第六章　振　动

6.1　简谐振动的运动学

一. 振动的一般概念

物体在一定位置附近作重复的往返运动称为**机械振动**。如：钟摆的摆动、琴弦的振动、心脏的跳动、机器运转时的振动等。

广义地说，任何一个物理量随时间的周期性变化都可以称为振动。如：交变电流、电磁震荡等。

二. 简谐振动的运动学方程

一个沿x轴作简谐运动的质点，取其平衡位置为坐标原点

$$x = A\cos(wt+\varphi)$$

式中： $wt+\varphi$ 振动的相位。 决定质点在t时刻的运动状态(位置和速度)的重要物理量。

w 圆频率。 $w=\dfrac{2\pi}{T}$ 或 $w=2\pi f$

φ 初相位。$t=0$时相位的值。

A 振幅。质点离开平衡位置的最大位移的绝对值。

T 周期。两个相邻的同状态的x值之间的时间间隔。

若令：$\varphi' = \varphi + \dfrac{\pi}{2}$ ，则上式也可写成：

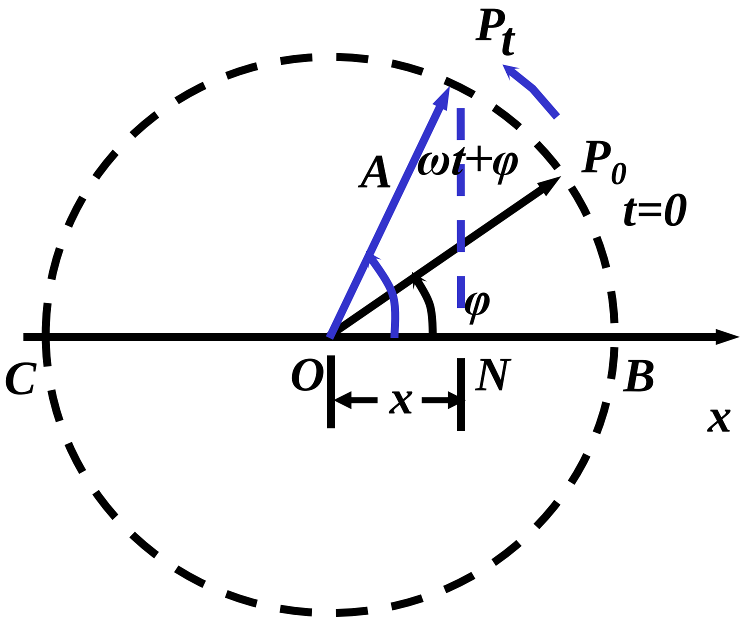
$$x = A\sin(\omega t + \varphi')$$

★ 简谐振动也可以用正弦函数表示

三. 简谐振动的矢量图表示法

1. 矢量图表示法（旋转矢量法）

设一质点绕圆心O作半径为A、角速度为ω的匀速圆周运动。$t=0$时，位矢A与x轴夹角为φ。t时刻A与x轴夹角（相角）为$\omega t+\varphi$则该质点在轴上的投影的坐标：



$$x = A\cos(wt+\varphi)$$

投影点的运动是简谐运动

$\vec{A}$：振幅矢量或旋转矢量

$\vec{A}$ 的端点轨迹称为参考圆

★ 矢量A转一周所用的时间与简谐振动的周期相等;

★ 矢量A的长度就是振动的振幅;

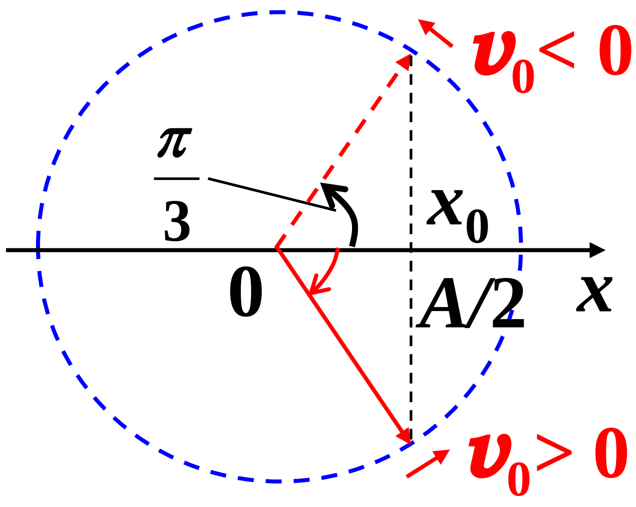
★ 矢量A旋转的角速度就是振动的圆频率;

★ 矢量A与x轴的夹角就是振动的相位;
t=0时刻的夹角就是振动的初相位。

★用途之一

定φ，研究振动很方便

如：$\left.\begin{aligned} x_0 &= A/2 \\ v_0 &> 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \varphi = -\dfrac{\pi}{3}$



★用途之二

研究振动的合成时，确定合振动的相位

四. 简谐振动的速度和加速度

$$v = \frac{dx}{dt} = -wA\sin(wt+\varphi)$$

$$= v_m \cos(wt+\varphi+\frac{\pi}{2})$$

$$v_m = wA$$ 速度振幅

$$a = \frac{dv}{dt} = -w^2 A\cos(wt+\varphi)$$

$$= a_m \cos(wt+\varphi \pm \pi)$$

$$a_m = w^2 A$$ 加速度振幅

例题 质量为0.1*kg*的质点作简谐运动，频率为10*Hz*，在t=0时，位移x_0=0.1*m*，速度v_0=2π*m/s*，求：（1）位移表达式；（2）加速度表达式?

