第四章 刚体的定轴转动

教学基本要求

1. 理解描述刚体定轴转动的基本物理量的定义和性质；

2. 理解刚体的角动量、转动惯量的物理意义；

3. 掌握刚体的转动定理及其应用；

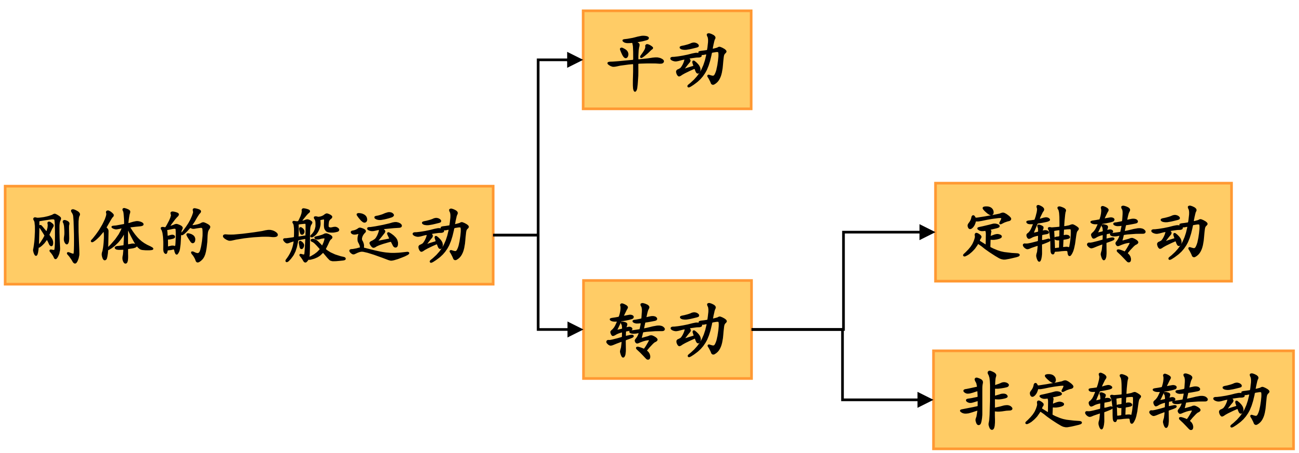
4. 掌握刚体的角动量定理和角动量守恒定律；

5.掌握力矩的功、刚体的动能定理和机械能守恒定律。

4.1 刚体的运动

实际物体都是有形状、大小的。当需要研究物体的自身运动时，物体不能被看作质点。但很多情况下，可忽略物体在运动过程中的形变。

刚体： 物体内任意两点间的距离在运动中保持不变。

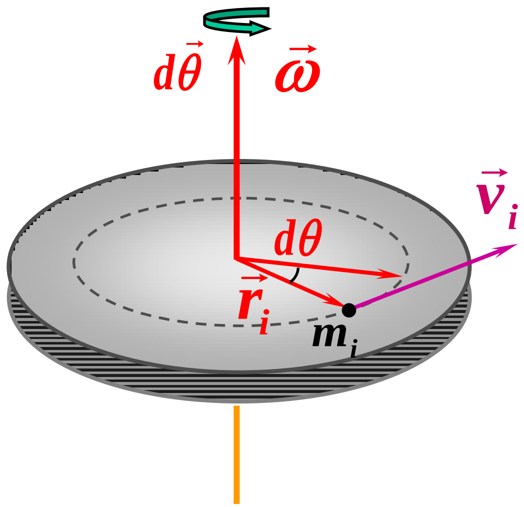


§ 4-2 质心、质心运动定理

- 对质量分布均匀，形状对称的物体，质心就在其几何中心。

4.3 刚体的角动量 转动惯量

一.刚体定轴转动的角量描述:



➢ 角位移矢量：dt时间内位矢转过的角度。

$$d\vec{\theta} \qquad (rad) \qquad \text{方向沿转轴}$$

➢ 角速度矢量：角位移的时间变化率。

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} \qquad (rad/s)$$

定轴转动刚体上任一质元的线速度和角速度的关系为:

$$\boxed{\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i}$$

右手螺旋关系

➢ 角加速度矢量：角速度的时间变化率。

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (rad/s^2)$$

$\vec{\beta}$与$d\vec{\omega}$同方向。刚体加速转动时$\vec{\beta}$、$\vec{\omega}$同方向，反之$\vec{\beta}$、$\vec{\omega}$反方向。

➢刚体定轴转动时转轴固定不动，所以各角量可用标量表示。

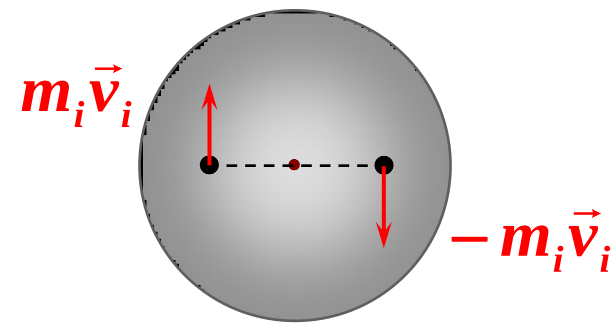
➢刚体定轴转动时，各质元角量 $d\vec{\theta},\vec{\omega},\vec{\beta}$ 均相同，但各质元线量 $d\vec{r}_i,\vec{v}_i,\vec{a}_i$ 均不同。

