第九章 静电场中的导体和电介质

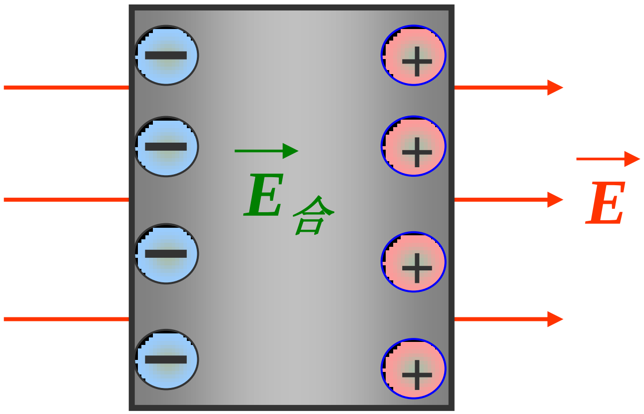
9.1 静电场中的导体

一. 导体的静电平衡

1. 静电感应

导体内有大量自由电子，自由电子在电场力作用下运动使电荷重新分布，称为导体的静电感应。

2. 静电平衡



$$\vec{E}_{合} = \vec{E} + \vec{E}' = 0$$

导体内部和表面没有电荷作宏观运动的状态

3.静电平衡的条件

（1）. 场强角度

- 导体内部任何一点的场强均为零;

•导体表面紧邻处的场强必定和导体表面垂直.

（2）. 电势角度

导体内部和表面的各点电势均相等，即整个导体是等势体

二. 导体上的电荷分布

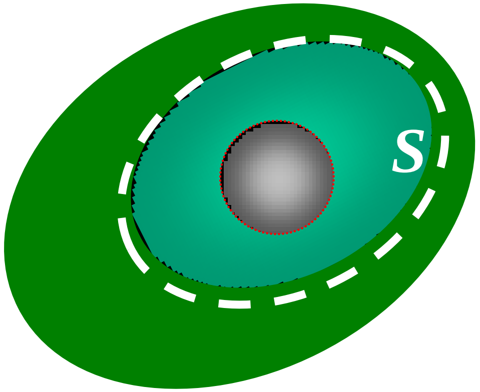
1. 实心导体

导体达到静电平衡时, 导体内部没有净电荷, 电荷只能分布在导体表面.

2. 空心导体 (空腔内无其他带电体)

空腔导体达到静电平衡时, （1）导体内部没有净电荷, 空腔内表面也没有净电荷, 电荷只能分布在导体表面；（2）空腔内没有场强，空腔内电势处处相等。

3. 空心导体 (空腔内有其他带电体+Q)

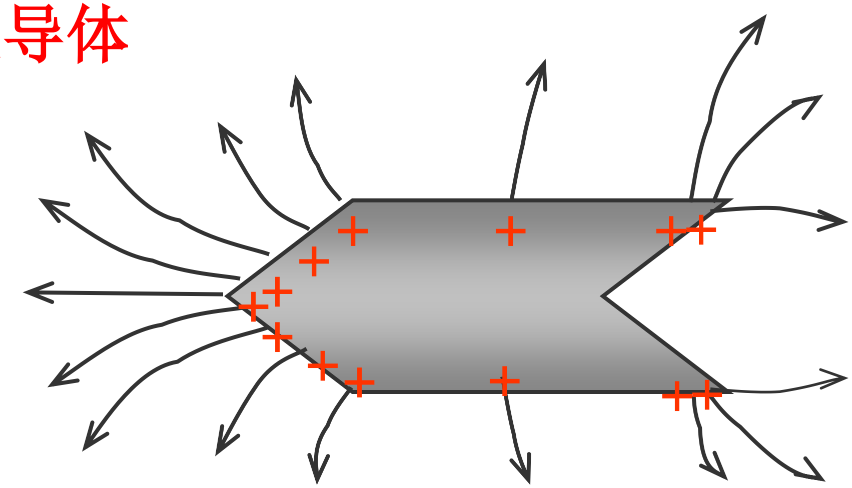


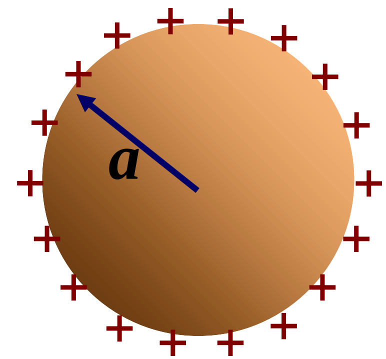
空腔导体达到静电平衡时, 导体内部没有净电荷, 空腔内表面感应等量异号电荷$-Q$。

4. 导体表面的电荷分布

导体表面的电荷分布不仅与导体的形状有关，而且与它附近其他导体或带电体有关 .

孤立导体





表面各处的面电荷密度σ与各处的曲率有关，曲率越大的地方，面电荷密度σ越大（但两者之间不存在单一的函数关系）

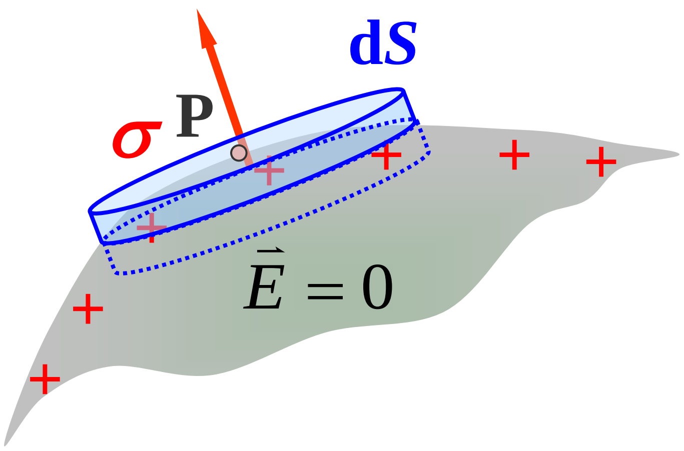
孤立导体球　　表面电荷均匀分布

三. 导体表面附近的场强 尖端放电

1. 导体表面附近的电场

过P作一扁圆柱形高斯面

$$dq = \sigma dS$$



$$\Phi_{ES} = EdS = \frac{dq}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma dS}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

方向垂直于该点的表面

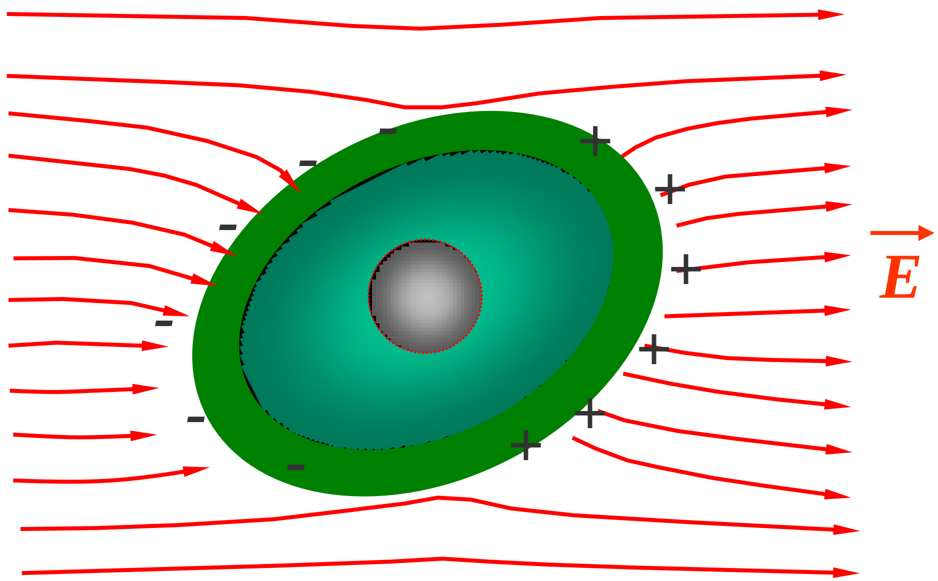
2. 尖端放电

带电导体尖端的电荷特别密集，尖端附近的电场特别强，就会发生尖端放电

四. 静电屏蔽

1. 使物体不受外电场的影响

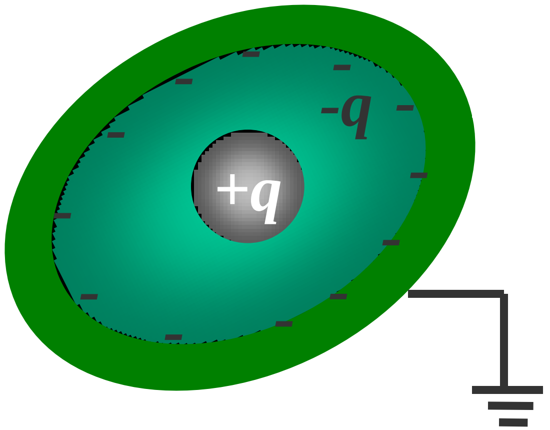
空心导体在外电场中,达到静电平衡时,电荷只分布在导体表面,导体内及空腔内任一点的场强均为零.



