第二章 质点动力学

2.1 牛顿运动定律

一.牛顿第一定律 （惯性定律）

任何物体都保持静止或匀速直线运动的状态,直到其他物体所作用的力迫使其改变这种状态.

或者说,自由质点永远保持静止或匀速直线运动状态.

惯性: 物体保持其原有运动状态不变的特性.

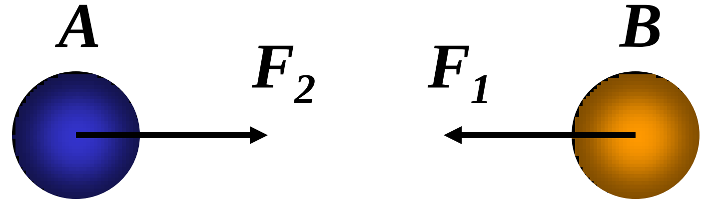
二. 牛顿第二定律

物体受到外力作用时,物体所获得的加速度的大小与合外力的大小成正比,并与物体的质量成反比;加速度的方向与合外力的方向相同.

$$\vec{F}=m\vec{a}=m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

—— 牛顿运动方程

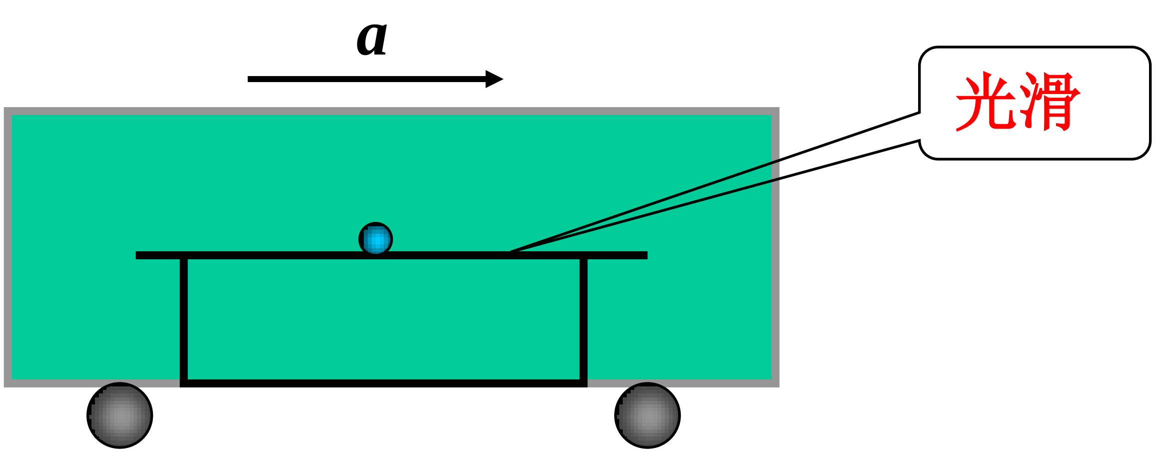
三. 牛顿第三定律



作用力与反作用力在同一直线上,大小相等且方向相反.

四. 惯性系

牛顿运动定律并不是在任何参照系中都是成立的。



▲ 地球为参考系:

小球 $\sum F = 0$ 静止

▲ 火车为参考系:

小球 $\sum F = 0$

具有加速度$-\boldsymbol{a}$

牛顿运动定律能成立的参照系称为惯性参照系(惯性系)。

相对于惯性系作匀速直线运动的任何其他参照系也都是惯性系。

地球不是一个严格的惯性系，但是当所讨论问题涉及的空间范围不太大、时间不太长时，地球可看作一个近似程度相当高的惯性系。

2.2 牛顿运动定律的应用

★一般解题步骤

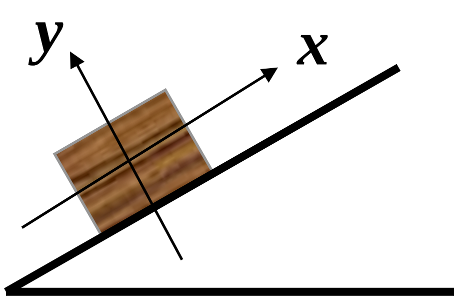
1. 选取研究对象; 隔离体法

2. 分析研究对象的受力情况,作出示力图;

先标出已知力,重力; 再在接触处找力.

