# 第七章 波　动

## 7.1 机械波的产生和传播

### 一. 产生条件

▲ 有波源　　▲ 弹性媒质

# 注意

★波动只是振动状态的传播,媒质中各质点并不随波前进,各质点只是以交变的振动速度在各自的平衡位置附近作振动;

★振动和波动的区别:

a. 振动只表示一个质点的运动情况;

波动是有联系的质点系的运动情况;

b. 波速是振动的传播速度;

振动速度是质点在平衡位置附近运动的速度;

c. 质点的振动方向和波动的传播方向并不一定相同.

# 二. 横波与纵波

**横波：　质点的振动方向与波的传播方向互相垂直的波; (绳波)**

横波只能在固体中传播。

**纵波：　质点的振动方向与波的传播方向互相平行的波.（声波)**

纵波可在任何介质中传播。

▲水面波—水表面除受张（压）应力外，还受重力和表面张力的作用。水面波为横波和纵波的叠加。

▲简谐波

波源 简谐振动 媒质中各质点 简谐振动

频率与波源相同 振幅与波源有关

➢ 波传播的是振动的状态和能量，而不是质量。

## 三. 波阵面、波射线

波阵面：　波传播过程中某一时刻波所到达空间的具有相同振动状态或相位点的集合

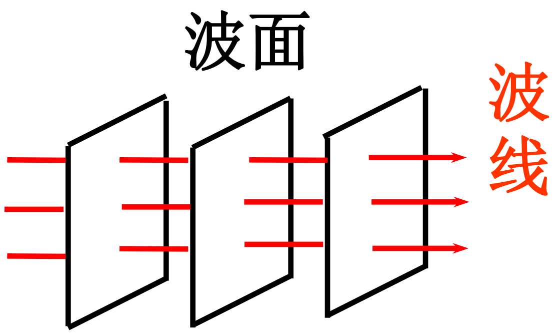
波阵面呈球形——球面波

波阵面呈平面——平面波

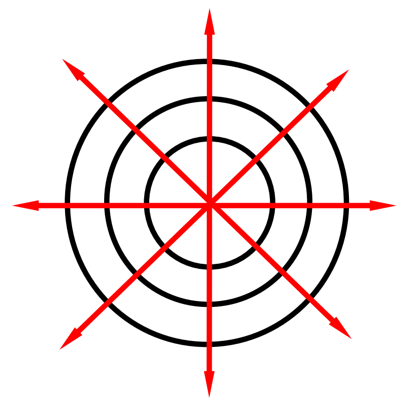
波射线（波线）

沿波的传播方向所画的射线。

在各向同性的均匀介质中，波线恒与波面垂直。



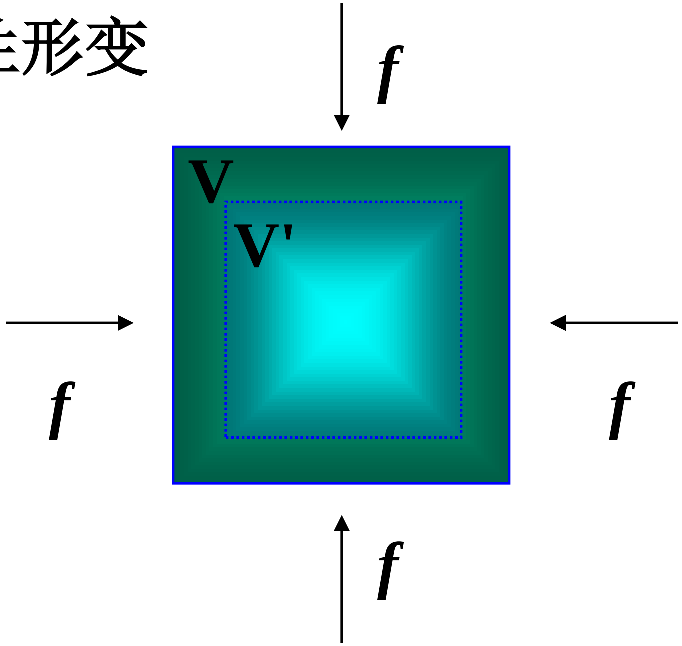

平面波



球面波

# 四. 弹性模量

体变,长变,切变弹性形变




## 1. 体变弹性模量B

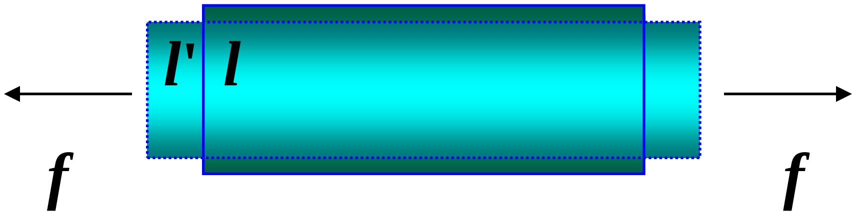
$$p = \frac{f}{S}$$ ——正应力

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{V' - V}{V}$$ ——体应变

$$p = -B\frac{\Delta V}{V}$$

$$B = -\,p \Big/ \frac{\Delta V}{V}$$

## 2. 杨氏弹性模量Y



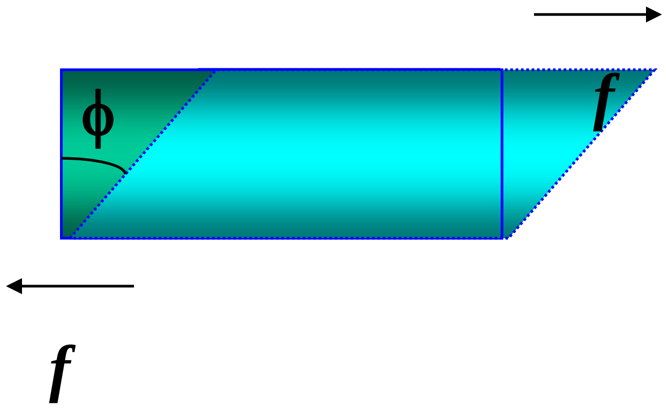

$$\sigma = \frac{f}{S}$$ ——正应力

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{l' - l}{l}$$ ——线应变

$$\sigma = Y \frac{\Delta l}{l}$$

$$Y = \sigma \Big/ \frac{\Delta l}{l}$$

## 3. 切变弹性模量G




$$\sigma = \frac{f}{S}$$ ——切应力

$$\phi$$ ——切应变

$$\sigma = G\phi$$

$$G = \frac{\sigma}{\phi}$$

**(1). 液体和气体中的波**

**体变弹性形变　　　　纵波**

**(2). 固体中的波**

**体变,长变,切变弹性形变**

**切变　横波　　　　　体变 长变　纵波**

**(3).柔软细绳或弦线**

**横波**

# 五.波的特征量

## 1. 波速$v$ (相速)

决定于媒质的特性

一定的振动相位在空间的传播速度.

(1). 液体和气体中的波速

体变弹性形变　　　　纵波

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

## (2). 固体中的波速

体变,长变,切变弹性形变

切变　横波　　　　　　体变 长变　纵波

$$v_{横} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \qquad v_{纵} = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

柔软细绳或弦线

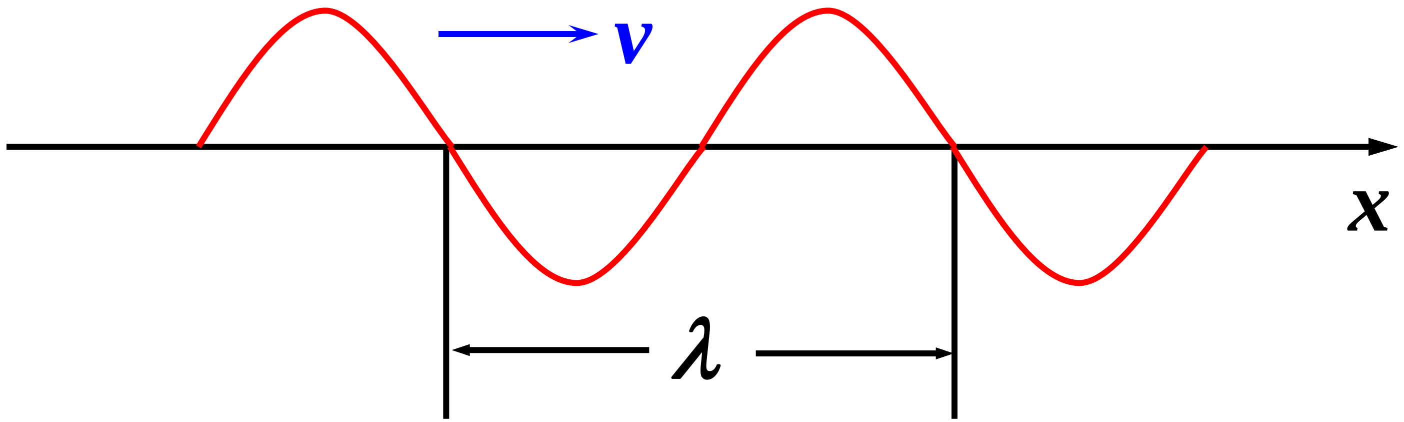
$$v_{横} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

