\therefore f(0)=0$

3. 设 $f(x)=|x^2-1|\varphi(x)$ 且 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处连续,则"$\varphi(1)=0$"是"$f(x)$ 在 $x=1$ 处可导"的( A ).

A. 充要条件　　B. 必要非充分条件　　C. 充分非必要条件　　D. 无关条件

4. 设 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$,则 $f'(0)=$( A ).

A. $(-1)^{n-1}(n-1)!$　　　B. $(-1)^n(n-1)!$

C. $(-1)^{n-1}n!$　　　D. $(-1)^n n!$

$f(0)=0$

$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)}{x}=(-1)(-2)\cdots(1-n)$

5. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导,$g(x)$ 在 $x=x_0$ 处不可导,则 $f(x)+g(x)$ 与 $f(x)-g(x)$ 在 $x=x_0$ 处( D ).

A. 一定都有导数　　　B. 恰有一个有导数

C. 至少有一个有导数　　　D. 都没有导数

$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}}$

**二、填空题**(每小题 3 分,共 15 分)

1. $(a^x)^{(n)}=$ $a^x(\ln a)^n$ $(a>0,a\neq1)$.

2. $(\sin kx)^{(n)}=$ $k^n\sin(kx+n\cdot\frac{\pi}{2})$.

3. $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)}=$ $\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

4. 若 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$,则 $f^{(n)}(x)=$ $\frac{(-1)^n\cdot2n!}{(1+x)^{n+1}}$.

$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{(n)}=\left(\frac{2}{1+x}-1\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n\cdot2n!}{(1+x)^{n+1}}$

5. 设 $f(x)$ 可导,若 $y=f(x^2)$,则 $dy=$ $2xf'(x^2)dx$.

**三、计算题**(每小题 10 分,共 40 分)

1. 设 $y=\ln\tan\frac{x}{2}-\cos x\ln\tan\frac{x}{2}$,求 $y'$.

$y=(1-\cos x)\cdot\ln\tan\frac{x}{2}$

$y'=\sin x\ln\tan\frac{x}{2}+(1-\cos x)\cdot\frac{1}{2\tan\frac{x}{2}}\cdot\sec^2\frac{x}{2}$

$=\sin x\ln\tan\frac{x}{2}+2\sin^2\frac{x}{2}\cdot\frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$

$=\sin x\ln\tan\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}$

2. 设 $y=f(\ln x)e^{f(x)}$,其中 $f$ 可微,求 $dy$.

$dy=y'dx$

$=[\frac{1}{x}f'(\ln x)\cdot e^{f(x)}+f(\ln x)\cdot e^{f(x)}\cdot f'(x)]dx$

3. 设 $y=x^{\sin\frac{1}{x}}$,求 $y'$.

$\ln y=\sin\frac{1}{x}\ln x$

$\frac{1}{y}y'=(-\frac{1}{x^2})\cos\frac{1}{x}\ln x+(\sin\frac{1}{x})\cdot\frac{1}{x}$

$y'=x^{\sin\frac{1}{x}}[\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\cdot\ln x]$

4. 设 $y=(x-2)^2\sqrt[3]{\frac{(x+3)^2(3-2x^2)^4}{(1+x^2)(5-3x^2)}}$,求 $y'$.

$\ln|y|=2\ln|x-2|+\frac{2}{3}\ln|x+3|+\frac{4}{3}\ln|3-2x^2|-\frac{1}{3}\ln(1+x^2)$

$-\frac{1}{3}\ln|5-3x^2|$

$\frac{1}{y}y'=\frac{2}{x-2}+\frac{2}{3}\frac{1}{x+3}+\frac{4}{3}\frac{-4x}{3-2x^2}-\frac{1}{3}\frac{2x}{1+x^2}-\frac{1}{3}\frac{-6x}{5-3x^2}$

$y'=(x-2)^2\sqrt[3]{\frac{(x+3)^2(3-2x^2)^4}{(1+x^2)(5-3x^2)}}\left[\frac{2}{x-2}+\frac{2}{3(x+3)}-\frac{16x}{3(3-2x^2)}-\frac{2x}{3(1+x^2)}+\frac{2x}{5-3x^2}\right]$

**四、解答题**（每小题 10 分，共 30 分）

1. 设 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=3$，求 $f'(2)$.

