第八章 静 电 场

8.1 电　荷

一、两种电荷：

富兰克林于1747年通过放电实验对电进行了定量，并命名为正电和负电。

由物质的原子结构理论：任何宏观物体内都带有大量的“正电荷”和“负电荷”。但通常情况下，正、负电荷的总量相等，因此对外不呈现电性。

电荷间的相互作用：

同号电荷互相排斥；异号电荷互相吸引。

二. 电荷的量子化

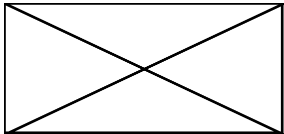
十九世纪以前，带电体中的电荷被设想成连续的流体。

*1913*年密立根 (*Millikan, 1868—1953*) 通过油滴实验证实：任何带电体所带的电量都是某个基本电量的整数倍。

$$q=\frac{18\pi}{\sqrt{2\rho g}}\left[\frac{\eta l}{(1+b/(pa))t_g}\right]^{3/2}=ne \quad n=\pm 1,\pm 2,\pm 3,\ldots$$

而基本电量的大小等于一个电子或一个质子所带电量的绝对值：

$$e=1.60217733\times 10^{-19}c$$



三. 电荷守恒定律、电荷的相对论不变性

电荷守恒定律： 电荷只能从一物体转移到另一物体，或者从物体的一部分转移到另一部分，但电荷既不能被创造也不能被消灭。

在一孤立系统中，不论发生怎样的物理过程，该系统电量的代数和保持不变。

电荷的相对论不变性： 一个带电体所带的电量不因带电体的运动而改变。

8.2 库 仑 定 律

一. 点电荷模型

形状，大小均可忽略不计的带电体

（带电体本身的几何线度比它到观察点的距离小得多）

二. 库仑定律

1. 真空中

单位矢量

$$\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\vec{r}_{12}^{\,0}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.99\times10^9\ Nm^2/c$$

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} c^2 / Nm^2$$ ——真空介电常数

$$\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}{}^2} \vec{r}_{12}^{\,0}$$

2. 无限大均匀电介质中

$$\vec{f} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\vec{r}^{\,0} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{r}^{\,0}$$

ε_r ——相对介电常数

ε ——介电常数

$$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$$

三. 电力叠加原理

当考虑两个以上静止电荷之间的作用力时，要补充另一个实验事实：两个点电荷之间的作用力并不因为第三个点电荷的存在而有所改变。

若多个点电荷$q_1,q_2\ldots q_n$同时存在，则它们对另一点电荷q_0的静电力，等于各点电荷单独存在时作用在q_0上的静电力的矢量和.

$$\vec{F}=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_0 q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^{\,2}}\vec{r}_i^{\,0}$$

$$\vec{F}=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_0 q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^{\;2}}\vec{r}_i^{\,0}$$

r_i：q_i到q_0点电荷的距离

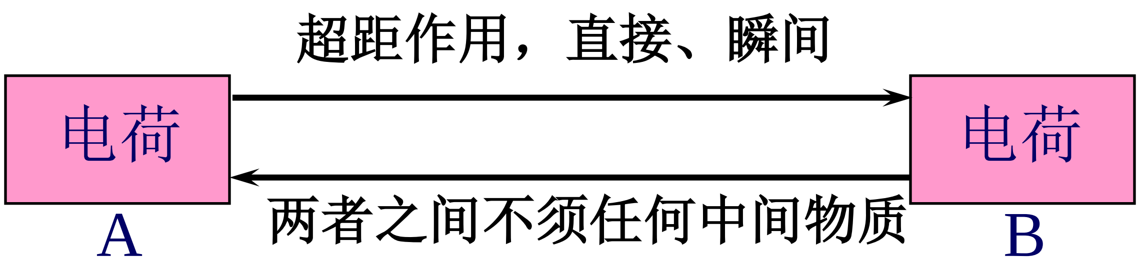
$\vec{r}_i^{\,0}$：q_i指向q_0的单位矢量

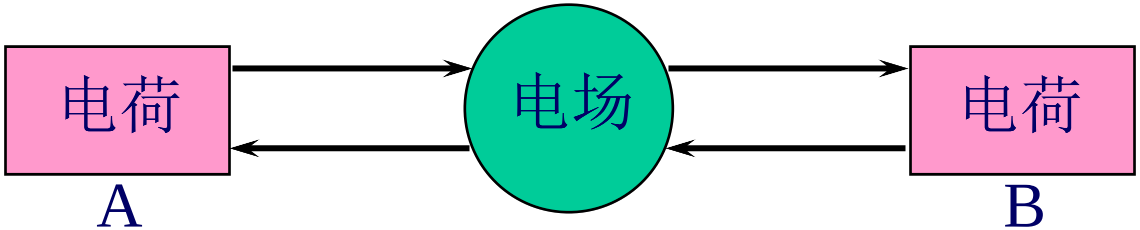
利用库仑定理和电力叠加原理原则上可以解决静电学的全部问题.

8.3 电场　电场强度

一. 电场

电荷间的相互作用是如何进行的？





电场力

电场对处在场中的其他电荷的作用力

静电场

相对于观察者静止的电荷在周围空间激发的电场。

二. 电场强度*E*

试验电荷所受的力和试验电荷所带电量之比及试验电荷所受力的方向来描述电场

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

单位： N/c 或 V/m

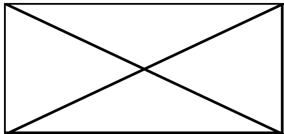
电场中任一点的场强在量值和方向上等于一个单位正电荷在该点所受的力

▲注意:

E为表征静电场中某点的电场性质的物理量，与该点电荷的存在及其多少无关;

▲匀强电场

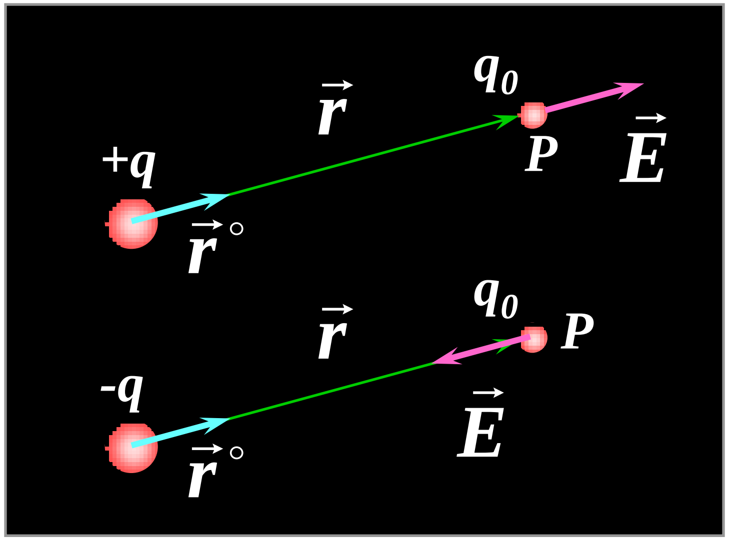
电场空间中各点的场强大小和方向均相同



三. 电场强度的计算

(1) 点电荷的场强：

在距电荷 q（场源电荷）为r的P点放一试探电荷q_0，由库仑定律：



$$\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\vec{r}^{\circ}$$

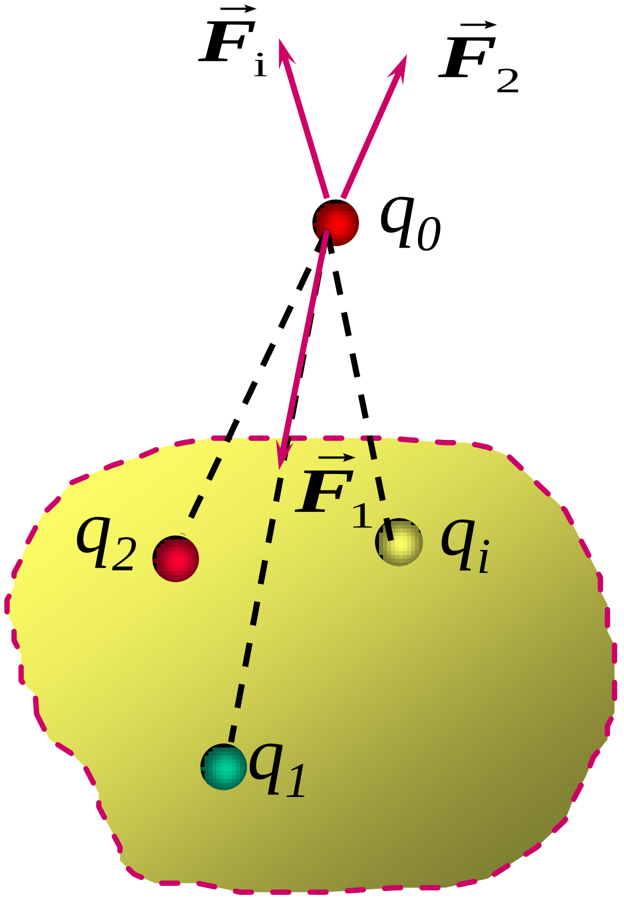
由电场强度的定义，P点场强为：

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}^{\circ}$$

当$q>0$时，$\vec{E},\vec{r}^{\circ}$同向； $q<0$时，$\vec{E},\vec{r}^{\circ}$反向。

（2）场强迭加原理和点电荷系的场强

若多个点电荷$q_1,q_2\dots q_n$（点电荷系）同时存在共同激发电场



电力叠加原理

$$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots+\vec{F}_n$$

两边除以q_0

$$\frac{\vec{F}}{q_0}=\frac{\vec{F}_1}{q_0}+\frac{\vec{F}_2}{q_0}+\cdots+\frac{\vec{F}_n}{q_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots+\vec{E}_n$$

电场中任一点的总场强等于各个点电荷在该点各自产生的场强的矢量和

点电荷的场强：

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}^{\circ}$$

点电荷系的电场

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots+\vec{E}_n$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1^2}\vec{r}_1^{\circ}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2^2}\vec{r}_2^{\circ}+\cdots+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_n}{r_n^2}\vec{r}_n^{\circ}$$

$$\vec{E}=\sum\vec{E}_i=\sum\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i^2}\vec{r}_i^{\circ}$$

(3). 任意带电体电场中的场强计算

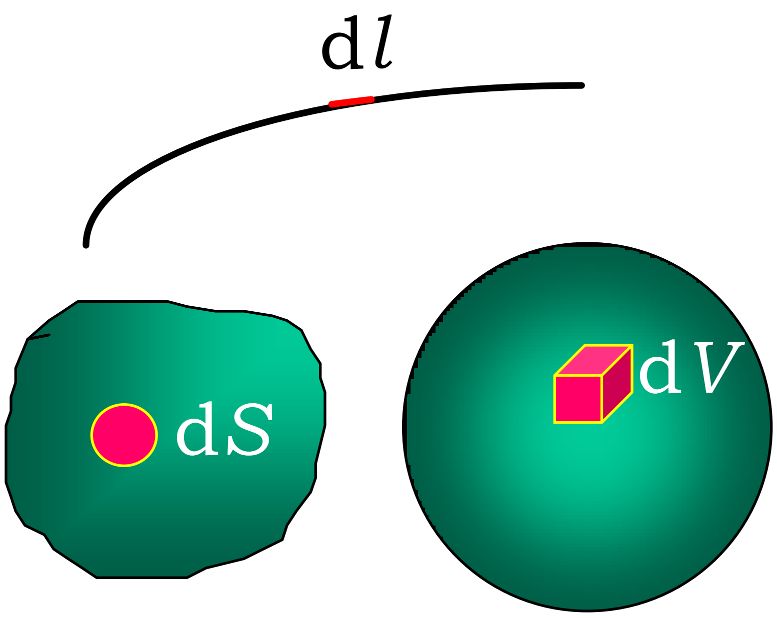
把带电体看成是电荷元dq的集合

等效成点电荷

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{r}^{\,0}$$

电荷连续分布

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\vec{r}^{\,0}$$



注意：实际处理时，由于总场强是矢量的和，与方向有关.通常把dE分成x、y两个方向的分量后再积分。

①. 电荷分布在细长线上　　长度元dl（看成点电荷）

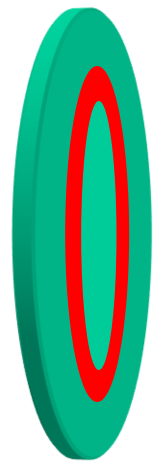
$$\lambda = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl}$$ ——线密度

$$dq = \lambda dl \qquad dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\lambda dl}{r^2} \vec{r}^{\,0}$$

②. 电荷分布在一平面或曲面上 适当形状的面积元*dS*

（不能看成点电荷）



③. 电荷分布在一体积内

适当形状的体积元dV
（不能看成点电荷）

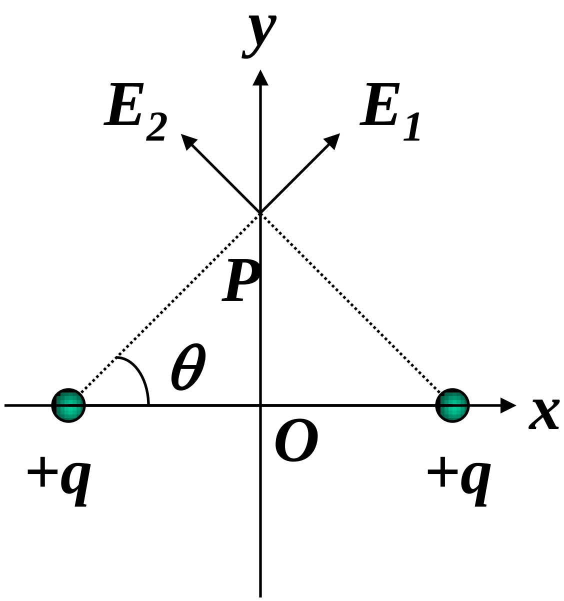
常用高斯定理求解

例、两个电量均为+q的点电荷,相距2a,连线中点为o,试问它们连线垂直平分线上,哪一点的场强最大?