**T：** 张力　　　　**μ：** 线密度

## 2. 波长λ

同一波线上,两个相邻相位差为2π的质点之间的距离

或者说是波线上相邻的振动状态相同的两质元间的距离




$$\lambda = vT$$

它由波源和媒质共同决定。

## 3. 周期T

波传过一个波长的时间,或一个完整的波通过波线上某一点所需的时间

它由波源决定（波源、观测者均不动时）

## 4. 频率$f$

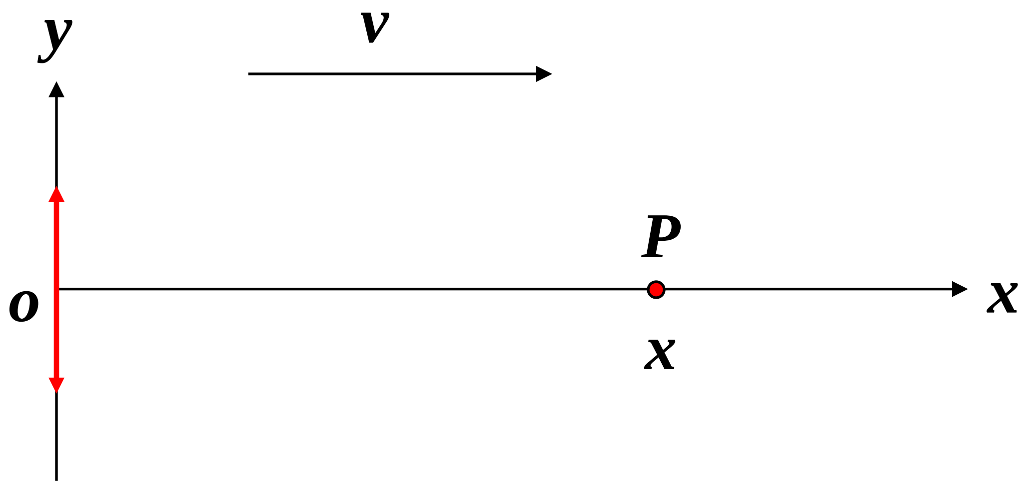
单位时间内,波动推进的距离中所包含的完整波长的数目

波在不同介质中传播时，频率不变

$$\boxed{T = \frac{1}{f} \qquad v = \frac{\lambda}{T} \qquad v = \lambda f}$$

# 7.2 平面简谐波及其波动方程

## 一. 波动方程




$\omega t$　　　　　　　　$\omega(t-\Delta t)$

$$O: \qquad y_0 = A\cos \omega t$$

设振动以速度*v*向右传播　　　振动从*O*传播到点*P*

$$\Delta t = \frac{x}{v}$$

设点*O*的相位为$\omega t$ 则点*P*的相位为$\omega(t-\Delta t)$

$$O: \quad y_0 = A\cos\omega t$$

因此*P*点的方程为

$$y = A\cos\omega(t-\Delta t)$$

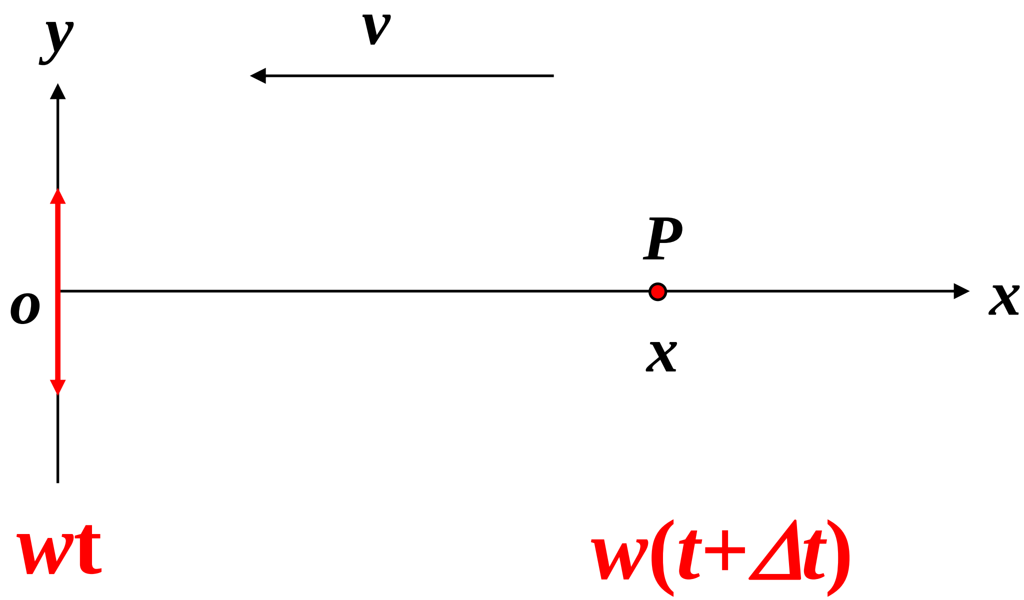
$$= A\cos\omega(t-\frac{x}{v}) \quad \text{—— 波动方程}$$

上式描述的是在波线上距坐标原点*x*处的质点在*t*时刻的位移

$$\because w=\frac{2\pi}{T}=2\pi f\ ,v=\lambda f=\frac{\lambda}{T}$$

$$y=A\cos 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})$$ —— 波动方程

波沿ox轴的负方向传播

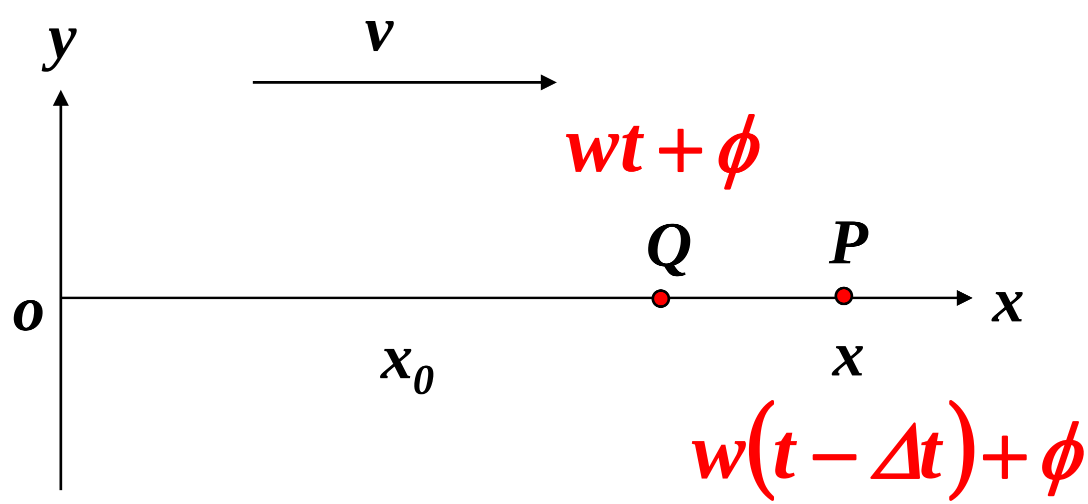



$$y=A\cos w(t+\frac{x}{v})$$ 或 $$y=A\cos 2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda})$$

★上面推导时，原点处的简谐振动的初相位为*0*，若开始时具有初相位$\phi$，则波动方程为

$$y = A\cos\left[w\left(t \mp \frac{x}{v}\right) + \phi\right]$$

## ★ 若起振波源不在原点




$$\Delta t = \frac{x - x_0}{v}$$

波沿$ox$轴正向传播,且距原点$O$为$x_0$的$Q$的振动方程

$$y_Q = A\cos(wt + \phi)$$

则波动方程为 $$y = A\cos\left[w\left(t - \frac{x - x_0}{v}\right) + \phi\right]$$

反向传播，则 $$y = A\cos\left[w\left(t + \frac{x - x_0}{v}\right) + \phi\right]$$

$$y = A\cos\left[w(t \mp \Delta t) + \phi\right]$$

★注意:

（1） 初相位;

（2） 波动传播方向;

$$-\Delta t \quad ; \quad +\Delta t$$

（3） 波源是否在原点。

$$\Delta t = \frac{x}{v} \qquad \Delta t = \frac{x - x_0}{v}$$

# 三. 波动中的振动速度与加速度

$x$看成定值,对$t$求导

距原点$x$处质点的振动速度

$$v' = \frac{\partial y}{\partial t} = -Aw[\sin w(t - \frac{x}{v}) + \phi]$$

$$v'_m = Aw$$

距原点$x$处质点的振动加速度

$$a' = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -Aw^2 \cos[w(t - \frac{x}{v}) + \phi]$$

$$a'_m = Aw^2$$

例1. 频率$f$=3000Hz的声波,在海水中以$v$=1560m/s的传播速度沿一波线传播,波从波线上A点传到B点,两点间距离为$\Delta x$=0.13$m$,问

(1).B点比A点落后多少时间?

(2).声波在A,B两点的相位差是多少?

(3).若质点振幅A=1$mm$,振动速度是否等于波速?

解: (1).

$$\Delta t=\frac{\Delta x}{v}=8.3\times10^{-5}s$$

(2).

$$\because T=\frac{1}{f}=\frac{1}{3000}s$$

$$\therefore \Delta t=\frac{0.13}{1560}=\frac{1}{12000}=\frac{1}{4}T$$

$$\therefore \Delta\phi=\frac{1}{4}\times2\pi=\frac{\pi}{2}$$

(一个周期对应于2π的相位差)

(3).

$$v_m'=Aw=18.8m/s\neq v$$

例2. 已知波动方程 $y=5\cos\pi(2.5t+0.01x)$m,求λ,T,$v$?