解：(1) 由简谐振动方程 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

代入初始条件数据： $0.1 = A\cos\varphi$

$$2\pi = -A2\pi\cdot 10\sin\varphi$$

联立可得： $A = 0.141m, \varphi = -\frac{\pi}{4}$

$$\therefore x = 0.141\cos(20\pi t - \frac{\pi}{4})$$

$$\therefore x = 0.141\cos(20\pi t - \frac{\pi}{4})$$

（2）

$$a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi) = -558\cos(20\pi t - \frac{\pi}{4})$$

例题 一物体沿x轴作简谐运动,振幅为0.12m,周期为2s.当t=0时位移为0.06m,且向x轴正向运动.求

(1). 简谐运动方程;

(2). t=0.5s时,物体的位置,速度,加速度;

(3). 在x= -0.06m处,且向x轴负方向运动时,质点的速度和加速度;

(4). 在x= -0.06m处,且向x轴负方向运动时,从这一位置回到平衡位置的最短时间?

解：设运动方程为

$$x = A\cos(wt + \varphi)$$

则

$$v = \frac{dx}{dt} = -wA\sin(wt + \varphi)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -w^2 A\cos(wt + \varphi)$$

(1). $\because A=0.12(m), T=2(s), w=\frac{2\pi}{T}=\pi(s^{-1})$

且$t=0$时, $x=0.06m$

$$\therefore 0.06=0.12\cos(0+\varphi)$$

$$\Rightarrow \cos\varphi=\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \varphi=\pm\frac{\pi}{3}$$

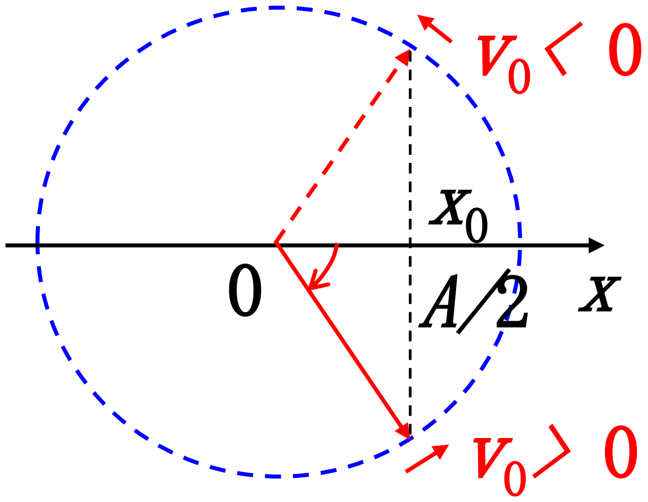
$\because t=0$时, 物体向x轴正向运动,

即$v_0=\frac{dx}{dt}=-wA\sin(0+\varphi)>0$

$$\therefore \varphi=-\frac{\pi}{3}$$

$$x=0.12\cos(\pi t-\frac{\pi}{3})$$

或



$$\left.\begin{aligned} x_0 &= A/2 \\ v_0 &> 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \varphi = -\frac{\pi}{3}$$

$$x = 0.12\cos(\pi t - \frac{\pi}{3})$$

(2). t=0.5s时,物体的位置,速度,加速度;

(2).

$$x = 0.12\cos(\pi t - \frac{\pi}{3})$$

$$v = -0.12\pi\sin(\pi t - \frac{\pi}{3})$$

$$a = -0.12\pi^2\cos(\pi t - \frac{\pi}{3})$$

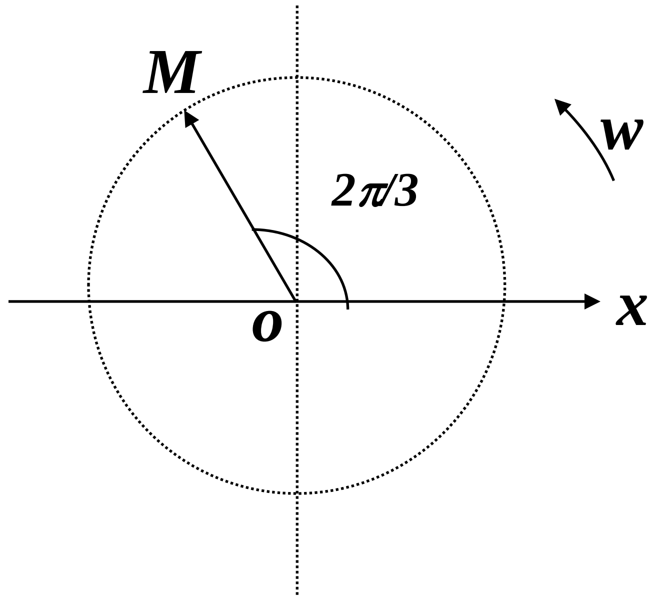
$$\therefore t = 0.5s\text{时}$$

$$x = 0.12\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) = 0.104m$$

$$v = -0.12\pi\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) = -0.19m/s$$

$$a = -0.12\pi^2\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) = -1.03m/s^2$$

(3). 在x= -0.06m处,且向x轴负方向运动时,质点的速度和加速度;