解:

$$E_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(a^2+y^2)}$$

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(a^2+y^2)}$$



由对称性可知

$$E = E_{1y} + E_{2y} = \frac{q\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0(a^2+y^2)} + \frac{q\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0(a^2+y^2)}$$

$$= \frac{q\sin\theta}{2\pi\varepsilon_0(a^2+y^2)} \qquad = \frac{qy}{2\pi\varepsilon_0(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E = \frac{qy}{2\pi\varepsilon_0 (a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

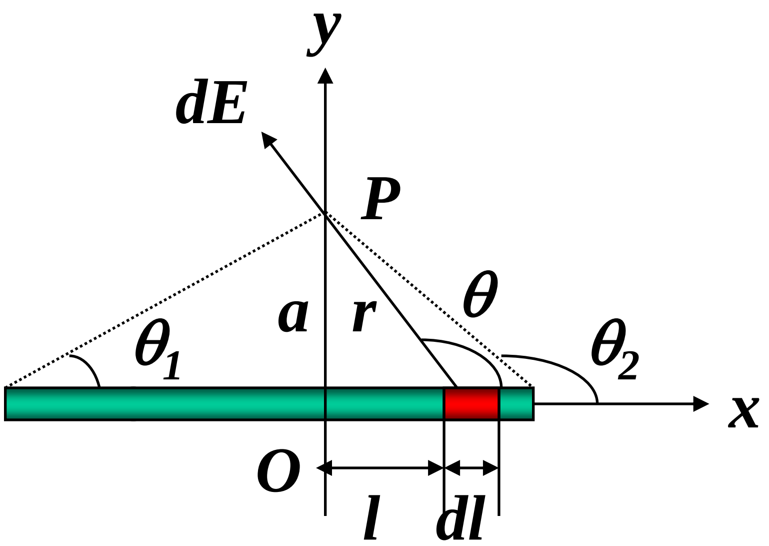
$$\frac{dE}{dy} = 0$$

$$\therefore y = \pm \frac{a}{\sqrt{2}} \text{时}, E_{max} = \frac{q}{3\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 a^2}$$

例、一均匀带电直线，长L，总电量q，线外一点P离直线的垂直距离为a。P和直线两端的连线与直线的夹角为θ_1、θ_2，求E_P=?

解: (1). 选取合适的微元，并在坐标系中对微元定位

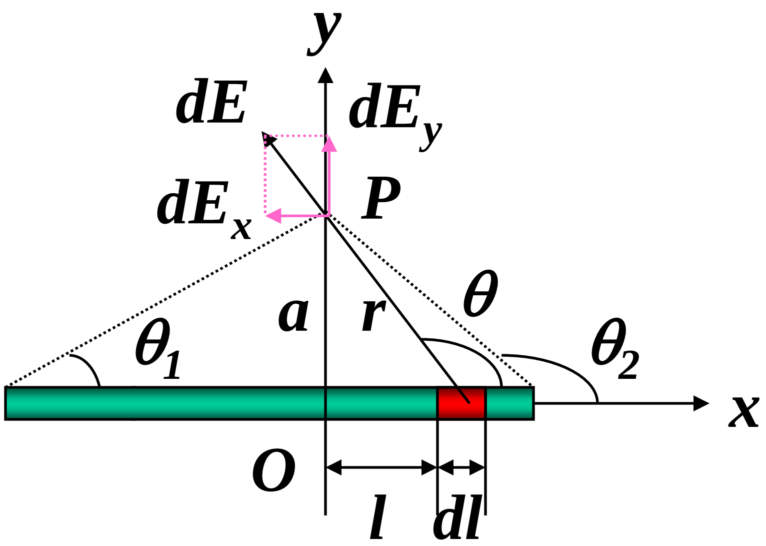
$$\because dq = \lambda \cdot dl$$



(2). 列出对应微元的dE

$$\therefore d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{r^2}\vec{r}^{\,0}$$

(3). 分成分量



$$dE_x = dE\cos\theta = \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta$$

$$dE_y = dE\sin\theta = \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sin\theta$$

(4). 统一变量

$$\text{又} \because l = a \cdot tg\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -a \cdot ctg\theta$$

$$\therefore dl = a\csc^2\theta d\theta \qquad r^2 = a^2 + l^2 = a^2\csc^2\theta$$

$$dE_x = dE\cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\cos\theta d\theta$$

$$dE_y = dE\sin\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\sin\theta d\theta$$

(5). 确定上下限，积分

$$\Rightarrow E_x = \int dE_x = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a} \cos\theta d\theta$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

$$E_y = \int dE_y = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a} \sin\theta d\theta$$

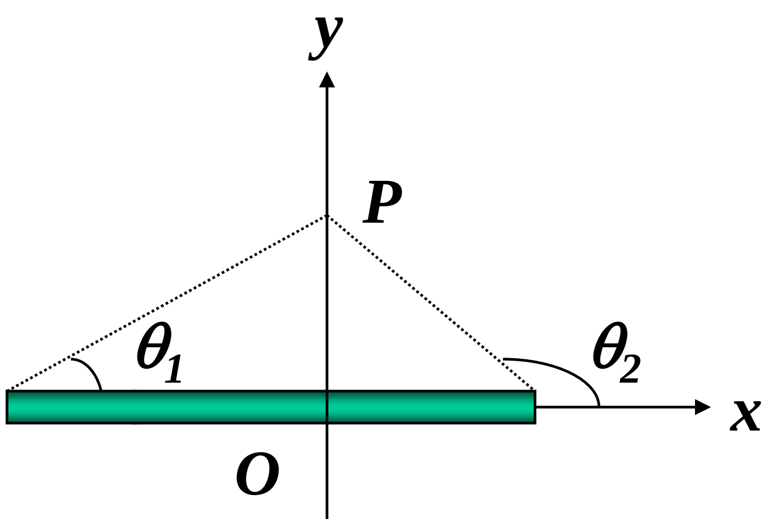
$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} = \ldots\ldots$$

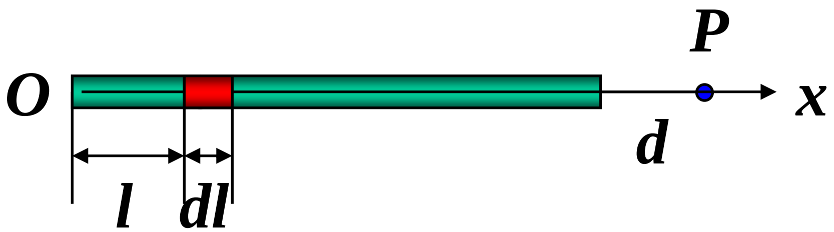
★讨论:

1. 带电直线无限长,即$\theta_1=0$，$\theta_2=\pi$

$$E_x = 0 \qquad E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$$



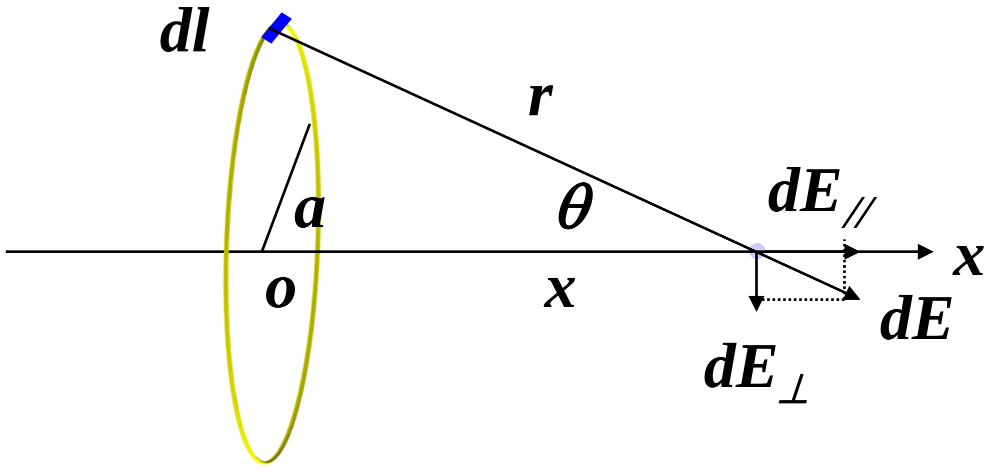
2. P点位于导线一端延长线上



课后完成

例、计算均匀带电圆环轴线上任一点P处的场强，半径a，带电量q。P距圆心为x.

解:



$$dq = \lambda \cdot dl = \frac{q}{2\pi a} dl$$

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{r}^{\,0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qdl}{2\pi a} \frac{1}{r^2} \vec{r}^{\,0}$$

由对称性可知

各电荷元的场强在垂直x轴的方向上的分矢量$dE_\perp$相互抵消

$$\therefore E=\int_L dE_{//}=\int_L dE\cos\theta=\int\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qdl}{2\pi a}\frac{1}{r^2}\cos\theta$$

各电荷元与P的距离r相同, θ角相同

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\cos\theta}{2\pi ar^2}\oint dl=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\cos\theta}{r^2}$$

$$\because \cos\theta=\frac{x}{r},\ x^2+a^2=r^2$$

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

方向指向x轴正向

★讨论:

1. $x = 0$ 时

$$E = 0$$

2. $x >> a$ 时

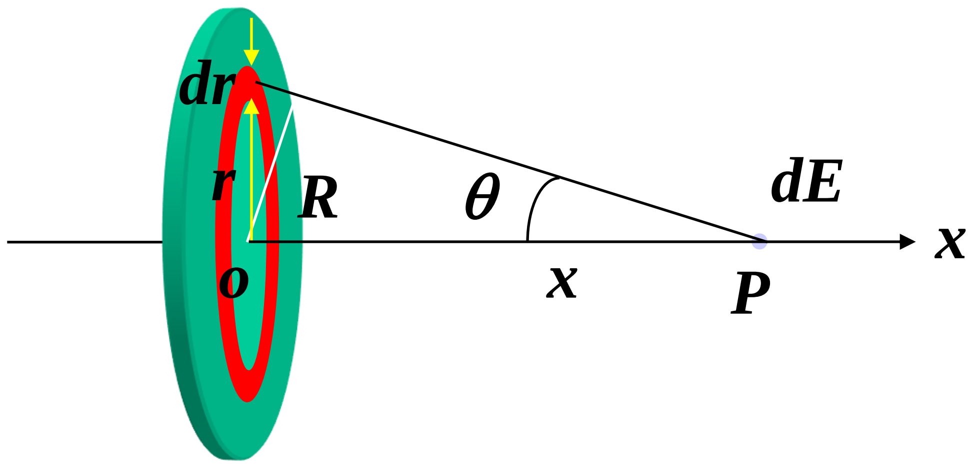
$$(x^2 + a^2)^{3/2} \approx x^3$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{x^2}$$

可看作点电荷

例、计算均匀带电圆盘圆心轴线上任一点*P*处的场强，半径*R*，*P*距盘心为*x*，面密度为+*σ*.

解:



距圆心*r*处取一宽为*dr*的圆环 $dq=\sigma 2\pi r dr$

圆环在*P*点产生的电场强度为

$$dE=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{xdq}{(x^2+r^2)^{3/2}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x(\sigma 2\pi r dr)}{(x^2+r^2)^{3/2}}$$

方向指向*x*轴正向

$$\therefore E=\int dE=\frac{\sigma 2\pi x}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R\frac{rdr}{(x^2+r^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{1}{\sqrt{1+R^2/x^2}}\right]$$

$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right]$$

方向指向*x*轴正向

★讨论:

1. $R >> x$, 即圆盘无限大

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

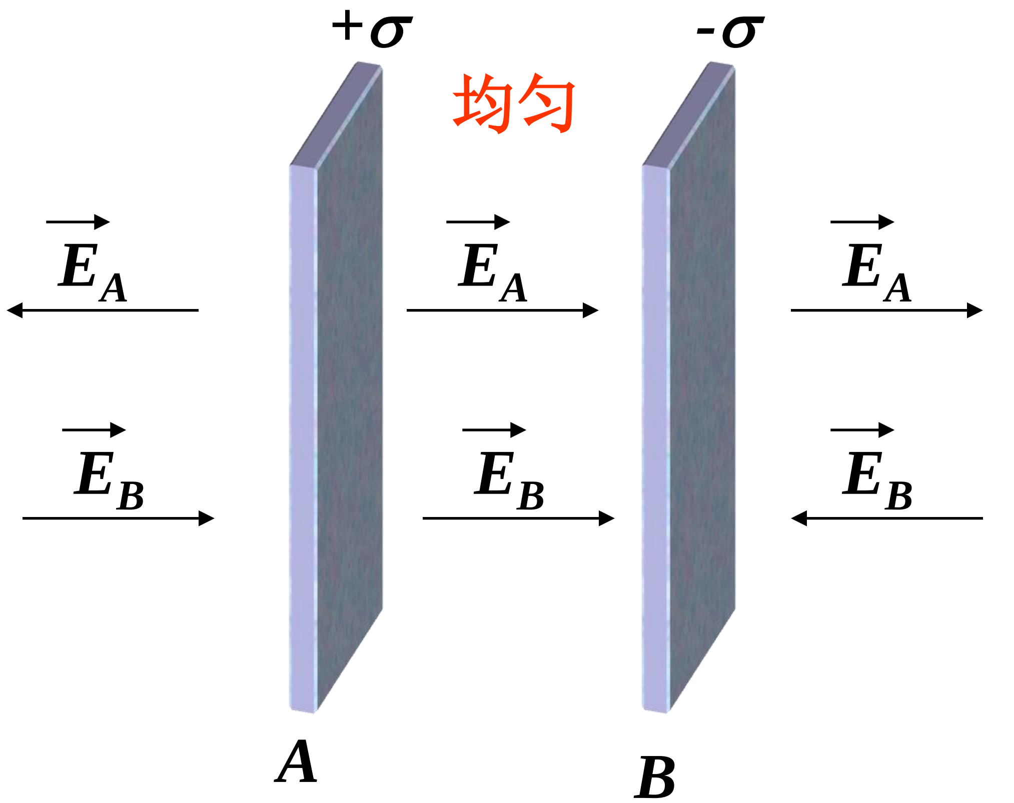
2. $x >> R$

$$\left(1+\frac{R^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}\frac{R^2}{x^2}+\frac{3}{8}\left(\frac{R^2}{x^2}\right)^2-\cdots$$

$$\approx 1-\frac{1}{2}\frac{R^2}{x^2}$$

$$E = \frac{\sigma R^2}{4\varepsilon_0 x^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$ 近似为一点电荷