解. 由 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=3$ 知 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=0=f(2)$

$f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}$

$=3$

2. 设 $f(x)=x\sin x\sin 3x\sin 5x\sin 7x$，求 $f''(0)$.

解. 令 $g(x)=\sin x\sin 3x\sin 5x\sin 7x$

则 $f(x)=x\cdot g(x)$

$f'(x)=g(x)+x\cdot g'(x)$

$f''(x)=g'(x)+g'(x)+x\cdot g''(x)$

$=2g'(x)+x\cdot g''(x)$

$\therefore f''(0)=2g'(0)+0=2g'(0)$

而 $g'(x)=\cos x\cdot\sin 3x\cdot\sin 5x\cdot\sin 7x$

$+3\sin x\cos 3x\cdot\sin 5x\cdot\sin 7x$

$+5\sin x\cdot\sin 3x\cdot\cos 5x\cdot\sin 7x$

$+7\sin x\sin 3x\sin 5x\cos 7x$

$g'(0)=0$

$\therefore f''(0)=0$





3. 已知 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的可导函数，对任意 $x,y\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x+y)=f(x)f(y)$，且 $f'(0)=1$，试证：$f'(x)=f(x)$.

$\forall x,y\in(-\infty,+\infty)$，$x\neq 0$

由 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$

$\therefore f(x)=f(x+0)=f(x)\cdot f(0)$

$\therefore f(0)=1$

$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)\cdot f(\Delta x)-f(x)\cdot 1}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x)\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$

$=f(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$

$=f(x)\cdot f'(0)=f(x)$

班级　　　　学号　　　　姓名

# 自测题三

## 一、选择题(每小题 3 分，共 15 分)

1. 下列函数在$[-1,1]$上满足罗尔定理条件的是( C ).

A. $f(x)=|x|$　　　　B. $f(x)=x^3$

C. $f(x)=e^x+e^{-x}$　　　　D. $f(x)=\begin{cases}1, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 0, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$

2. 下列极限不能使用洛必达法则的是( A ).

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}$　　　　B. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)$

C. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\cot x\right)$　　　　D. $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}$

3. 若函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处取得最大值，则( D ).

A. $f'(x_0)=0$

B. $f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)>0$

C. $f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)<0$

D. $f'(x_0)=0$ 或 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处不可导

4. "$f''(x_0)=0$"是"曲线 $y=f(x)$有拐点$(x_0,f(x_0))$"的( ~~X~~ C )条件.

A. 充分非必要　　　　B. 必要非充分

C. 既非充分又非必要　　　　D. 充要

5. 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$的渐近线的条数为( D ).

A. 0　　　　B. 1　　　　C. 2　　　　D. 3

$① \lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=\infty$　垂直　$x=0$

$② \lim\limits_{x\to -\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=0$　水平　$y=0$

$③ \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(1+e^x)}{x}\right]\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=1$　$\therefore k=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(1+e^x)-x]=\lim[\ln t-\ln(t-1)]=\lim\ln\left(\frac{t}{t-1}\right)=\ln 1=0$　$\therefore$ 斜 $y=x$

$t=1+e^x$，$x=\ln(t-1)$

## 二、填空题(每小题 3 分，共 15 分)

1. 对于函数 $y=x^2$，在区间$[-1,2]$上满足拉格朗日中值定理的点 $\xi$ 是 ___1___.

2. 设 $x\to 0$ 时，$e^x-ax^2-bx-1$ 是比 $x^2$ 高阶的无穷小量，则 $a=$ ___$\frac{1}{2}$___，$b=$ ___1___.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-ax^2-bx-1}{x^2}$

3. $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$的极小值是 ___$f(1)=1$___.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x\cos x}{x-\sin x}=$ ___3___.

5. $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$的单调增加区间为 ___$[-1,1]$___.

## 三、计算题(每小题 8 分，共 40 分)

1. 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$.

$\ln(1+x)\sim x$

$=\cdots=-\frac{1}{2}$

2. 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-x^3-1}{\sin^6 2x}$.

Taylor

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^6}{2}+o(x^6)}{2^6x^6}=\frac{1}{2^7}=\frac{1}{128}$

3. 计算：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$.