外部电场不影响内部→屏蔽外场

2. 屏蔽带电体产生的电场

将带电体放入导体空腔内.



接地后，空腔内、外的电场分布及电势分布互不影响。

————屏蔽内场

例. 平行放置的两大金属平板*A*和*B*,面积均为*S*,间距为d,金属板*A*带有总电荷+*Q*,金属板*B*不带电.求静电平衡时,两金属板上电荷分布及周围的电场分布、两板间的电势差(忽略金属板的边缘效应)。

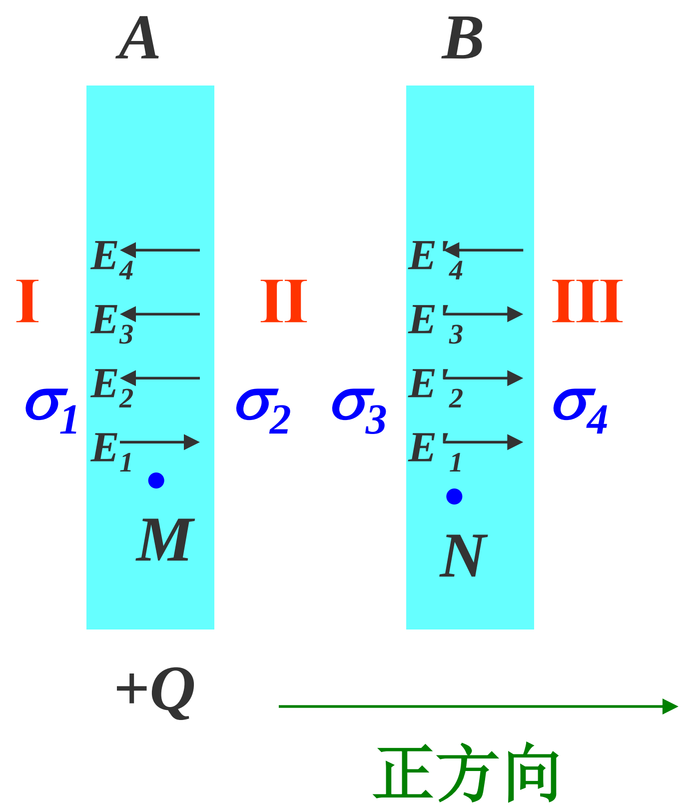
解:　（1）等效为四个无限大带电平面。由静电平衡,可知

$$\vec{E}_M = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 = 0$$

$$\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0$$

$$\vec{E}_N = \vec{E}_1' + \vec{E}_2' + \vec{E}_3' + \vec{E}_4' = 0$$

$$\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0$$



$$A: \sigma_1 S + \sigma_2 S = Q \qquad B: \sigma_3 S + \sigma_4 S = 0$$

$$\sigma_1 = \frac{Q}{2S} \qquad \sigma_2 = \frac{Q}{2S}$$

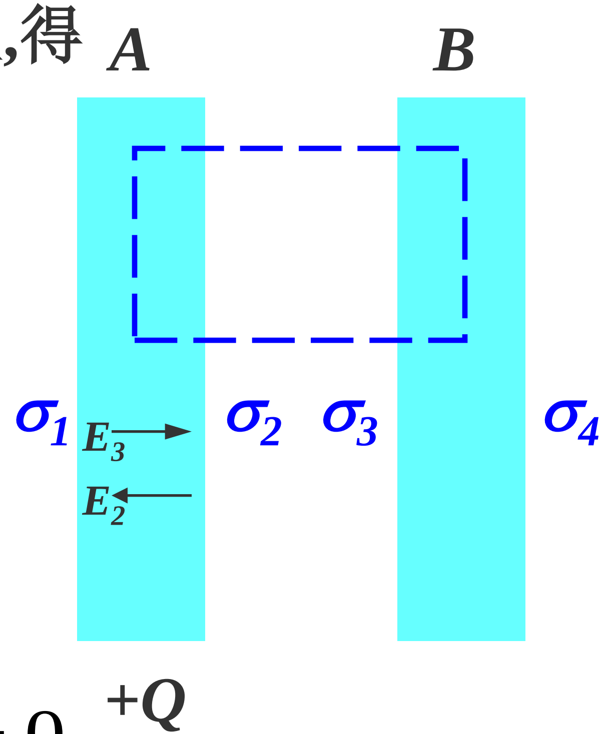
$$\sigma_3 = -\frac{Q}{2S} \qquad \sigma_4 = \frac{Q}{2S}$$

或（板多时考虑） 由静电平衡及高斯定理,得

$$\sigma_2 = -\sigma_3$$

相邻的左右两板所带的电量等量异号，静电平衡时，它们产生的电场在每块导体板内均相互抵消，故要保证每块板内场强为零，必须使板A左和板B右的电荷产生的电场也在各导体板内相互抵消，故