3. 选取坐标系,判断力的方向,根据牛顿第二运动定律,列出各个物体的运动方程;

(1). 取坐标系,应根据受力情况,取不同角度的坐标系;

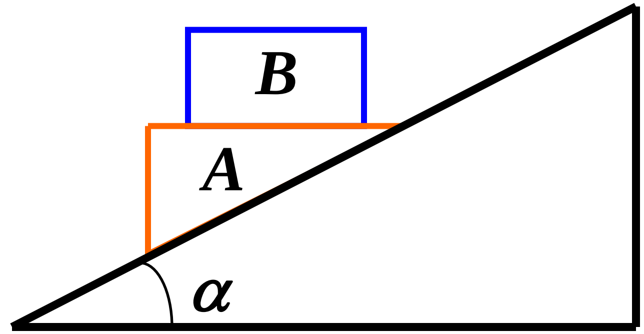


(2). 如果力的方向与运动方向不同,把力分解;

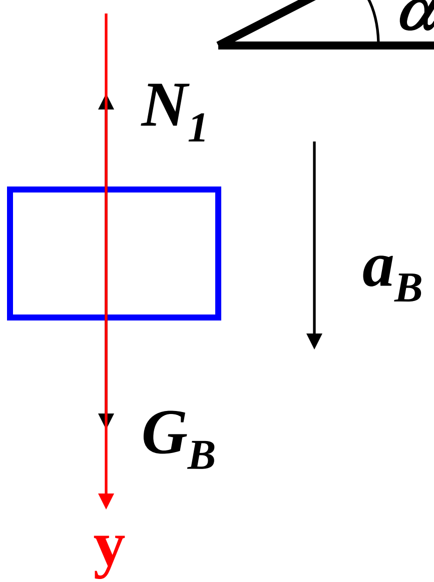
- 沿运动方向;
- 垂直于运动方向

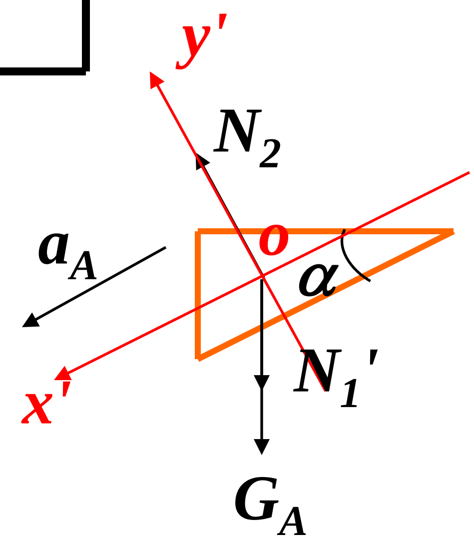
4. 求解方程.

例2. 一质量为M的小三角形物体*A*放在倾角为α的固定斜面上,在此三角形物体上又放一质量为*m*的物体*B*.*A*与*B*之间及*A*与斜面间均光滑接触.设开始时,*A*与*B*均为静止状态.当*A*沿斜面下滑时,求*A*,*B*相对地面的加速度?



解:





如图建立坐标系

B物: y: $G_B - N_1 = ma_B$

A物: x': $\left(G_A + N_1'\right) \cdot \sin\alpha = Ma_A$

$$N_1 = N_1'$$

B物相对于A物只能在水平方向移动;

$\therefore$两者在竖直方向有相同的加速度.

$$\therefore a_B = a_A \sin\alpha$$

$$\Rightarrow a_A = \frac{(m+M)g\sin\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$$

$$a_B = \frac{(m+M)g\sin^2\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$$

变力问题，利用$F=mdv/dt$,积分处理。

1、F（t）$=mdv/dt$（例2-1）；

2、F（v）$=mdv/dt$（例3）；

3、F（x）$=mdv/dt= mdv/dx\, dx/dt$（例4）

例2-1. 一质点质量为m，在力F=mg(12t+4)的作用下沿一直线运动。已知在t=0时，v=v0，x=x0。求质点在任意时刻的速度和位置表达式。

解：由牛顿第二定律,得

$$mg(12t+4)=m\cdot\frac{dv}{dt}$$

$$dv=g(12t+4)dt$$

$$\int_{v_0}^{v}dv=\int_0^t g(12t+4)dt$$

$$v=v_0+6gt^2+4gt$$

$$\because v = \frac{dx}{dt} = v_0 + 6gt^2 + 4gt$$

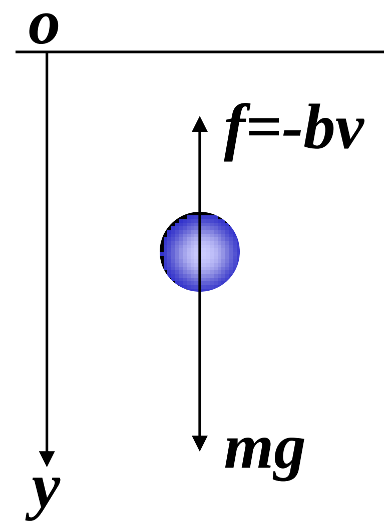
$$\therefore dx = \left(v_0 + 6gt^2 + 4gt\right)dt$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t \left(v_0 + 6gt^2 + 4gt\right)dt$$