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2-2\cos x}\left[e^{x^2-(2-2\cos x)}-1\right]}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-(2-2\cos x)}{x^4}\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-2\sin x}{4x^3}\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-2\cos x}{12x^2}=\frac{1}{6}\lim\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{6}\lim\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{12}$

$\left(e^{\alpha}-1\sim\alpha\right)$

4. 计算：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$. $[\infty-\infty]$ 通分

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x+x^2-\sin x}{x\sin x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x+x^2-\sin x}{x^2}$$

$$\overset{L}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1+2x-\cos x}{2x}$$

$$\overset{L}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2+\sin x}{2} = 1$$

5. 计算：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x[\sin x-\sin(\sin x)]}{x^4}$.

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x[\sin x-\sin(\sin x)]}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{L}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x-[\cos(\sin x)]\cdot\cos x}{3x^2}$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0}\cos x}_{1} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\sin x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}(\sin x)^2}{3x^2}$$

$$= \frac{1}{6}$$

## 四、解答题（每小题 10 分，共 30 分）

1. 作出函数 $y=x+\dfrac{x}{x^2-1}$ 的图形，指出单调区间、极值、凹凸区间、拐点及渐近线.



2. 设 $b>a>0$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi).$$

对 $f(x)$，$g(x)=x^2$ 在 $(a,b)$ 上用 Cauchy 中值定理

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

即 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2} = \dfrac{f'(\xi)}{2\xi}$ $(a<\xi<b)$

$\therefore 2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$

3. 当 $x>1$ 时，证明：$\ln x>\dfrac{2(x-1)}{x+1}$.

证明：$(x+1)\ln x>2(x-1)$

$\Leftrightarrow (x+1)\ln x-2(x-1)>0$ $(x>1)$

证 令 $f(x)=(x+1)\ln x-2(x-1)$，则 $f(1)=0$

$f'(x)=\ln x+\dfrac{x+1}{x}-2$

$=\ln x+\dfrac{1}{x}-1$，　$f'(1)=0$

$f''(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}>0$ $(x>1)$

$\therefore f'(x)$ 在 $x>1$ 时单调增

$\therefore f'(x)>f'(1)=0$ $(x>1)$

$\therefore f(x)$ 在 $x>1$ 时单调增

$\therefore f(x)>f(1)=0$ $(x>1)$

即 $(x+1)\ln x-2(x-1)>0$

即 $\ln x>\dfrac{2(x-1)}{x+1}$

# 自测题四

**一、选择题**(每小题 3 分,共 15 分)

1. 下列等式正确的是( C )。

A. $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)$　　B. $\int \mathrm{d}f(x)=f(x)$

C. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$　　D. $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$

2. 已知 $\int \ln x\mathrm{d}x=x(\ln x-1)+C$,则 $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=$( B )。

A. $[\ln(\ln x)-\ln x]\ln x+C$　　B. $[\ln(\ln x)-1]\ln x+C$

C. $[\ln(\ln x)-1]x+C$　　D. $[\ln(\ln x)-\ln x]x+C$

3. $\int e^{\sin x}\sin x\cos x\mathrm{d}x=$( D )。

A. $e^{\sin x}+C$　　B. $e^{\sin x}\sin x+C$

C. $e^{\sin x}\cos x+C$　　D. $e^{\sin x}(\sin x-1)+C$

4. 已知 $f(x)=\begin{cases}2(x-1), & x<1,\\ \ln x, & \cancel{x<1}\ x\geqslant 1\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的一个原函数是( D )。

A. $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ \cancel{x\ln(x-1)}\ x(\ln x-1), & x\geqslant 1\end{cases}$　　B. $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ \cancel{x\ln(x+1)}\ x(\ln x+1), & x\geqslant 1\end{cases}$

C. $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ \cancel{x\ln(x+1)+1}\ x(\ln x+1)+1, & x\geqslant 1\end{cases}$　　D. $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ \cancel{x\ln(x-1)+1}\ x(\ln x-1)+1, & x\geqslant 1\end{cases}$

$x<1$,
$F(x)=\int 2(x-1)\mathrm{d}x=(x-1)^2+C_1$
$x\geqslant 1$
$F(x)=\int \ln x\mathrm{d}x=x\ln x-x+C_2$
由 $f(x)$ 在此区间内连续
知 $F(x)$ 连续
$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 1^-}F(x)=C_1\\ &\lim_{x\to 1^+}F(x)=-1+C_2\end{aligned}\right\}$
$C_1=-1+C_2$

5. 已知函数 $f(x)$ 连续,且 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$,则下列等式正确的是( C )。