$$\sigma_1 = \sigma_4$$



$$A: \sigma_1 S + \sigma_2 S = Q \quad B: \sigma_3 S + \sigma_4 S = 0$$

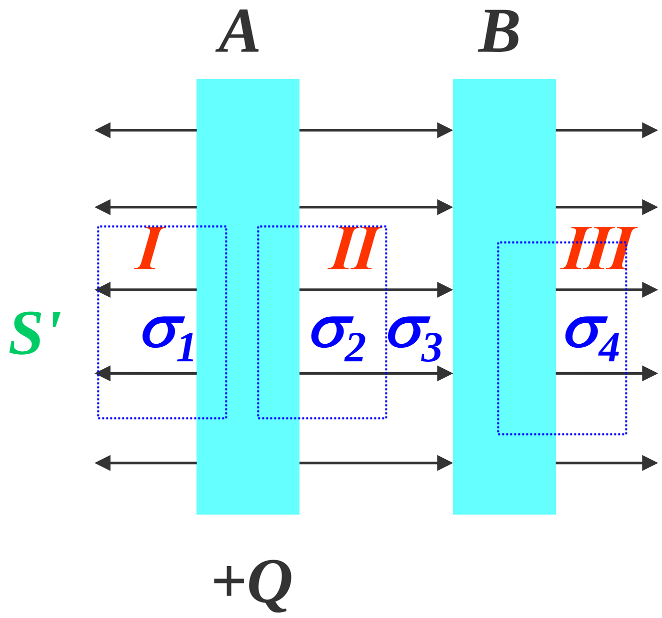
（2）由高斯定理,可知

$$E_I S' = \frac{\sigma_1 S'}{\varepsilon_0}$$

$$E_{\mathrm{I}} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S},方向向左$$

$$E_{\mathrm{II}} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S},方向向右$$

$$E_{\mathrm{III}} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S},方向向右$$

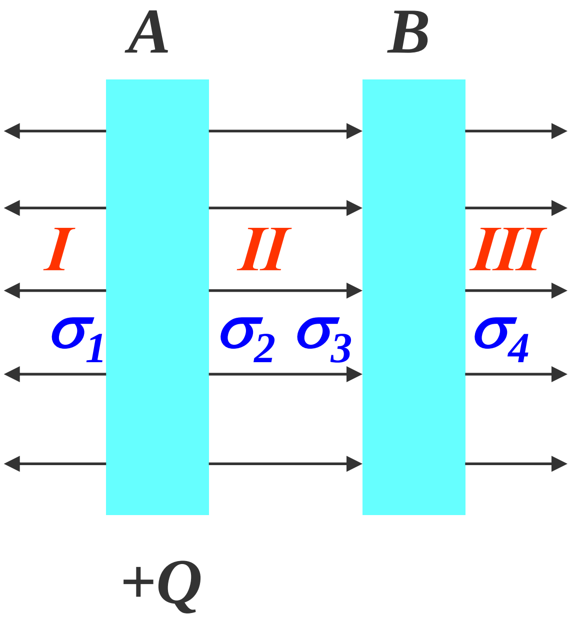


（3）

$$U_{AB} = E_{II} d = \frac{Qd}{2\varepsilon_0 S}$$

★讨论：求两板之间的静电力

以A板为对象



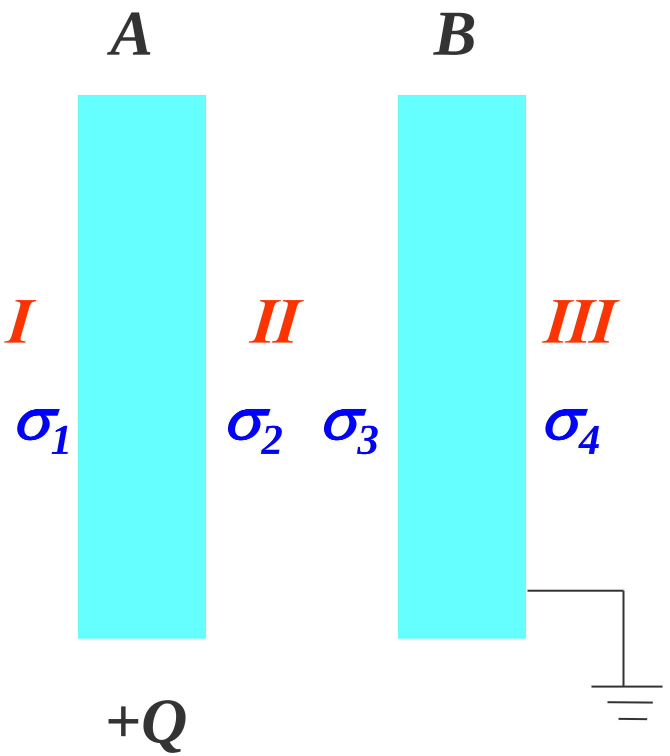
注意两侧

$$F_{A外}=E_I\sigma_1S=\cdots,方向向左$$

$$F_{A内}=E_{II}\sigma_2S=\cdots,方向向右$$

$$F_A=F_{A内}-F_{A外}=\cdots$$

★讨论：若B板接地（一侧接地）



$$\sigma_2 = -\sigma_3$$

$$\sigma_1 = \sigma_4$$

$$A: \sigma_1 S + \sigma_2 S = Q$$

B板接地

$$\sigma_4 = 0$$

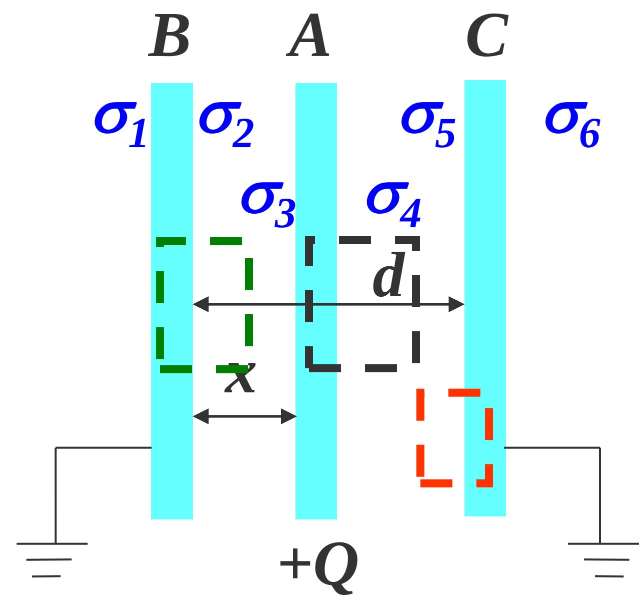
$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 0 & \sigma_2 = \dfrac{Q}{S} \\ \sigma_3 = -\dfrac{Q}{S} & \sigma_4 = 0 \end{cases}$$

例. 三块平行放置的金属平板A,B,C,面积均为S.AB间距离为x,BC间距离为d . 设d极小, 金属板可视为无限大平板,忽略边缘效应,且B,C板外侧接地, A板带电荷为Q, 求

(1). B,C板上的感应电荷;

(2). 空间的场强及电势分布.

解: 由静电平衡及高斯定理,得



$$\begin{cases} \sigma_2 = -\sigma_3 & \text{(静电平衡、高斯定理)} \\ \sigma_4 = -\sigma_5 & \text{(静电平衡、高斯定理)} \\ \sigma_1 = 0, \quad \sigma_6 = 0 & \text{(B,C板接地)} \\ \sigma_3 S + \sigma_4 S = Q & \text{(A板总电荷)} \\ \Delta U = \dfrac{\sigma_2}{\varepsilon_0} x + \dfrac{\sigma_4}{\varepsilon_0}(d-x) = 0 & \text{(从B板外侧向C板外侧计算电势)} \end{cases}$$

$$\therefore \sigma_1 = 0 \qquad \sigma_2 = -\frac{Q(d-x)}{Sd}$$

$$\sigma_3 = \frac{Q(d-x)}{Sd} \qquad \sigma_4 = \frac{Qx}{Sd}$$

$$\sigma_5 = -\frac{Qx}{Sd} \qquad \sigma_6 = 0$$

$$\therefore Q_B = \sigma_2 S = -\frac{Q(d-x)}{d}$$

$$Q_c = \sigma_5 S = -\frac{Qx}{d}$$

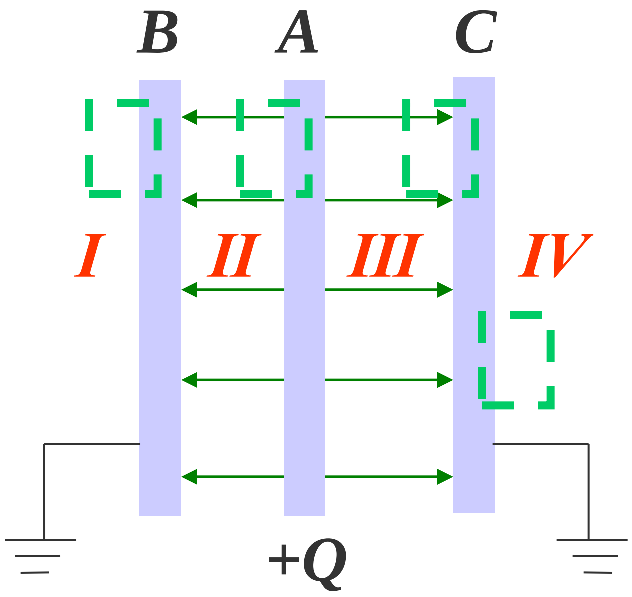
场强分布(高斯定理)