$$x = x_0 + v_0 t + 2gt^2 + 2gt^3$$

例3. 球形物体在空气中的阻力与其速度成正比,求球形物体在空气中下落过程中的速率.已知球体质量为m,系数为b.

解:取物体开始位置为原点,则由牛顿第二定律,得



$$mg - bv = m \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$\therefore \frac{dv}{\frac{mg}{b} - v} = \frac{b}{m} \cdot dt$$

$$\because t = 0,\ v_0 = 0$$

$$\int_0^v \frac{dv}{\frac{mg}{b} - v} = \int_0^t \frac{b}{m} \cdot dt$$

$$\therefore ln\left(\frac{mg}{b} - v\right) = -\frac{b}{m} \cdot t + ln\left(\frac{mg}{b}\right)$$

$$\therefore v_{(t)} = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)$$

例4. 静止在x_0处的质量为m的物体，在力$F=-k/x^2$的作用下沿x轴运动，证明物体在x处的速率为：

$$v^2=\frac{2k}{m}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right)$$

解：由牛顿第二定律：

$$F=-\frac{k}{x^2}=m\frac{dv}{dt}=m\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=m\frac{vdv}{dx}$$

$$\therefore\quad \int_0^v vdv=-\frac{k}{m}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x^2}$$

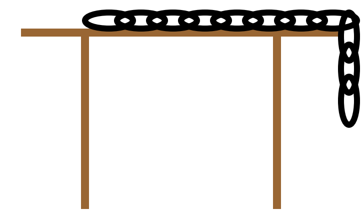
得：

$$\frac{1}{2}v^2=-\frac{k}{m}\left(\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x}\right)\qquad v^2=-\frac{2k}{m}\left(\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x}\right)$$

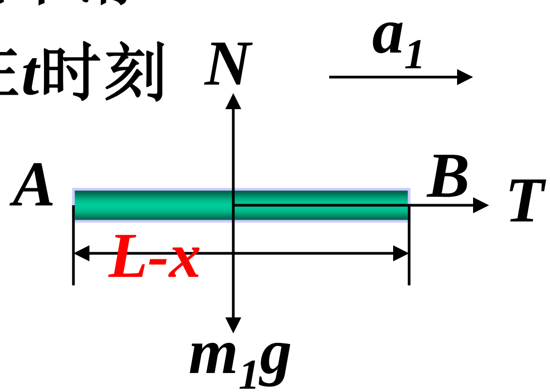
例5. 有一长为L,质量为M的均匀分布的铁链成直线状放在光滑的水平桌面上.链子的一端有极小的一段被推出桌子边缘, 在重力作用下从静止开始下落,求:

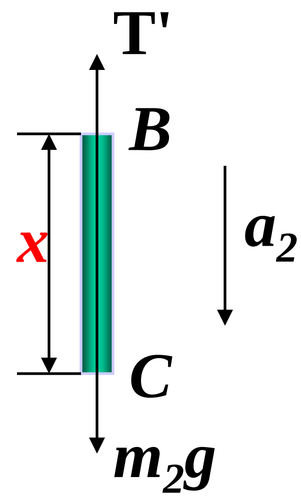
(1). 链条刚离开桌面时的速度?

(2). 若链条与桌面间有摩擦,并设摩擦系数为u,问链条必须下垂多长才能开始下滑.