解:
$$y = 5\cos 2.5\pi(t + \frac{0.01}{2.5}x)$$

$$= 5\cos 2.5\pi(t + \frac{x}{250})$$

$$y = A\cos\left[w(t \mp \frac{x}{v}) + \phi\right]$$

$$\therefore A = 5m, w = 2.5\pi, v = 250m/s$$

$$T = \frac{2\pi}{w} = 0.8s$$

$$\lambda = vT = 200m$$

沿$x$轴负向传播

例3. 有一平面简谐波沿*ox*轴正向传播,已知A=1.0m,T=2.0s,λ=2.0m.
在*t*=0时,坐标原点处质点位于平衡位置沿*oy*轴正向运动,求
(1). 波动方程;
(2). *t*=1.0*s*时的位移分布;
(3). *x*=0.5*m*时的振动规律?

解: (1). 法一:设波动方程为

$$y = A\cos\left[w(t-\frac{x}{v})+\phi\right] \quad \rightarrow v' = -Aw\sin\left[w(t-\frac{x}{v})+\phi\right]$$

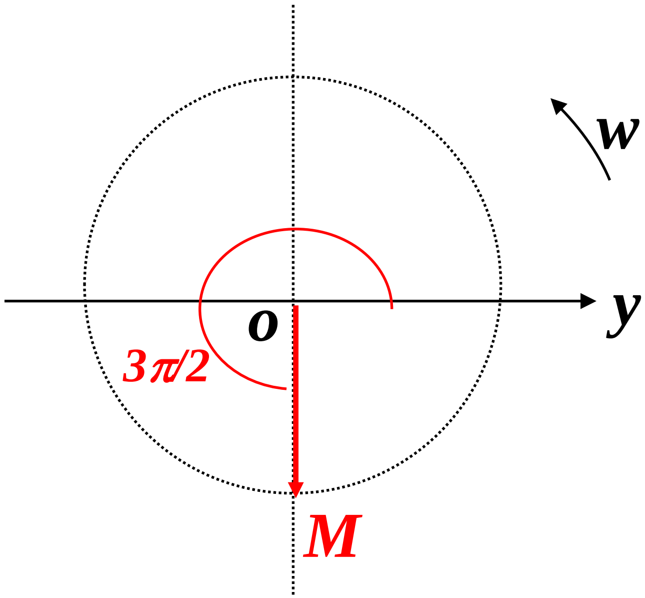
$$w=\frac{2\pi}{T}=\pi, v=\frac{\lambda}{T}=1m/s$$

$$\because t=0\text{且}x=0\text{时}, y=0 \qquad \therefore 0=1.0\cos\phi \Rightarrow \phi=\pm\frac{\pi}{2}$$

$$\text{又}\because v_0'=-\pi\sin\phi>0 \qquad \therefore \phi=-\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore y=1.0\cos\left[\pi(t-\frac{x}{1.0})-\frac{\pi}{2}\right]$$

法二:




振动方程为

$$y = 1.0\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

波动方程为

$$\therefore y = 1.0\cos\left[\pi\left(t - \frac{x}{1.0}\right) - \frac{\pi}{2}\right]$$

**(2). 把 $t$ =1.0s代入波动方程，得**

$$y = 1.0\cos\left[\pi(1 - \frac{x}{1.0}) - \frac{\pi}{2}\right] = \sin \pi x$$

**(3). 把$x$=0.5m代入波动方程，得**

$$y = 1.0\cos\left[\pi(t - \frac{0.5}{1.0}) - \frac{\pi}{2}\right] = \cos(\pi t - \pi)$$

**例4.** 一平面简谐波以波速$v=0.2m/s$沿直线传播.已知在传播路径上某点B的简谐振动为

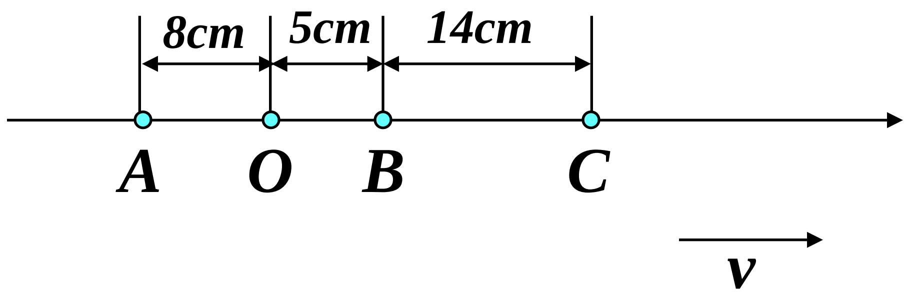
$$y=0.03\cos 4\pi t$$

求: (1). 以点B为原点,写出波动方程;

(2). 以点O为原点,写出波动方程;

(3). 针对不同原点时,O点,A点和C点的振动方程?

解:



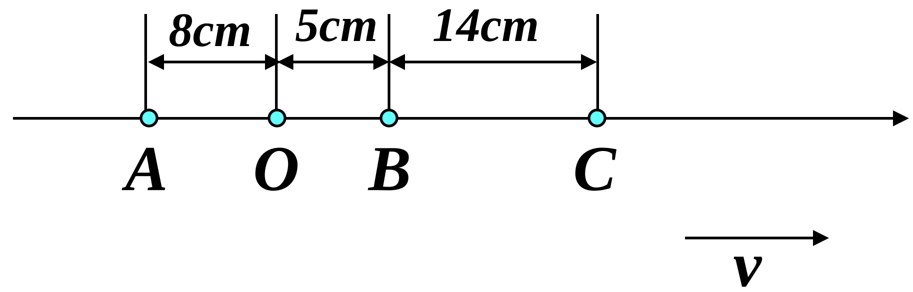

(1). B点的振动方程为

$$y=0.03\cos 4\pi t$$

以B点为原点的波动方程为

$$y=0.03\cos 4\pi\left(t-\frac{x}{0.2}\right)$$

(2). 法一：




$$\Delta t=\frac{x-x_0}{v}=\frac{x-0.05}{0.2}$$

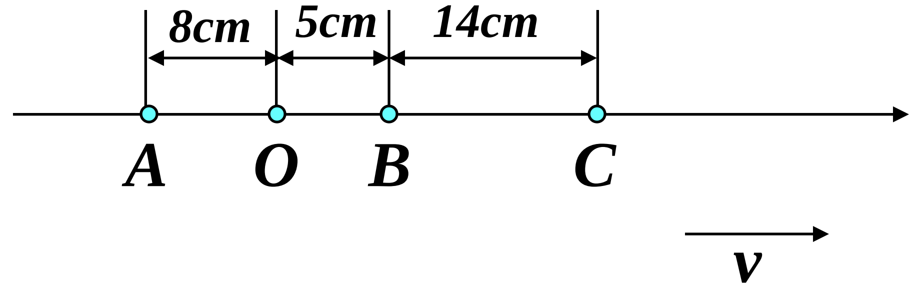
B点的振动方程为 $y=0.03\cos 4\pi t$

以O点为原点的波动方程为

$$y=0.03\cos 4\pi(t-\Delta t)$$

$$=0.03\cos\left[4\pi(t-\frac{x}{0.2})+\pi\right]$$

(3). 以B为坐标原点时




$$\boxed{y = 0.03\cos 4\pi\left(t - \frac{x}{0.2}\right)}$$

O点的振动方程

$$y = 0.03\cos 4\pi\left(t - \frac{-0.05}{0.2}\right) = 0.03\cos 4\pi\left(t + \frac{1}{4}\right)$$

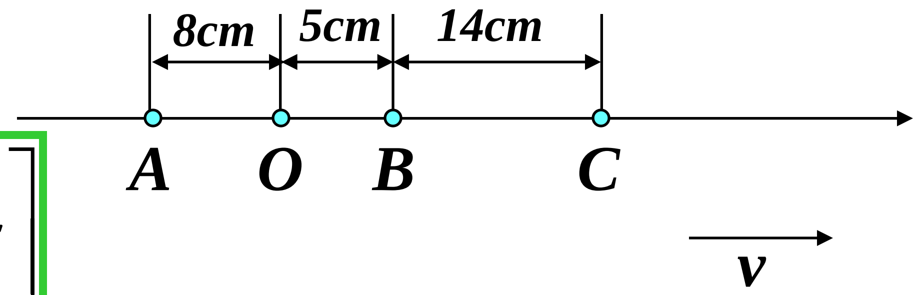
A点的振动方程

$$y = 0.03\cos 4\pi\left(t + \frac{13}{20}\right)$$

C点的振动方程

$$y = 0.03\cos 4\pi\left(t - \frac{7}{10}\right)$$

以O为坐标原点时




$$\boxed{y = 0.03\cos\left[4\pi\left(t - \frac{x}{0.2}\right) + \pi\right]}$$

O点的振动方程

$$y = 0.03\cos 4\pi\left(t + \frac{1}{4} - \frac{0}{0.2}\right) = 0.03\cos 4\pi\left(t + \frac{1}{4}\right)$$