$$E_{\mathrm{I}}=0$$

$$E_{\mathrm{II}}=\frac{Q(d-x)}{Sd\varepsilon_0}\text{,方向向左}$$

$$E_{\mathrm{III}}=\frac{Qx}{Sd\varepsilon_0}\text{,方向向右}$$

$$E_{IV}=0$$



电势分布

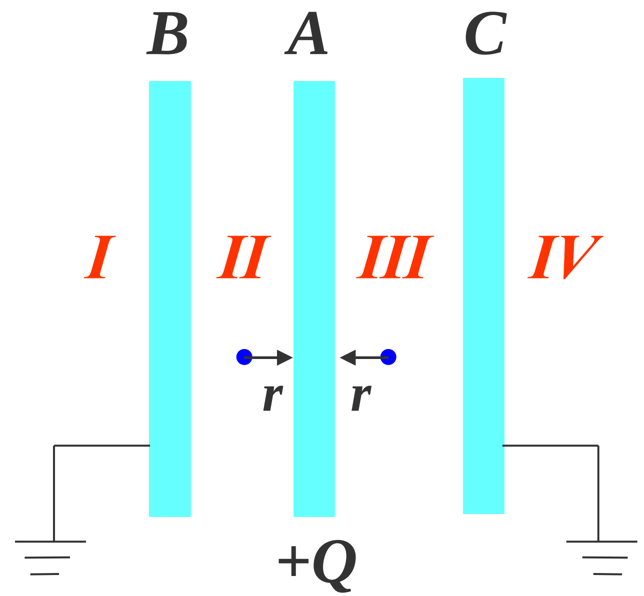
$$U_{I} = 0$$

$$U_{II} = \frac{Q(d-x)}{Sd\varepsilon_0}(x-r)$$

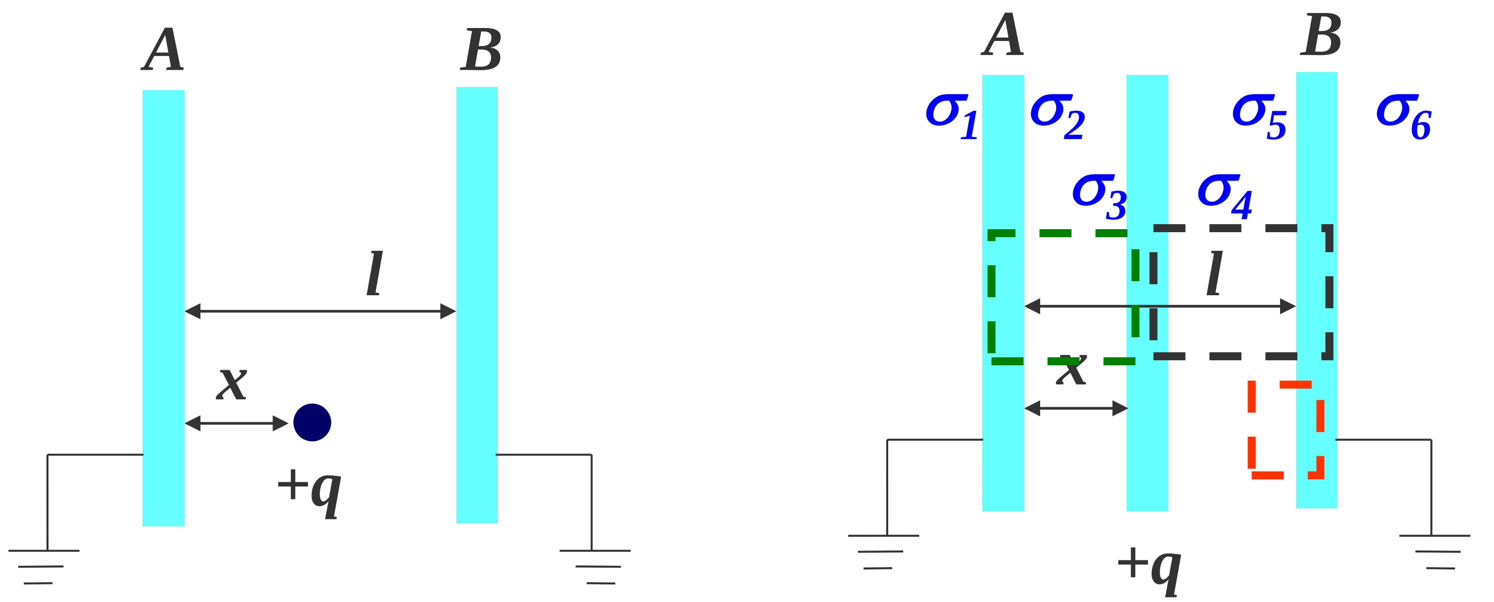
$$U_{III} = \frac{Qx}{Sd\varepsilon_0}(d-x-r)$$

$$U_{IV} = 0$$

*r*为空间点到*A*板的距离,且*r*>0



例. 两块互相平行的无限大接地导电平板A、B，间距为l，在两板间离板A相距x处，有一带电量为q的点电荷，求每块板上的感应电荷量?



例. 一半径为R_A的金属球A外罩一同心金属球壳B,球壳极薄,内外半径均可看作R_B.已知A带电量为Q_A,B带电量为Q_B,求:

(1). A表面S_1,B内外表面S_2,S_3的电量;

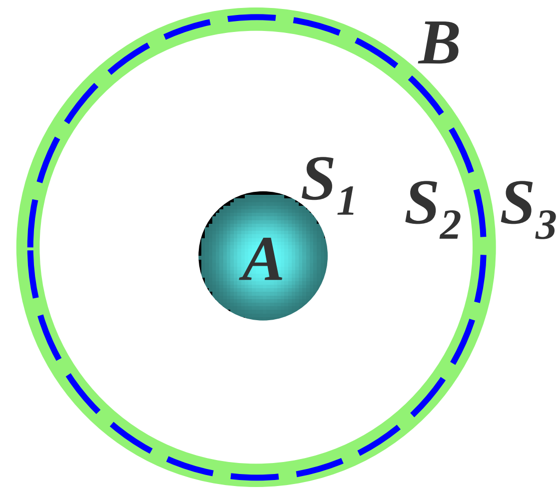
(2). 求A,B球的电势(无限远处电势为零);

(3). 用导线将A,B连接,再讨论(1),(2);

(4). B接地,再讨论(1),(2);

(5). A接地,再讨论(1),(2)?

解: (1). 静电平衡时

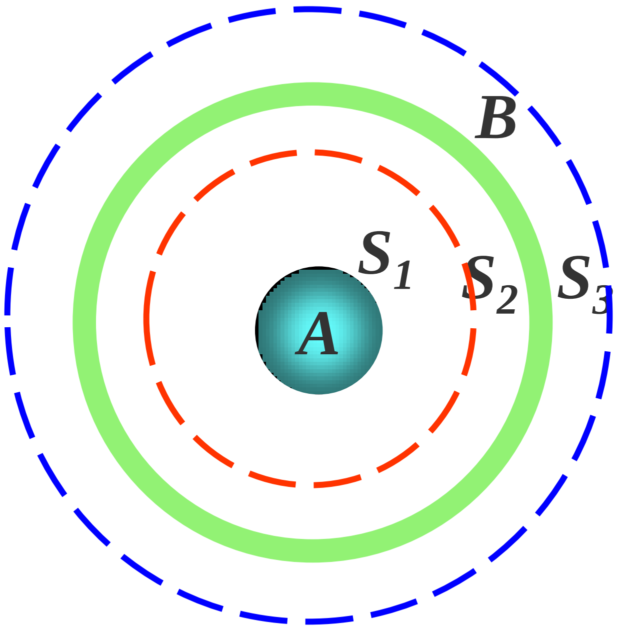


$$Q_{S1}=Q_A$$ (电荷只在外表面)

$$Q_{S2}=-Q_A$$ (高斯定理)

$$Q_{S3}=Q_A+Q_B$$ $(Q_B=Q_{S2}+Q_{S3})$

(2). $$\Phi_{ES} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}$$

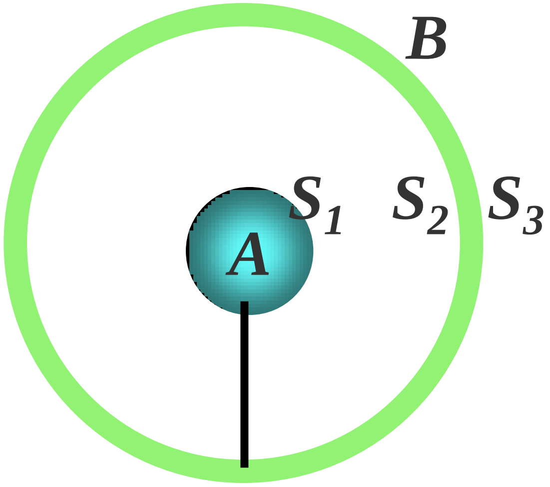


$$\Rightarrow \begin{cases} E_1 = \dfrac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, R_A \le r \le R_B \\ E_2 = \dfrac{Q_A + Q_B}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, R_B \le r \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad U_B = \int_{R_B}^{\infty} E_2 dr = \frac{Q_A + Q_B}{4\pi\varepsilon_0 R_B}$$

$$U_A = \int_{R_A}^{\infty} E dr = \int_{R_A}^{R_B} E_1 dr + \int_{R_B}^{\infty} E_2 dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_B}{R_B} + \frac{Q_A}{R_A}\right)$$

(3). 连接A,B



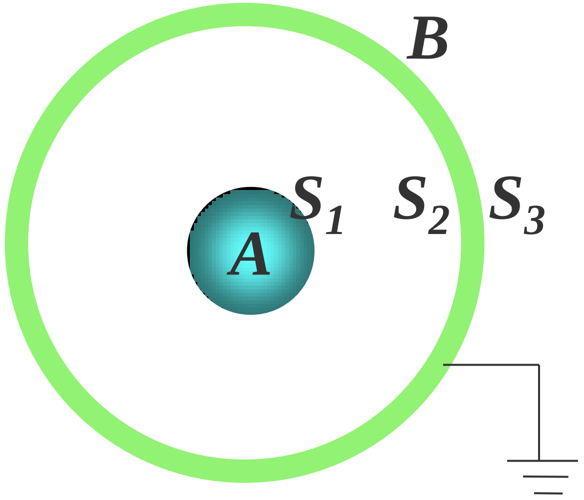
(等势体,导体内部无净电荷)

$$Q_{S1} = 0 \qquad Q_{S2} = 0$$

$$Q_{S3} = Q_A + Q_B$$

$$U_A = U_B = \int_{R_B}^{\infty} E_2 dr = \frac{Q_A + Q_B}{4\pi\varepsilon_0 R_B}$$