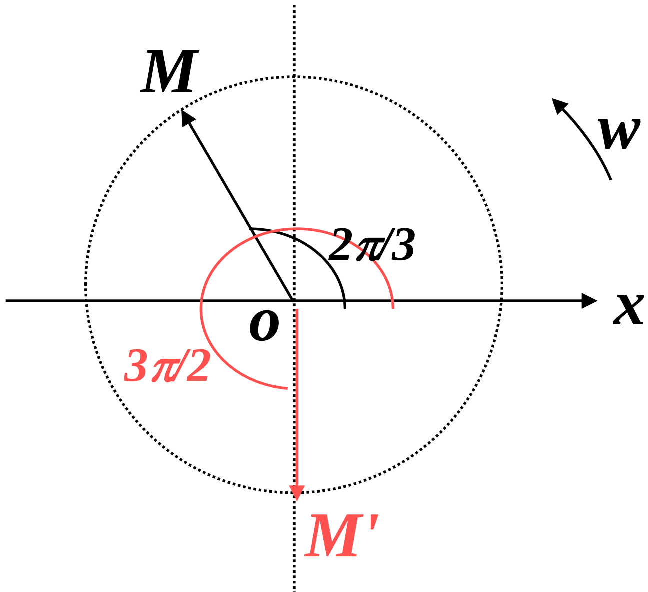


$$\pi t_1 - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

$$\therefore v = -0.12\pi \sin(\pi - \frac{\pi}{3}) = -0.33 m/s$$

$$a = -0.12\pi^2 \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = 0.59 m/s$$

(4). 在x= -0.06m处,且向x轴负方向运动时,从这一位置回到平衡位置的最短时间?



x= -0.06m时,物体的相位为$2\pi/3$

回到平衡位置$x=0$时,物体的相位为$3\pi/2$.

$$\therefore \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{5}{6}\pi$$

$$\therefore \Delta t = \frac{\Delta\varphi}{w} = \frac{5}{6} s$$

例题 两个小球均在竖直方向上作同周期的简谐振动,第二个小球的振幅是第一个小球振幅的两倍.当第一个小球自振动的正方向(取竖直向上方向为正方向)回到平衡位置时,第二个小球正好在振动的正方向端点.如果第一小球的振动方程为$y=A\cos(wt+\alpha)$,求第二个小球的振动方程?

解：设第二小球的运动方程为

$$y = 2A\cos(wt + \beta)$$

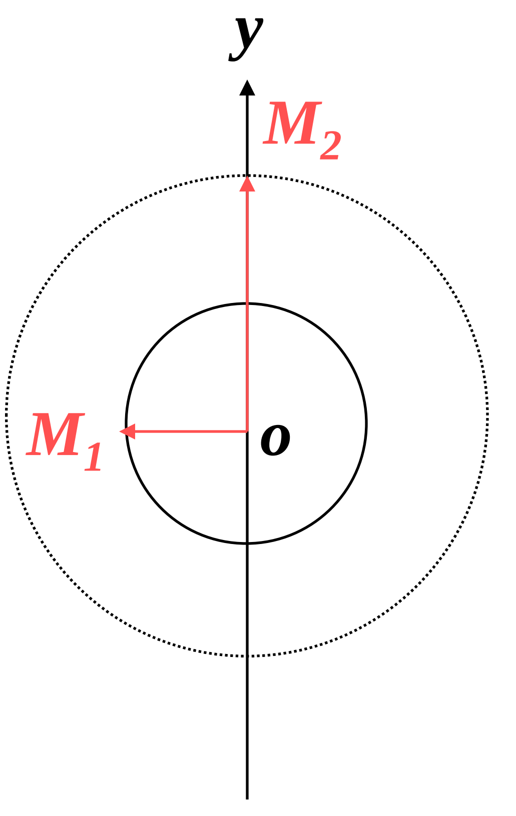
两者位相差为

$$(wt + \alpha) - (wt + \beta) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow y = 2A\cos(wt + \alpha - \frac{\pi}{2})$$