3. 两平行无限大均匀带电平板



$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

两板间 $$E = E_A + E_B = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

两板外侧 $$E = E_A - E_B = 0$$

★ 求解带电体产生的场强的一般步骤：

1. 根据带电体的形状，选取合适的微元，对微元定位并写出相应的dq；

2. 根据微元的形状写出适当形式的场强dE；

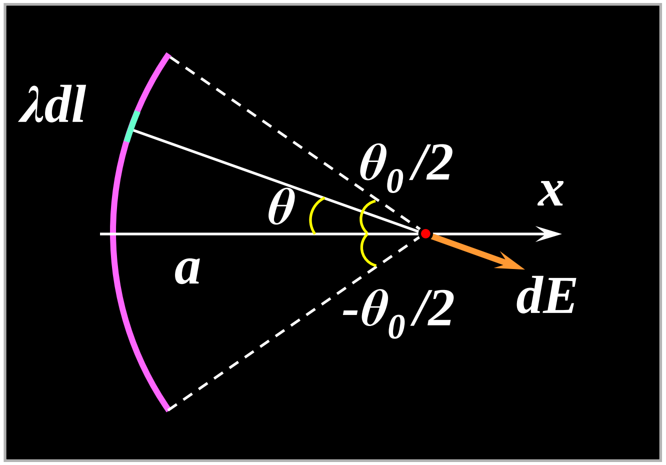
3. 写出微元场强dE的各个分量式（不同方向时）；

4. 统一积分变量，确定积分上下限，求出各分量值；

5. 求出总场强的大小和方向。

练习：总电量为q的均匀带电细棒，弯成半径为a的圆弧，圆弧对中心的张角为θ_0，求圆心处的场强。

$$dq = \lambda dl \qquad dE = \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$



由对称性：场强沿x方向。

$$dE_x = \frac{\lambda\, dl}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\cos\theta$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\frac{q}{\theta_0 a}\cos\theta \cdot a d\theta = \frac{q\cos\theta\, d\theta}{4\pi\varepsilon_0 a^2\theta_0}$$

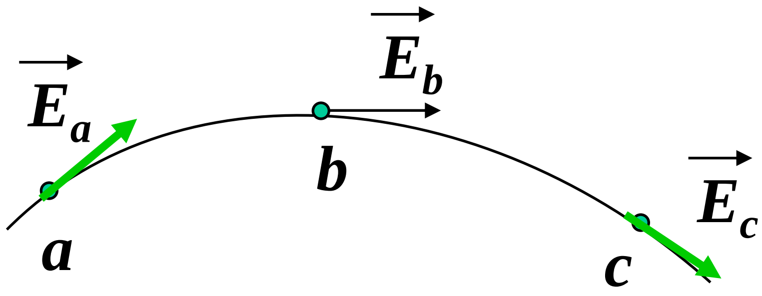
场强沿x方向。

$$E = \int_{-\theta_0/2}^{\theta_0/2} dE_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2\theta_0}\left(\sin\frac{\theta_0}{2} + \sin\frac{\theta_0}{2}\right) = \frac{q\sin\frac{\theta_0}{2}}{2\pi\varepsilon_0 a^2\theta_0}$$

8.4 高 斯 定 理

一. 电场线

用来描述电场分布情况的曲线



★电场线和电场强度矢量之间有如下关系：

1. 电场线上每一点的切线方向给出该点电场强度的方向；

2. 通过垂直于电场方向单位面积的电场线数等于电场强度的大小

$$E = \frac{\Delta N}{\Delta S_{\perp}}$$

★ 静电场的电场线的重要性质

1. 不形成闭合曲线，也不中断，且起于正电荷,终于负电荷；

2. 任何两条电场线不会相交;

静电场中每一点都具有唯一的确定方向.

3. 静电场的电场线不会形成闭合的曲线。

二. 电通量Φ_E

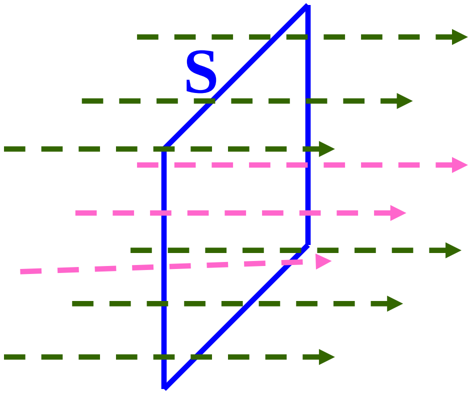
通量是描述矢量场性质的物理量，描述电场的通量，叫做电场强度通量，简称电通量。

定义:

通过电场中某一曲面（或平面）的电场线数称为通过该曲面（或平面）的电通量

1. 匀强电场

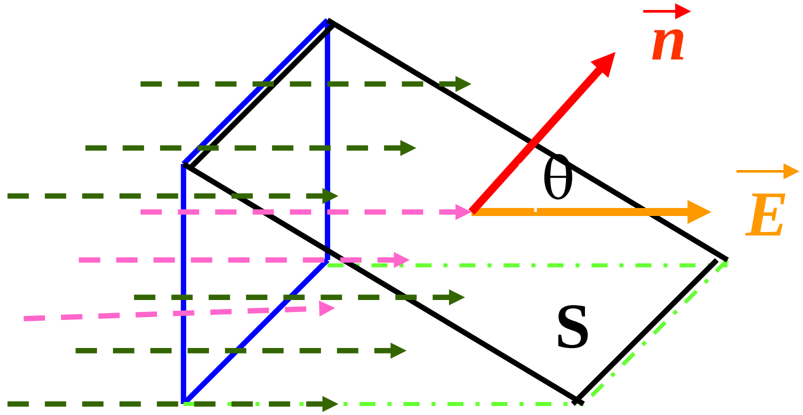
▲ 当面元S 垂直于电场强度的方向时



$\vec{E}$

$$\Phi_E = ES$$

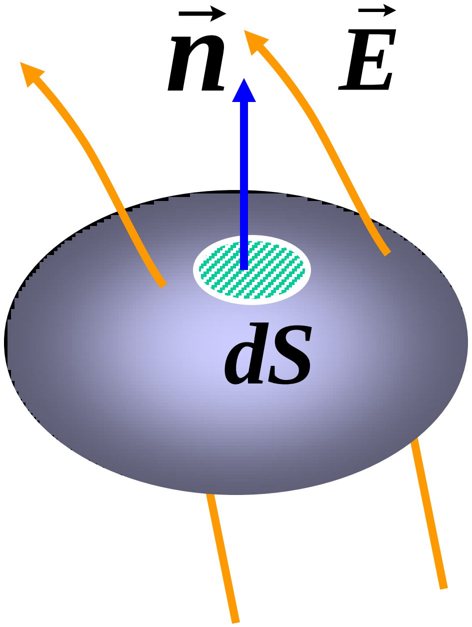
▲ 当面元S 的单位法线矢量与电场强度的方向成θ角时



$$\Phi_E = ES\cos\theta = \vec{E}\cdot\vec{S}$$

2. 非匀强电场中任意曲面

取一面积元*dS*



*dS*非常小

近似认为*dS*面积上的场强是均匀的

$$d\Phi_E = E\cos\theta dS = \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

▲ 面积为S的任意曲面

$$\Phi_E = \int_S E\cos\theta dS = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

▲ 面积为S的任意闭合曲面（称为高斯面）

$$\Phi_E = \oint_S E\cos\theta dS = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

规定：

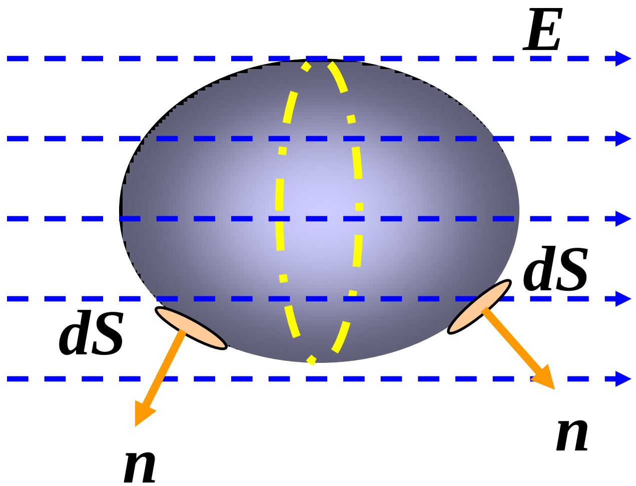
高斯面上任意面元的单位法线矢量总是由高斯面内指向高斯面外

$$\vec{E}\cdot d\vec{S}<0$$

电场线穿入，对电通量的贡献为负

$$\vec{E}\cdot d\vec{S}>0$$

电场线穿出，对电通量的贡献为正



电通量的单位：

国际单位制中　　伏•米（V m）

三. 高斯定理

高斯定理是用电通量表示的电场和场源电荷关系的定理，是电磁学的一条重要定理。它是由德国物理学家和数学家高斯K. F. Gauss, 1777—1855）利用电通量的概念根据库仑定律和场强叠加原理推导出的

$$\Phi_{ES} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}$$

在真空中的任意静电场中,通过任一闭合曲面的电通量等于这闭合曲面所包围的电荷的代数和的ε_0分之一

——高斯定理

★ 注意

1. E是指高斯面（即闭合曲面）上的合场强，它是 高斯面内外所有电荷在高斯面S上任一点所产生的场强的矢量和，当$\Sigma q=0$时，$\Phi_E=0$，但高斯面S上的场强不一定为零;

2. Φ_{Es} 是通过高斯面（即闭合曲面）的总电通量，仅由高斯面内的总电荷量决定，高斯面外的电荷对这一总电通量无贡献；

3. $\sum q_i$ 是指高斯面（即闭合曲面）内所有电荷(净电荷)的代数和;

4. 用高斯定理求场强时，要求带电系统及其场强的分布具有适当的空间对称性，只有这样，E才能从积分式中提到外面，从而求出场强。

$$\Phi_{ES}=\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=E\oint_S dS=\frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}$$

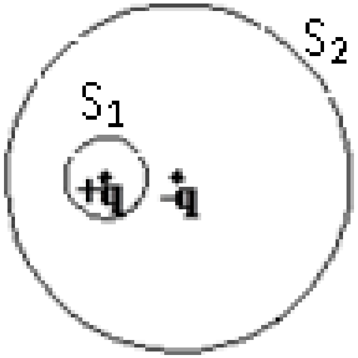
四. 高斯定理的应用

1. 计算电通量

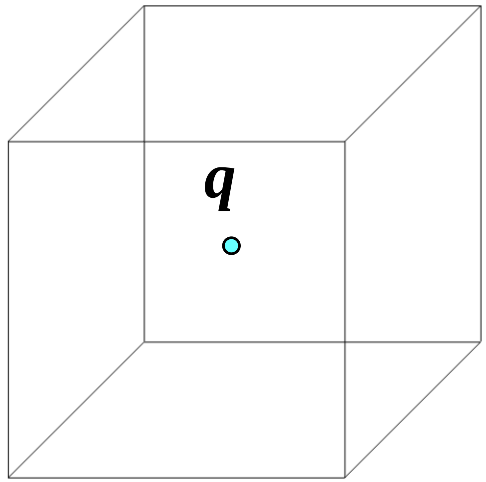
例：点电荷+q和-q的静电场中，作出如图的二个球形闭合面S_1和S_2。求通过S_1的电场通量Φ_1，通过S_2的电场通量Φ_2。

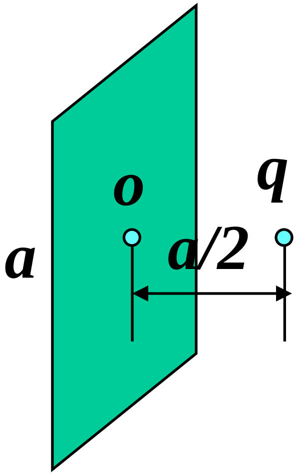
$$\Phi_1 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_2 = 0$$



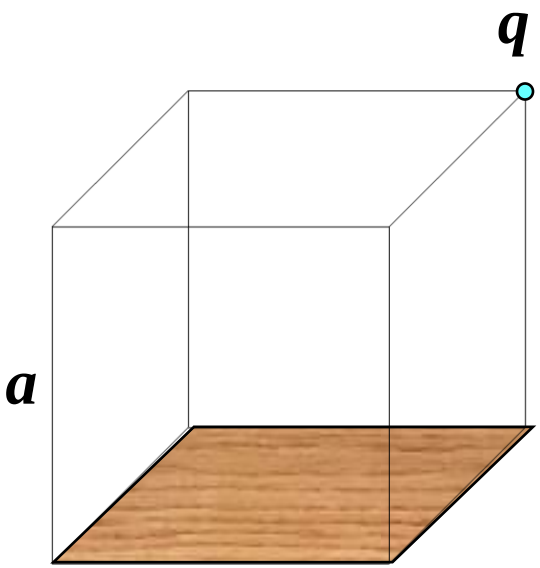
•构建特殊的闭合高斯面

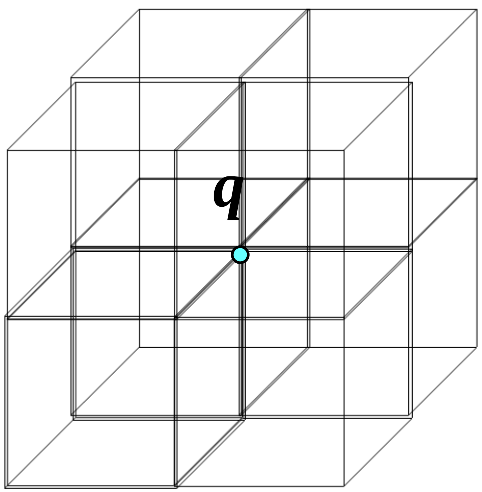




$$\Phi_E = \frac{1}{6}\Phi_{E正}$$

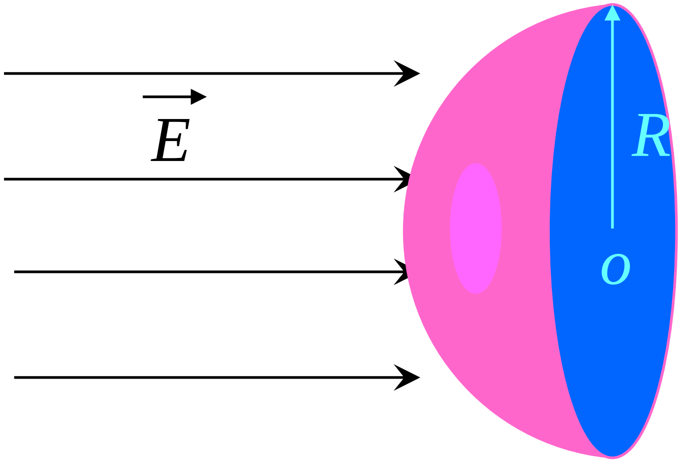
$$= \frac{1}{6}\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{6}\frac{q}{\varepsilon_0}$$