(4). B球接地



$$Q_{S1} = Q_A \qquad Q_{S2} = -Q_A$$

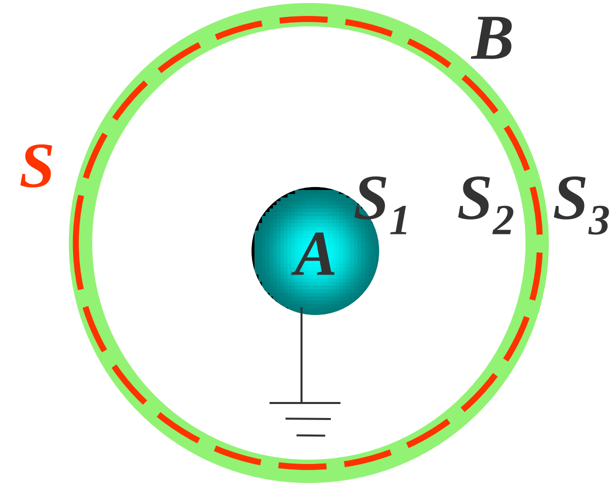
$$Q_{S3} = 0$$ (B球接地)

$$U_B = 0$$ (B球接地)

$$U_A = \int_{R_A}^{R_B} E_1 dr = \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right)$$

(5). A球接地

设S_1,S_2,S_3表面各带q_1,q_2,q_3



$$\Phi_{ES} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \sum q = q_1 + q_2 = 0 \qquad q_2 + q_3 = Q_B$$

$$U_A = \int_{R_A}^{\infty} E dr = \int_{R_A}^{R_B} \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr + \int_{R_B}^{\infty} \frac{Q_B + q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$= \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right) + \frac{Q_B + q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_B} = 0$$

$$\Rightarrow q_1 = \cdots, q_2 = \cdots, q_3 = \cdots$$

有导体存在时静电场的计算

原则

1. 静电平衡的条件

$$\boldsymbol{E}_{内} = \boldsymbol{0} \Longrightarrow \boldsymbol{U} = \boldsymbol{C}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i Q_i$$ 高斯定理

2. 电荷守恒定律

$$\sum_i Q_i = 常量.$$

3. 电势

9.2 电容和电容器

一. 孤立导体的电容

孤立导体： 周围无其他导体、电介质、带电体的导体

孤立导体的电容定义为

单位: $F\ ,\ uF\ ,\ pF$

$$C = \frac{q}{U}$$

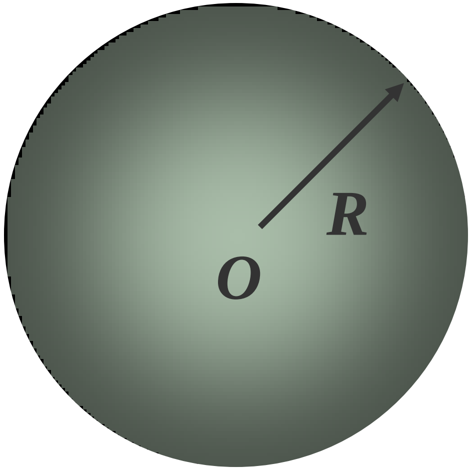
$$1F = 10^{6}\,uF = 10^{12}\,pF$$

电容C反映了导体储存电荷的能力

物理意义： 使导体升高单位电势所需的电量

孤立导体的电容与导体的形状有关，与其带电量和电势无关。

例如：半径为R的导体球的电容



设金属球带电q，则

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

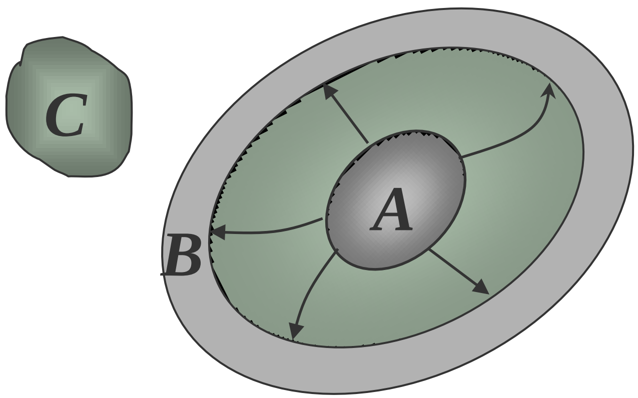
$$U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$C=\frac{q}{U}=4\pi\varepsilon_0 R$$

与是否带电无关

二. 电容器的电容

孤立导体并不存在，一般导体的电势U, 不仅与自身所带电量q有关， 还与其他导体的位置、形状及导体的带电状态有关



电容器: 导体A与导体B内表面组成的体系

$$C = \frac{q}{U_A - U_B}$$

说明：

实际上，对电容器的要求并不像上面所定义的那样严格。通常，只要从一极板发出的电场线能几乎全部终止于另一个极板，我们就认为这两个导体极板构成了一个电容器。

(1) 平行板电容器 $q \to E \to U \to C = \dfrac{q}{U}$

当两极板间的距离远小于极板的线度时，

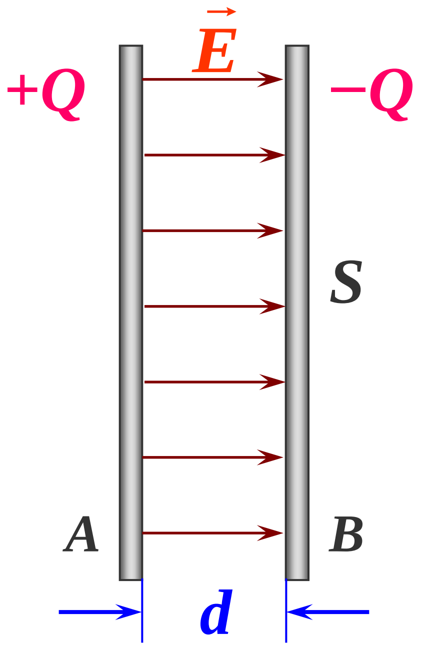
极板间电场可近似看作匀强电场。

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

$$U_A - U_B = E\,d = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} d$$

所以：

$$C = \frac{Q}{U_A - U_B} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$



与面积成正比，与间距成反比

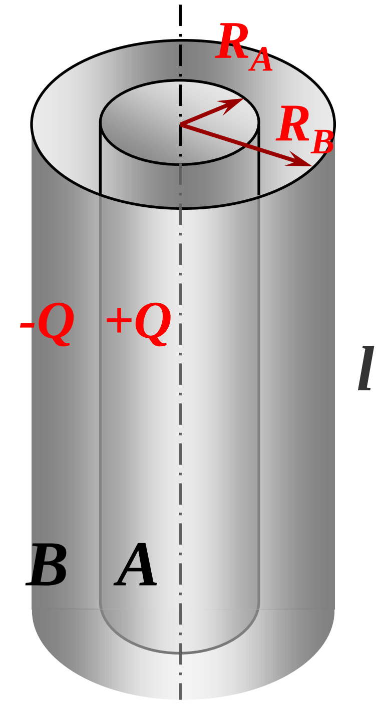
与极板所带电量无关

(2) 圆柱形电容器

当 $l >> R_B - R_A$ 时：

$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 rl} \qquad (R_A < r < R_B)$$

$$U_A - U_B = \int_{R_A}^{R_B} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{R_A}^{R_B} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln\frac{R_B}{R_A}$$

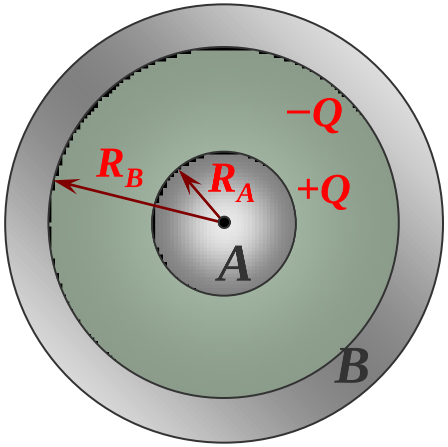


所以：

$$C = \frac{Q}{U_A - U_B} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\frac{R_B}{R_A}}$$