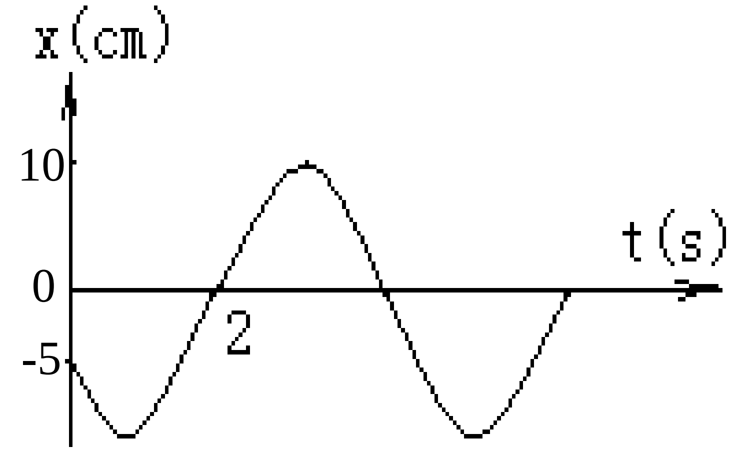
$$= 2A\sin(wt + \alpha)$$



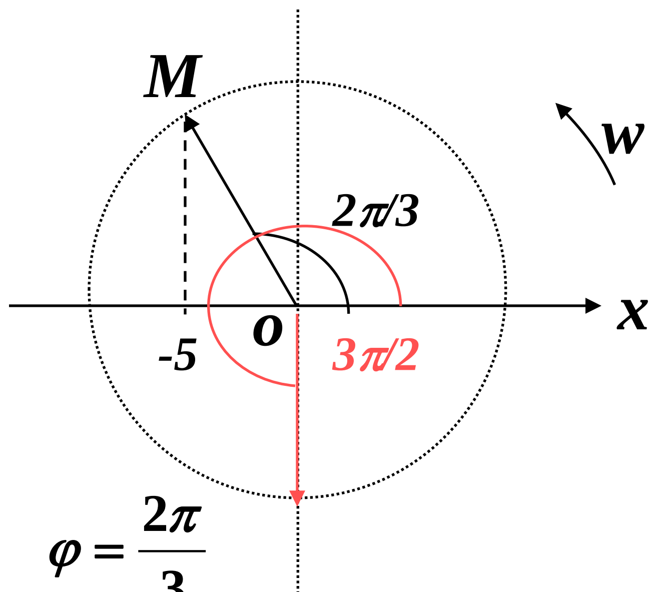
例题一简谐振动曲线如图所示，求振动方程。

解：设简谐振动方程

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$



t=0s时，x=-5cm，负向运动



$$\varphi = \frac{2\pi}{3}$$

$$x = 10\cos(\omega t + \frac{2\pi}{3})$$

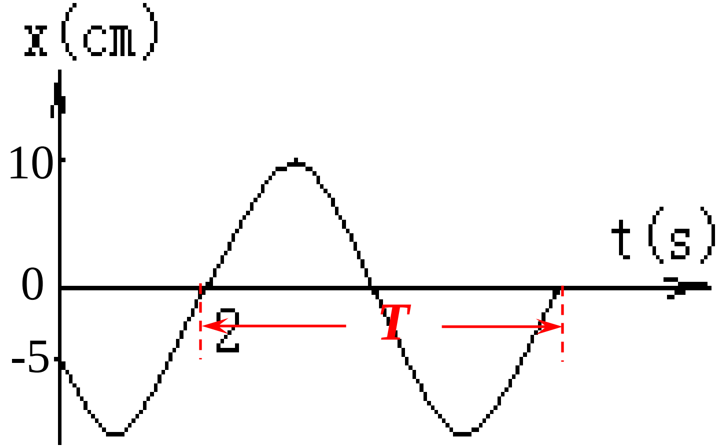
t=2s时，x=0，正向运动

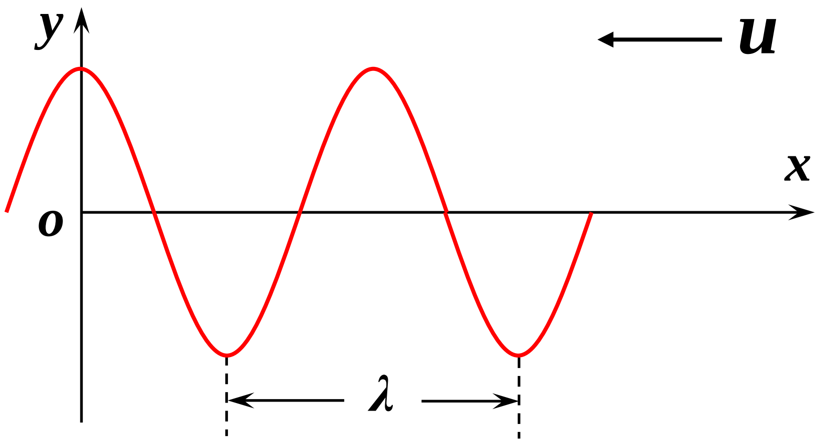
$$2\omega + \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{5\pi}{12}$$

$$x = 10\cos(\frac{5\pi}{12}t + \frac{2\pi}{3})$$

★ 分清振动曲线图与波形图





6.2 简谐运动的动力学

一. 简谐运动的动力学方程

运动学特征: 位移x随时刻t的变化规律,遵从正弦(余弦)函数.

$$x = A\cos(wt+\varphi) \qquad a = -w^2 A\cos(wt+\varphi)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -w^2x \text{ 或 } \frac{d^2x}{dt^2} + w^2x = 0$$

运动质点的加速度与位移正比反向.

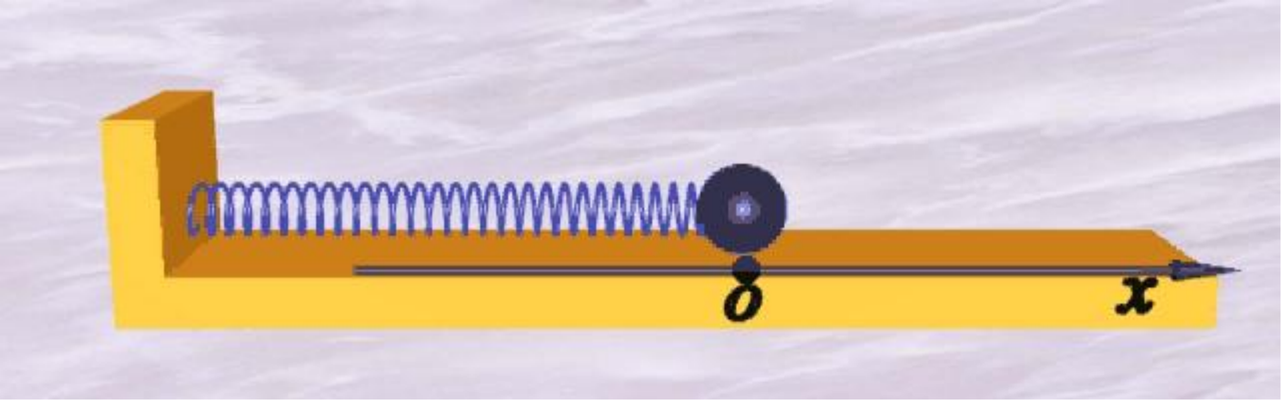
注意: 式中x为质点与平衡位置间的位移

如果一物理量随时间的变化规律符合余弦函数(或正弦函数),或遵从 $\frac{d^2x}{dt^2} = -w^2x$ 的关系,则认为这物理量在作简谐振动.