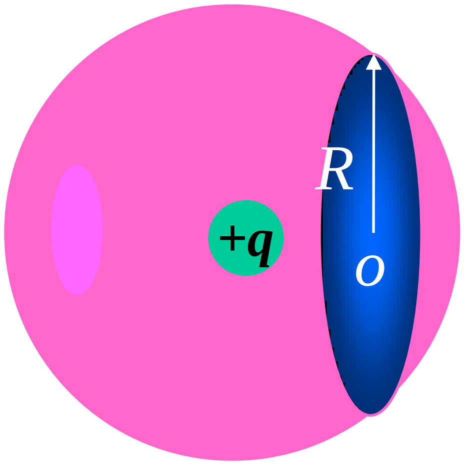
$$\Phi_E = \frac{1}{24}\Phi_{E\text{大立}}$$

$$= \frac{1}{24}\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{24}\frac{q}{\varepsilon_0}$$



$$\Phi_E = \Phi_{E\text{半球}} + \Phi_{E\text{盘}} = 0$$

$$\Phi_{E\text{半球}} = \left|\Phi_{E\text{盘}}\right| = E\pi R^2$$



课后自己完成

2. 计算电场强度

$$\Phi_{ES} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E\oint_S dS = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}$$

具有适当对称性的电场的场强

▲常见的电量分布的对称性

1. 球对称　　均匀带电球面/球体的场强

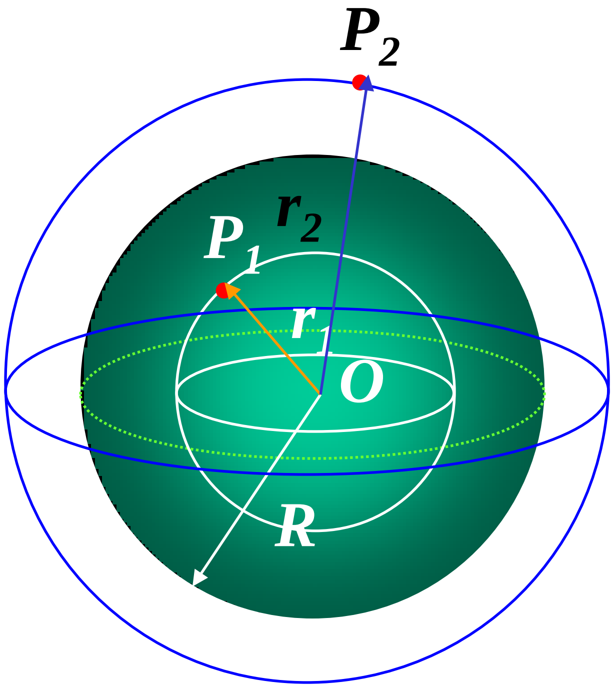
2. 轴对称　　“无限长”均匀带电直线/圆柱体/圆柱面的场强

3. 平面对称　　“无限大”均匀带电板/面的场强

例. 设有一球面半径为R,表面均匀带电,电荷为Q,求球内与球外任一点P_1,P_2处场强.P_1,P_2分别距球心为r_1,r_2?

解: 过P_1,P_2分别作半径为r_1,r_2的辅助球面S_1,S_2

球面上各点电场强度大小相等,且处处与球面正交



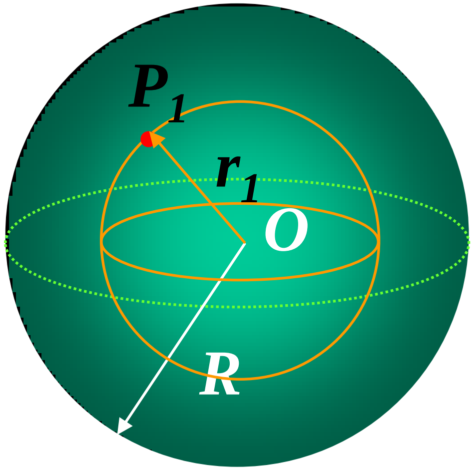
由高斯定理,得

$$\Phi_{E1} = \oint_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 = E_1 \oint_S dS_1 = E_1 4\pi r_1^2$$

$$\Phi_{E2} = \oint_S \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2 = E_2 4\pi r_2^2$$

球面内

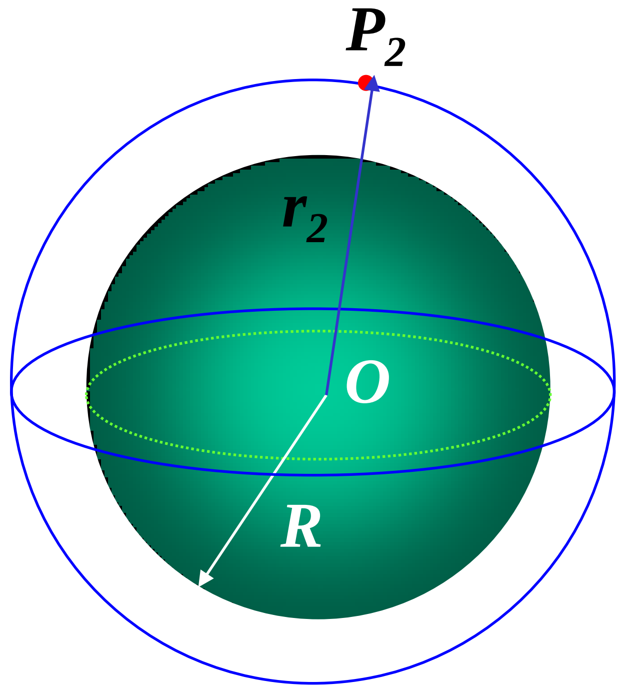
$$\begin{cases} \Phi_{E1} = \oint_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 = E_1 4\pi r_1^{\ 2} \\ \sum q_1 = 0 \\ \boxed{\Phi_{E1} = \dfrac{\sum q_1}{\varepsilon_0}} \end{cases}$$



$$\Rightarrow E_1 = 0 \quad , \quad (r < R)$$

球面外

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\Phi_{E2} = \oint_S \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2 = E_2 4\pi r_2^{\;2} \\
&\sum q_2 = Q \\
&\Phi_{E2} = \frac{\sum q_2}{\varepsilon_0}
\end{aligned}
\right.
$$



$$
\Rightarrow E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2^{\;2}} \quad , \quad (r \geq R)
$$

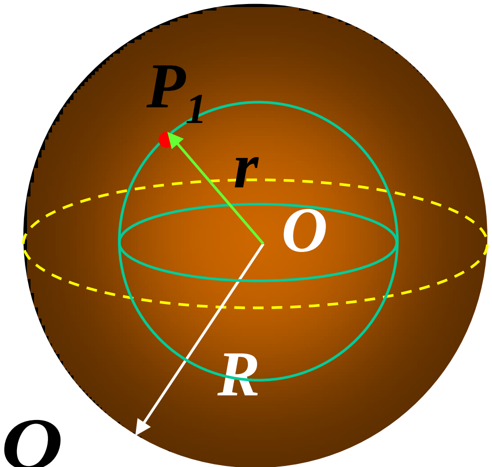
均匀带电球面对球外各点的作用,相当于球面所带电荷全部集中在球心处的一个点电荷一样

$$\Phi_{ES} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}$$

★讨论:

若为均匀带电球体

球体外 $$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (r > R)$$



球体内 $$\Phi_{E1} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E 4\pi r^2$$

$$\sum q_1 = \rho \cdot V_{高斯} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{r^3}{R^3} Q$$

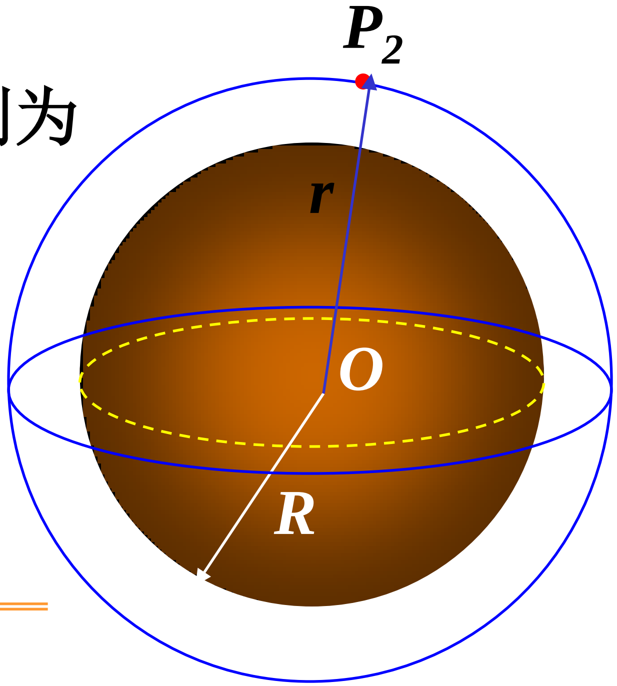
$$E = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \quad (r \le R)$$

注意: 金属带电球体与均匀带电球体不同.

若为非均匀带电球体，其电荷体密度分别为

$$\rho = \begin{cases} Ar & (r \le R) \\ 0 & (r > R) \end{cases}$$

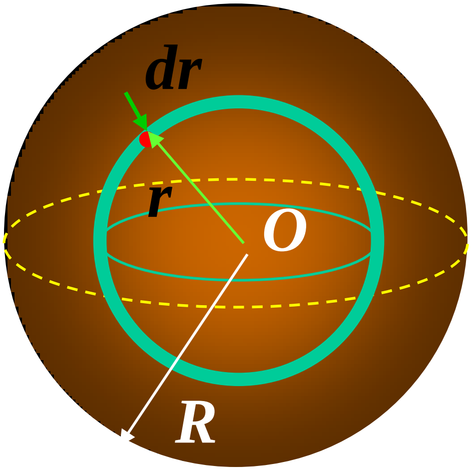
求球体内、外的场强分布？



球体外

$$\Phi_{E2} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E\,4\pi r^2$$

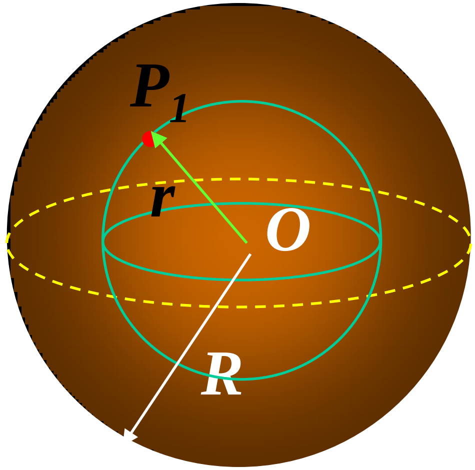
$$\sum q_2 = \int_0^R \rho 4\pi r^2 dr = A\pi R^4$$



$$\boxed{\Phi_{E2} = \frac{\sum q_2}{\varepsilon_0}}$$

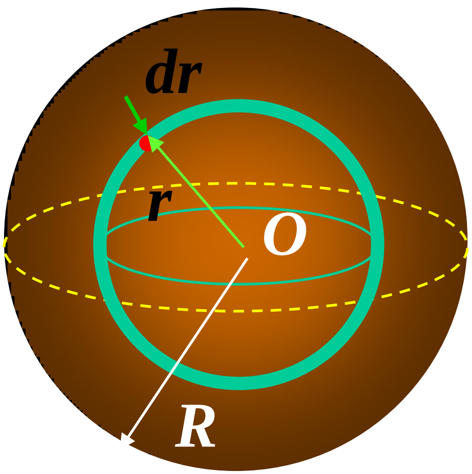
$$\Rightarrow E = \frac{AR^4}{4\varepsilon_0 r^2} \quad (r > R)$$

球体内



$$\Phi_{E1} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E\,4\pi r^2$$

$$\sum q_1 = \int_0^r \rho 4\pi r^2 dr = \int_0^r A4\pi r^3 dr = A\pi r^4$$



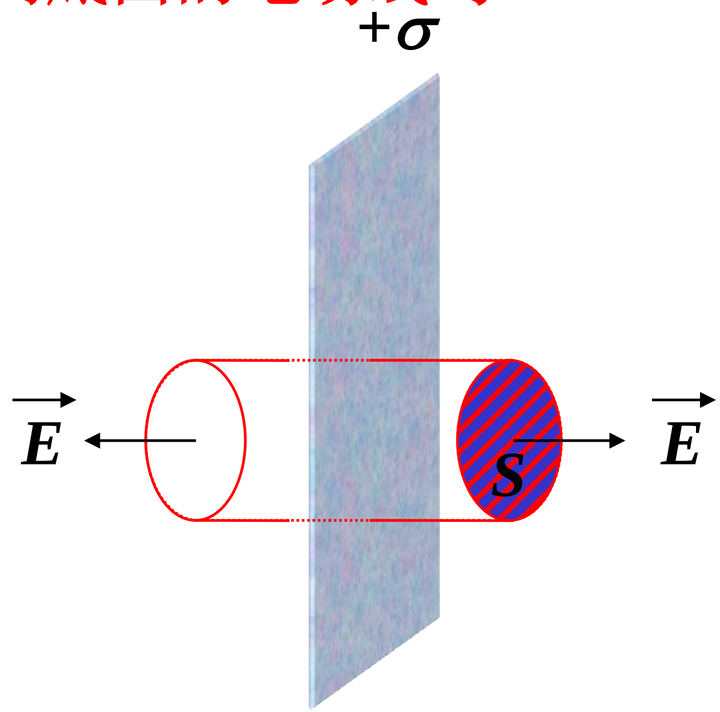
$$\boxed{\Phi_{E1} = \frac{\sum q_1}{\varepsilon_0}}$$

$$\Rightarrow E = \frac{Ar^2}{4\varepsilon_0} \quad (r \le R)$$

例. 证明一无限大均匀带电平板的电场场强为$\sigma/2\varepsilon_0$,其中σ为该电板电荷密度?