(3) 球形电容器

球形电容器的两极板由球形导体A和同心球壳B组成。



$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\quad (R_A<r<R_B)$$

$$U_A-U_B=\int_{R_A}^{R_B}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_{R_A}^{R_B}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_A}-\frac{1}{R_B}\right)$$

所以：

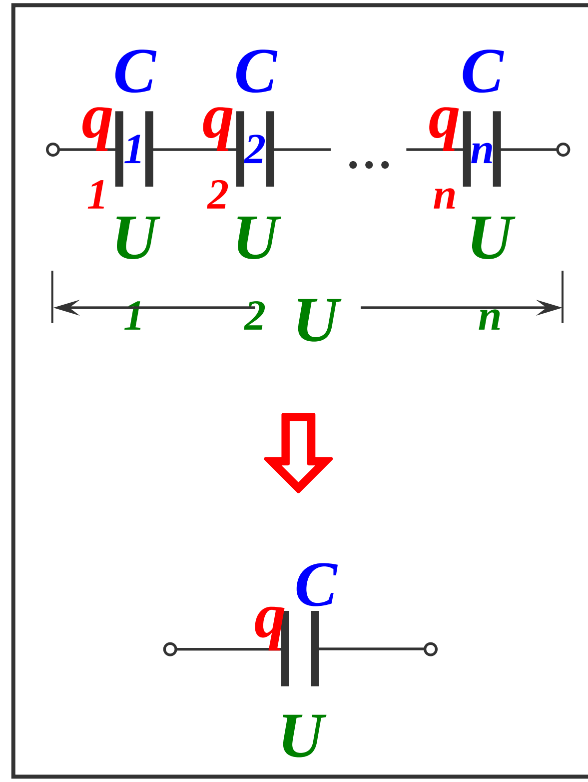
$$C=\frac{Q}{U_A-U_B}=\frac{4\pi\varepsilon_0 R_A R_B}{R_B-R_A}$$

三、电容器的串联和并联

电容器的两个主要指标：电容大小和耐压能力

(1) 串联电容器

每个电容器上所带电量相等（总电容的电量）



$$q_1 = q_2 = \cdots = q_n = q$$

$$U_1 = \frac{q}{C_1}; U_2 = \frac{q}{C_2}; \cdots ; U_n = \frac{q}{C_n}$$

总电压

$$U = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$$

$$C = \frac{q}{U} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

➢ 电容器串联时，等值电容变小，但耐压增大。

(2) 并联电容器

每个电容器上电势差相等

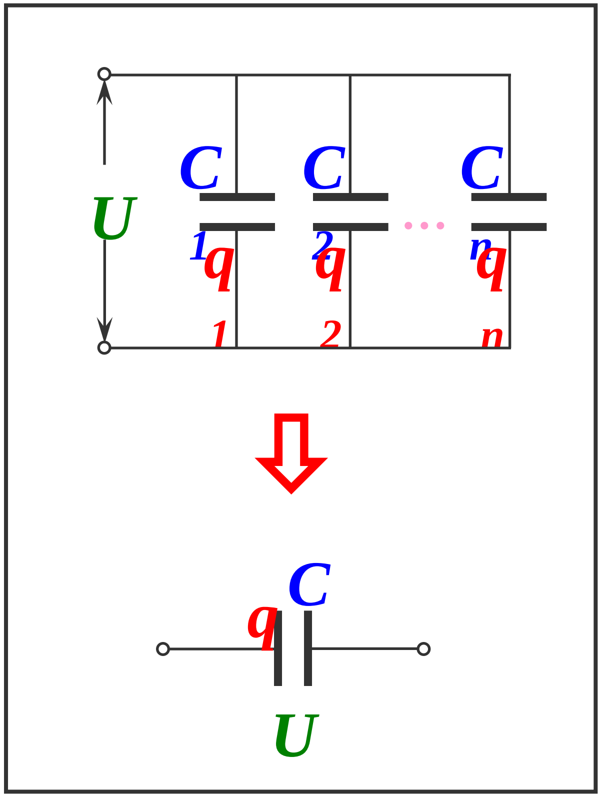
（总电容的电压）

$$U_1 = U_2 = \cdots = U_n = U$$

总电荷量

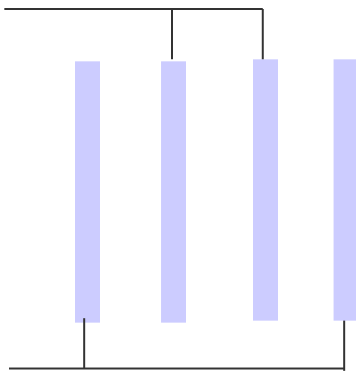
$$q = q_1 + q_2 + \cdots + q_n$$

$$C = \frac{q}{U} = C_1 + C_2 + \cdots C_n = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

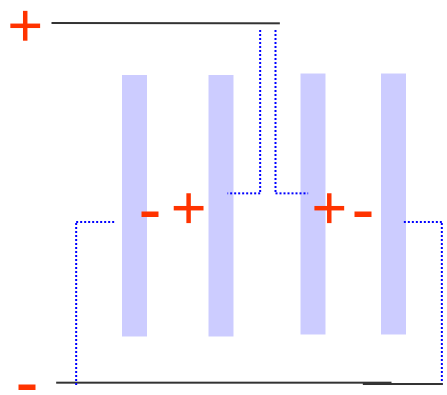


➢ 电容器并联时，等值电容变大，耐压与耐压值最小的电容器相等。

▲ 四块面积均为S的相同薄金属板，板间间距均为d



从一极板发出的电场线几乎全部终止于另一个极板，则这两个导体极板构成一个电容

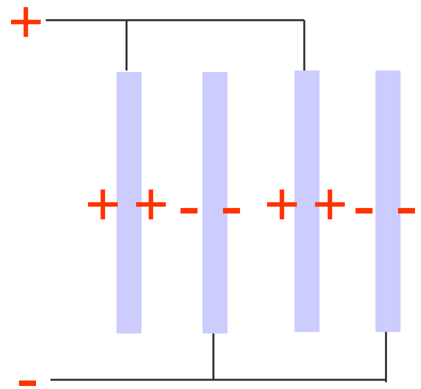


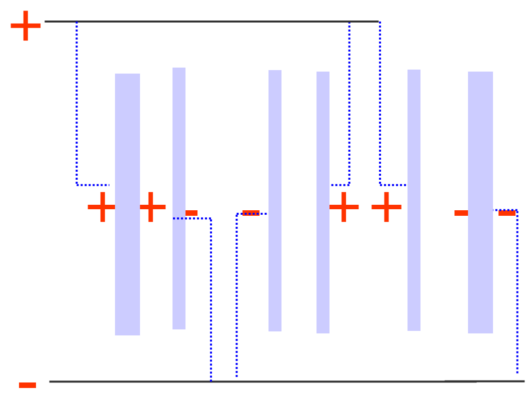
等效于两个电容并联

$$C = C_1 + C_2$$

$$= 2C_1$$

$$= \frac{2\varepsilon_0 S}{d}$$





等效于三个电容并联

$$C = C_1 + C_2 + C_3$$

$$= 3C_1$$

$$= \frac{3\varepsilon_0 S}{d}$$

四. 电容器的击穿

每个电容器都有一个耐压值，当加在电容器上的电压值超过耐压值时，电容器就会“击穿”，成为导体。此时，加在电容器上的电压或场强就称为“击穿电压”或“击穿场强”。

注意： 是否会发生连续击穿.