A点的振动方程

$$y = 0.03\cos 4\pi\left(t + \frac{13}{20}\right)$$

C点的振动方程

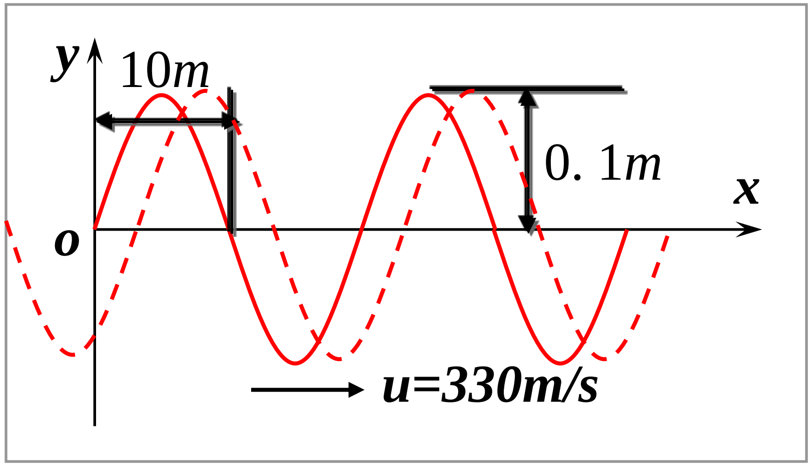
$$y = 0.03\cos 4\pi\left(t - \frac{7}{10}\right)$$

▲ 在波的传播路径上各点的振动方程与所取坐标原点无关

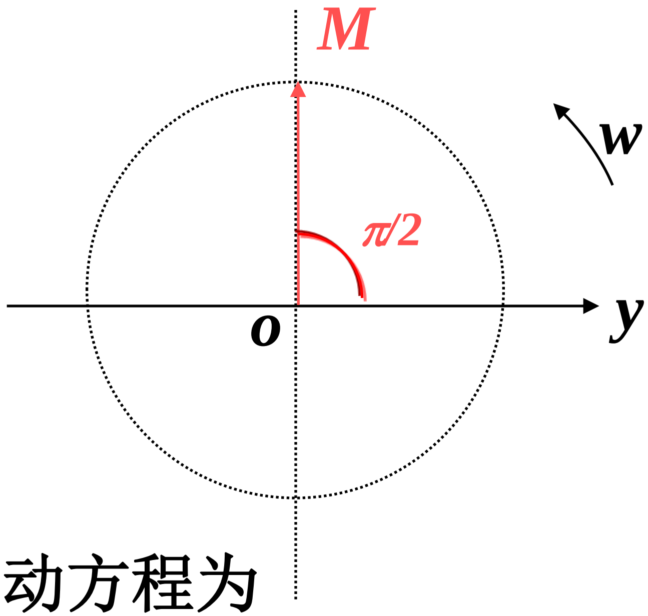
▲ 波动方程与所取坐标原点有关

# 例题.由图形($t$=0)求波动方程

$$u=\frac{\lambda}{T},w=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi u}{\lambda}=33\pi$$




$t$=0，$x$=0，$y$=0，负向运动



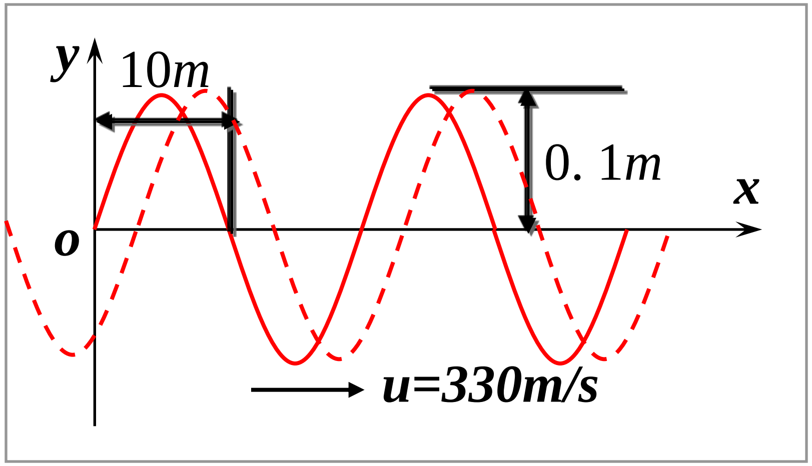

振动方程为

$$y=0.1\cos\left(33\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$$

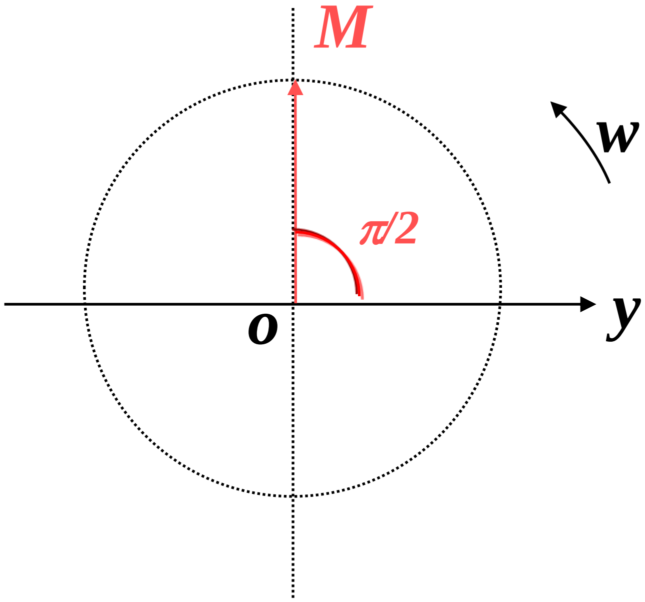
波动方程为

$$y=0.1\cos\left[33\pi(t-\frac{x}{330})+\frac{\pi}{2}\right]$$

**注意：** 图形($t$=2s)




$t$=2s，$x$=0，$y$=0，负向运动




$$33\pi\times 2+\varphi=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \varphi=\cdots$$

例5. 一平面简谐波的波动方程为$y=0.1cos(6\pi t+0.05\pi x)m$,求
(1). 当$t=0.1s$时,原点与最近一个波谷的距离;
(2). 此波谷何时通过原点?

解: (1). $t=0.1s$时

$$y = 0.1cos(6\pi \times 0.1 + 0.05\pi x)$$

波谷处

$$y = -0.1$$

$$\therefore cos(0.6\pi + 0.05\pi x) = -1$$

$$0.6\pi + 0.05\pi x = (2m+1)\pi$$

$$x = \frac{2m+1-0.6}{0.05} = 40m+8$$

距原点最近的波谷$x$最小

$$\therefore m = 0,\ x = 8(m)$$

(2).

$$y = 0.1\cos(6\pi t + 0.05\pi x)$$

$$= 0.1\cos 2\pi\left(\frac{t}{1/3} + \frac{x}{40}\right)$$

从波谷$x=8(m)$到原点的时间为

$$\Delta t = \frac{8}{v} = \frac{8T}{\lambda} = \frac{1}{15}s$$

# 7.3 波 的 能 量

## 一. 波的能量、能量密度

1. 设一列简谐纵波沿均匀细杆传播，波的表达式：

$$y = A\cos w(t - \frac{x}{v})$$


$$\Delta m = \rho \Delta V$$

动能：
$$E_k = \frac{1}{2}(\Delta m)(\frac{\partial y}{\partial t})^2 = \frac{1}{2}\rho\Delta V\omega^2 A^2 \sin^2\omega(t - \frac{x}{v})$$

势能：
$$E_p = \frac{1}{2}(\Delta m)(\frac{\partial y}{\partial x})^2 = \frac{1}{2}\rho\Delta V\omega^2 A^2 \sin^2\omega(t - \frac{x}{v})$$

## 机械能（不守恒）：

$$E = E_k + E_p = \rho \Delta V \omega^2 A^2 \sin^2 \omega (t - \frac{x}{v})$$

★ 任何时刻,体积元的动能和势能同相等值;

$E_k \to max$ , $E_P \to max$ ;　　$E_k \to 0$ , $E_P \to 0$

★ 体积元的总机械能随时间 $t$ 作周期性变化;体积元机械能不守恒,即体积元在不断地接收和释放能量。（$E$增大时，体积元从一侧吸收能量；$E$减小时，从另一侧输出能量，从而实现能量的传递）

## 2. 能量密度ω

单位体积介质中的波动能量

$$\omega = \frac{E}{\Delta V} = \rho w^2 A^2 \sin^2 w(t - \frac{x}{v})$$

## 3. 平均能量密度

能量密度在一个周期内的平均值

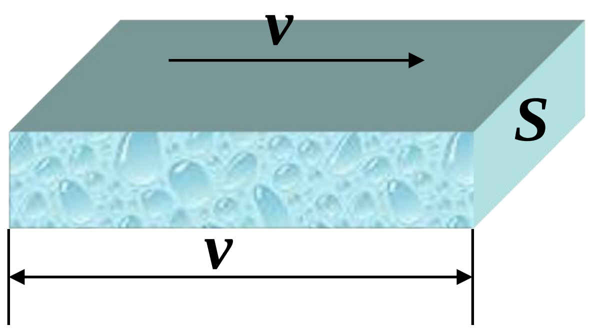
$$\overline{\omega} = \frac{1}{T}\int_0^T \rho w^2 A^2 \sin^2 w(t - \frac{x}{v})dt = \frac{1}{2}\rho w^2 A^2$$