证明: 作一轴线与平面正交的封闭圆柱面,底面面积S

通过圆柱侧面的电通量为零,且通过两底面的电场线均与底面正交



由高斯定理,得

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = ES + 0 + ES$$

$$= 2ES$$

$$\sum q = \sigma S$$

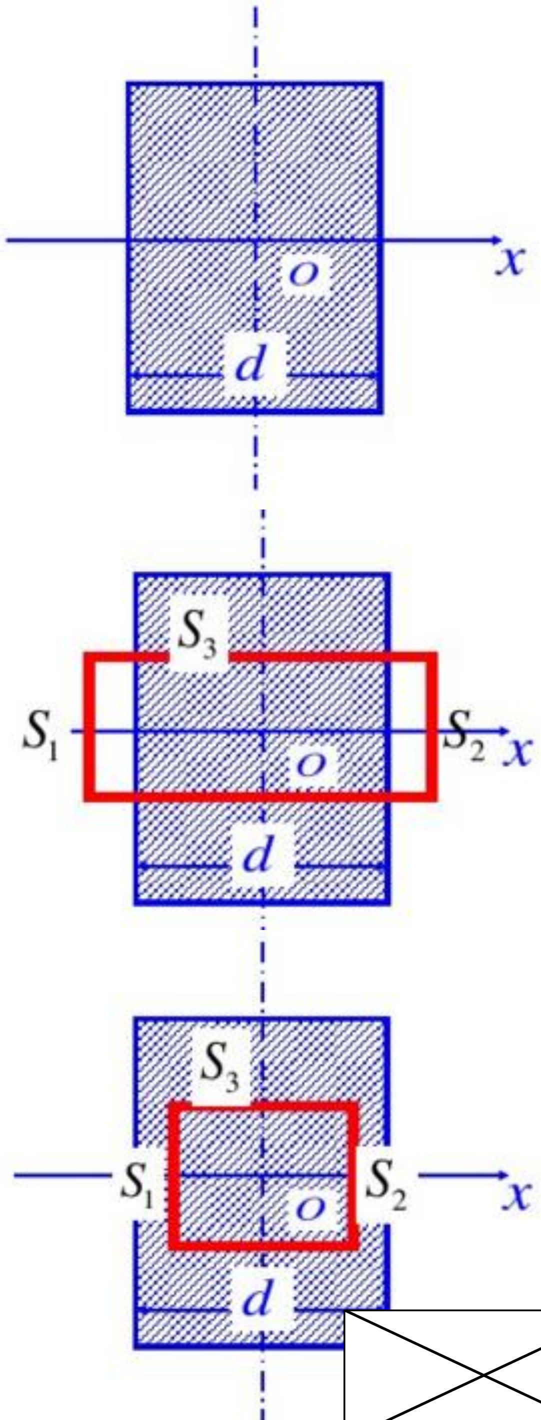
$$\Phi_{ES} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

注意: 均匀带电平板与带电金属板不同.

★讨论:

如图为一厚度为d的“无限大”均匀带电平板，电荷体密度为ρ。试求板内外的场强分布（设原点在带电板的中央平面上）。



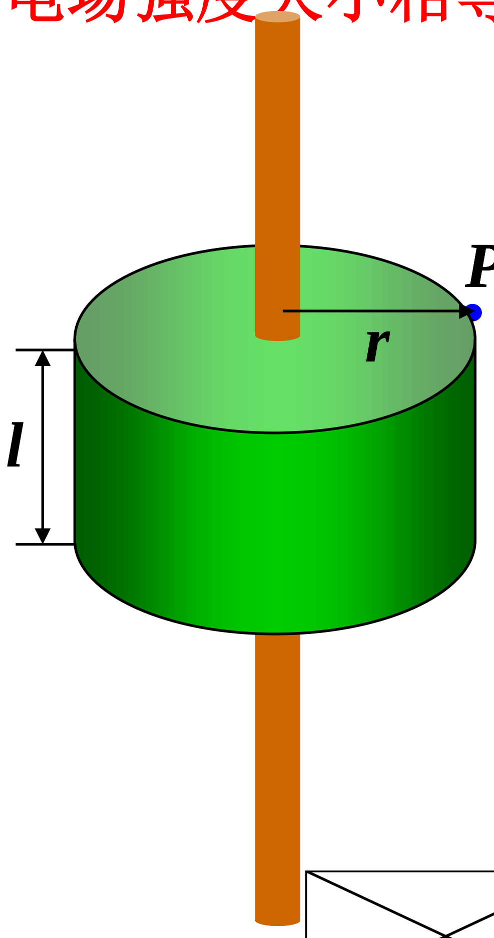
板外 $$E=\frac{\rho d}{2\varepsilon_0}\quad\left(|x|>\frac{d}{2}\right)$$

板内 $$E=\frac{\rho x}{\varepsilon_0}\quad\left(|x|\le\frac{d}{2}\right)$$

例、设“无限长”均匀带电直线，电荷线密度为+λ, 求直线外任一点P处场强。P距轴心距离为*r*?

解: 作一过P点,高为*l*,半径为*r*,轴线与直线重合的封闭圆柱面

通过圆柱底面的电通量为零,圆柱曲面上各点电场强度大小相等,且处处与曲面正交



由高斯定理,得

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\,2\pi r l$$

$$\sum q = \lambda l$$

$$\Phi_{ES} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

练习、设半径为R的“无限长”均匀带电圆柱面,电荷面密度为+σ,求圆柱面外任一点P处场强。P距轴心距离为r?

解:

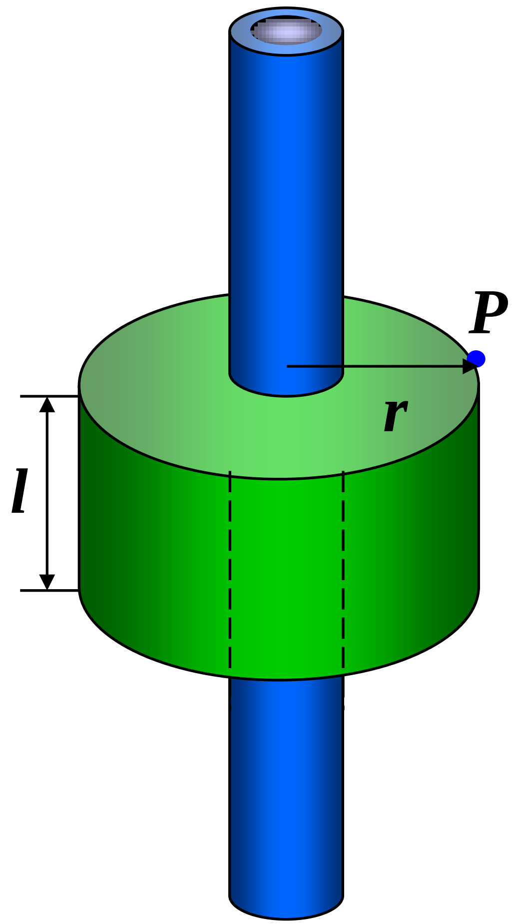
由高斯定理,得

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\,2\pi r l$$

$$\sum q = \sigma 2\pi R l$$

$$\therefore E = \frac{R\sigma}{r\varepsilon_0}$$

$$\Phi_{ES} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}$$



★讨论:

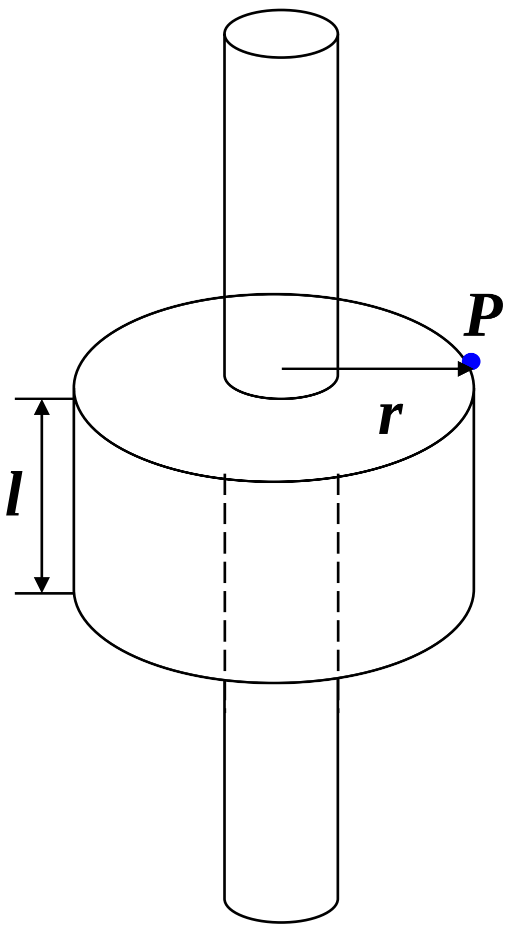
圆柱面单位长度上的电量

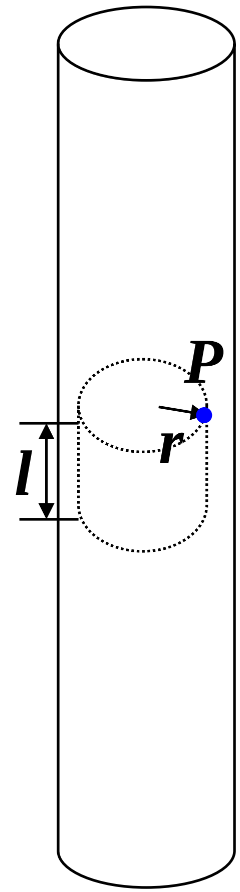
$$\lambda = 2\pi R\sigma$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

“无限长”均匀带电圆柱面对柱外各点的作用,相当于圆柱面所带电荷全部集中在其轴线上的均匀线分布电荷一样

若为“无限长”均匀带电圆柱体,电荷体密度为ρ





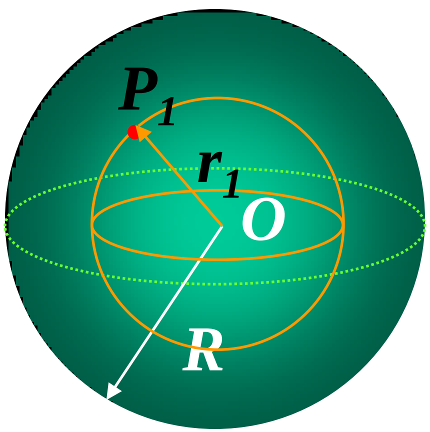
★利用高斯定理求场强的一般步骤：

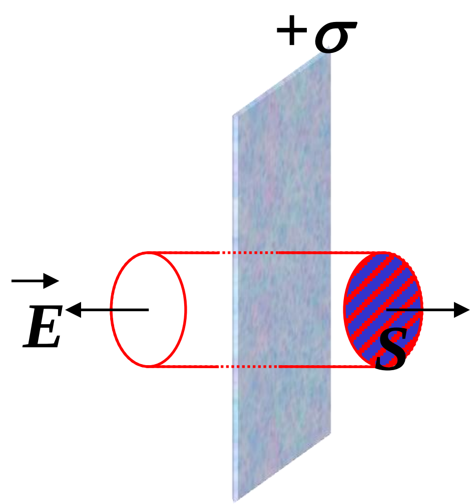
1. 分析带电体及其电场是否具有某种空间的对称性；

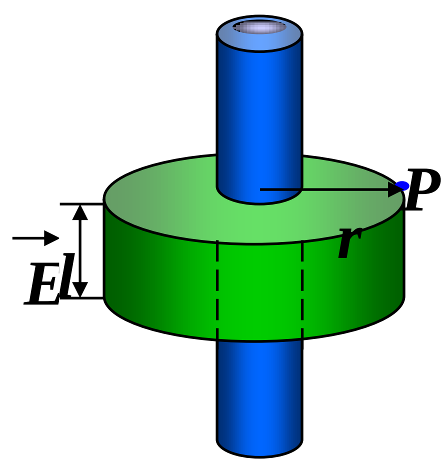
2. 根据场强分布的对称性特点，选择适当形状的高斯面；

(1). 作一闭合面（高斯球面）,使电场强度均垂直于该闭合面,且处处相等;

(2). 作一闭合面（高斯圆柱面）,使一部分场强平行于该闭合面,因而没有电场线通过;另一部分场强垂直于该闭合面,且处处相等.







3. 求出通过高斯面的电通量Φ_E（用E表示）；

$$\Phi_{E球对称} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E4\pi r^2$$

$$\Phi_{E面对称} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2ES$$

$$\Phi_{E轴对称} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E2\pi rl$$

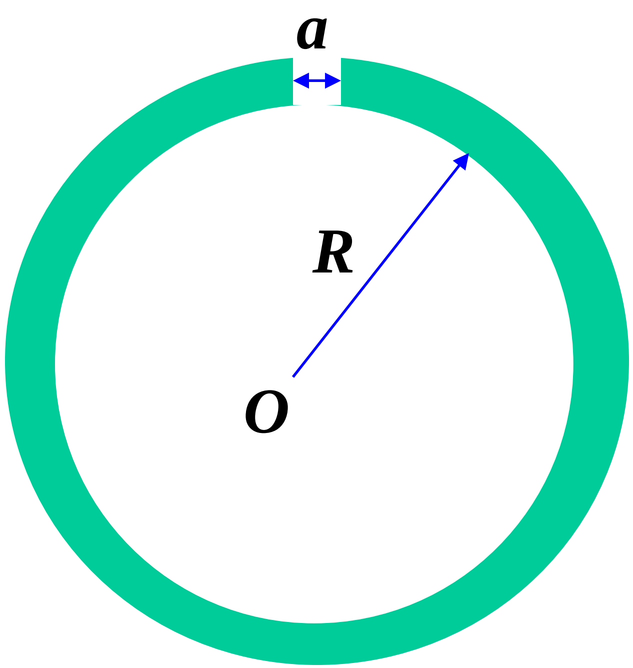
4. 求出高斯面内的电荷总量；

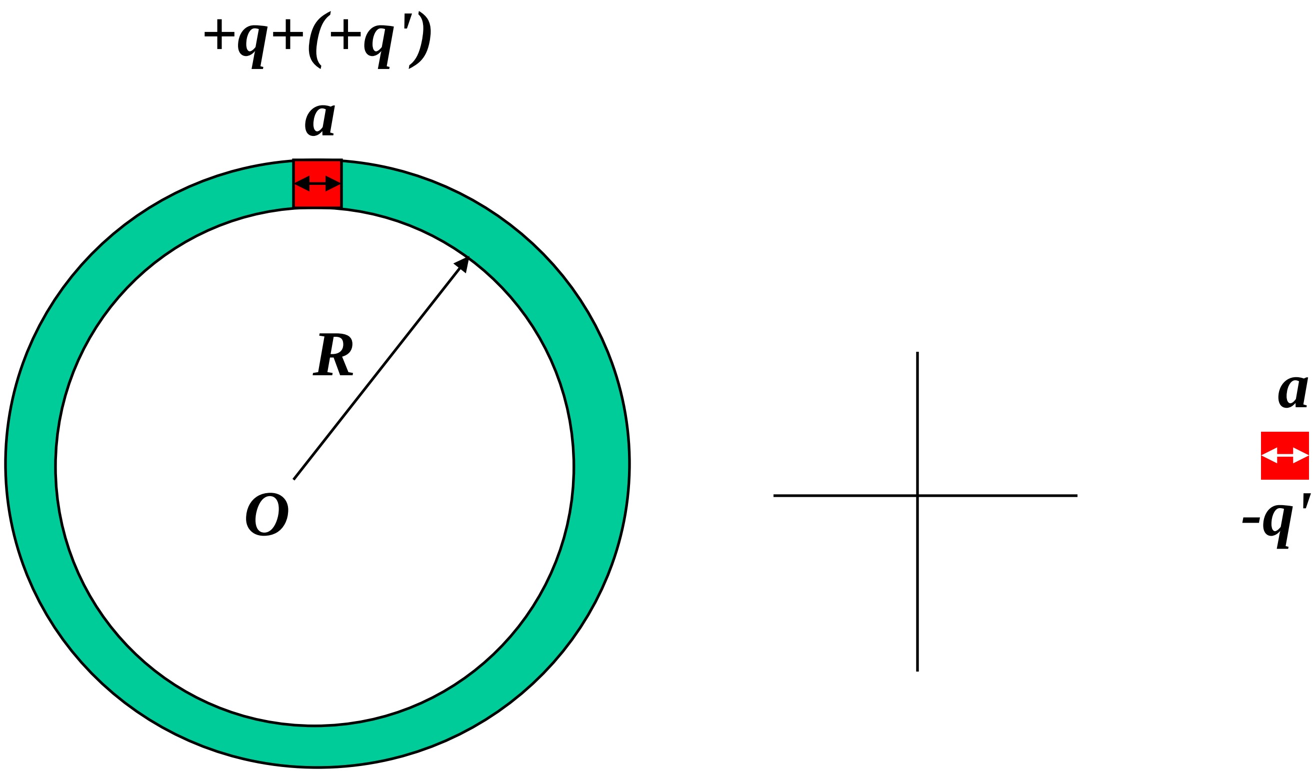
5. $\boxed{\Phi_{ES} = \dfrac{\sum\limits_i q_i}{\varepsilon_0}}$ 求出场强。