A. $\int f(ax+b)\mathrm{d}x=F(ax+b)+C$　　B. $\int f(x^n)x^{n-1}\mathrm{d}x=F(x^n)+C$

C. $\int f(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x=F(\ln x)+C$　　D. $\int f(e^x)e^x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}F(e^{3x})+C$

**二、填空题**(每小题 3 分,共 15 分)

1. 设 $f(x)$ 的一个原函数是 $\frac{\sin x}{x}$,则 $\int xf'(x)\mathrm{d}x=$ $\cos x-2\frac{\sin x}{x}+C$

2. $\int\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x=$ $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$　$\int\frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}\mathrm{d}x=$ $\arcsin\frac{x-2}{2}+C$

4. $\int\frac{\tan x}{1-\tan^2x}\mathrm{d}x=$ $-\frac{1}{4}\ln|\cos 2x|+C$　5. $\int\frac{1}{x^2\sqrt{1+4x^2}}\mathrm{d}x=$ $-\frac{\sqrt{1+4x^2}}{x}+C$

③ arc sin





**三、计算题**(每小题 10 分,共 40 分)

1. $\int\frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x$.

$=\frac{1}{2}\int\ln\frac{1+x}{1-x}\,d\ln\frac{1+x}{1-x}$

$=\frac{1}{4}\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)^2+C$

2. $\int\frac{1}{\sin^3x\cos x}\mathrm{d}x$.

$=\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^3x\cos x}dx=\int\frac{dx}{\sin x\cos x}+\int\frac{\cos x}{\sin^3x}dx$

$=\int\csc(2x)\,d(2x)+\int\frac{1}{\sin^3x}d(\sin x)$

$=\ln|\csc(2x)-\cot(2x)|-\frac{1}{2}\sin^{-2}x+C$

$=\ln\left|\frac{1}{\sin 2x}-\frac{\cos 2x}{\sin 2x}\right|-\frac{1}{2}\sin^{-2}x+C=\ln|\tan x|-\frac{1}{2}\csc^2x+C$

3. $\int x\tan^2x\mathrm{d}x$.

$=\int x(\sec^2x-1)\,dx$

$=\int x\sec^2x\,dx-\int x\,dx$

$=\int x\,d\tan x-\frac{1}{2}x^2$

$=x\tan x-\int\tan x\,dx-\frac{1}{2}x^2$

$=x\tan x+\ln|\cos x|-\frac{1}{2}x^2+C$

另外 2.

求 $\int\frac{\sec^4x}{\tan^3x}dx$

$=\int\frac{\sec^2x}{\tan^3x}d\tan x$

$=\int\frac{\tan^2x+1}{\tan^3x}d(\tan x)$

$=\ln|\tan x|-\frac{1}{2}\frac{1}{\tan^2x}+C$

4. $\int \frac{1}{e^x-e^{-x}}dx$.

$= \int \frac{e^x}{(e^x)^2-1}dx = \int \frac{1}{(e^x)^2-1}d(e^x)$

令 $u=e^x$

$= \int \frac{1}{u^2-1}du = \frac{1}{2}\int [\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}]du$

$= \frac{1}{2}[\ln|u-1| - \ln|u+1|]+C$

$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + C$.

**四、解答题**（每小题 10 分，共 30 分）

1. 已知 $f'(x)=\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$，$f(0)=0$，求 $\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx$.

$f(x) = \int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx = \int \frac{d\sin x}{1+\sin^2 x} = \text{arc}\cancel{\tan}\sin x + C$

由 $f(0)=0 \Rightarrow C=0$

$\therefore f(x) = \arctan\sin x$

$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx = \int \frac{1}{1+f^2(x)}df(x)$

$= \arctan f(x) + C$

$= \arctan(\arctan(\sin x)) + C$



2. 设 $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}$，且 $f(\varphi(x))=\ln x$，求 $\int\varphi(x)dx$.

$f(x^2-1) = \ln\frac{(x^2-1)+1}{(x^2-1)-1}$ $\therefore f(x) = \ln\frac{x+1}{x-1}$.

又 $f(\varphi(x)) = \ln\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = \ln x$.

$\therefore \frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = x \Rightarrow \varphi(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

从而 $\int\varphi(x)dx = \int\frac{x+1}{x-1}dx = \int(1+\frac{2}{x-1})dx$

$= x+2\ln|x-1|+C$

3. 设 $f'(\cos x+2)=\sin^2 x+\tan^2 x$，求 $f(x)$.