# 二. 能流和波的强度

波的传播 →能量传播 →能流

## 1. 能流

单位时间内垂直通过某一面积的能量




平均能流 $\Delta E = \overline{\omega}\Delta V = \frac{1}{2}\rho w^2 A^2 v S$

## 2.波的强度I (平均能流密度)

单位时间内通过垂直于波射线方向的单位面积上的平均能流

$$\vec{I} = \frac{\Delta E}{S} = \frac{1}{2}\rho w^2 A^2 \vec{v}$$

单位:$W/m^2$

# 三. 声强与声强级

1. 声　波: $f$ :　20Hz — $2\times10^4$Hz　**3000 赫兹（最敏感）**

$\boxed{\text{次声波:}}$ $f$ :　< 20Hz　**虎啸生威（ 18赫兹）**

超声波: $f$ :　$>2\times10^4$Hz　**蝙蝠、海豚（ 10万赫兹）**

**2. 声强I　　　声波的平均能流密度**

标准声强：　　$I_0 = 10^{-12} W / m^2$

（在1000Hz下，这个声强人能够勉强听到）

$$\begin{cases} \text{最低（闻域）：} & 10^{-12} \quad (W / m^2) \\ \text{最高（痛感域）：} & 1 \quad (W / m^2) \end{cases}$$

**3. 声强级L**

国际上选定$I_0=10^{-12}W/m^2$作为声强的参考标准，声强$I$与标准声强$I_0$之比的对数称作声强I的声强级，用L表示

$$L = lg\frac{I}{I_0}$$ （单位：贝尔***Bel***）

这个单位在实用上太大，故常用贝尔的1 / 10，即分贝（dB)作为单位，所以声强级的表示式为

$$L = 10\lg\frac{I}{I_0}$$ （单位: 分贝***dB***）

例题:一个人说话的声强级为40$dB$，10个人同时说话的声强级是多少？

解：根据声强级的定义，可知

$$10\lg\frac{I}{10^{-12}}=40$$

$$I=10^{-8}W\cdot m^{-2}$$

$$\therefore L=10\lg\frac{I}{10^{-12}}=10\lg\frac{10\times10^{-8}}{10^{-12}}=50dB$$

**例6. 一只喇叭的功率为1*mW*,如果喇叭声均匀地向四周传播,求5*m*处的声强级是多少?如果两只喇叭在同一地方鸣响,则5*m*处的声强级为多少?**

**解: 5*m*处的声强为**

$$I=\frac{P}{4\pi r^{2}}=3.18\times10^{-6}W/m^{2}$$

声强级为

$$L=10\lg\frac{I}{I_{0}}=65dB$$

两只喇叭同时鸣响时的声强为

$$I'=2I=6.36\times10^{-6}W/m^{2}$$

声强级

$$L'=10\lg\frac{I'}{I_{0}}=68dB$$

# 7.4 波的干涉

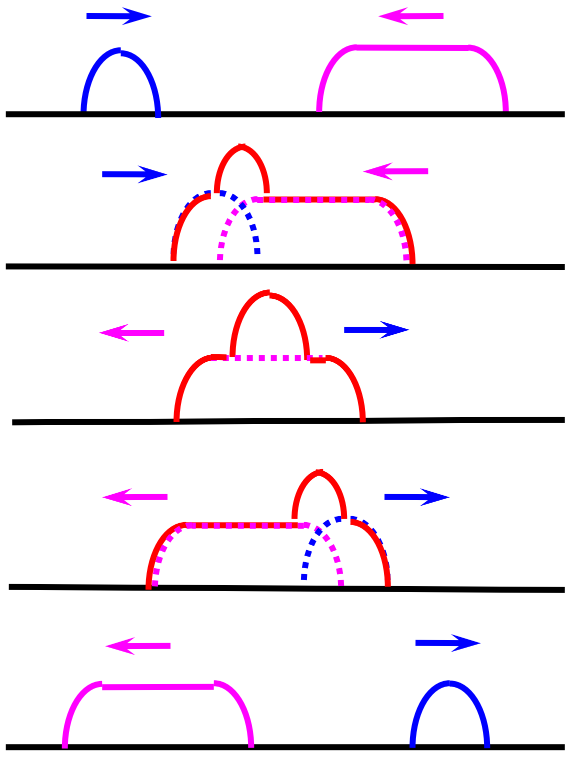
## 一. 惠更斯原理（1690）

媒质中任意波面上的各点，都可看作是发射子波（次级波）的波源（点源），其后的任一时刻，这些子波面的包络面（包迹）就是波在该时刻的新的波面。

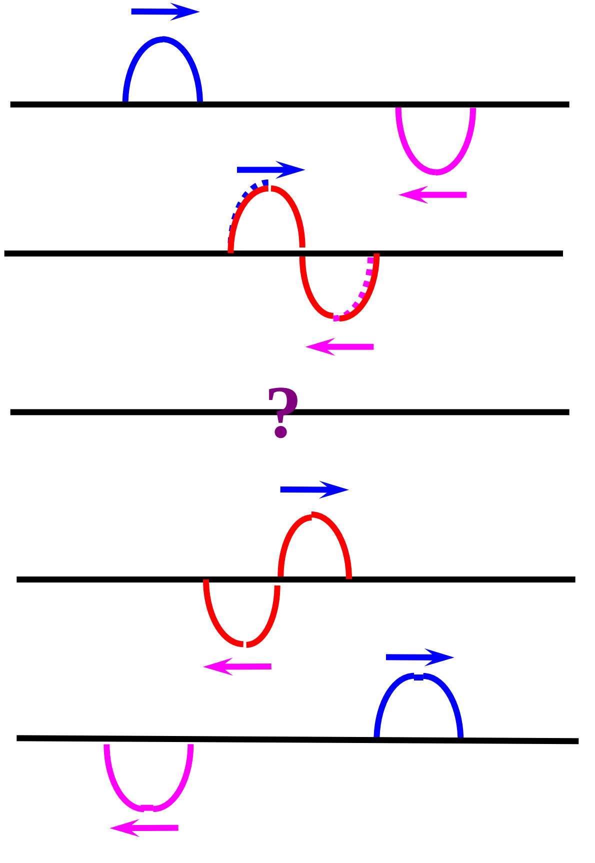
## 二. 波的迭加原理

几列波同时在介质中传播，如果这几列波在空间某点相遇，则相遇处质点的振动将是各个波所引起的分振动的合成，在任一时刻质点的位移是各列波在该处所引起的分位移的矢量和。

**各个波独立地保持各自原有特性**



两不同形状的正脉冲




大小形状一样的正负脉冲

## 三. 波的干涉

相干条件:　频率相同,振动方向相同,相位相同或相位差恒定

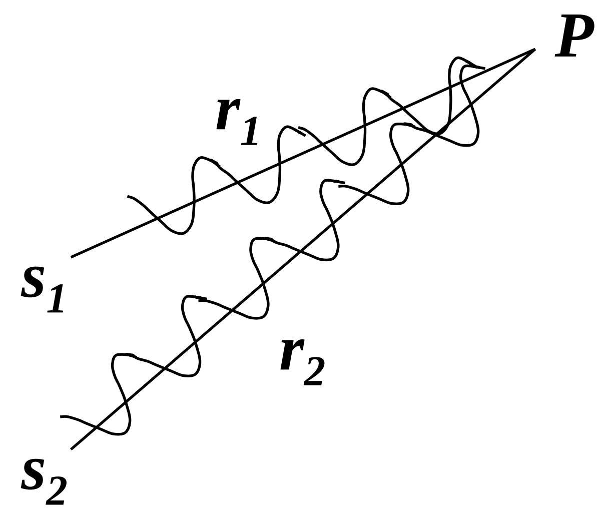
相干波:　符合相干条件的波

干　涉:　相干波在介质中的叠加时在空间出现稳定的振动加强和减弱的分布

## 定量分析：

$$s_1 : y_1 = A_1 cos(wt + \phi_1)$$

$$s_2 : y_2 = A_2 cos(wt + \phi_2)$$




到达*P*点时的分振动为

$$y_{1P} = A_1 \cos(wt + \phi_1 - \frac{2\pi r_1}{\lambda})$$

$$y_{2P} = A_2 \cos(wt + \phi_2 - \frac{2\pi r_2}{\lambda})$$

合振动为

$$y = y_{1P} + y_{2P} = A \cos w(t + \phi)$$

$$A=\sqrt{A_1^{\ 2}+A_2^{\ 2}+2A_1A_2\cos\left[\phi_2-\phi_1-\frac{2\pi(r_2-r_1)}{\lambda}\right]}$$

$$\varphi=arctg\frac{A_1\sin(\phi_1-\frac{2\pi r_1}{\lambda})+A_2\sin(\phi_2-\frac{2\pi r_2}{\lambda})}{A_1\cos(\phi_1-\frac{2\pi r_1}{\lambda})+A_2\cos(\phi_2-\frac{2\pi r_2}{\lambda})}$$

$$\Delta\phi=\phi_2-\phi_1-2\pi\frac{r_2-r_1}{\lambda}$$ ——相位差

定点$P$ $\rightarrow r_1, r_2$为定值 $\rightarrow \Delta\phi$是一个恒量 $\rightarrow$ A为恒量

定点 $P$ 的振动是恒定的

## ★ 讨论(干涉加强与减弱的条件）：

$$(1).\Delta\phi=\phi_2-\phi_1-2\pi\frac{r_2-r_1}{\lambda}=\pm 2k\pi, k=0,1,2,\cdots$$

$$A=\sqrt{A_1^{\ 2}+A_2^{\ 2}+2A_1A_2}=A_1+A_2$$

符合上述条件的空间各点的合振幅最大;　　加强

$$(2).\Delta\phi=\phi_2-\phi_1-2\pi\frac{r_2-r_1}{\lambda}=\pm(2k+1)\pi, k=0,1,2,\cdots$$

$$A=\sqrt{A_1^{\ 2}+A_2^{\ 2}-2A_1A_2}=\left|A_1-A_2\right|$$

符合上述条件的空间各点合振幅最小.　　减弱

(3).若$\phi_1=\phi_2$,即相干波源为同相位,则

$$\delta = r_2 - r_1 = \pm 2k\frac{\lambda}{2} = \pm k\lambda, k = 0,1,2,\cdots$$ 合振幅最大（加强）

$$\underbrace{\delta = r_2 - r_1}_{\text{波程差}} = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}, k = 0,1,2,\cdots$$ 合振幅最小（减弱）

迭加区域内

波程差等于零或半波长的偶数倍的各点,振幅最大;

波程差等于半波长的奇数倍的各点,振幅最小.