解: (1).设在t时刻





由牛二定律,得

AB段: $T = m_1 a_1$

BC段: $m_2 g - T' = m_2 a_2$

$\because$ 链条不伸长

$$\therefore a_1 = a_2 = a = \frac{dv}{dt}$$

$$\because T = T'$$

$$\Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{x}{L} g$$

两边同乘以dx,得

$$\frac{dv}{dt}\cdot dx=\frac{x}{L}\cdot g\cdot dx$$

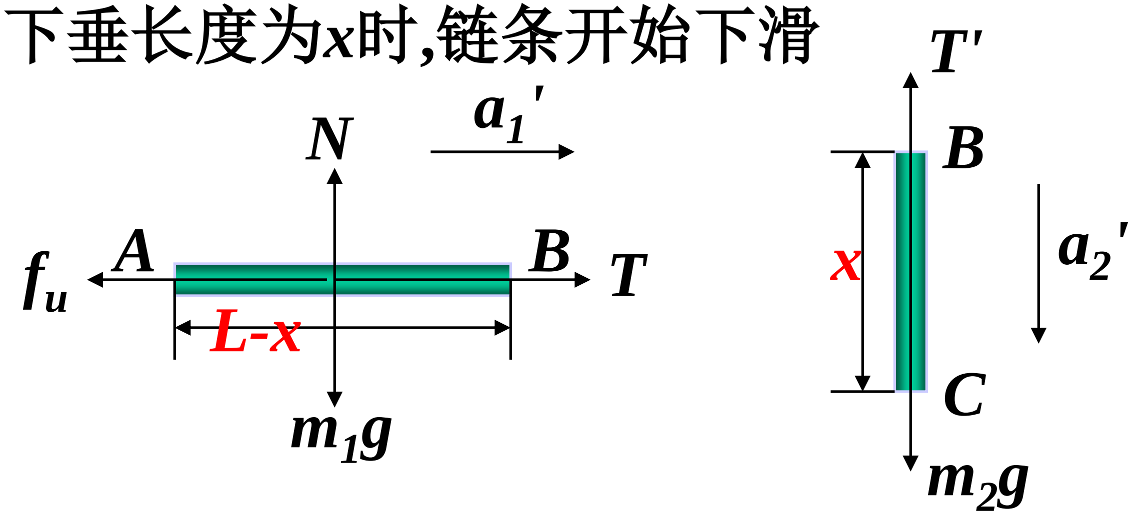
$$\because\ \frac{dx}{dt}=v$$

$$\therefore v\cdot dv=\frac{g}{L}\cdot x\cdot dx$$

$$\Rightarrow\int_0^v v dv=\int_0^L\frac{g}{L}\cdot x\cdot dx$$

$$\therefore v=\sqrt{gL}$$

(2). 设当下垂长度为x时,链条开始下滑



由牛二定律,得

AB段: $$T-f_u=m_1a_1'$$

BC段: $$m_2g-T'=m_2a_2'$$

$\because$ 链条不伸长

$$\therefore a_1'=a_2'=a'$$

$$\because T=T'$$

$$f_u=um_1g$$

$$\Rightarrow a'=\frac{dv'}{dt}=\frac{1}{m_1+m_2}\left(m_2g-um_1g\right)$$

要使链条开始下滑,则

$$a'=\frac{dv'}{dt}\geq 0 \quad \Rightarrow m_2\geq um_1$$

$$\Rightarrow x\geq u\left(L-x\right)$$

$$\Rightarrow x\geq\frac{u}{u+1}L$$

2.3 动量 动量守恒

一. 动量 $\vec{p}$

$$\vec{p}=m\vec{v}$$ 方向与速度同向

$p_x = mv_x$ $p_y = mv_y$ $p_z = mv_z$ 单位: $kg \cdot m/s$

自由质点的速度不变 → 动量是常量

惯性定律： 一个自由质点永远以恒定的动量运动.

二. 动量守恒

设一质点在Δt时间内，速度改变 $\Delta\vec{v}$

$$\Delta\vec{p}=m\Delta\vec{v}$$

对于两个相互作用的质点,两者在相同的时间间隔中的动量变化,大小相同,方向相反.

$$\begin{cases} \Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2 \\ \Delta\vec{p}_1 = \vec{p}_1' - \vec{p}_1 \qquad \Delta\vec{p}_2 = \vec{p}_2' - \vec{p}_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{p}_1' - \vec{p}_1 = -(\vec{p}_2' - \vec{p}_2)$$

$$\underbrace{\vec{p}_1' + \vec{p}_2'}_{\text{时刻}t'\text{的总动量}} = \underbrace{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}_{\text{时刻}t\text{的总动量}}$$

上式说明,系统的总动量在任何时刻都相等.

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{常量}$$ —— 动量守恒定律

系统所受合外力为零或不受力.