➢ 角量与线量的关系：

$$v_i=\omega r_i\ ,\quad a_{ti}=\beta r_i\ ,\quad a_{ni}=r_i\,\omega^2$$

可见：研究刚体定轴转动时用角量描述比用线量描述方便得多。

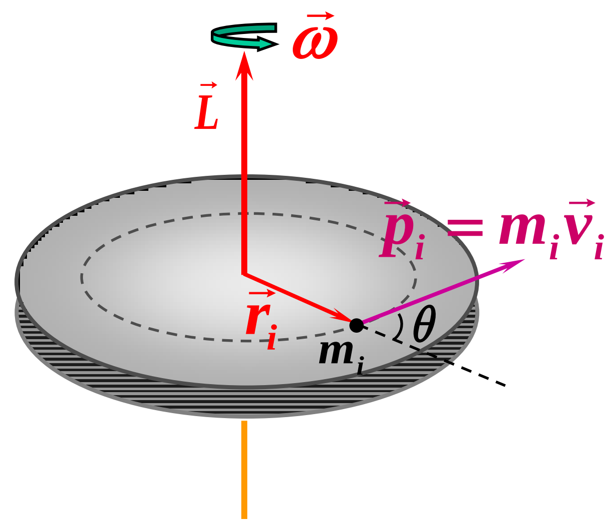
二. 刚体的角动量$\vec{L}$



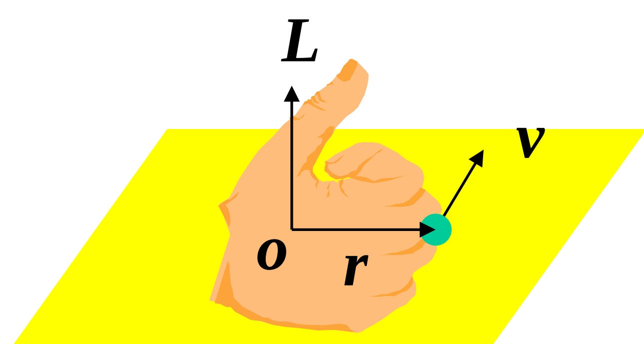
刚体定轴转动不能用动量进行描述，
而要用角动量进行描述。

定义：刚体上任一质元对转轴的角动量：

$$\boxed{\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = m_i\vec{r}_i \times \vec{v}_i = m_i r_i^2\vec{\omega}}$$



方向: *L,r,v*: 右手螺旋关系



整个刚体对转轴的角动量为:

$$\vec{L}=\sum\vec{L}_i=(\sum m_i r_i^2\vec{\omega})$$

定轴转动时,各质点均以相同的角速度绕固定轴作圆周运动.

整个刚体的角动量

$$\vec{L}=\sum\vec{L}_i=\sum(m_i r_i^2\,\vec{w})$$

$$\overset{w=\text{常量}}{=}\sum(m_i r_i^2)\vec{w}$$

三. 刚体的转动惯量I

定轴转动刚体的角动量

$$\vec{L}=\sum(m_i r_i^{\ 2})\vec{w}$$

$\sum m_i r_i^{\ 2}$仅与刚体自身情况有关

而与刚体是如何转动的没有任何联系。

定义：刚体绕某定轴的转动惯量

$$I=\sum m_i r_i^{\ 2} \quad \text{—— 转动惯量}$$

$$\vec{L}=I\,\vec{w}$$

I:刚体对转轴的转动惯量用来表示物体在转动中惯性大小的量度.等于刚体中每个质点的质量与其到转轴距离平方的乘积之和,它与刚体的质量分布及转轴位置有关.

★ 有关因素

▲与刚体质量有关;

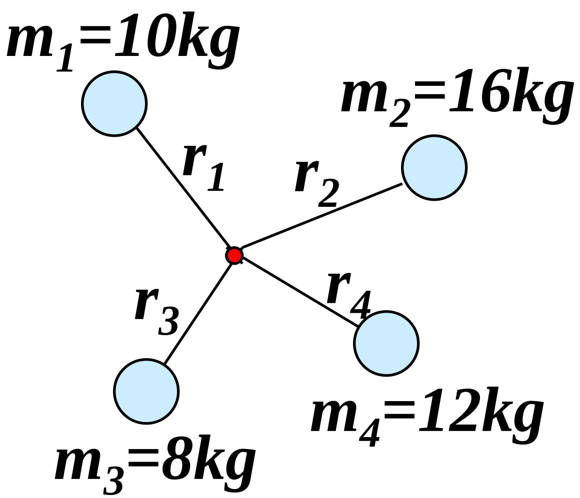
▲与刚体的形状, 大小和各部分的密度有关;

▲与转轴位置有关.

4.3 刚体转动惯量的计算

一. 一般计算

1. 质点系



$r_1 = 12cm$

$r_2 = 10cm$

$r_3 = 8cm$

$r_4 = 6cm$

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + m_4 r_4^2$$

2. 质量连续分布的刚体

把刚体看成是无数个微元的集合

$$I = \int r^2 dm$$ 看成质点

r: 微元与转轴间的距离;

dm: 微元的质量.

★ 几何形状简单,密度均匀的物体

1. 质量线分布 （长度元）

$$dm = \lambda dx \qquad I = \int x^2 \lambda dx \qquad (\lambda: \text{线密度})$$

2. 质量面分布 （面积元）

$$dm = \sigma dS \qquad I = \int r^2 \sigma dS \qquad (\sigma: \text{面密度})$$

3. 质量体分布 （体积元）

$$dm = \rho dV \qquad I = \int r^2 \rho dV \qquad (\rho: \text{体密度})$$

例1. 求质量为m,长为l的均匀细棒的转动惯量.

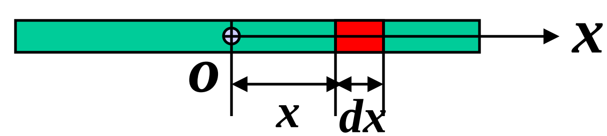
(1). 转轴通过棒的中心与棒垂直;

(2). 转轴通过棒的一端与棒垂直;

(3). 转轴通过棒上离中心为h的一点与棒垂直.

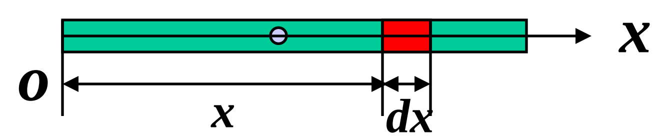
解: (1). 建立坐标系,取一长度元dx,离轴距离为x,则

$$dm = \lambda dx, \lambda = \frac{m}{l}, dI = x^2 dm$$



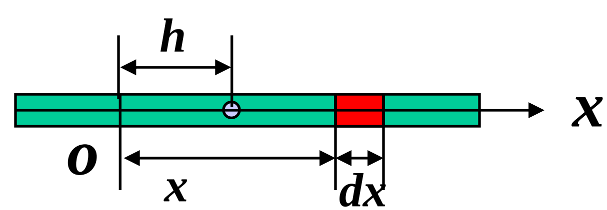
$$I = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \lambda dx = \frac{1}{12}\lambda l^3 = \frac{1}{12} m l^2$$

(2).



$$I = \int_0^l x^2 \lambda dx = \frac{1}{3}\lambda l^3 = \frac{1}{3} m l^2$$

(3).



$$I = \int_{-\frac{l}{2}+h}^{\frac{l}{2}+h} x^2 \lambda dx = \frac{1}{3}\lambda x^3 \Big|_{-\frac{l}{2}+h}^{\frac{l}{2}+h} = \frac{1}{12} m l^2 + m h^2$$

例2. 质量为m,半径为r的圆环或圆盘,绕通过中心并与圆面垂直的转轴转动,求圆环或圆盘的转动惯量?