习题7-18

例、$A$、$B$为两平面简谐横波的波源，振动表达式分别为：

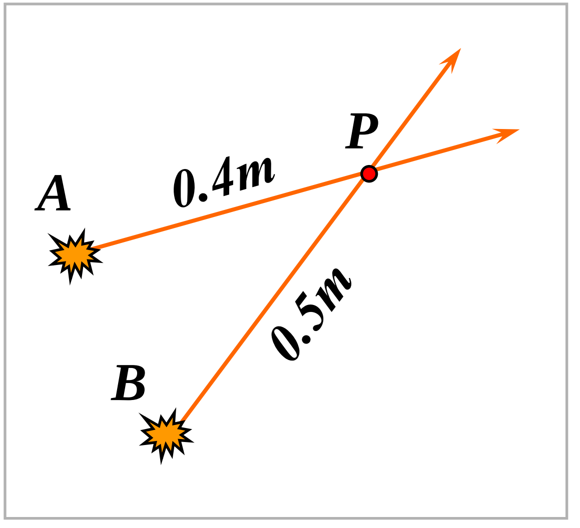
$$x_1 = 0.2\times 10^{-2}\cos 2\pi t \quad (m)$$

$$x_2 = 0.2\times 10^{-2}\cos(2\pi t+\pi) \quad (m)$$

两列波在$P$点相遇，$u = 0.2\ m/s$，$PA = 0.4\ m$，$PB = 0.5\ m$。求：$(1)$两列波在$P$点处的相位差；$(2)P$点合振动的振幅；$(3)$若两列波振动方向相互垂直，则$P$点合振动的振幅多大？

(1) $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi\dfrac{r_2 - r_1}{\lambda}$ $\qquad u = \dfrac{\lambda}{T}, w = \dfrac{2\pi}{T}$

$$\Delta\varphi = \pi - 2\pi\frac{PB - PA}{\lambda} = 0$$



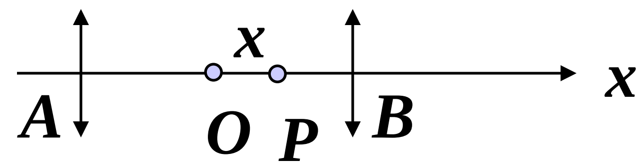

(2) 两列波在P点引起的振动相位相同。

$$\therefore \quad A_p = A_1 + A_2 = 0.4\times 10^{-2}\ m$$

(3) $A_p = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 0.283\times 10^{-2}\ m$

例7. *A*、*B*两点相距*20m*，为同一媒质中的两个波源，作同频率*(f=100Hz)*同方向的振动.设它们激起的波为平面波,振幅为*5cm*,波速为*200m/s*且*A*为波峰时,*B*恰为波谷,求*AB*连线内因干涉而静止的各点的位置?

解: *P*点相干减弱条件为




$$\Delta\phi = (2k+1)\pi$$

$$\because \Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 - 2\pi\frac{r_2 - r_1}{\lambda}$$

$$= \pi - \pi\left[(10 - x) - (10 + x)\right]$$

$$= (1 + 2x)\pi$$

$$\therefore (2k+1)\pi = (1+2x)\pi$$

$$\therefore x = k \qquad k = 0, \pm 1, \cdots, \pm 9$$

# 7.5 驻　波

两列振幅相同的相干波,在一直线上,沿相反的方向传播,两者相遇迭加后形成的结果

$$y_1 = A\cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) \qquad y_2 = A\cos 2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda})$$

合成波

$$y = y_1 + y_2 = A\cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + A\cos 2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda})$$

$$= 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos wt$$

振幅随$x$作周期性变化

## ★ 驻波的特点:

$$y = 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos wt$$

### 1.振幅的特点:

(1). $\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm k\pi$ 或 $x = \pm\frac{1}{2}k\lambda, k = 0,1,2,\cdots$

符合上述条件的空间各点的振幅最大; ——波腹

$$x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda}{2}$$

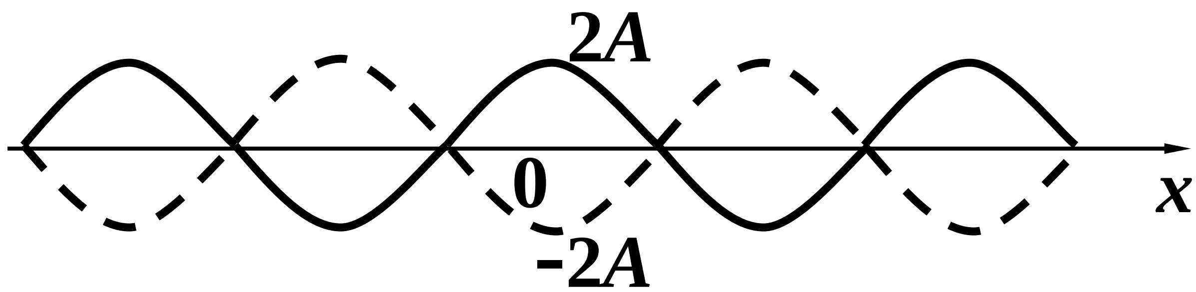
(2). $\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm(2k+1)\frac{\pi}{2}$ 或 $x = \pm\frac{1}{4}(2k+1)\lambda, k = 0,1,2,\cdots$

符合上述条件的空间各点的振幅为零. ——波节

静止

$$x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda}{2}$$

## 2.相位的特点:




两波节之间各点的振动　　同相

波节两侧各点的振动　　反相

## 3.能量的特点:

波节处质点　　静止

波节不参加振动　　驻波不传播能量

## ★ 半波损失

反射波：

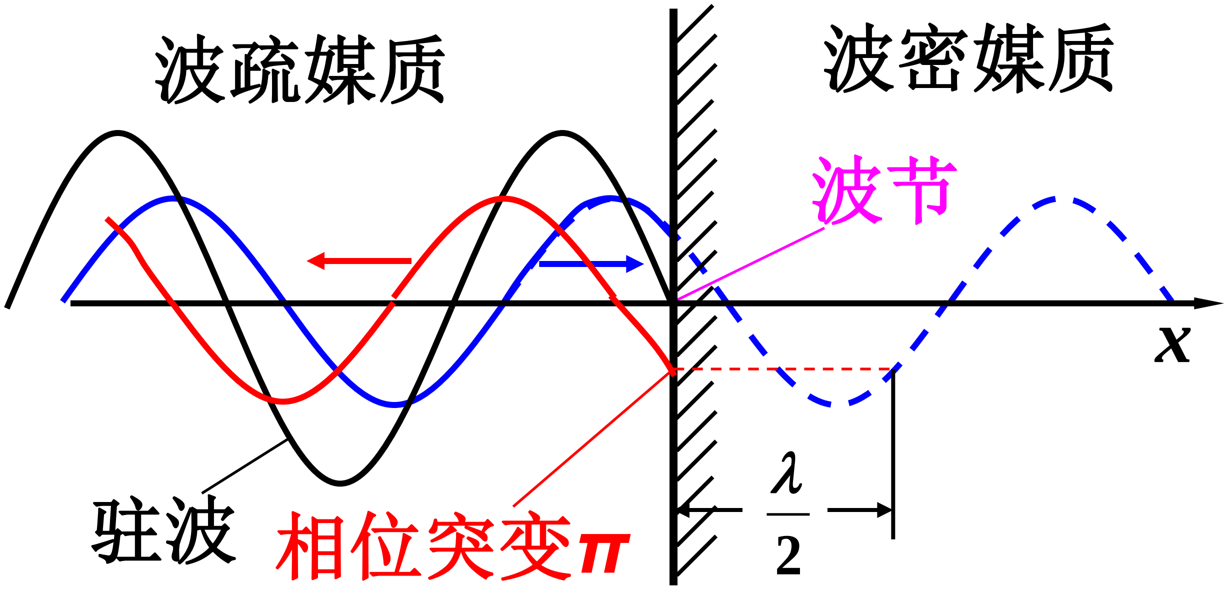
(1)若$z_1 > z_2$，　则 $\varphi_1{}' = \varphi_1$