▲由若干个质点构成的孤立系统

$$\vec{p}=\vec{p}_1+\vec{p}_2+\vec{p}_3+\cdots=\sum\vec{p}_i=常数$$

动量守恒定律不仅适用于宏观物体，而且还适用于微观物体，是物理学中最重要的定律。

三.牛顿第二定律的动量表述

$$\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$$

两质点在Δt时间内动量的平均变化

$$\frac{\Delta\vec{p}_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta\vec{p}_2}{\Delta t}$$

$\Delta t \to 0$

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

力的定义：质点所受到的作用力等于其动量的时间变化率。

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$ —— 质点动力学方程

2.4 冲量　动量定理

一. 冲量I　　力与时间的乘积.

$$\because \vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \therefore d\vec{p}=\vec{F}dt$$

$$\int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} d\vec{p}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt \quad \Rightarrow \vec{p}_2-\vec{p}_1=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t$$

$$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt$$

单位: $N\cdot s$

二 .动量定理

$$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot dt=\int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2}d\vec{p}=\vec{p}_2-\vec{p}_1$$

物体所受外力的冲量等于物体的动量的增量.

▲动量定理在直角坐标系中的表示:

$$\begin{cases} I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x \cdot dt = p_{2x} - p_{1x} \\ I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y \cdot dt = p_{2y} - p_{1y} \\ I_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z \cdot dt = p_{2z} - p_{1z} \end{cases}$$

冲量沿某方向的分量 = 质点在该方向动量的增量。

质点系的动量定理：

质点系总动量的增量等于合外力的冲量。

$$\vec{I}=\int_{t}^{t'}\vec{F}_{外}dt=\vec{p}'-\vec{p}$$

三. 冲击力

在讨论质点间碰撞等问题时，物体间的相互作用力往往很大而作用时间很短，称为冲击力。

实际问题中，常以平均冲力近似表示物体间冲力的大小：

$$\vec{I} = \overline{\vec{F}}\Delta t = \Delta\vec{p} \quad \Rightarrow \quad \overline{\vec{F}} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{\vec{I}}{\Delta t}$$

例6. 质量$M=3T$的重锤从高$h=1.5m$处自由落到受锻压的工件上,工件发生形变.如果作用时间$t=0.1s$,求锤对工件的平均冲力?

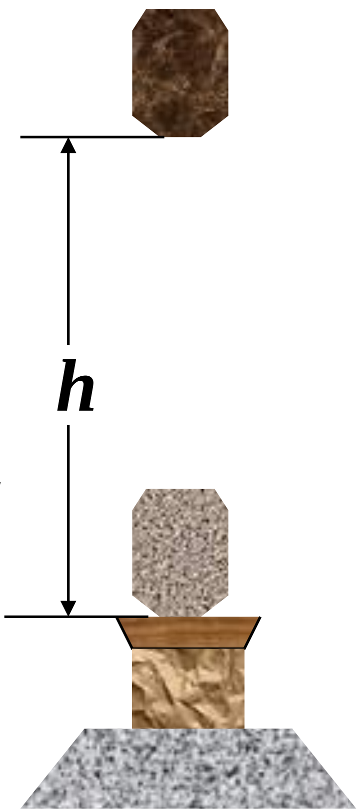
解: 取重锤为研究对象

重锤自由下落

$$v_0 = \sqrt{2gh}$$

锻压过程中, $v_0 \to 0$

由动量定理,得



$$\left(\overline{N} - G\right) \cdot t = 0 - \left(-Mv_0\right) = \sqrt{2gh} \cdot M$$

$$\Rightarrow \overline{N} = \frac{M \cdot \sqrt{2gh}}{t} + G = 1.92 \times 10^5 (N)$$

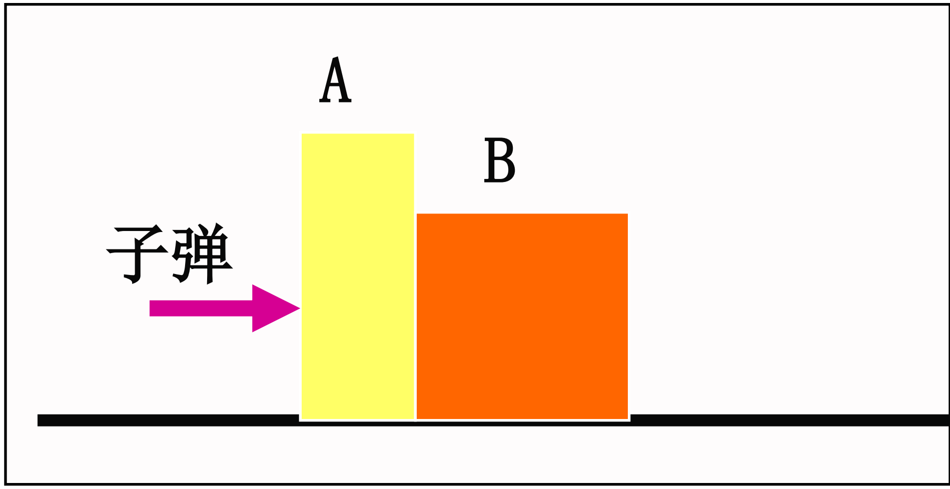
$$\therefore \overline{N'} = -\overline{N} = -1.92 \times 10^5 (N)$$