二. 简谐运动动力学方程的应用

1. 弹簧振子

由质量可忽略的弹簧和一不形变的物体组成.



弹性力 $f = -kx$

由牛顿第二定律,得

$$a = \frac{f}{m} = -\frac{k}{m}x \qquad \Rightarrow a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

令$w^2 = \frac{k}{m}$,则

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -w^2 x$$

弹簧振子的运动是简谐运动.

$$T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

周期T决定于弹簧振子的本身性质,即弹簧的倔强系数和振动的物体质量.

设弹簧振子的振动方程

$$x = A\cos(wt + \varphi)$$

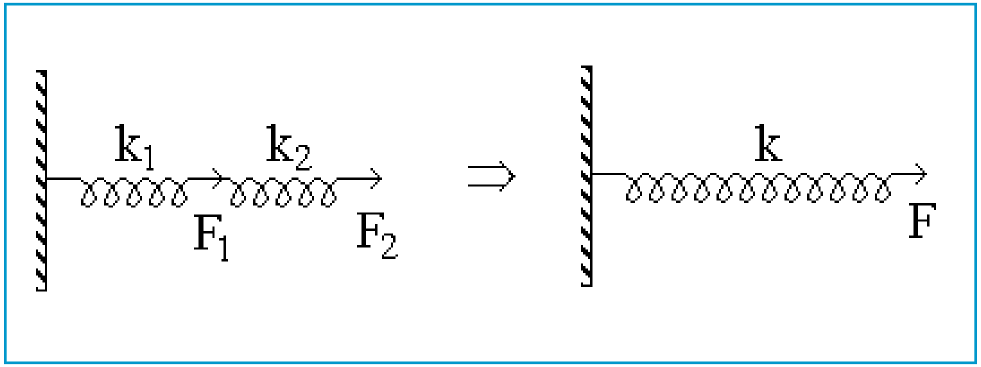
则速度

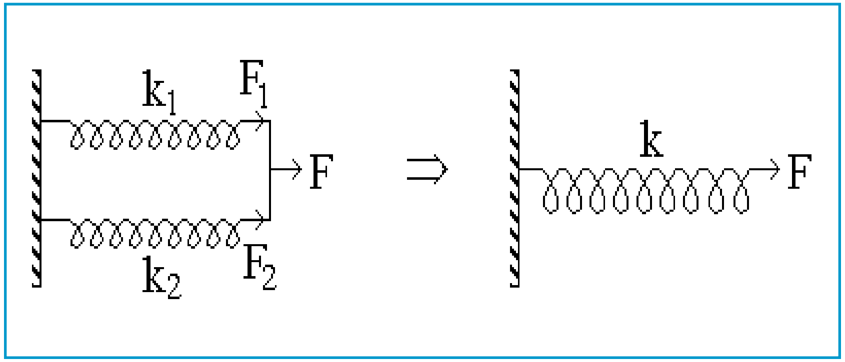
$$v = \frac{dx}{dt} = -wA\sin(wt + \varphi)$$

若$t = 0$时$, x = x_0, v = v_0,$则

$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi \\ v_0 = -wA\sin\varphi \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} A = \sqrt{x_0^{\ 2} + \dfrac{v_0^{\ 2}}{w^2}} \\ tg\varphi = -\dfrac{v_0}{wx_0} \end{cases}$$

▲弹簧的串并时的周期





特性：各弹簧所受的外力相等

$$\begin{cases} F = F_1 = F_2 \\ x = x_1 + x_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad \frac{F}{k} = \frac{F_1}{k_1} + \frac{F_2}{k_2}$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

特性：各弹簧的伸长量相等

$$\begin{cases} F = F_1 + F_2 \\ x = x_1 = x_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad kx = k_1 x_1 + k_2 x_2$$

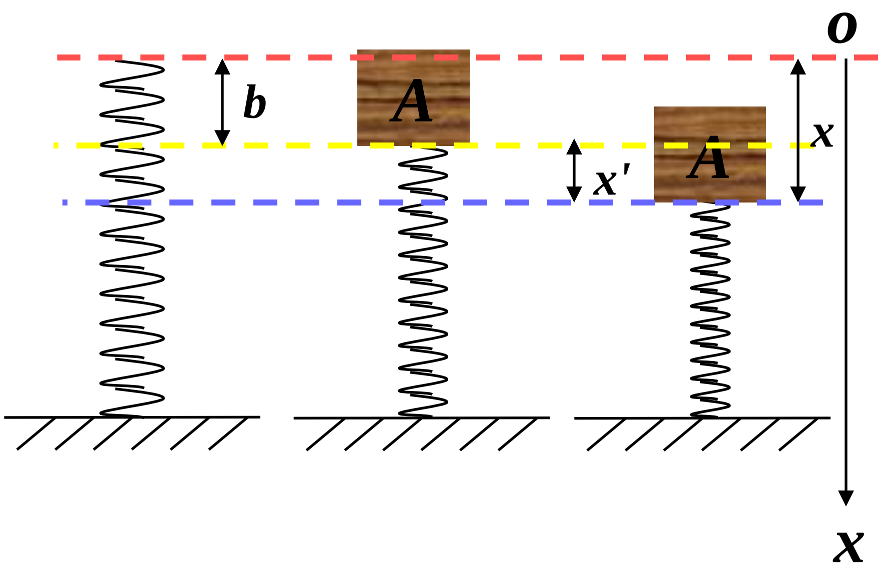
$$\rightarrow \quad k = k_1 + k_2$$

例3. 一倔强系数为k的弹簧, 下端固定在地面上, 上端压一质量为m的重物,重物使弹簧缩短b=9.8cm.如果给物体一向下的瞬时冲力,使它以1m/s的向下速度启动,并上下振动.试分析物体的运动规律,并求振动的频率f及振幅A?