五. 一种新的求解场强的方法——补缺法

$+q \qquad a << R$

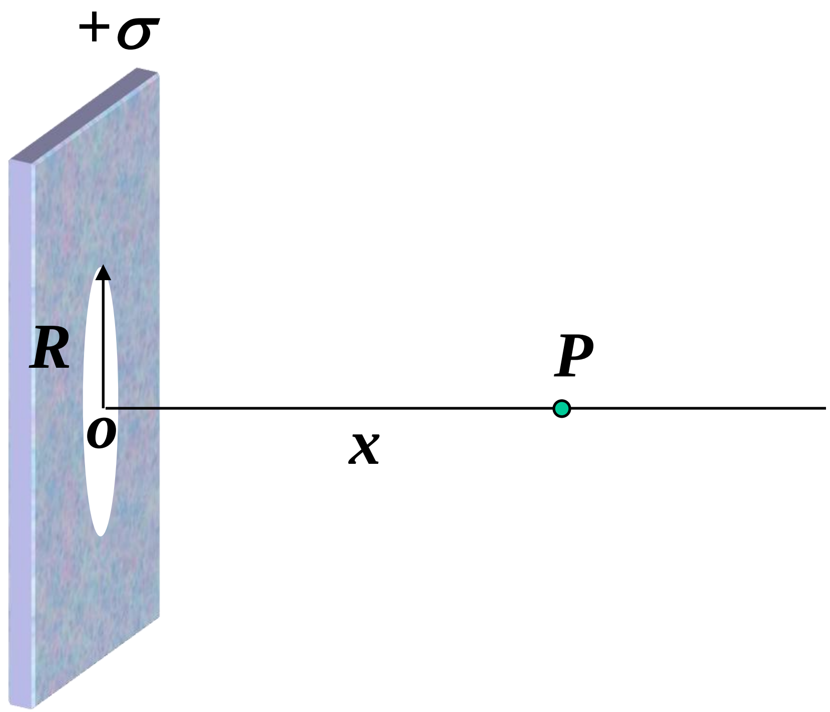
求: E_O?





$$\vec{E}_O = \vec{E}_{环} + \vec{E}_{缺}$$

$$E_O = E_{环} - E_{缺}$$



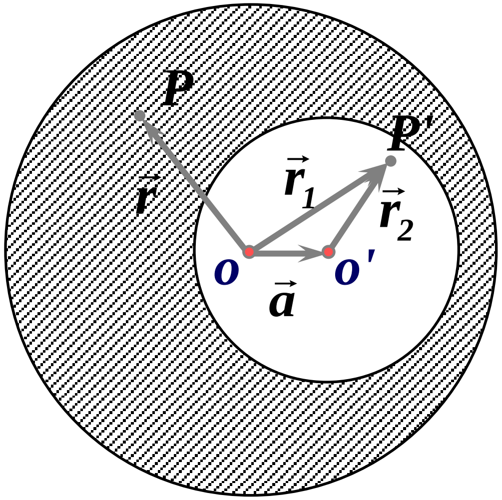
$$\vec{E}_P = \vec{E}_{板} + \vec{E}_{圆}$$

$$E_P = E_{板} - E_{圆}$$

例：一电荷体密度为 ρ 的均匀带电球体，r为球心指向球内一点的位矢，球内挖一球形空腔，求空腔内的场强。

均匀带电球体内的电场分布：（P.165式9.4-7)

$$\vec{E}=\frac{\rho\vec{r}}{3\varepsilon_0}$$



以电荷体密度为 ρ 的均匀带电物填充空腔。设大球体(体密度为ρ)在P' 的场强为E_1，填充的小球体(体密度为-ρ)在P' 的场强为E_2，则：

$$\vec{E}'=\vec{E}_1+\vec{E}_2=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a}$$

可见：空腔内电场为匀强电场，场强大小与球半径无关，只与偏心距a及电荷体密 ρ 度有关。

8.5 电　势

一. 静电场的环路定理

1. 点电荷的静电场

设试探电荷q_0从a点沿某一路径移动到b点

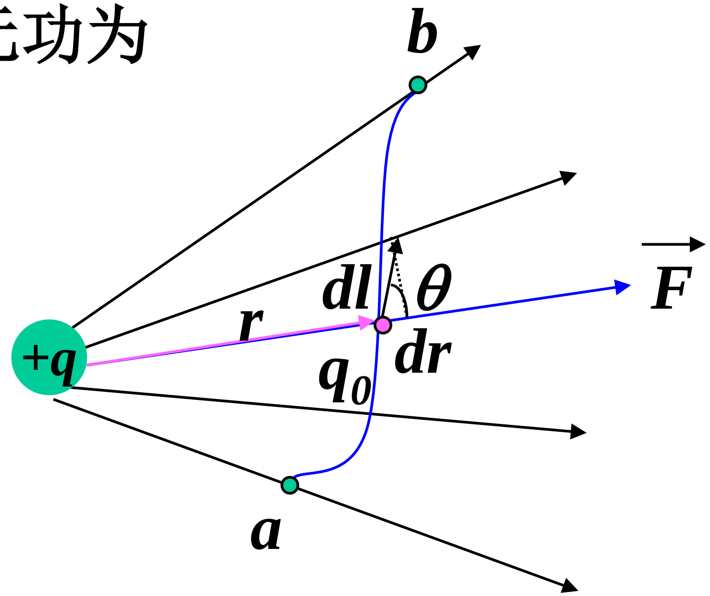
取一位移元dl，则电场力作的元功为

$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

$$= q_0\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$= q_0 E\cos\theta dl$$

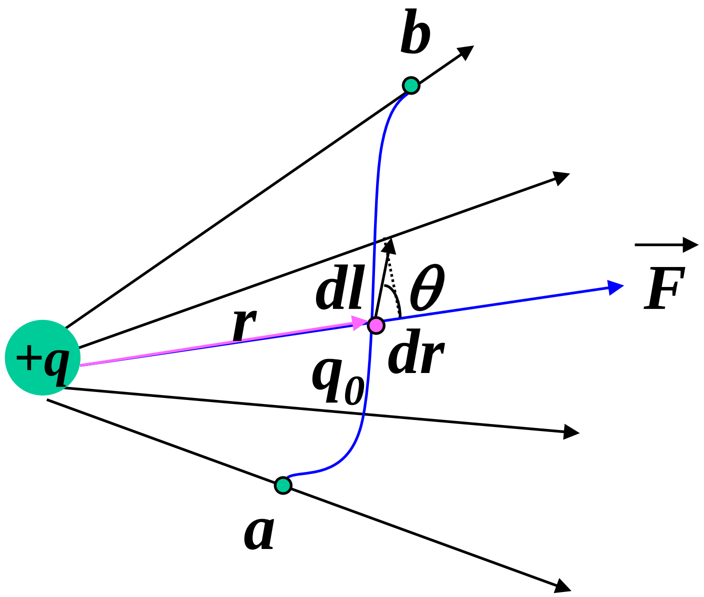
$$\because E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



$$\therefore dA = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta dl$$

$$= \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$(\because dr = dl\cos\theta)$$



$$\therefore A_{ab} = \int_a^b dA = \int_{r_a}^{r_b} \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$= \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$$

与路径无关,仅和试探电荷的大小及始末位置有关

2. 任意静电场

由场强迭加原理，可证

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{q_0 q_i}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{ia}} - \frac{1}{r_{ib}}\right)$$

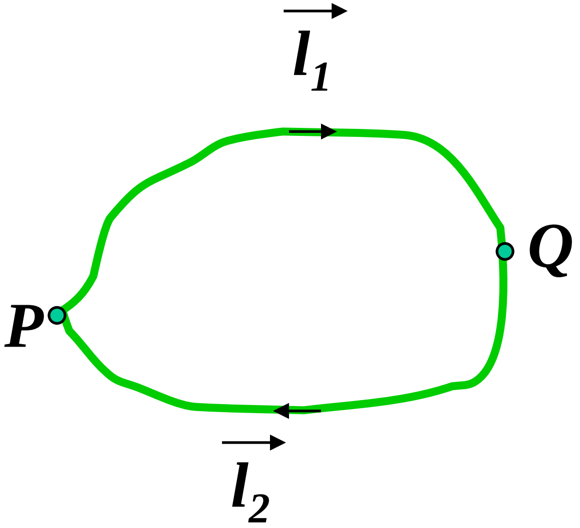
r_{ia},r_{ib}为电荷q_i到a点和b点的距离

试探电荷在任何静电场中移动时,电场力作的功,仅和试探电荷的大小及始末位置有关,而与路径无关

静电场是保守场　静电力是保守力

3. 场强环路定律

$$W=\oint_L (q_0\vec{E})\cdot d\vec{l}=q_0\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$$



$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$$

静电场中场强沿任意闭合环路的线积分恒等于零

二. 电势

1. 电势能　　电荷在电场中某一位置处具有的势能

a点的电势能W_a　　　　b点的电势能W_b

$$A_{ab}=W_a-W_b=q_0\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

电场力做正功，电势能减少；电场力做负功，电势能增加

▲规定电荷q_0在无穷远处的静电势能为零,即$W_\infty=0$

$$W_a=A_{a\infty}=q_0\int_a^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

电荷q_0在电场中某点a处的电势能W_a在量值上等于电荷q_0从该点移到无穷远处时电场力作的功

▲电势能是属于一定系统的

2. 电势　　表征静电场中该定点电场性质的物理量

W_a/q_0与试验电荷本身无关，只决定于电场本身在a点的性质

电势U_a

$$U_a = \frac{W_a}{q_0} = \int_a^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

电场中某点的电势在量值等于一个单位正电荷放在该点处时的电势能

也等于单位正电荷从该点经过任意路径移到无穷远处时电场力作的功

单位：　J/c 或 V

3. 电压 (电势差)

静电场中,任意两点a和b的电势之差

$$\boxed{U_{ab} = U_a - U_b}$$

$$= \int_a^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_b^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= \int_a^{b} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

等于单位正电荷从a点经过任意路径到达b点时电场力作的功

$$\boxed{A_{ab} = q_0 (U_a - U_b)}$$

三. 电势的计算

1. 电势叠加原理

▲ 点电荷电场中的电势计算

$$U_P = \frac{W_P}{q_0} = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

▲ 电势叠加原理

$$U_P=\frac{W_P}{q_0}=\int_P^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad \text{(场强迭加原理)}$$

$$=\int_P^{\infty}\vec{E}_1\cdot d\vec{l}+\int_P^{\infty}\vec{E}_2\cdot d\vec{l}+\cdots+\int_P^{\infty}\vec{E}_n\cdot d\vec{l}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_P^{\infty}\vec{E}_i\cdot d\vec{l}=\sum_{i=1}^{n}U_{Pi}=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

点电荷系电场中任一点的电势等于各个点电荷在该点各自产生的电势的代数和

▲ 任意带电体电场中的电势计算

电荷元dq的集合

$$dU_P = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

电荷连续分布

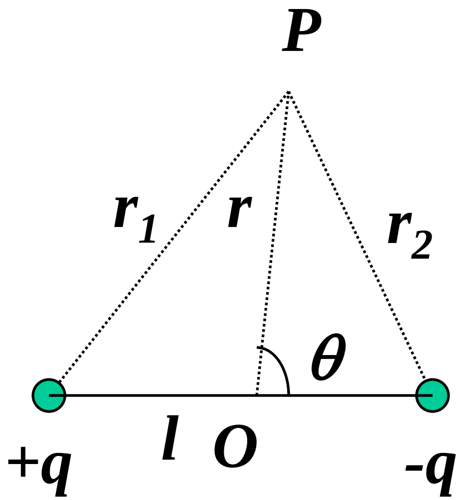
$$U_P = \int dU_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r}$$

注意： 当选择的微元具有一定形状时，由该微元（不能看成点电荷)引出的物理量应与微元的形状联系起来。

例、计算电偶极子电场中任一点P的电势?