例、2μF和4μF的两电容器并联，接在500V的直流电源上

（1）求等效电容;

（2）求每个电容器上的电量以及电压。

解：(1) $$C = C_1 + C_2 = 6uF$$

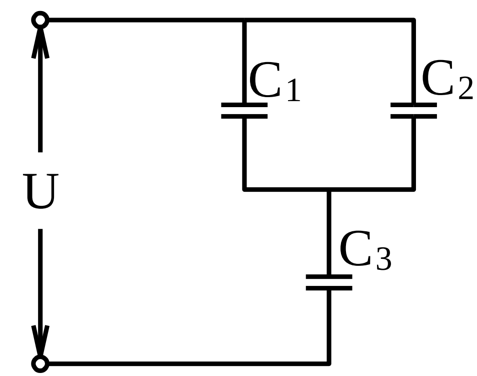
(2) 并联时每个电容上的电压相等，故

$$U_1 = U_2 = 500V$$

$$Q_1 = C_1 U_1 = \cdots$$

$$Q_2 = C_2 U_2 = \cdots$$

例、如图，若 $C_1=10\mu F, C_2=5\mu F, C_3=4\mu F, U=100V$， 求：（1）电容器组的等效电容；（2）电容器$C_3$上的电压。



解：(1) $C_{12}=C_1+C_2=10+5=15\mu F$

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_{12}}+\frac{1}{C_3}$$

$$\Rightarrow C=\frac{15\times 4}{15+4}=\frac{60}{19}\mu F=3.1579\mu F$$

(2)

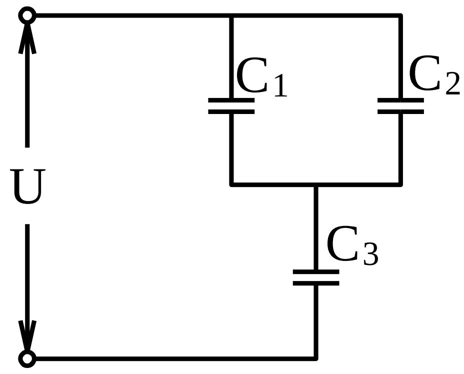
$$U_1+U_3=100V \quad , \quad C_{12}U_1=C_3U_3$$

$$\Rightarrow U_1=U_2=\frac{400}{19}V=21.05V$$

$$U_3=\frac{1500}{19}V=78.94V$$

或

$$Q = CU$$



串联时每个电容上的电量相等，故

$$U_1 = U_2 = Q / C_{12} = 21.05V$$

$$U_3 = Q / C_3 = 78.94V$$

例、设有1,2两个电容器,电容分别为$C_1=3uf$,$C_2=6uf$,电容器1充电后,带电$Q_1=9.0\times10^{-4}C$,现将已充电的电容器1与未充电的电容器2相连,问

(1). 电容器1的电势差和电量;

(2). 电容器2的电势差和电量.

解: 两电容器相连后,电容器1的部分电量转移到电容器2,且两者电势差相等

设平衡时,两电容器分别带电量q_1,q_2,则

$$\begin{cases} q_1+q_2=Q_1 \\ U_1=\dfrac{q_1}{C_1} \\ U_2=\dfrac{q_2}{C_2} \\ U_1=U_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow q_1=\frac{C_1Q_1}{C_1+C_2}=3\times10^{-4}(C)$$

$$q_2=\frac{C_2Q_1}{C_1+C_2}=6\times10^{-4}(C)$$

$$U_1=U_2=\frac{q_1}{C_1}=\frac{Q_1}{C_1+C_2}=100(V)$$

练习、1uF,2uF两个电容器并联后，接在1200V的直流电源上，
(1). 求每个电容器的电势差和电量;
(2). 把充了电的两个电容器与电源断开，彼此之间也断开，再重新将异号的两端相连，求最终每个电容器上的电势差和电量。

解:

（1）并联，电压相等

$$U_1 = U_2 = 1200V$$

$$Q_1 = C_1 U_1 = 1.2\times 10^{-3} C$$

$$Q_2 = C_2 U_2 = 2.4\times 10^{-3} C$$

（2）最终稳定时还是并联，电压相等

设平衡时,两电容器分别带电量q_1,q_2,则

$$\left\{\begin{aligned} & q_1 + q_2 = Q_2 - Q_1 \\ & U_1' = \frac{q_1}{C_1} \quad U_2' = \frac{q_2}{C_2} \\ & U_1' = U_2' \end{aligned}\right. \qquad \Rightarrow \cdots$$

例. 两个电容 分别标明 200pF、500V和300pF、900V，把它们串联起来，求（1）其等值电容是多大？（2）两端加上1000V的电压，各分配到电压是多少，是否会击穿？

解：(1) $$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}=\frac{1}{200}+\frac{1}{300}$$

$$C=120\,pF$$

(2) $$Q=CU=120\times10^{-12}\times1000=1.2\times10^{-7}C$$

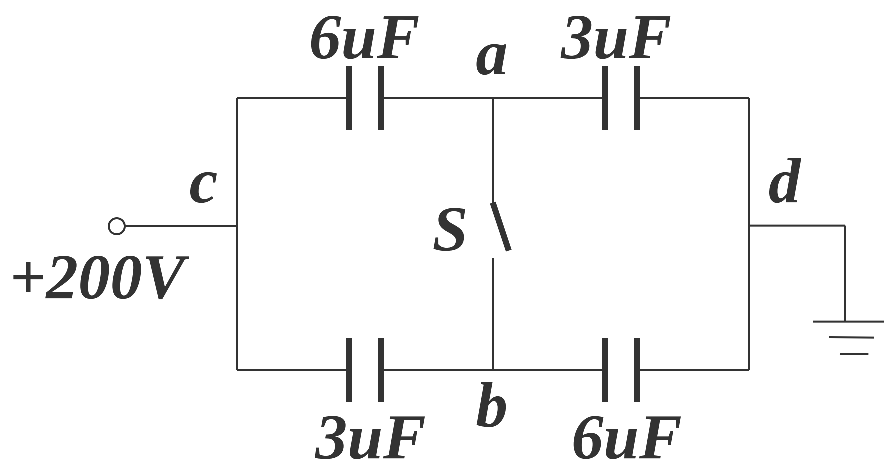
串联时每个电容上的电量相等，故

$$U_1=Q/C_1=1.2\times10^{-7}C/200\times10^{-12}=600V>500V$$

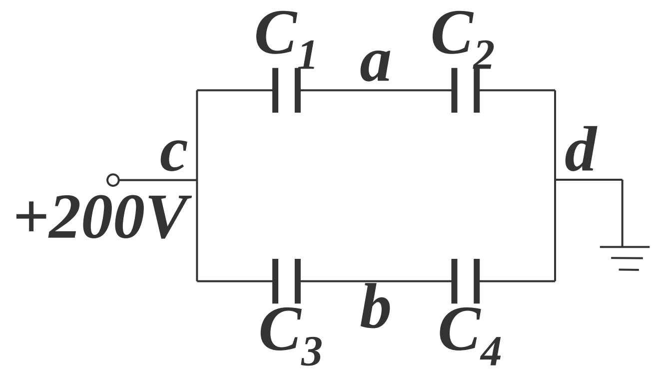
$$U_2=Q/C_2=1.2\times10^{-7}C/300\times10^{-12}=400V$$

连续击穿

例、图示电容器开始时都不带电，按图中所示连接后，开关S是开启的。求(1). *c*、*d*两点的等效电容；(2). *a*、*b*两点间的电势差；（3）开关*S*合上后，求*c*、*d*两点的等效电容；(4).开关*S*合上时，流经S的电荷为多少。



解：(1). $C_{开}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1}{C_2}}+\dfrac{1}{\dfrac{1}{C_3}+\dfrac{1}{C_4}}$



$=4uF$

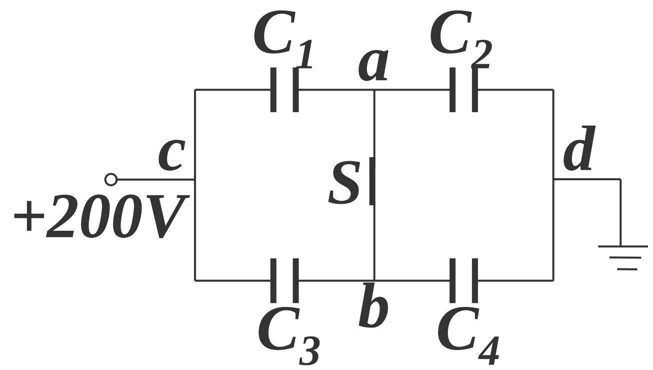
(2). $\because C_{1,2}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1}{C_2}}=2uF$