解: 设未压物体时,弹簧的上端为坐标原点o,取x轴竖直向下.

重物在任一位置x时的运动方程为

$$\begin{cases} mg - kx = ma = m\dfrac{d^2x}{dt^2} \\ mg = kb \end{cases}$$



$$\Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x-b)$$

令$x' = x - b$,则

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2}$$

$$\therefore m\frac{d^2x'}{dt^2}=-kx'$$

物体作简谐振动

$$w=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{g}{b}}=10s^{-1}$$

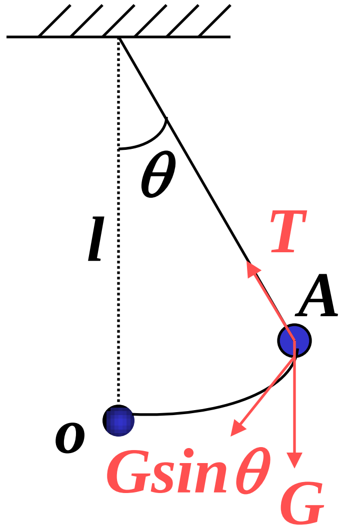
$$f=\frac{w}{2\pi}=1.59Hz$$

$$\because t=0\text{时},x_0'=0,v_0=1m/s,w=10s^{-1}$$

$$\therefore A=\sqrt{x_0'^2+\frac{v_0^{\ 2}}{w^2}}=0.1m$$

2. 单摆

一根不会伸缩的细绳,下端悬挂一个很小的重物. (θ<5°)



(1).

$$\begin{cases} f = -mg\sin\theta \approx -mg\theta \quad (\sin\theta \approx \theta) \\ a_\tau = l\dfrac{d^2\theta}{dt^2} \end{cases}$$

由牛二,得

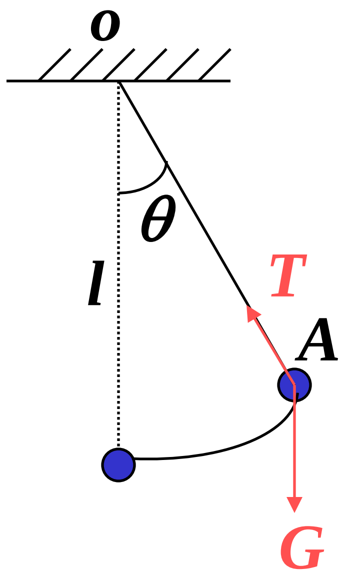
$$\Rightarrow \quad a = l\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{f}{m} = -g\theta$$

令$w^2 = \dfrac{g}{l}$,则

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -w^2\theta$$

单摆的运动是简谐运动.

(2). 从刚体角度来推导



$$\begin{cases} M = -mgl\sin\theta \\ I = ml^2 \end{cases}$$

$$\xRightarrow[\text{定理,得}]{\text{由转动}} M = -mgl\sin\theta = I\beta = ml^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\therefore \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

$$\xRightarrow{\sin\theta\approx\theta} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

令$w^2 = \dfrac{g}{l}$,则

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + w^2\theta = 0$$

单摆的运动是简谐运动.

$$T=\frac{2\pi}{w}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

单摆的振动周期也决定于振动系统本身的性质(即重力加速度g与摆长*l*).

单摆的运动方程

$$\theta=\theta_0\cos(wt+\varphi)$$

例4. 一单摆摆长$l=0.8m$,质点质量$m=0.30kg$,把单摆向右拉离平衡位置15°,自由释放,假定振动是简谐的,求

(1). 角频率w,振动周期T;

(2). 幅角θ_0,初位相φ和振动方程;

(3). 最大角速度;

(4). 什么时候,细绳中张力T最大?最大张力是多少大?

(5). 单摆的实际振动周期?

解: (1).

$$w = \sqrt{\frac{g}{l}} = 3.5rad\ /\ s$$

$$T = \frac{2\pi}{w} = 1.795s$$

(2).设单摆振动方程为

$$\theta = \theta_0 \cos(3.5t + \varphi)$$

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = -3.5\theta_0 \sin(3.5t + \varphi_0)$$

$$\because t=0,\theta=15^{\circ}=0.262rad,\dot{\theta}=0$$

$$\therefore 0.262=\theta_0\cos\varphi \qquad 0=-3.5\theta_0\sin\varphi$$

$$\therefore \varphi=0,\theta_0=0.262rad,$$

振动方程为

$$\theta=0.262\cos(3.5t)rad$$

(3). $\dot{\theta}_{max}=w\theta_0=0.917rad/s$

(4). 单摆在平衡位置时,细绳中张力最大

$$F_{max}=mg+m\dot{\theta}_{max}^{2}l=3.14N$$

(5). $T'=T\left[1+\frac{1}{4}\sin^2(\frac{1}{2}\times15^{\circ})+\frac{9}{64}\sin^4(\frac{1}{2}\times15^{\circ})+\cdots\right]$