解: (1). 圆环

$$I=\int_0^m r^2 dm$$

$$=r^2\int_0^m dm$$

(各质点到转轴距离均相等为r)

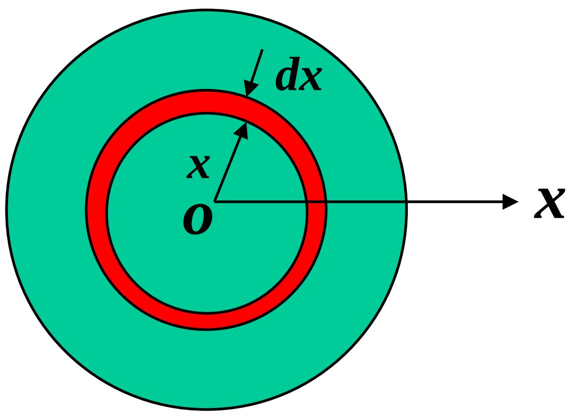
$$=mr^2$$

(2). 圆盘　　在距转轴x处取一宽为dx的圆环,则

$$dm=\sigma dS=\sigma(2\pi x dx)$$

圆环的转动惯量为

$$dI=dmx^2$$



$$\therefore I=\int_R dI=\int_0^m x^2 dm$$

$$=\int_0^r x^2\sigma(2\pi x dx)$$

$$= 2\pi\sigma\int_0^r x^3 dx$$

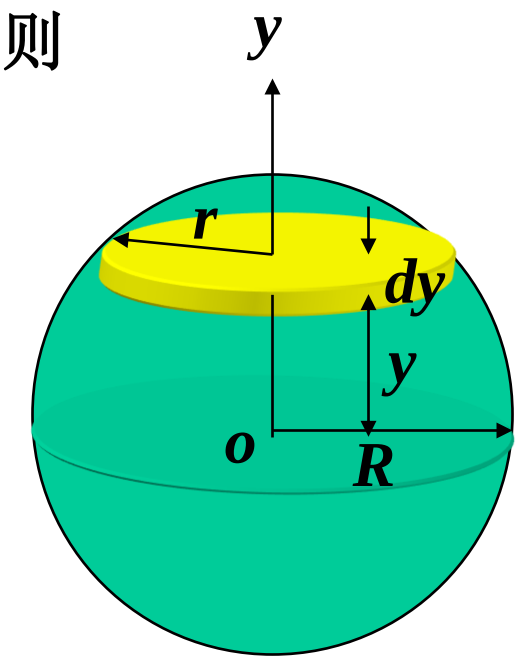
$$\because \sigma = \frac{m}{\pi r^2}$$

$$= \frac{\pi}{2}\sigma r^4$$

$$\therefore I = \frac{1}{2}mr^2$$

例3. 质量为m,半径为R的圆球,绕直径转动,求圆球的转动惯量?

解: 在距球心y处取一厚度为dy的圆盘,则



$$dI_{盘} = \frac{1}{2}dmr^2$$

$$dm = \rho dV$$

$$= \rho\pi r^2 dy$$

$$= \rho\pi(R^2 - y^2)dy$$

$$\therefore I = \int_{2R} dI$$

$$= \int_{2R} \frac{1}{2} r^2 \rho\pi(R^2 - y^2)dy$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{1}{2}(R^2 - y^2)\rho\pi(R^2 - y^2)dy$$

$$= \frac{1}{2}\rho\pi\int_{-R}^{R}(R^2 - y^2)^2 dy = \frac{8}{15}\pi\rho R^5$$

$$\because \rho = m \Big/ \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\therefore I_{球} = \frac{2}{5}mR^2$$

★ **注意:** $I=\int r^2 dm$ 把积分量化

1．根据刚体的形状选择合适形状的微元。

2．对微元定位（1）、建立坐标系；（2）、定位：确定微元的位置。

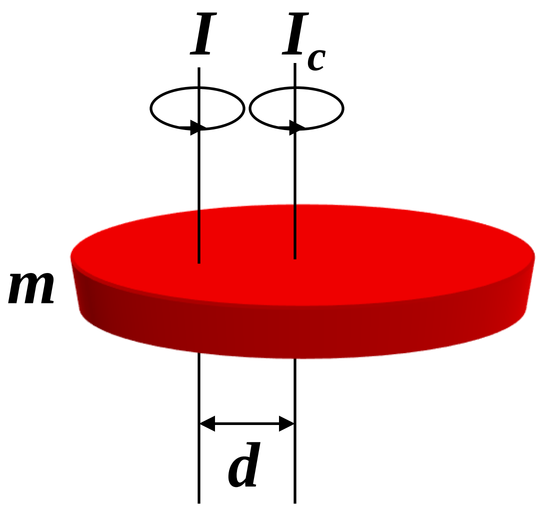
3. 根据微元形状写出对应的dI（当选择的微元有形状，不能看成质点时，相应的物理量的表达式应与该形状相对应起来）。

$$dI_{盘}=\frac{1}{2}dmr^2$$

4. 确定积分上下限，求积分。

二. 两个定理

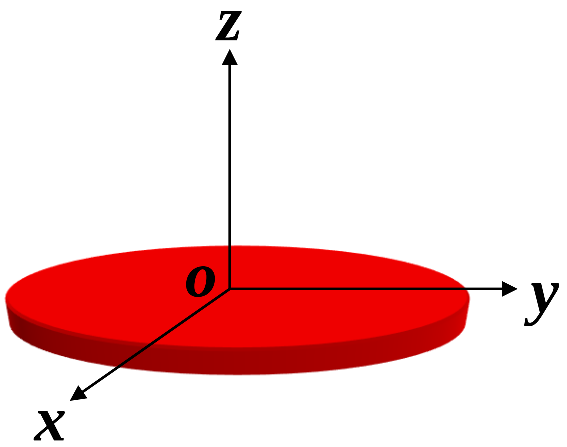
1. 平行轴定理



若质量为m的刚体绕某转轴的转动惯量为I,绕另一与之平行且通过质心的转轴的转动惯量为Ic,两轴相距为d,则

$$I = I_c + md^2$$

2. 正交轴定理



薄板型刚体对于板内两条正交的转动轴的转动惯量之和等于刚体对于过两轴正交点且垂直于板面的转轴的转动惯量.

$$I_z = I_x + I_y$$

例4. 用平行轴定理求解例1(3)?