例7:如图，两质量分别为m_A和 m_B木块并排静止放置在光滑的水平面上，一子弹水平地穿过两木块，设子弹穿过两木块所用的时间分别为t_A和 t_B，木块对子弹的阻力为恒力F，求子弹穿出后两木块的速度大小。

解：（1）设子弹穿过A后两物块的速度为V_A，则：

$$Ft_A = (m_A + m_B)V_A$$

$$\Rightarrow \quad V_A = \frac{Ft_A}{m_A + m_B}$$



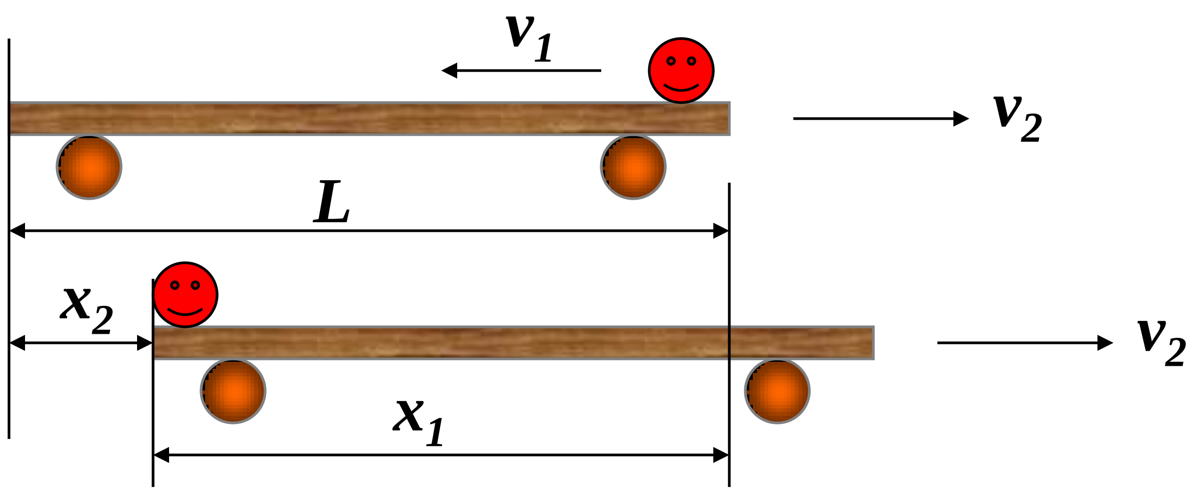
（2）设子弹穿过B后物块B的速度为V_B，则：

$$Ft_B = m_B V_B - m_B V_A$$

$$\Rightarrow \quad V_B = \frac{Ft_A}{m_A + m_B} + \frac{Ft_B}{m_B}$$

例9. 一质量为*M*的板车在光滑的水平面上,车长*L*,车上一质量为m的人从车右端走到车左端,求对于地面,人、车分别前进了多少?

解:



设人在车上走时对地的速度为v_1,车对地速度为v_2.

对车人系统,由动量守恒定律,得

$$Mv_2 - mv_1 = 0$$

$$v_2 = \frac{m}{M}v_1$$

人相对于车的速度为

$$v' = v_1 + v_2 = v_1 + \frac{m}{M}v_1 = \frac{M+m}{M}v_1$$

设人从车右端走到左端的时间为T,则

$$L=\int_0^T v'dt=\frac{M+m}{M}\int_0^T v_1 dt$$

人相对于地面前进的距离为

$$x_1=\int_0^T v_1 dt=\frac{M}{M+m}L$$

车相对于地面前进的距离为

$$x_2=\int_0^T v_2 dt$$

$$=-\frac{m}{M}\int_0^T v_1 dt$$

$$=-\frac{m}{M+m}L$$