即波密→波疏，　　反射波和入射波在反射点的振动同相

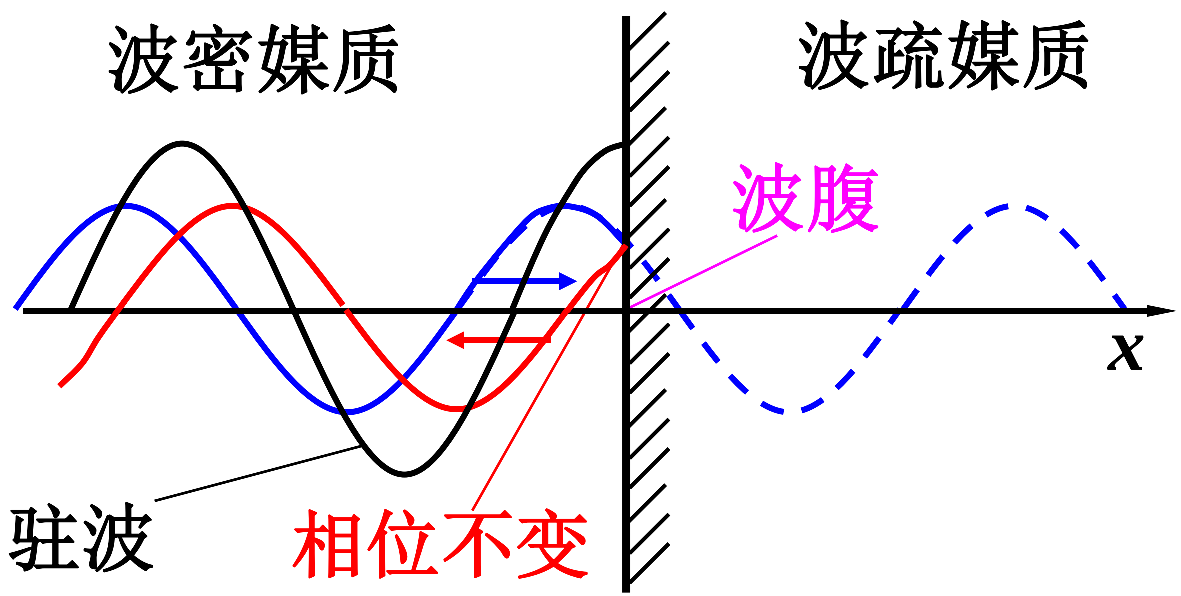
(2) 若$z_1 < z_2$，　则 $\varphi_1{}' = \varphi_1 \pm \pi$

即波疏→波密，　　反射波在反射点的振动有相位突变$\pi$

——半波损失



波疏媒质
波密媒质
波节
x
驻波
相位突变π
λ
2

波密媒质
波疏媒质
波腹
x
驻波
相位不变

## ★ 自由端与固定端

**自由端** 反射波和入射波在该点振动同相

$$y_{入} = A\cos(wt + \varphi) \qquad y_{反} = A\cos(wt + \varphi)$$

波腹

**固定端** 反射波在该点振动有相位突变$\pi$(半波损失)

$$y_{入} = A\cos(wt + \varphi) \qquad y_{反} = A\cos[(wt + \varphi) + \pi]$$

波节

例8. 试分析两端固定,长为*L*的弦产生的振动频率?

解: 两固定端点处为波节

设弦线上有*n*个λ/2

$$n\frac{\lambda}{2}=L, n=1,2,3\cdots \qquad \therefore \lambda=\frac{2L}{n}$$

$$\because v=\sqrt{\frac{T}{u}} \qquad \therefore f=\frac{v}{\lambda}=\frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{u}}$$

不连续 $n = 1$ 基频 倍频

例9. 有1.0$m$长的弦线,质量为10$g$,其中张力为100$N$,两端固定后使弦线振动,求

(1). 弦线中的波速; (2). 在弦上形成单段驻波的波长;

(3). 形成单段驻波时的频率?

解: (1).

$$v=\sqrt{\frac{T}{u}}=\sqrt{\frac{T}{m/l}}=100m/s$$

(2).

$$l=\frac{\lambda}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda=2l=2m$$

(3).

$$f=\frac{v}{\lambda}=50Hz$$

习题,改为固定端,在$x=4\lambda/3$处反射

利用入射波、反射波形成驻波的求解步骤:

入射波方程 → 入射波在反射点的振动方程 → 反射波在反射点的振动方程(考虑是否有半波损失) → 反射波方程 → $y=y_1+y_2$求解驻波方程

$$y = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\rightarrow y_{入} = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{4}{3}\right) = A\cos\left(2\pi\frac{t}{T}-\frac{8\pi}{3}\right)$$

$$\xrightarrow{半波损失} y_{反} = A\cos\left(2\pi\frac{t}{T}-\frac{8\pi}{3}+\pi\right)$$

$$\rightarrow y_{反波} = A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)-\frac{5\pi}{3}\right] \quad \rightarrow y = y_{入波}+y_{反波} = \cdots$$

# 7.6 多普勒效应

由于波源或观察者的运动,而使观察者发觉波的频率有所变化的现象.

多普勒
奥地利物理学家

## 关于频率

**波源振动频率 $f_A$**：波源在单位时间内振动的次数，或在单位时间内发出“完整波”的个数.

**观察者接收到的频率 $f_B$**：单位时间内通过观察者所在处的完整波数.

$$\text{观察者感受到的频率}f' = \frac{\text{波对观察者的速度}v'}{\text{通过观察者所在处的波长}\lambda'}$$

假设波源相对于媒质的运动速度为$v_{源}$;

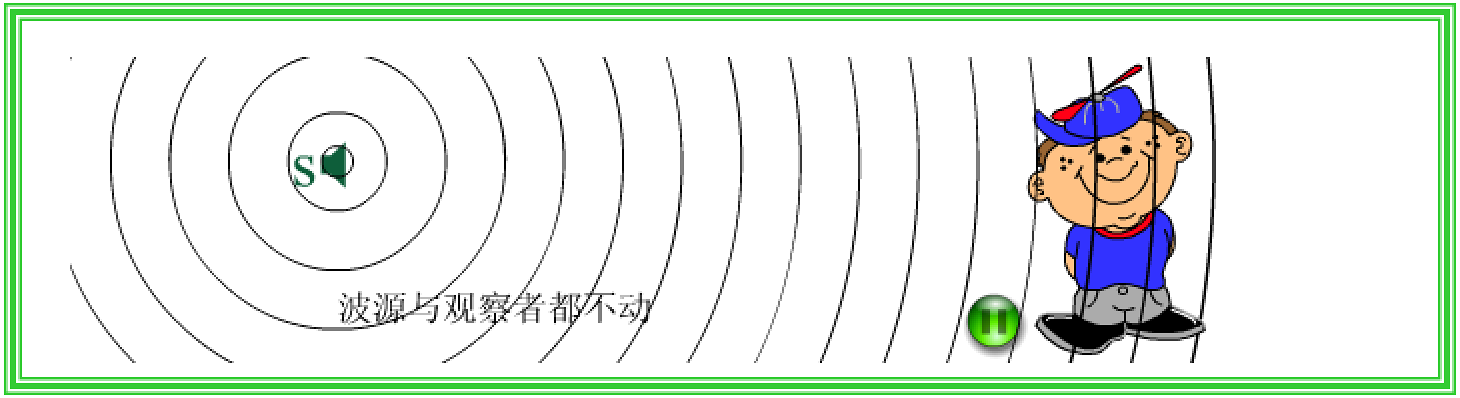
观察者相对于媒质的运动速度为$v_{观}$;

波在媒质中的传播速度为$u$;

波源频率为$f$，（波源静止）波长为$\lambda$。

# 一. 观察者,波源的运动在二者的连线上

1. 波源与观察者相对于媒质静止( $v_{源}=0, v_{观}=0$ )

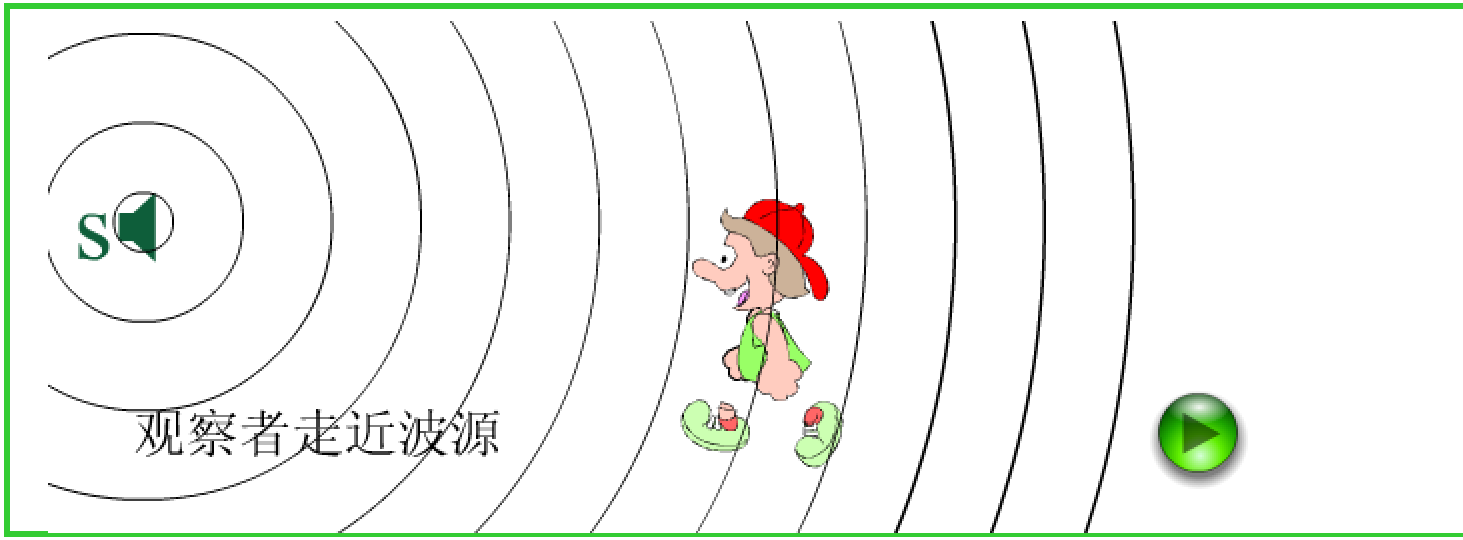



波对观察者的速率 $v' = u$

观察者所在处的波长 $\lambda' = \lambda$

$$f_1 = \frac{v'}{\lambda'} = \frac{u}{\lambda} = f$$

## 2. 波源静止,观察者运动( $v_{源}=0, v_{观}\neq 0$ )




### (1). 观察者向波源运动

波对观察者的速率 $v' = u + v_{观}$

观察者所在处的波长 $\lambda' = \lambda$

$$f_2 = \frac{v'}{\lambda'} = \frac{u + v_{观}}{\lambda} = \left(\frac{u + v_{观}}{u}\right) f \quad \text{(频率升高)}$$