解:

$$U_p = U_+ + U_-$$



$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$

$$= \frac{q(r_2 - r_1)}{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2}$$

$\because r >> l$ $\quad\quad \therefore r_1 r_2 \approx r^2, r_2 - r_1 \approx l\cos\theta$

电矩

$$\therefore U_P = \frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

例、有四个点电荷q_1,q_2,q_3,q_4,电量均为$4.0\times10^{-9}c$,分别放在正方形的四个顶点,各角顶与正方形的中心O的距离均为5.0cm,求:

(1). O点的电势;

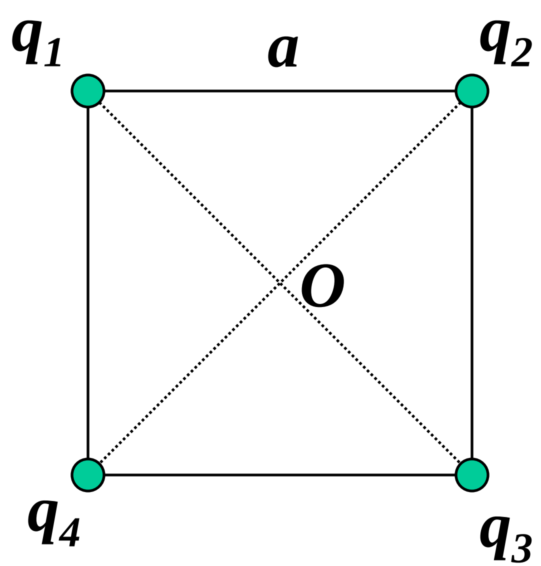
(2). 将试验电荷$q_0=-1.0\times10^{-9}c$从无穷远处移到O点,电场力作功多少;

(3). 电势能的改变;

(4). 若点电荷质量$m=1.44\times10^{-2}kg$，从无穷远处静止释放，则在O点的速度是多少?

解：(1)

$$U_i=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}=720(V)$$



$$U_o=\sum_i U_i=4\times720=2880(V)$$

(2)

$$A=q_0(U_\infty-U_o)$$

$$=2.88\times10^{-6}J$$

(3)

$$A = 2.88 \times 10^{-6} J$$

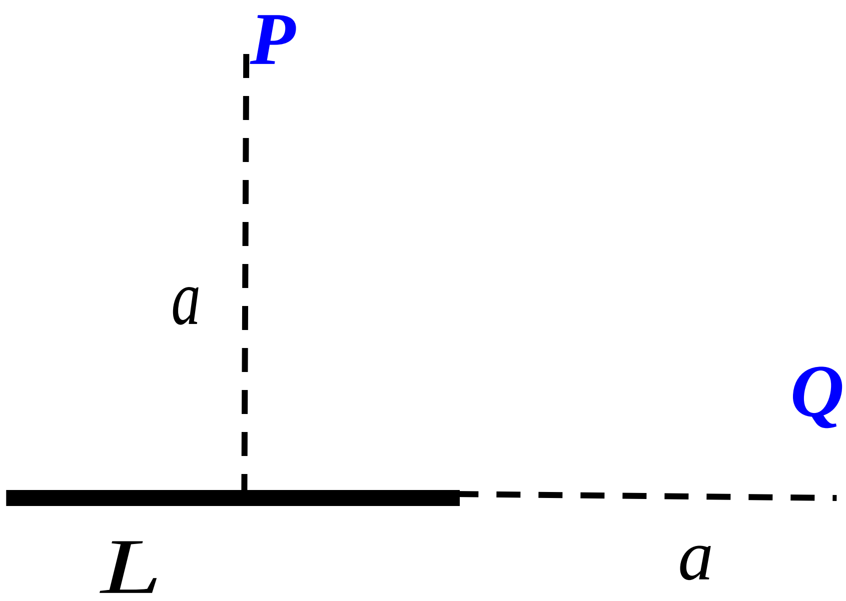
$$W_o - W_\infty = -2.88 \times 10^{-6} J$$

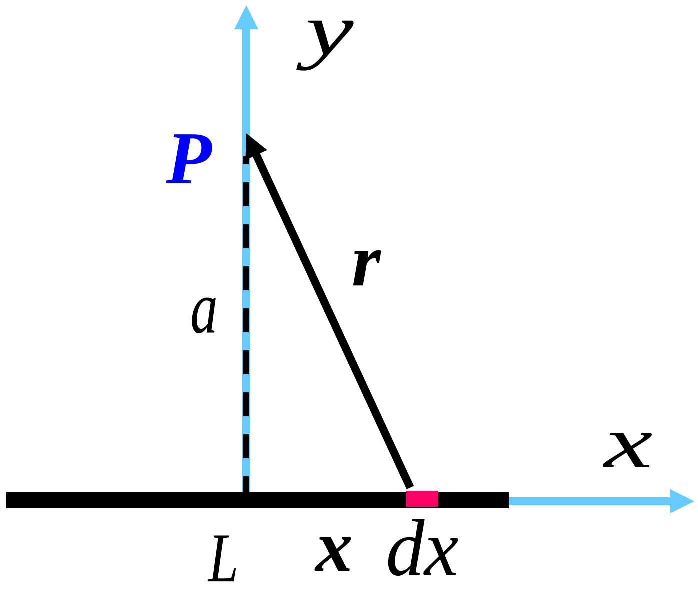
(3)

$$A = \frac{1}{2} mv^2 - 0$$

$$v = 0.02 m / s$$

例、真空中长度为L的均匀带电直导线，电荷分布线密度为λ（＞0），分别求出导线中垂线上距导线距离为a的P点以及导线延长线上距右端间隔为a的Q点电势。





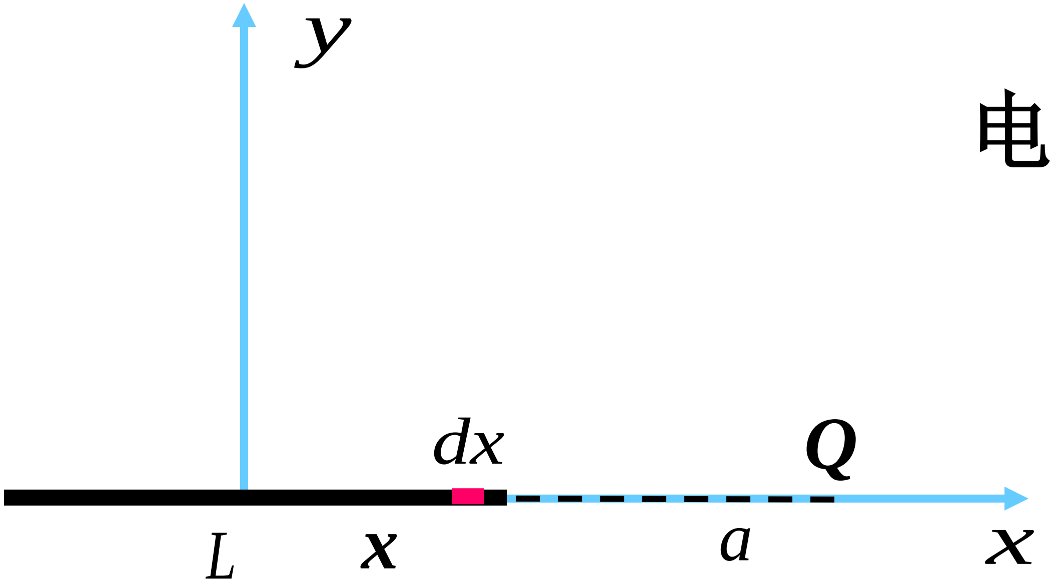
解：建立如图所示的坐标，在导线上取一电荷元

$$dq = \lambda dx$$

在P 点产生电势

$$dU = \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$U = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{\sqrt{\frac{L^2}{4} + a^2} + \frac{L}{2}}{\sqrt{\frac{L^2}{4} + a^2} - \frac{L}{2}}$$



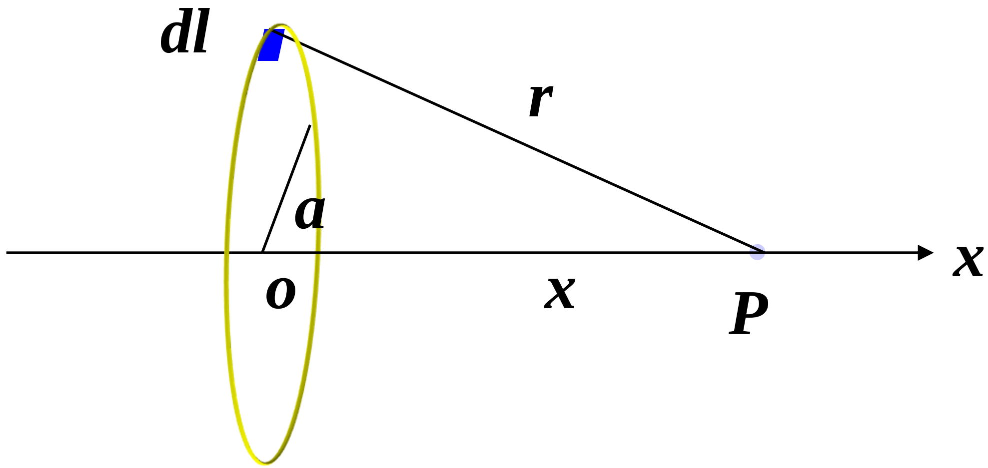
电荷元在Q点产生电势

$$dU = \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0(\frac{L}{2}+a-x)}$$

$$U = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0(\frac{L}{2}+a-x)} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{L+a}{a}$$

例、计算均匀带电圆环轴线上任一点P处的电势,半径a,带电量q,P距圆心为x.

解:



$$dq = \frac{q}{2\pi a} dl$$

$$dU_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,dl}{2\pi a\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$U_P = \int dU_P = \int_0^{2\pi a} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\,dl}{2\pi a\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

★讨论:

1. $x = 0$ 时

$$U_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

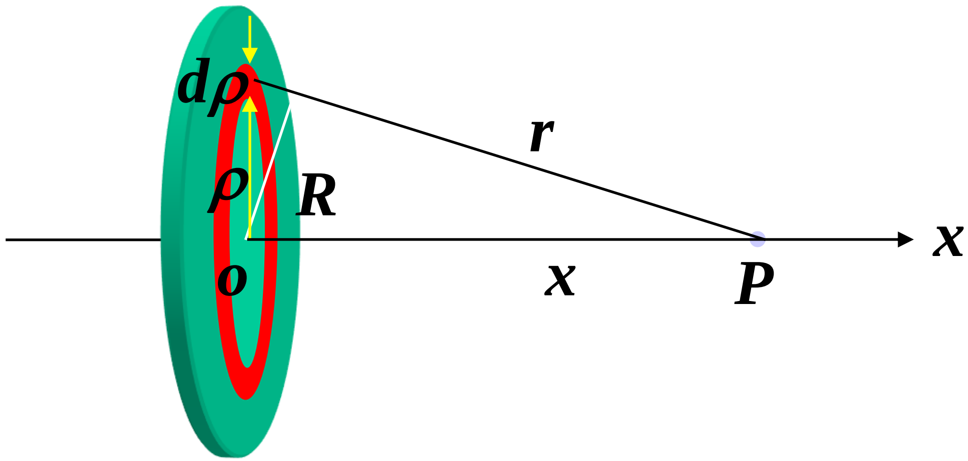
2. $x >> a$ 时

$$U_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x}$$

近似为一点电荷

例、计算均匀带电圆盘圆心轴线上任一点P处的电势,半径R,P距盘心为x,面密度为$+\sigma$.

解:



距圆心ρ处取一宽为$d\rho$的圆环

$$dq = \sigma 2\pi\rho d\rho$$

圆环在P点产生的电势为

$$dU_P = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+\rho^2}}$$

$$\therefore U_P = \int dU_P = \frac{\sigma 2\pi}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{\rho d\rho}{\sqrt{x^2+\rho^2}}$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{x^2+R^2} - x)$$

2.已知电场分布，利用电势定义式求解

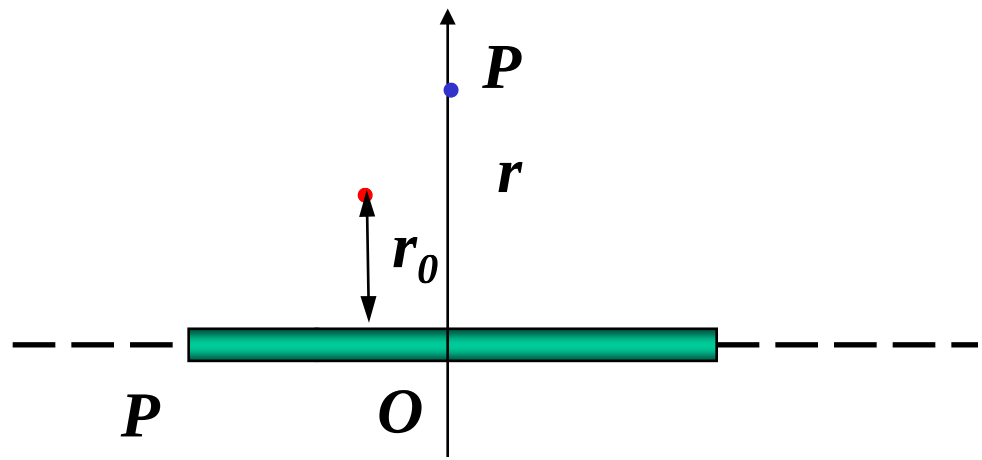
$$U_p = \int_p^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

*E*是*p*点到∞过程中的场强分布表达式

例. 求无限长均匀带电直线外任一点P处的电势。电荷线密度为λ。

解: 由高斯定理可得

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$



$$U_p=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_r^{\infty}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r\Big|_r^{\infty}\quad\Rightarrow\infty$$

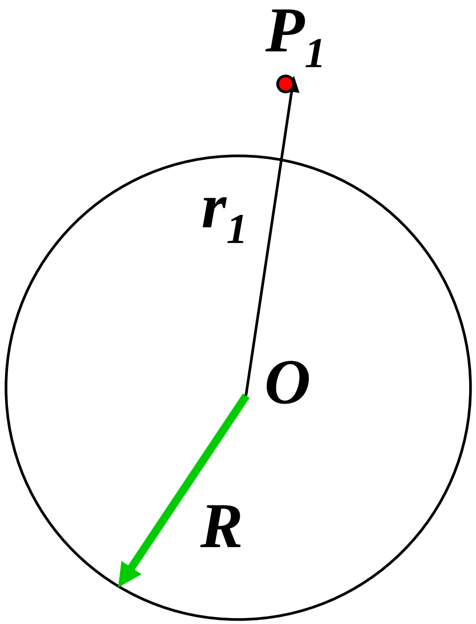
通常任选势能零点，如势能零点选在r_0处，则

$$U_p=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_r^{r_0}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r}$$

例、设有一球面半径为R,表面均匀带电,电荷为Q,求球面产生的电场中的任一点P的电势?