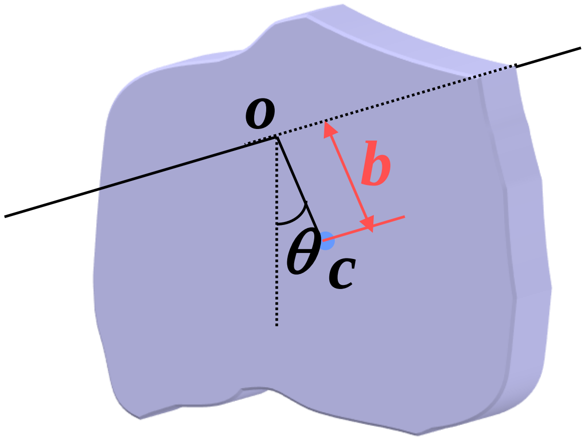
$$=1.803s$$

3. 复摆

在重力作用下在竖直平面内绕水平轴自由振动的刚体.

$$M = -mgb\sin\theta$$

$$\therefore I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgb\sin\theta \qquad (转动定理)$$



$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgb}{I}\sin\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgb}{I}\theta \qquad (\sin\theta \approx \theta)$$

令$w^2 = \dfrac{mgb}{I}$,则

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + w^2\theta = 0$$

复摆的运动是简谐运动.

$$T=\frac{2\pi}{w}=2\pi\sqrt{\frac{I}{mgb}}$$

★ 等值摆长l_0

长为b的单摆的周期

$$T=\frac{2\pi}{w}=2\pi\sqrt{\frac{b}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{mbb}{mbg}}=2\pi\sqrt{\frac{I}{mgb}}$$

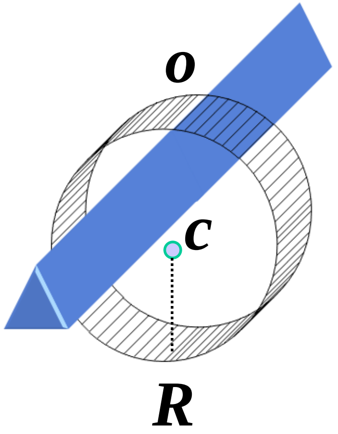
与复摆具有相同周期的单摆的摆长 ------ 等值摆长

复摆：$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mbg}}$　　单摆：$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{l_0}{g}}$

$$l_0=\frac{I}{mb}$$ 等值摆长

例5. 半径为R的圆环悬挂在一细杆上,求圆环的振动周期和等值摆长?

解: $I = I_c + mR^2 = 2mR^2$　　　　$b = R$



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgb}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{2mR^2}{mgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$$

等值摆长为

$$l_0 = \frac{I}{mb} = \frac{2mR^2}{mR} = 2R$$

易错处: 转动惯量 及 b

6.3 简谐运动的能量

弹簧振子（水平）

振动物体的动能

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

振动物体的势能

$$E_P = \frac{1}{2}kx^2$$ (选平衡位置的势能为零)

$$x = A\cos(wt+\varphi) \qquad v = \frac{dx}{dt} = -wA\sin(wt+\varphi)$$

$$\Rightarrow E_k = \frac{1}{2}mw^2A^2\sin^2(wt+\varphi)$$

$$(\because w^2 = \frac{k}{m})$$

$$E_P = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(wt+\varphi)$$

$$\Rightarrow E = E_k + E_P = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mw^2A^2$$

★ 谐振系统的动能和势能随时间(或位移)而变化,但总的机械能不变; x: A $E_P \to max$, $E_k \to 0$; x: 0 $E_P \to 0$, $E_k \to max$

★ 简谐振动的总能量和振幅的平方成正比.

例6. 一质量为$m=3kg$的物体与轻质弹簧组成一弹簧振子,振幅$A=0.04\ m$,周期$T=2s$,求振子总能量及物体的最大速率?

解:

$$E=\frac{1}{2}kA^2$$

$$\because T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\therefore k=\frac{(2\pi)^2 m}{T^2}=29.6N/m$$

总能量为

$$E=\frac{1}{2}kA^2=2.37\times10^{-2}J$$

$$v_{max}=wA=\frac{2\pi}{T}A=0.126m/s$$

例、某弹簧振子经过平衡位置时的动能为2×10^{-5}J，求振子经过距平衡位置为A/2（A为振幅）处时，其势能和动能?

解:

$$E=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}mw^2A^2=2\times10^{-5}J$$

$$E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}k\left(\frac{A}{2}\right)^2=0.5\times10^{-5}J$$

$$E_k=E-E_p=1.5\times10^{-5}J$$

6.4 同方向简谐运动的合成

一. 同方向同频率的简谐振动的合成

设两简谐振动分别为

$$x_1 = A_1 cos(wt + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 cos(wt + \varphi_2)$$