令 $\cos x+2=u$. $\cos x = u-2$.

$\sin^2 x = 1-\cos^2 x = 1-(u-2)^2$.

$\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1}{(u-2)^2} - 1$.

$\therefore f'(u) = \frac{1}{(u-2)^2} - (u-2)^2$

$\therefore f(u) = -\frac{1}{u-2} - \frac{1}{3}(u-2)^3 + C$

从而 $f(x) = \frac{1}{2-x} - \frac{1}{3}(x-2)^3 + C$.

1. 奇fn. $f(-t)=f(t)$

$\varphi(-x)=\int_0^{-x} f(t)\,dt$

# 自测题五

令 $u=-t$ $\quad -\int_0^x f(-u)\,du=-\int_0^x f(u)\,du$

$=-\varphi(x)$

## 一、选择题(每小题 3 分,共 15 分)

1. 设 $f(t)$ 为 $[-a,a]$ 上的连续偶函数,$\varphi(x)=\int_0^x f(t)\,dt$,则( A )。

A. $\varphi(x)$ 为奇函数　　B. $\varphi(x)$ 为偶函数

C. $\varphi(x)$ 非奇非偶　　D. $\varphi(x)$ 可能为奇函数也可能为偶函数

2. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^2 x\cos^2 x}dx=$( C )。

A. $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^2 x\cos^2 x}dx$　　B. 2　　C. 0　　D. $\pi$

3. $\int_{-1}^{1}e^{\sqrt[3]{x}}dx=$( D )。 令 $\sqrt[3]{x}=t$, $x=t^3$, $dx=3t^2dt$ 如式 $=3\int_{-1}^{1}e^t t^2 dt$

A. 0　　B. $2\int_0^1 e^{\sqrt[3]{x}}dx$　　C. $\int_{-1}^{1}e^x dx$　　D. $3\int_{-1}^{1}x^2e^x dx$

4. 设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi}e^{\sin t}\sin t\,dt$,则 $F(x)$( A )。 $T=2\pi$

$\int_0^{2\pi}e^{\sin t}\sin t\,dt=\underbrace{\int_0^{\pi}e^{\sin t}\sin t\,dt}_{I_1}+\underbrace{\int_{\pi}^{2\pi}e^{\sin t}\sin t\,dt}_{I_2}$

A. 为正常数　　B. 为负常数　　C. 恒为 0　　D. 不为常数

$I_1>0$, $I_2<0$, $|I_1|>|I_2|$

5. 设 $f(x)$ 连续,则 $\frac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)\,dt=$( C )。 令 $x^2-t^2=u$, $-2t\,dt=du$ $\quad -\frac{1}{2}\int_{x^2}^{0}f(u)\,du$

A. $2xf(x^2)$　　B. $-2xf(x^2)$　　C. $xf(x^2)$　　D. $2xf(x^2)$ $\quad =\frac{1}{2}\int_0^{x^2}f(u)\,du$

## 二、填空题(每小题 3 分,共 15 分)

1. $\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{1+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)=$ $\frac{\pi}{4}$ 。

$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$

$=\arctan x\big|_0^1=\frac{\pi}{4}$

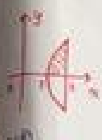
2. 已知 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,dx$,$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,dx$,$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\,dx$,则它们的大小关系是 $I<J<K$ 。

$0<x<\frac{\pi}{4}$, $0<\sin x<\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos x<\cot x \Rightarrow \ln\sin x<\ln\cos x<\ln\cot x$

3. 由 $y=\sqrt{x^2-1}$,$x=2$ 及 $x$ 轴所围的平面图形绕 $x$ 轴旋转所成的旋转体的体积为 $\frac{4}{3}\pi$ 。

3. $V=\int_1^2\pi y^2\,dx$

$=\int_1^2\pi(x^2-1)\,dx$



4. $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,dx=$ $\frac{\pi}{2}$ 。 原式 $=\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}$ 令 $x-1=t$

$=\int_{-1}^{1}(t+1)\sqrt{1-t^2}\,dt=\underbrace{\int_{-1}^{1}t\sqrt{1-t^2}\,dt}_{0}+\underbrace{\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt}_{\frac{\pi}{2}}$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\sin x}}{e^{\sin x}+e^{\cos x}}dx=$ $\frac{\pi}{4}$ 。