解: 细棒的质心在棒的中间,现转轴与质心相距为*h*.

由平行轴定理,得

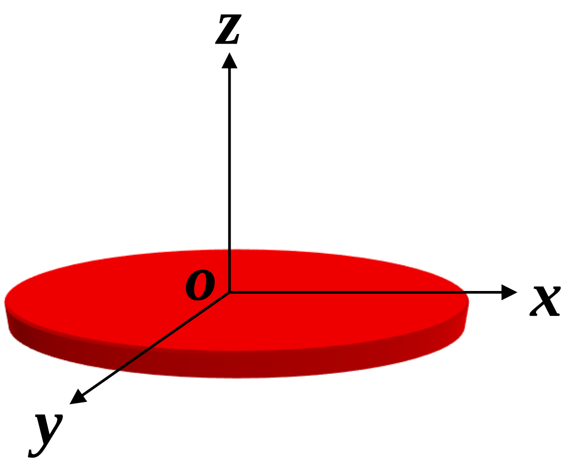
$$\boldsymbol{I = I_c + mh^2}$$

$$= \frac{1}{12}ml^2 + mh^2$$

例5. 求质量为M,半径为R的圆盘对于任一直径为转轴的转动惯量?

解: 圆盘内任意两条相互垂直的直径d_x,d_y,以它们为转轴,圆盘的转动惯量相等,即

$$I_x = I_y = I_d$$

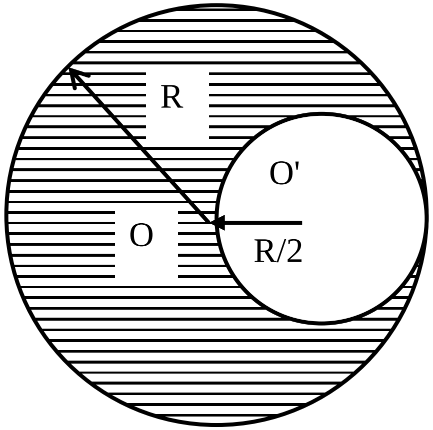


$$\because I_z = I_x + I_y = \frac{1}{2}MR^2$$

$$\therefore I_d = \frac{1}{4}MR^2$$

三. 补缺及复合型刚体（增减）

例：从一半径为**R**的均匀薄板上挖去一个直径为**R**的的圆板，所形成的圆洞中心在距原薄板中心**R/2**处（如图），剩余薄板的质量为**m**。求此时薄板对于通过原中心而与板面垂直的轴的转动惯量。



解：设板的面密度为σ，则圆洞对于通过原中心而与板面垂直的轴的转动惯量为

$$I_1 = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{R}{2}\right)^2 + m_1\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}\sigma\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3}{32}\sigma\pi R^4$$

完整薄板对于通过中心而与板面垂直的轴的转动惯量为

$$I_2 = \frac{1}{2}m_2R^2 = \frac{1}{2}\sigma\pi R^4$$

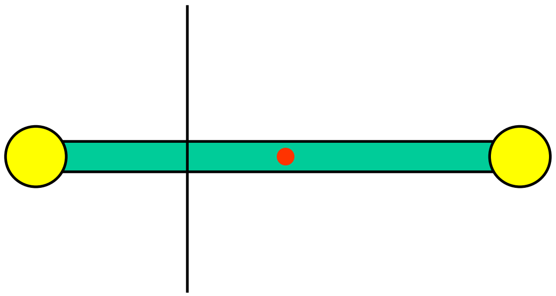
薄板对于通过原中心而与板面垂直的轴的转动惯量为

$$I = I_2 - I_1 = \frac{1}{2}\sigma\pi R^4 - \frac{3}{32}\sigma\pi R^4 = \frac{13}{32}\sigma\pi R^4$$

$$\because \sigma\left(\pi R^2 - \pi\frac{R^2}{4}\right) = \frac{3}{4}\sigma\pi R^2 = m \qquad \therefore I = \frac{13}{32}\sigma\pi R^4 = \frac{13}{32}\frac{4m}{3}R^2 = \frac{13}{24}mR^2$$

例：如图所示均匀细棒长为L，质量为m，两侧的小球的质量均为m，转轴与中心相距L/4，求整个刚体的转动惯量。

解：



$$I = I_{棒} + I_{球1} + I_{球2}$$

$$= I_c + m\left(\frac{L}{4}\right)^2 + m\left(\frac{L}{4}\right)^2 + m\left(\frac{3L}{4}\right)^2$$

$$= \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{4}\right)^2 + m\left(\frac{L}{4}\right)^2 + m\left(\frac{3L}{4}\right)^2$$

$$= \cdots$$

4.4 刚体的转动定理

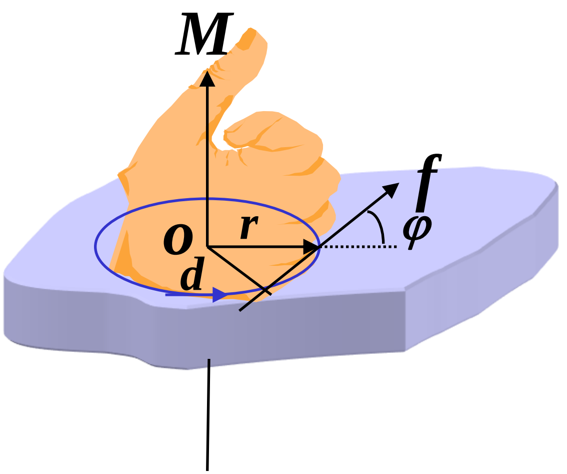
一. 力矩 $\vec{M}$

1. 外力f在转动平面内; (f垂直于转轴)

$$M = fd$$

若力f与矢径r间有夹角φ,则

$$M = fr\sin\varphi$$



方向:右手螺旋关系

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{f}$$

单位：N.m

2. 外力f不在转动平面内

$$\text{把}f\text{分成两个分力}\begin{cases}\text{垂直于转动平面的}f_{\perp};\\ \\ \text{平行于转动平面的}f_{\parallel}.\ (\text{决定转动})\end{cases}$$

3. 如果有几个外力同时作用于刚体上,则合力矩的量值等于这几个力各自力矩的代数和.