则合位移为

$$x = x_1 + x_2$$

$$= A_1 cos(wt + \varphi_1) + A_2 cos(wt + \varphi_2)$$

$$x = A cos(wt + \varphi)$$

式中

$$A=\sqrt{A_1^{\,2}+A_2^{\,2}+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

$$\varphi=arctg\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$$

合振动仍是简谐振动，其振动方向和频率都与原来的两个振动相同。

★ 注意：φ值不一定在反正切函数的值域内，可结合初始条件或利用旋转矢量图来决定φ

例7. 一质点同时参与两个在同一直线上的简谐运动，其表达式为

$$x_1 = 4\cos(2t + \frac{\pi}{2}) \qquad x_2 = 3\cos(2t + \frac{2}{3}\pi)$$

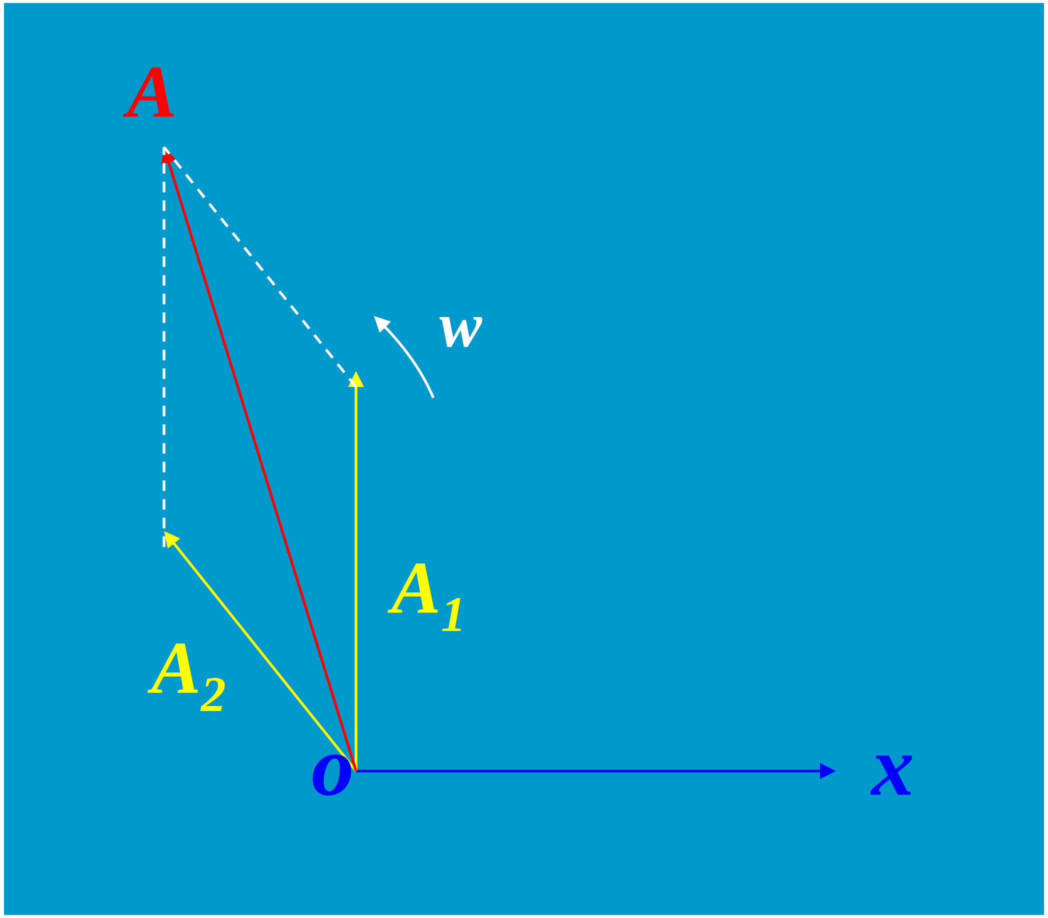
试求其合振动的振幅和相位?

解:

$$A = \sqrt{A_1^{\ 2} + A_2^{\ 2} + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = 6.77m$$

$$tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} = -4.4$$

$$\Rightarrow \varphi = -77.2°$$

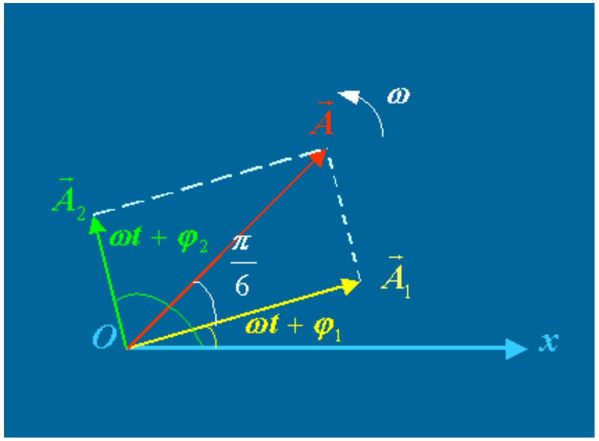


$$\varphi\text{介乎于}\frac{\pi}{2}\text{和}\frac{2}{3}\pi\text{之间}$$

$$\Rightarrow \varphi = 180^\circ - 77.2^\circ = 102.8^\circ$$

例8. 有两个同方向,同频率的简谐振动,其合成振动的振幅为*0.20m*,相位与第一振动的相位差为*π/6*.已知第一振动的振幅为*0.173m*,求第二振动的振幅以及第一,第二 振动之间的相位差?

解:



由三角形关系,得 (ΔOAA_1)

$$A_2 = \sqrt{A_1^{\ 2} + A^2 - 2A_1 A \cos\frac{\pi}{6}} = 0.10m$$

$$\because A = \sqrt{A_1^{\ 2} + A_2^{\ 2} + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = 0.20m$$

$$\therefore \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$$