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\sin x}+e^{\cos x}-e^{\cos x}}{e^{\sin x}+e^{\cos x}}dx=\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\cos x}}{e^{\sin x}+e^{\cos x}}dx$

令 $x=\frac{\pi}{2}-t$ $\quad \frac{\pi}{2}-\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\sin t}}{e^{\cos t}+e^{\sin t}}dt}$ 解好所求





## 三、计算题(每小题 10 分,共 40 分)

1. $\int_0^1\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$。 瑕积分

因 $\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=\infty$ ∴ $x=1$ 瑕点

令 $\arcsin x=t$,则 $x=\sin t$ ① $x=0$ 时, $t=0$ ② $x\to 1^-$ 时, $t\to\frac{\pi}{2}^-$。

$\int_0^1\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\sin^2 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin^2 t\,dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\frac{t^2}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\,d(\sin 2t)$

$=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{t^2}{4}-\frac{1}{4}\left(t\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt\right)$

$=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{8}\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}$.

2. $\int_0^1\frac{(1+x+x^2)e^x}{1+2x+x^2}dx$。 分部积分法

$=\int_0^1\frac{(1+x+x^2)e^x}{(x+1)^2}dx$

$=-\int_0^1(1+x+x^2)e^x\,d\frac{1}{1+x}$

$=-\frac{(1+x+x^2)e^x}{1+x}\Big|_0^1+\int_0^1\frac{1}{1+x}d\left[(1+x+x^2)e^x\right]$

$=1-\frac{3e}{2}+\int_0^1(2+x)e^x\,dx=1-\frac{3e}{2}+2\int_0^1 e^x\,dx+\underbrace{\int_0^1 xe^x\,dx}$ 分部积分

$=\cdots$

$=\frac{1}{2}e$

3. $\int_0^{\pi}x\sin^{2n}x\,dx$。 ($n$ 为正整数) 分部积分

$I_{2n}=\int_0^{\pi}x\sin^{2n}x\,dx=-\int_0^{\pi}x\sin^{2n-1}x\,d\cos x$

$=\underbrace{-x\sin^{2n-1}x\cdot\cos x\Big|_0^{\pi}}_{0}+\int_0^{\pi}(\sin^{2n-1}x+(2n-1)x\sin^{2n-2}x\cdot\cos x)\cos x\,dx$

$=\int_0^{\pi}\sin^{2n-1}x\cdot\cos x\,dx+(2n-1)\underbrace{\int_0^{\pi}x\sin^{2n-2}x\,dx}-(2n-1)\int_0^{\pi}x\sin^{2n}x\,dx$

$=\underbrace{\frac{1}{2n}\sin^{2n}x\Big|_0^{\pi}}_{0}+(2n-1)I_{2n-2}-(2n-1)I_{2n}$

$=(2n-1)I_{2n-2}-(2n-1)I_{2n}$

$\therefore I_{2n}=\frac{2n-1}{2n}I_{2n-2}=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot I_0=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi^2}{2}$

注 $I_0=\int_0^{\pi}x\,dx=\frac{\pi^2}{2}$

4. $\int \frac{1}{e^{x}-e^{-x}}\mathrm{d}x$.

$= \int \frac{e^x}{(e^x)^2-1}dx = \int \frac{1}{(e^x)^2-1}d(e^x)$

令 $u=e^x$

$= \int \frac{1}{u^2-1}du = \frac{1}{2}\int [\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}]du$

$= \frac{1}{2}[\ln|u-1| - \ln|u+1|]+C$

$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + C$.

**四、解答题**（每小题 10 分，共 30 分）

1. 已知 $f'(x)=\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$，$f(0)=0$，求 $\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x$.

$f(x) = \int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx = \int \frac{d\sin x}{1+\sin^2 x} = \arctan\sin x + C$

由 $f(0)=0 \Rightarrow C=0$

$\therefore f(x) = \arctan \sin x$

$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx = \int \frac{1}{1+f^2(x)}df(x)$

$= \arctan f(x) + C$

$= \arctan(\arctan(\sin x)) + C$

2. 设 $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}$，且 $f(\varphi(x))=\ln x$，求 $\int\varphi(x)\mathrm{d}x$.

$f(x^2-1) = \ln\frac{(x^2-1)+1}{(x^2-1)-1}$ $\therefore f(x) = \ln\frac{x+1}{x-1}$.

又 $f(\varphi(x)) = \ln\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = \ln x$.