解：球面外P_1

$$U_{P1} = \frac{W_{P1}}{q_0} = \int_{P1}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

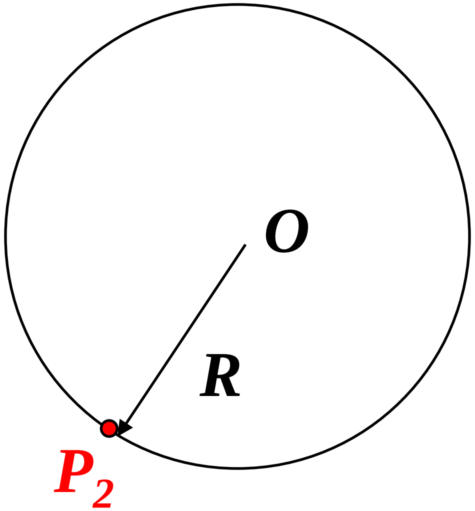


$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (r > R)$$

$$U_{P1} = \int_{r_1}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{r_1}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$$

均匀带电球面↔球心的点电荷

球面上P_2



$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ (r\geq R)$$

$$U_{P2}=\int_R^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_R^{\infty}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

球面内P_3

E是p点到∞过程中的场强分布表达式

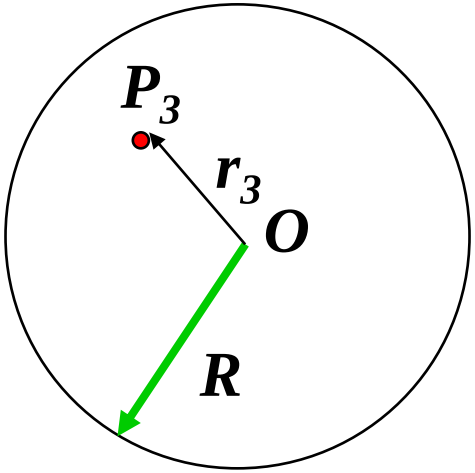
$$U_{P3} = \int_{P3}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= \int_{P3}^{R} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{R}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= \int_{R}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \left(\because E_{内} = 0\right)$$

$$= \int_{R}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$



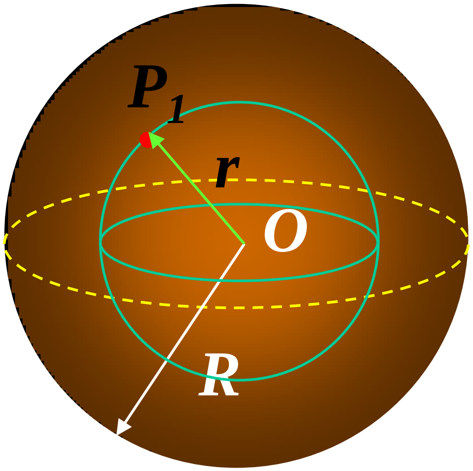
球面内的电势与球面上的电势相等

★讨论:

若为均匀带电球体

球体外 $$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (r > R)$$

球体内 $$E = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \quad (r \le R)$$

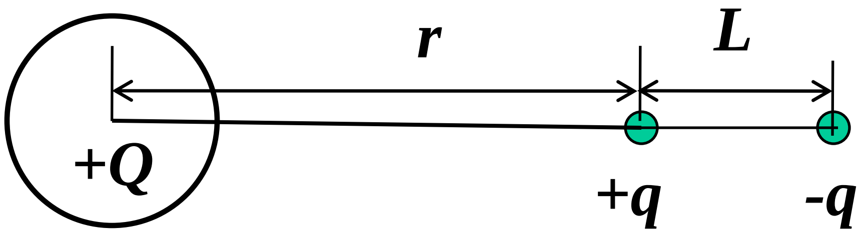


$$U = \int_{P3}^{R} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{R}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \cdots$$

例：一均匀带电球体，带有电量+Q，试求下列两种情况中将点电荷+q和-q从无穷远处移到该电场中电场力所做的功。

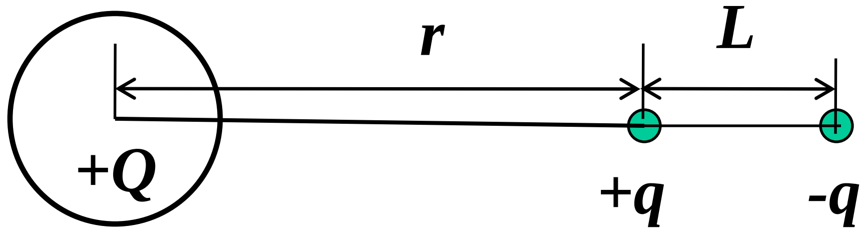
（1）先将+q移到电场中距球心r处，如图所示，然后把-q移到r+L处，且L<<r。

（2）把+q和-q组成的电偶极子整体移到电场中同样位置?



解：（1）把+q从无穷远处移到距球心r处的过程中，只有+Q的电场力作用，故

$$W_1 = q\left(U_\infty - U_r\right) = -qU_r = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r}$$

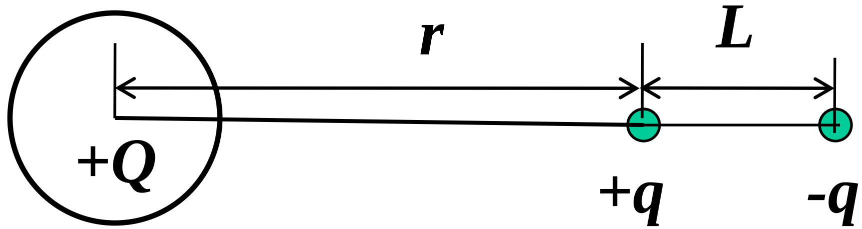


把-q从无穷远处移到距球心r+L处的过程中，-q受到+Q的电场力作用，还受到+q的电场力的作用，故

$$W_2 = -q\left(U_{\infty} - U_{r+L}\right) = qU_{r+L} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{L} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{(r+L)}$$

$$W = W_1 + W_2 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{L} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{(r+L)}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{L} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQL}{r(r+L)} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{L} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQL}{r^2}$$



（2）把电偶极子整体从无穷远处移到距球心r处的过程中，仅受到+Q的电场力作用，故

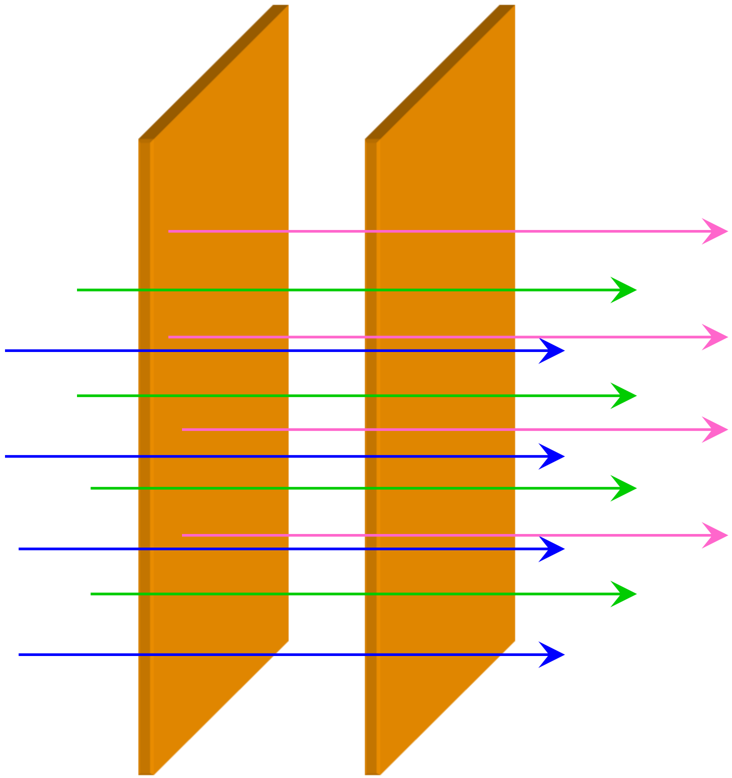
$$W = q\left(U_\infty - U_r\right) + \left(-q\right)\left(U_\infty - U_{r+L}\right) = -qU_r + qU_{r+L}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{\left(r+L\right)} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQL}{r\left(r+L\right)} \approx -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQL}{r^2}$$

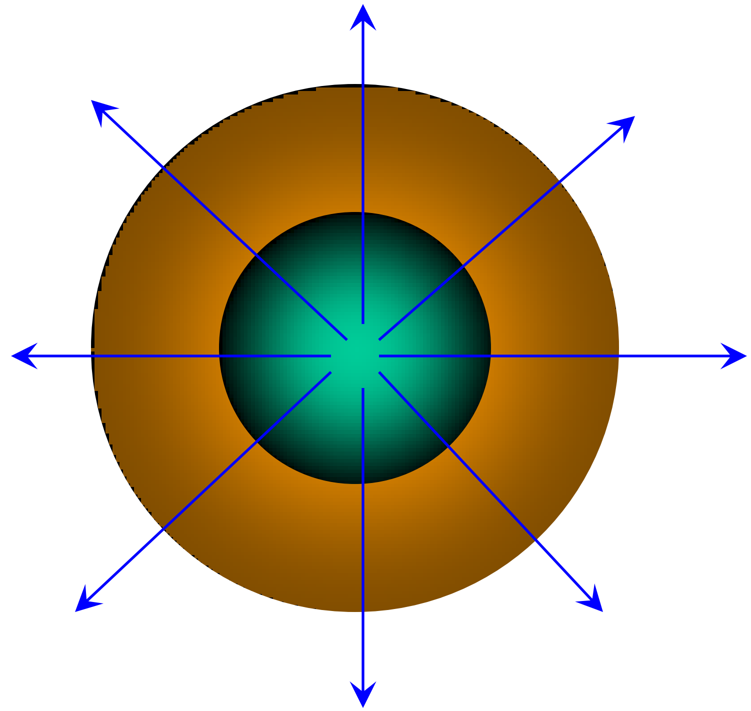
四. 等势面

电势相等的点组成的面

匀强电场



点电荷



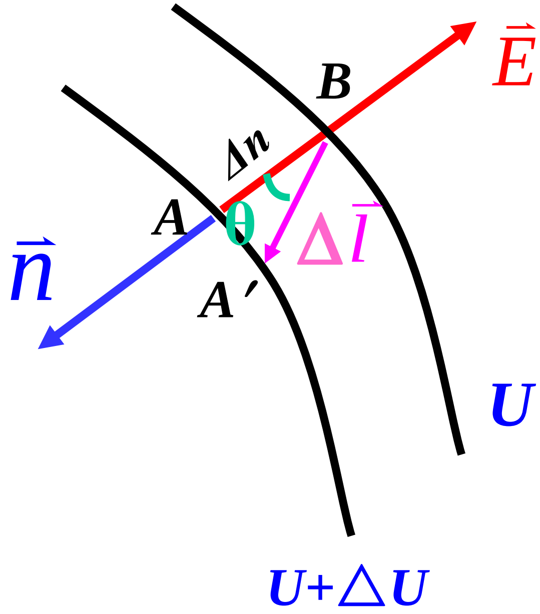
▲ 等势面的性质：

(1). 沿等势面移动时,电场力不作功。

(2). 电场线与等势面处处正交;电场线方向,即电场强度方向,指向电势降落的方向;

(3). 等势面愈密的区域，场强越大;
等势面愈疏的区域，场强越小。

五. 电势梯度



定义：沿某一方向(等势面法线方向）其电势随距离的**变化率最大**，此最大值称为该点的**电势梯度∇U**

$$E=\left|\lim\frac{\Delta U}{\Delta n}\right|=\left|\frac{\partial U}{\partial n}\right|$$

电场强度方向总是指向电势降落的方向，即E与Δn方向相反

$$\boxed{E=-\nabla U}$$

注意：

在不同坐标系中

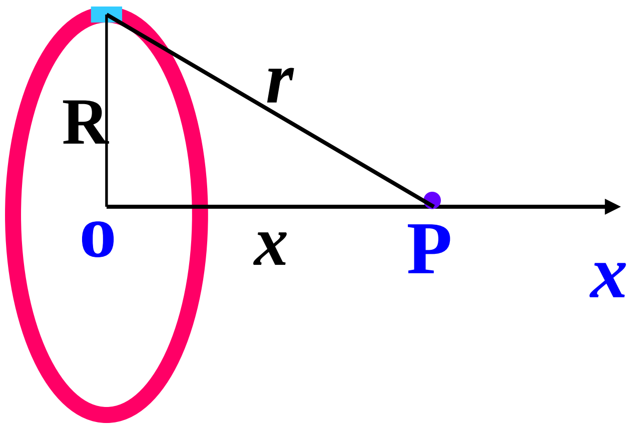
直角坐标系：$E_x=-\dfrac{\partial U}{\partial x};E_y=-\dfrac{\partial U}{\partial y};E_z=-\dfrac{\partial U}{\partial z}$

柱面坐标系：$E_\rho=-\dfrac{\partial U}{\partial \rho};E_\varphi=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial U}{\partial \varphi};E_z=-\dfrac{\partial U}{\partial z}$

球坐标系：$E_r=-\dfrac{\partial U}{\partial r};E_\theta=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial \theta};E_\varphi=-\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial U}{\partial \varphi}$

例：一个均匀带电圆环, 半径为R， 电量为Q。求其轴线上任意一点的场强?

解: P点的电势为



$$U_p = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o\sqrt{R^2 + x^2}}$$

P点的场强为 $\because \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0$

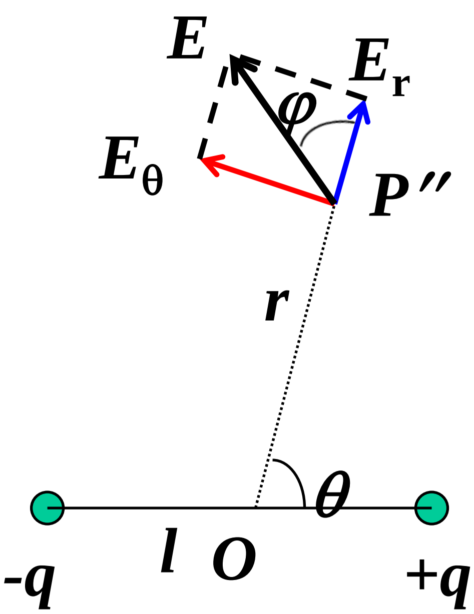
$$\therefore \quad E_P = E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{Qx}{4\pi\varepsilon_o\left(R^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

方向沿x轴正向

例. 利用电偶极子的电势计算电偶极子的场强分布?

解:

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$



球坐标系

$$E_r=-\frac{\partial U}{\partial r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\cos\theta}{r^3}$$

$$E_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3}$$

$$E_\varphi=-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}=0$$