二. 刚体的转动定理

刚体中某一质点对于转轴的角动量为

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{P}_i$$

两边同时求导,得

$$\frac{d\,\vec{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times \vec{P}_i)$$

$$= \frac{d\,\vec{r}_i}{dt} \times \vec{P}_i + \vec{r}_i \times \frac{d\,\vec{P}_i}{dt}$$

$$\because \vec{v}_i = \frac{d\,\vec{r}_i}{dt},\ \vec{f}_i = \frac{d\,\vec{P}_i}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d\,\vec{L}_i}{dt} = \vec{v}_i \times \vec{P}_i + \vec{r}_i \times \vec{f}_i$$

$$\xRightarrow{\vec{v}_i\text{与}\vec{P}_i\text{同向}} \frac{d\,\vec{L}_i}{dt} = 0 + \vec{r}_i \times \vec{f}_i = \vec{r}_i \times \vec{f}_i = \vec{M}_i$$

对于整个刚体

$$\frac{d\,\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum \vec{L}_i\right) = \sum \vec{M}_i$$

刚体间任意两质点间的相互作用对转轴产生的力矩大小相等,方向相反.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{外}$$

刚体作定轴转动时,角动量的时间变化率,等于刚体所受的对于同一转轴的合外力矩.

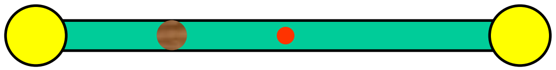
$$\because \vec{L} = I\vec{w}$$

$$\therefore \frac{d\vec{L}}{dt} = I\frac{d\vec{w}}{dt} = I\vec{\beta}$$

$$\vec{M}_{外} = I\vec{\beta}$$

刚体在合外力矩的作用下,所获得的角加速度与合外力矩的大小成正比,并与转动惯量成反比.

例：如图所示均匀细棒长为L，质量为m，两侧的小球的质量均为m，转轴与中心相距L/4，求(1).整个刚体的转动惯量;(2)当它从水平位置下摆时的角加速度。



解：(1) $$I=I_{棒}+I_{球1}+I_{球2}$$

$$=I_c+m\left(\frac{L}{4}\right)^2+m\left(\frac{L}{4}\right)^2+m\left(\frac{3L}{4}\right)^2$$

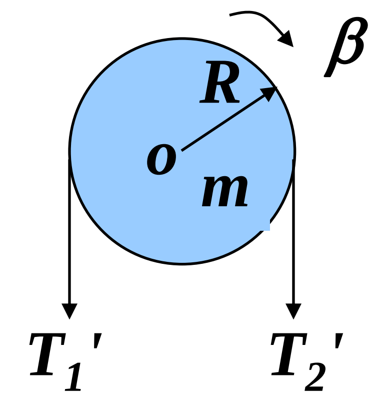
$$=\frac{1}{12}mL^2+m\left(\frac{L}{4}\right)^2+m\left(\frac{L}{4}\right)^2+m\left(\frac{3L}{4}\right)^2=\frac{37}{48}mL^2$$

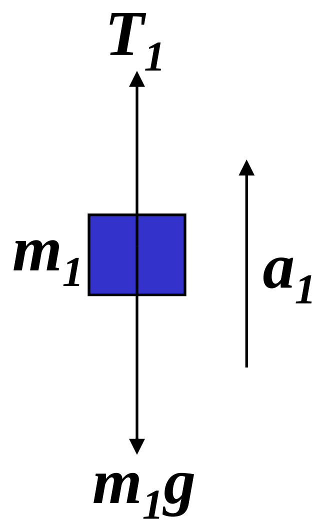
(2) $$M=mg\frac{l}{4}+mg\frac{3l}{4}-mg\frac{l}{4}=mg\frac{3l}{4}$$

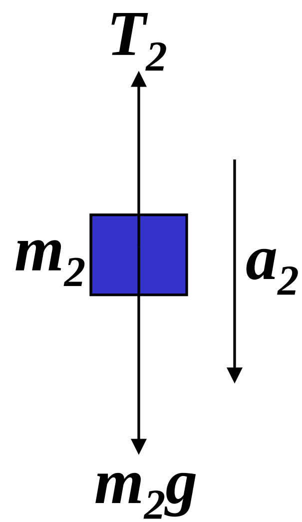
$$M=I\beta \quad \Rightarrow \beta=\frac{36g}{37l}$$

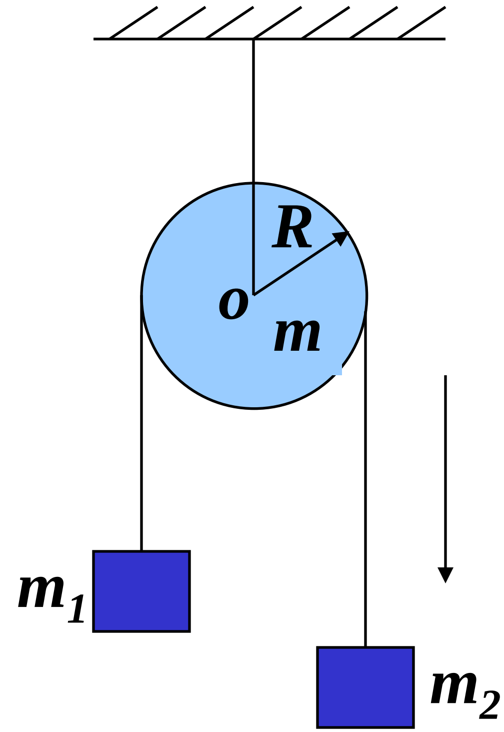
例6. 一轻绳跨过一定滑轮(可视为圆盘), 绳的两端分别悬有质量为m_1和m_2的物体,$m_1<m_2$. 设滑轮质量为m, 半径为R, 绳与滑轮间无相对滑动.试求物体的加速度和绳的张力?