$\therefore \frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = x \Rightarrow \varphi(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

所以 $\int\varphi(x)dx = \int\frac{x+1}{x-1}dx = \int(1+\frac{2}{x-1})dx$

$= x + 2\ln|x-1| + C$

3. 设 $f'(\cos x+2)=\sin^2 x+\tan^2 x$，求 $f(x)$.

令 $\cos x + 2 = u$，$\cos x = u-2$.

$\sin^2 x = 1-\cos^2 x = 1-(u-2)^2$.

$\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1}{(u-2)^2} - 1$.

$\therefore f'(u) = \frac{1}{(u-2)^2} - (u-2)^2$

$\therefore f(u) = -\frac{1}{u-2} - \frac{1}{3}(u-2)^3 + C$

所以 $f(x) = \frac{1}{2-x} - \frac{1}{3}(x-2)^3 + C$.

4. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{x\sin^4 x}{(1+\cos^2 x)^2}+\frac{\sqrt{\sin^6 x}}{1+\cos^2 x}\right]dx$.

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin^4 x}{(1+\cos^2 x)^2}\,dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin x|^3}{1+\cos^2 x}\,dx$$

$$= 0 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\cos^2 x)\,d\cos x}{1+\cos^2 x}$$

令 $\cos x = u$

$$= -2\int_1^0 \frac{1-u^2}{1+u^2}\,du$$

$$= 2\int_0^1 \left(\frac{2}{1+u^2}-1\right)du$$

$$= 4\arctan u\Big|_0^1 - 2u\Big|_0^1$$

$$= 4\cdot\frac{\pi}{4} - 2 = \pi - 2.$$

**四、解答题**（每小题 10 分，共 30 分）

1. $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx$.

由定积分保号性

$$\int_0^1 \frac{x^n}{2}dx < \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx < \int_0^1 x^n\,dx$$

$$\int_0^1 \frac{x^n}{2}dx = \frac{1}{2(n+1)}x^{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{2(n+1)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} \to 0$$

由夹逼准则，$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx = 0$.



2. 设 $f(x)$ 为连续函数.

(1) 利用定义证明：$F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 可导，且 $F'(x)=f(x)$；

(2) 若 $f(x)$ 是周期为 2 的函数，证明：$G(x)=2\int_0^x f(t)dt - x\int_0^2 f(t)dt$ 也是以 2 为周期的函数.

(1) $\forall x$，由积分中值定理

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_0^{x+\Delta x}f(t)dt - \int_0^x f(t)dt}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(\xi) = f(x).$$

（$\xi$ 介于 $x$ 与 $x+\Delta x$ 之间）

$\therefore F'(x) = f(x)$

(2) $G(x+2)-G(x) = \left[2\int_0^{x+2}f(t)dt - (x+2)\int_0^2 f(t)dt\right] - \left[2\int_0^x f(t)dt - x\int_0^2 f(t)dt\right]$

$= 2\int_x^{x+2}f(t)dt - 2\int_0^2 f(t)dt \xlongequal{f(x)\text{以}2\text{为周期}} 2\int_0^2 f(t)dt - 2\int_0^2 f(t)dt = 0$

*3. 设 $f(x)=\frac{x}{1+x}$，$x\in[0,1]$. 定义函数列：$f_1(x)=f(x)$，…，$f_{n+1}(x)=f(f_n(x))$；记 $S_n$ 是由曲线 $y=f_n(x)$，$x=1$ 及 $x$ 轴所围图形的面积，求极限 $\lim_{n\to\infty}nS_n$.

$$f_1(x) = \frac{x}{1+x},\quad f_2(x) = \frac{\frac{x}{1+x}}{1+\frac{x}{1+x}} = \frac{x}{1+2x}.$$

假设 $f_k(x) = \frac{1}{1+kx}$，则

$$f_{k+1}(x) = \frac{\frac{1}{1+kx}}{1+\frac{1}{1+kx}} = \frac{x}{1+(k+1)x}$$

于是 $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$ $(\forall n\in N^*)$

$$S_n = \int_0^1 \frac{x}{1+nx}dx = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{nx+1-1}{nx+1}dx$$

$$= \frac{1}{n}\left[1-\frac{1}{n}\ln(1+nx)\Big|_0^1\right] = \frac{1}{n}\left[1-\frac{1}{n}\ln(1+n)\right]$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} nS_n = \lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{n}\ln(1+n)\right] = 1$$