**(2). 观察者离波源运动**

$$f_2=\frac{v'}{\lambda'}=\frac{u-v_{观}}{\lambda}=\left(\frac{u-v_{观}}{u}\right)f$$ (频率下降)

[讨论]如果你以声速离开一场音乐会，你会……

**3. 观察者静止,波源运动 ( $v_{观} = 0, v_{源} \neq 0$ )**

**波速决定于媒质的性质,而与波源运动与否无关;**

$$u_{横} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

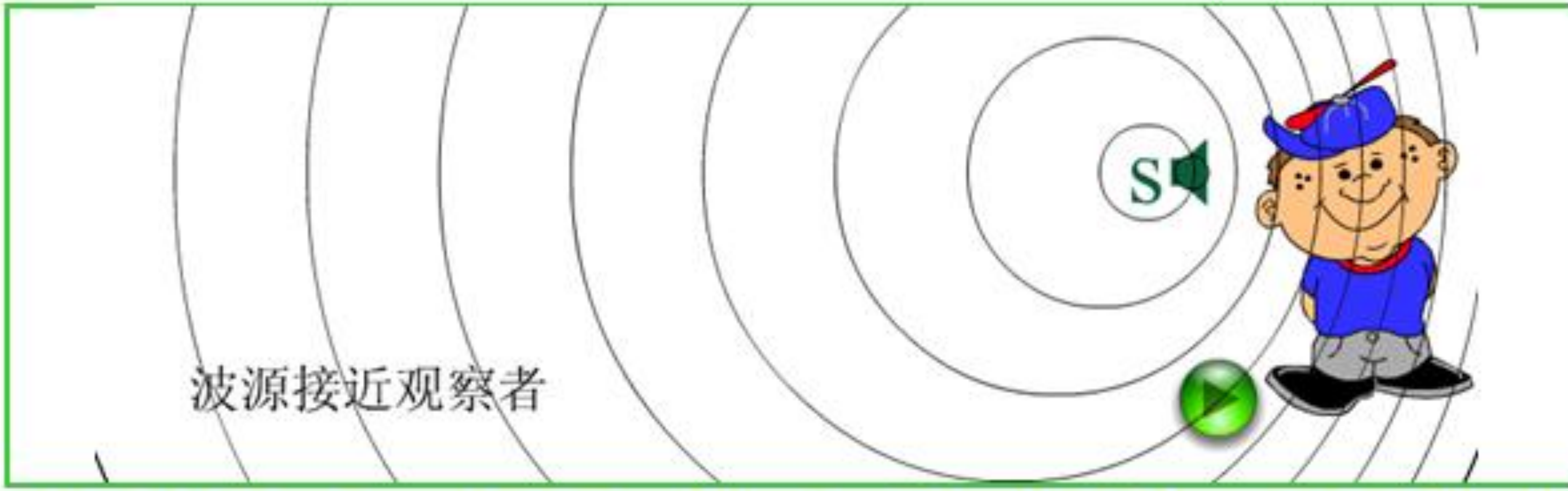
$\rho$ :介质的密度

$G$ :介质的切变模量

$$u_{纵} = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

$\rho$ :介质的密度

$Y$ :介质的杨氏模量

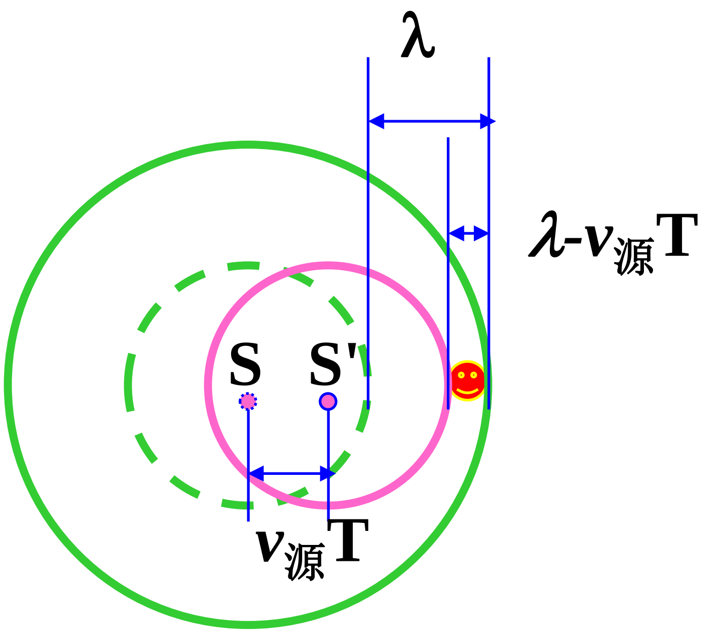



波源的运动只会影响波在媒质中的分布,不影响波速.

水波的多普勒效应

（波源向左运动）

## (1). 波源向观察者运动




波对观察者的速率 $v' = u$

观察者所在处的波长 $\lambda' = \lambda - v_{源} T$

$$f_3 = \frac{v'}{\lambda'} = \frac{u}{\lambda - v_{源} T} = \frac{u}{u - v_{源}} f$$

(频率升高)

(2). 波源离观察者运动

$$f_3=\frac{v'}{\lambda'}=\frac{u}{\lambda+v_{源}T}=\frac{u}{u+v_{源}}f$$

(频率下降)

★注意:

观察者运动,波源静止;波源运动,观察者静止.

二者引起的结果一般不同

$$\frac{f_3}{f_2}=\frac{\dfrac{u}{u-v_{源}}f}{\dfrac{u+v_{观}}{u}f}=\frac{u^2}{(u-v_{源})(u+v_{观})}$$

**4. 波源与观察者同时在一直线上运动 ( $v_{源} \neq 0, v_{观} \neq 0$ )**

**(1). 相向运动**

波对观察者的速率 $v' = u + v_{观}$

观察者所在处的波长 $\lambda' = \lambda - v_{源} T$

$$f_4 = \frac{v'}{\lambda'} = \frac{u + v_{观}}{\lambda - v_{源} T} = \frac{u + v_{观}}{u - v_{源}} f$$

(频率升高)

**(2). 相背运动**

$$f_4 = \frac{v'}{\lambda'} = \frac{u - v_{观}}{\lambda + v_{源} T} = \frac{u - v_{观}}{u + v_{源}} f$$

(频率下降)

（3）追及（车追人）

$$f_4=\frac{u-v_{观}}{u-v_{源}}f$$

（4）追及（人追车）

$$f_4=\frac{u+v_{观}}{u+v_{源}}f$$

## 二. 观察者与波源的运动不在一直线上

将速度在连线上的分量代入以上各式

## 三. 多普勒效应的应用:

▲ 测速（固、液、气）

▲ 多普勒红移（“大爆炸”宇宙论）

▲ 卫星跟踪

**例10. (1).一辆汽车的喇叭声频率为400*Hz*,以34*m/s*的速度在一笔直公路上行驶.站在公路边的观察者测得这辆汽车的频率是多少?**
**(2). 如果汽车停在公路旁,观察者以34*m/s*速度运动, 则测得的频率为多少?**

**解: (1).** 汽车驶向观察者

$$f=\frac{u}{u-v_{源}}f_0=\frac{340}{340-34}\times 400=444\,Hz$$

汽车驶离观察者

$$f=\frac{u}{u+v_{源}}f_0=\frac{340}{340+34}\times 400=364\,Hz$$

**(2).** 观察者走向汽车

$$f=(\frac{u+v_{观}}{u})f_0=440Hz$$

观察者离开汽车

$$f=(\frac{u-v_{观}}{u})f_0=360Hz$$

**例11. 监测汽车行驶速度.一固定波源发出100*kHz*超声波,当汽车迎着波源驶来时,测得从汽车反射回来的超声波的频率为110*kHz*.已知空气中声速为330*m/s*,求车速?**

**解: 设车速为v**

**(1). 波向汽车传播**

$$v_{观} = v$$

$$f_1 = \left(\frac{u+v}{u}\right) f_0$$

**(2). 波从汽车表面反射回来,汽车作为波源向观察者运动**

$$v_{源} = v$$

$$f_2 = \frac{u}{u-v} f_1 = \frac{u+v}{u-v} f_0$$

$$\Rightarrow v = \frac{f_2 - f_0}{f_2 + f_0} u = 15.7\, m/s$$

**试分析：一音叉以2.5m/s的速度接近墙壁，观察者在音叉后面听到的拍频为3Hz，求音叉振动的频率（声速取340m/s）？**