解:









$$\begin{cases} T_1 - m_1 g = m_1 a_1 \\ m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \\ T_2' R - T_1' R = I\beta \end{cases}$$

$$\because a_1 = a_2 = R\beta, T_1 = T_1', T_2 = T_2', I = \frac{1}{2} mR^2$$

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m}$$

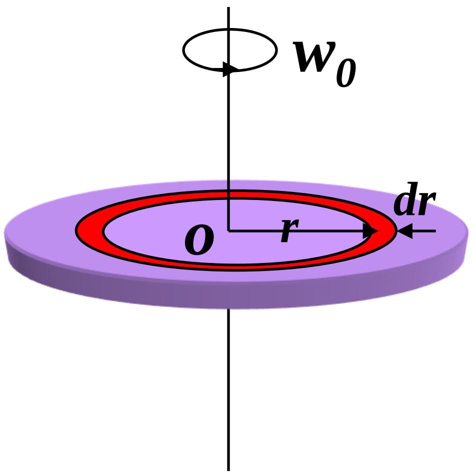
$$T_1' = m_1(g + a) = \frac{m_1(2m_2 + \frac{1}{2}m)}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m} g$$

$$T_2' = m_2(g - a) = \frac{m_2(2m_1 + \frac{1}{2}m)}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m} g$$

$$\beta = \frac{a}{R} = \frac{m_2 - m_1}{(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m)R} g$$

例7. 设有一均匀圆盘,质量为m,半径为R, 可绕通过盘中心的光滑竖直轴在水平桌面上转动. 圆盘与桌面间的滑动摩擦系数为u. 若用外力推动它, 使其角速度为w_0时,撤去外力, 求此后圆盘还能继续转动多少时间?

解：在距转轴r处取一宽度为dr的圆环,则



$$dm = (2\pi r dr)\sigma \qquad \sigma = \frac{m}{\pi R^2}$$

$$\Rightarrow dM_f = (udmg)r = ug2\pi\sigma r^2 dr$$

$$\Rightarrow M_f = \int_0^R dM_f$$

$$= \int_0^R ug2\pi\sigma r^2 dr$$

$$= \frac{2}{3}umgR$$

$$\because -M_f = I\beta,\ I = \frac{1}{2}mR^2$$

$$\Rightarrow \beta = -\frac{4ug}{3R} \qquad \Rightarrow t = \frac{0-w_0}{\beta} = \frac{3Rw_0}{4ug}$$

4.5 刚体的角动量定理和角动量守恒

一. 刚体的角动量定理

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M} \qquad \Rightarrow \vec{M}\,dt=d\vec{L}$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\,dt=\int_{L_1}^{L_2}d\vec{L}$$

$$=\vec{L}_2-\vec{L}_1$$

$$=I\vec{w}_2-I\vec{w}_1$$

转动刚体所受合外力矩的冲量矩,等于刚体在这段时间内角动量的增量.

若某物体(非刚体)的转动惯量为非恒量,则角动量定理变为

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\,dt=\overline{\vec{M}}\Delta t=I_2\vec{w}_2-I_1\vec{w}_1$$

二. 角动量守恒定律

若合外力矩为零,则

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d(I\vec{w})}{dt}=0$$

$$\Rightarrow \vec{L}=I\vec{w}=\text{常量}$$

当物体所受的合外力矩等于零时,物体的角动量保持不变.

▲ 角动量守恒的两种情况

(1). 转动惯量和角速度均不变;

(例如转动中的飞轮)

(2). 转动惯量和角速度同时改变.

(例如子弹打木棒、花样滑冰)

例. 以50 N.m 的不变力矩作用在一转轮上，在20 秒内该轮的角速度由零增加到 200 转每分钟，然后移去此力矩，转轮因受力矩的摩擦经50秒后停止，求:

(1) 转轮的转动惯量，（2）摩擦力矩 。

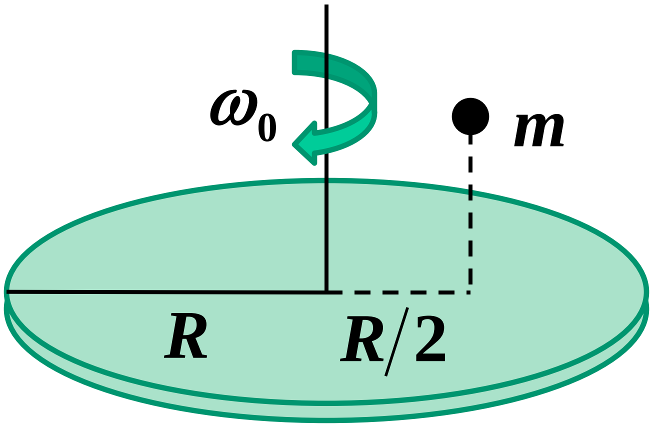
解:

$$\left(M - M_f\right)\Delta t_1 = Iw - 0$$

$$-M_f \Delta t_2 = 0 - Iw$$

$$\Rightarrow M_f = \cdots \quad , \quad I = \cdots$$

例. 如图所示，一半径为R、质量为M的均匀圆盘水平放置，可绕通过盘心的铅直轴作定轴转动。当圆盘以角速度 ω_0 转动时，有一质量为m的橡皮泥铅直落在圆盘上，并粘在据转轴 $\frac{1}{2}R$ 处。那么橡皮泥和盘的共同角速度为多少？



解： 由角动量守恒得：

$$I\omega_0 = I'\omega$$

$$\frac{1}{2}MR^2\cdot\omega_0 = \left(\frac{1}{2}MR^2 + m\left(\frac{1}{2}R\right)^2\right)\cdot\omega$$

代入数据解得：$\omega = \dfrac{M}{M+\frac{1}{2}m}\omega_0$

例. 一均匀细木棒，长为l，质量为M，静止在光滑的水平桌面上，棒能绕通过中点的垂直轴转动，今有一质量为m的子弹，以速度v射入木棒的一端（陷于木棒中）其方向垂直于木棒与转轴，求射击后木棒的角速度ω。

解： 由角动量守恒得：

$$I_{子弹}\omega_{子0}+I_{棒}\omega_{棒0}=I_{总}\omega$$

$$m\left(\frac{l}{2}\right)^2\cdot\frac{v}{l/2}+0=\left(\frac{1}{12}Ml^2+m\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)\cdot\omega$$

$$\Rightarrow\omega=\cdots$$

4.6 刚体的动能定理

一. 刚体的转动动能

定轴转动　　　第i个质点的动能

$$E_{ki}=\frac{1}{2}m_i v_i^{\,2}$$

$$=\frac{1}{2}m_i r_i^{\,2}w^2 \qquad (\because v_i=r_i w)$$

$$=\frac{1}{2}(m_i r_i^{\,2})w^2$$

刚体的总动能为

$$E_k=\sum_i E_{ki}$$

$$=\sum_i\frac{1}{2}(m_i r_i^{\,2})w^2$$

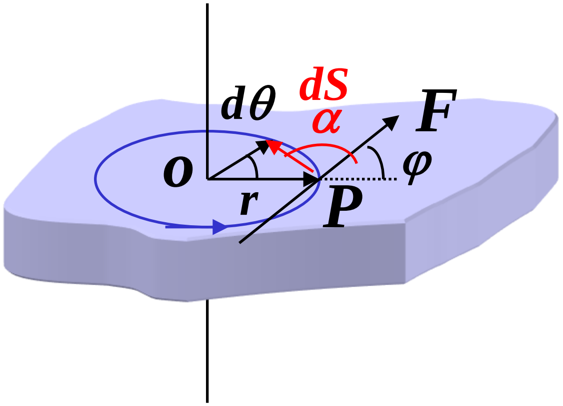
$$=\frac{1}{2}w^2\sum_i m_i r_i^{\,2}=\frac{1}{2}Iw^2$$

二. 力矩做的功

1. 功W

刚体 dt $d\theta$

力的作用点P dt dS



$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{S} = F\cos\alpha dS$$

$$\overset{dS=\left|d\vec{S}\right|=rd\theta}{=} F\cos\alpha rd\theta$$

$$\because \vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}$$

$$\Rightarrow M = Fr\sin\varphi \quad (\because \alpha+\varphi=\frac{\pi}{2})$$

$$= Fr\cos\alpha$$

$$\Rightarrow dW = Md\theta$$

力矩所作的微功等于力矩M和角位移$d\theta$的乘积.

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$$

★ 讨论:

W是合外力矩作的功.

(任一对内力是作用力与反作用力,
内力矩总功为零)

2. 功率P

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d\vec{M} \cdot \vec{\theta}}{dt} = \vec{M} \cdot \vec{w}$$

力矩所作的瞬时功率为力矩和角速度的乘积.

三. 刚体的动能定理

$$M = I\beta = I\frac{dw}{dt} = I\frac{dw}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = Iw\frac{dw}{d\theta}$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} Md\theta = \int_{w_0}^{w} Iwdw = \frac{1}{2}Iw^2 - \frac{1}{2}Iw_0^2$$

合外力矩对刚体作的功等于刚体转动动能的增量.

(仅适用于定轴转动的刚体)

四. 刚体的势能与机械能

1. 势能

由于刚体不考虑形变　　无弹性势能,只有重力势能

$$E_P = mgh_c$$

h_c: 质心相对与参考点的高度. (均匀几何形状刚体的质心为几何中心)

2. 机械能

$$E = E_k + E_P = \frac{1}{2} I w^2 + mgh_c$$

3. 刚体的机械能守恒定律

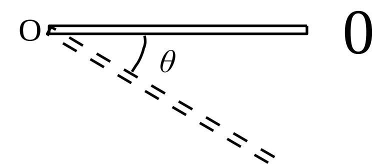
$$\underline{W_{\text{非保内}} + W_{\text{外}}} = 0$$

力矩作的功

$$E = E_k + E_P = \text{常量}$$

例. 长为***l***，质量为***m***均质细棒，可绕固定轴**O**（棒的一个端点），在竖直平面内无摩擦转动，如图所示。棒原静止在水平位置，将其释放后当转过***θ***角时，求棒的角加速度***β***、角速度***ω***。

解：



$$M=\frac{1}{2}mgl\cos\theta$$

$$M=I\beta,I=\frac{1}{3}ml^2$$

$$\therefore\beta=\frac{3g}{2l}\cos\theta$$

$$0+0=\frac{1}{2}I\omega^2-mg\frac{l}{2}\sin\theta$$

$$\therefore\omega=\sqrt{\frac{3g}{l}\sin\theta}$$

例13. 一长为l的均匀细棒，可绕通过其一端的光滑轴O在竖直平面内转动.把杆抬平后无初速地释放,杆摆至竖直位置时刚好和光滑水平桌面上的小球m相碰.球的质量和杆的质量相同,设碰撞是弹性的,求碰后小球获得的速度?

解:　系统:　棒,地球

(1). 棒下摆过程中

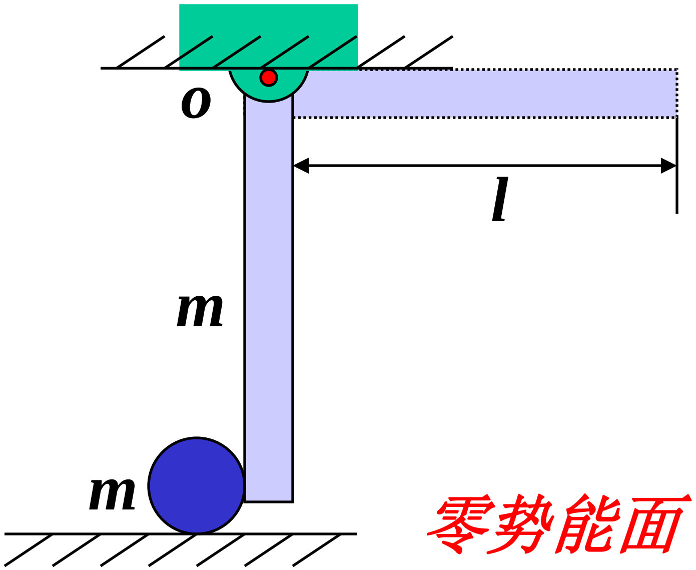
由机械能守恒定律,得

$$mgl = \frac{1}{2}I\omega^2 + mg\frac{l}{2}$$

(2). 棒与球碰撞前后

由角动量守恒定律,得

$$I\omega = I\omega' + mvl$$



(3). 碰撞过程中

由机械能守恒定律,得 （弹性碰撞）

$$\frac{1}{2}I\boldsymbol{w}^2=\frac{1}{2}I\boldsymbol{w}'^2+\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2$$

$$\Rightarrow v=\frac{\sqrt{3gl}}{2}$$ 方向水平向左.

运动学	质点的直线运动(刚体平动)		刚体的定轴转动	
	位移	$\Delta \mathbf{r}$	角位移	$\Delta\theta$
	速度	$\mathbf{v} = \frac{d\,\mathbf{r}}{dt}$	角速度	$w = \frac{d\theta}{dt}$
	加速度	$\mathbf{a} = \frac{d\,\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\,\mathbf{r}}{dt^2}$	角加速度	$\boldsymbol{\beta} = \frac{d\,\mathbf{w}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{\theta}}{dt^2}$
	匀速直线运动	$S = v_0 t$	匀角速运动	$\theta = w_0 t$
	匀变速直线运动	$v = v_0 + at$ $S = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ $v^2 = v_0{}^2 + 2aS$	匀变角速运动	$w = w_0 + \beta t$ $\theta = w_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2$ $w^2 = w_0{}^2 + 2\beta\theta$

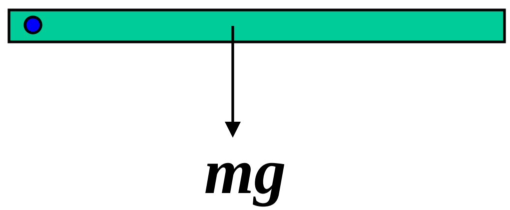
	质点的直线运动(刚体平动)		刚体的定轴转动	
动力学	力	$\mathbf{F}$	力矩	$\mathbf{M}$
	质量	m	转动惯量	I
	牛二定律	$\mathbf{F}=m\mathbf{a}$	转动定理	$\mathbf{M}=I\boldsymbol{\beta}$
	动量	$\mathbf{P}=m\mathbf{v}$	角动量	$\mathbf{L}=I\,\mathbf{w}$
	冲量	$\mathbf{I}=\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}\,dt$	冲量矩	$\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{M}\,dt$
	动量定理	$\mathbf{I}=\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}\,dt=m\mathbf{v}_2-m\mathbf{v}_1$	角动量定理	$\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{M}\,dt=I\,\mathbf{w}_2-I\,\mathbf{w}_1$
	动量守恒定律	$\sum_i m_i\mathbf{v}_i=c\quad(\sum_i\mathbf{f}_i=c)$	角动量守恒定律	$\mathbf{L}=I\,\mathbf{w}=c\quad(\sum_i\mathbf{M}_i=c)$

功与能	质点的直线运动(刚体平动)	刚体的定轴转动
	功 $W=\int_a^b f\cdot dS$	力矩作功 $W=\int_{\theta_1}^{\theta_2} Md\theta$
	动能 $E_k=\frac{1}{2}mv^2$	转动动能 $E_k=\frac{1}{2}Iw^2$
	动能定理 $W=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0{}^2$	动能定理 $W=\frac{1}{2}Iw^2-\frac{1}{2}Iw_0{}^2$
	功率 $P=\frac{dW}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{v}$	功率 $P=\frac{dW}{dt}=\vec{M}\cdot\vec{w}$
	势能 $E_{P重}=mgh$ $E_{P弹}=\frac{1}{2}kx^2$ $E_{P引}=-\frac{GMm}{R}$	势能 $E_{Pc}=mgh_c$

★ 处理刚体时的几个常见注意点：

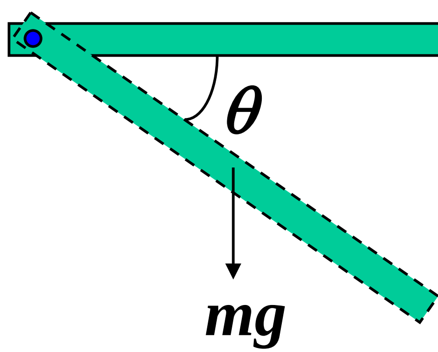
1. 分析刚体的运动，判断合外力矩是恒力矩还是变力矩；

注意恒力作用在刚体上产生的力矩不一定是恒力矩



细棒自由下摆
（重力矩为变力矩）

2. 注意计算力矩（重力矩）时力臂的问题；



$$M = mgl\cos\theta$$

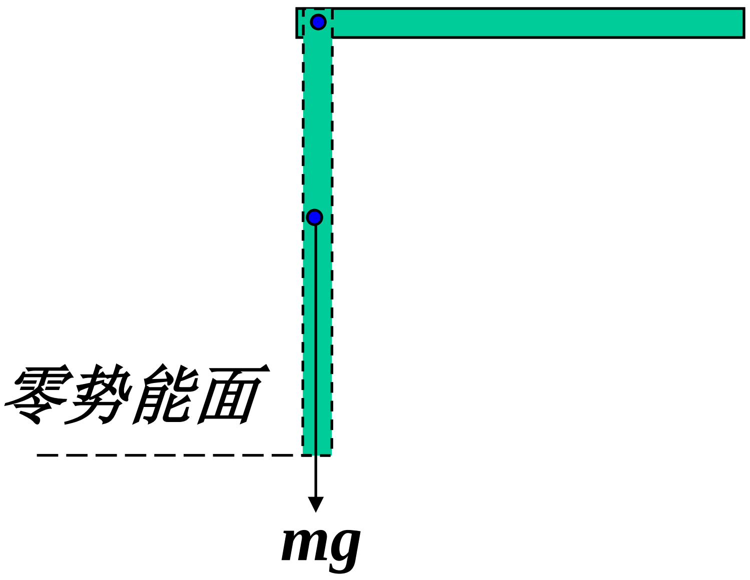
$$M = mg\frac{l}{2}\cos\theta$$

画出作用在刚体上的力，可防止出现力臂错误

3. 势能问题：

▲ *无弹性势能（无形变），只有重力势能*

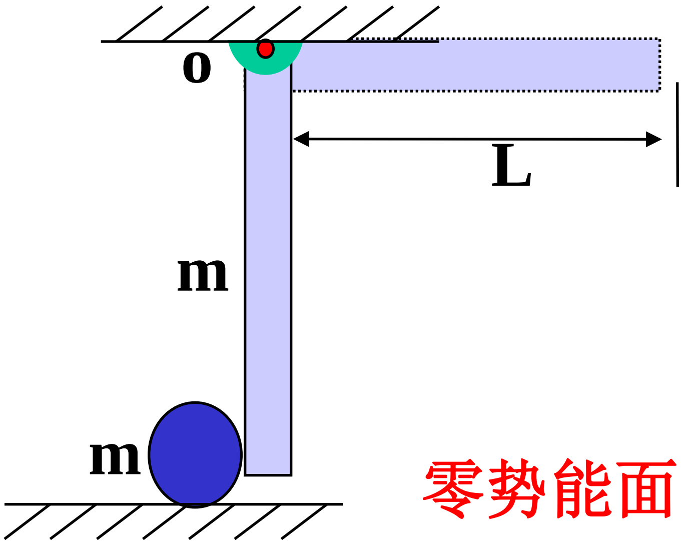
▲ *重力势能（质心到参考点的距离）*



$$0 + mgl = \frac{1}{2} Iw^2 + 0$$ ✕

$$0 + mgl = \frac{1}{2} Iw^2 + mg\frac{l}{2}$$

4. 碰撞若与刚体有关，则只能用角动量守恒定理，不能用动量守恒；



5. 系统的总角动量是对同一转轴而言；

6. 转动惯量。