$\therefore q_1=q_2=C_{1,2}U_{cd}=2\times10^{-6}\times200=0.0004(C)$

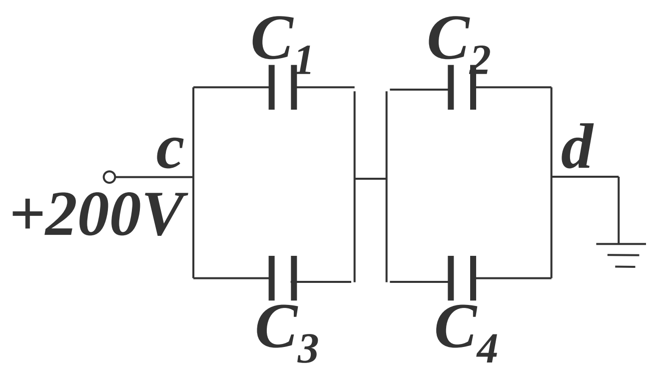
同理 $: q_3=q_4=C_{3,4}U_{cd}=0.0004(C)$

$\therefore U_a=\dfrac{q_2}{C_2}=\dfrac{4}{3}\times10^2(V)\quad U_b=\dfrac{q_4}{C_4}=\dfrac{2}{3}\times10^2(V)$

$U_{ab}=U_a-U_b=66.7(V)$



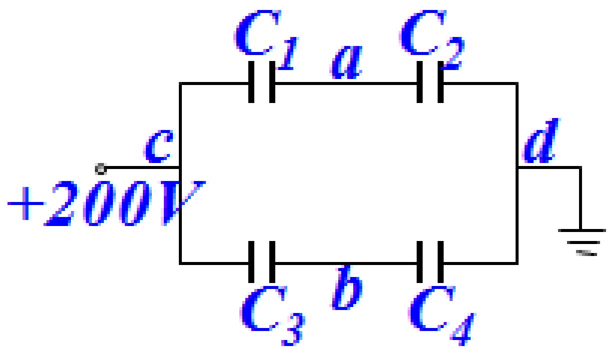
(3). $C_{合} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{C_1 + C_3} + \dfrac{1}{C_2 + C_4}}$



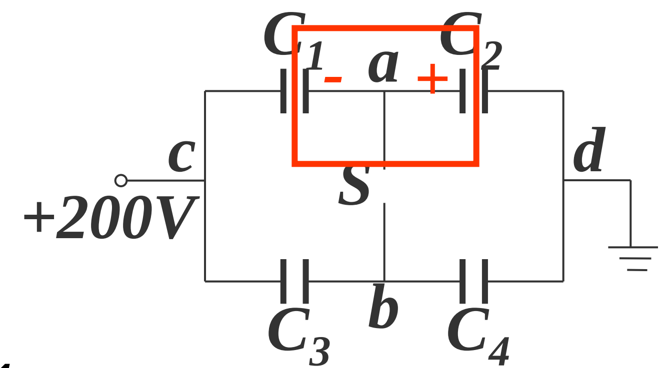
$= 4.5uF$

(4). **思路：**先分析S未闭合时C_1、C_2上所带电量总和($q_1+q_2=0$)；再分析S闭合后C_1、C_2上所带电量的总和，两次差值即为流经S的电量。

开关S闭合前

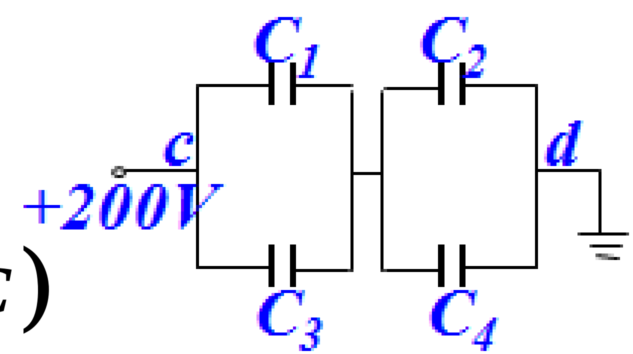


开关S闭合后



$$Q=q_{13}=q_{24}=C_{合}U_{cd}=9\times10^{-4}(C)$$

$$\Rightarrow U_{bd}=\frac{Q}{C_{2,4}}=100(V)$$



$$\therefore q_1'=C_1\left(200-U_{bd}\right)=6\times10^{-4}(C)$$

$$q_2'=C_2U_{bd}=3\times10^{-4}(C)$$

$$\Delta q'=3\times10^{-4}(C)$$

9.3 静电场中的电介质

一. 相对介电常数

1.电介质

由大量电中性的分子组成的绝缘体

正电荷重心　电介质分子中带正电荷的原子核集中在一点

负电荷重心　电介质分子中带负电荷的电子集中在一点

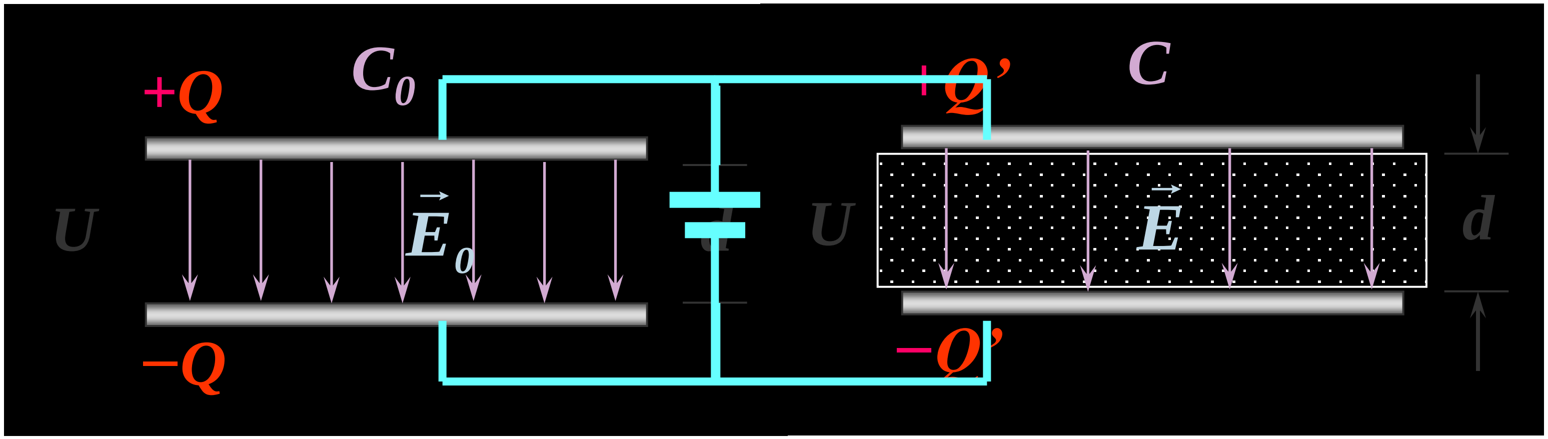
无极分子电介质　正负电荷重心重合的电介质

H_2, N_2, O_2

有极分子电介质　正负电荷重心不重合的电介质

电偶极子$P=ql$　H_2O, N_2O

2. 相对介电常数ε_r



实验发现,相同电势差时,含有电介质的电容器上的电量比真空的电容器上的电量大　　与电介质有关

定义

电介质

$$\varepsilon_r = \frac{C}{C_0}$$

纯 数　　真 空

▲ 平行板电容器,极板带电量不变时

$$\varepsilon_r = \frac{C}{C_0} = \frac{Q/U}{Q/U_0} = \frac{U_0}{U} = \frac{E_0 d}{Ed} = \frac{E_0}{E}$$

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

在极板上电量不变的条件下,介质内的场强只是真空中的$1/\varepsilon_r$

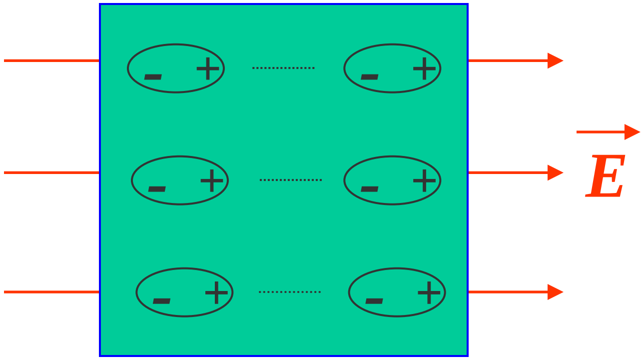
二. 电介质的极化

在外电场中,电介质的分子受到电场作用而发生变化

1.无极分子电介质的极化

分子的正负电荷中心发生相对位移

电偶极子p的方向沿电场方向



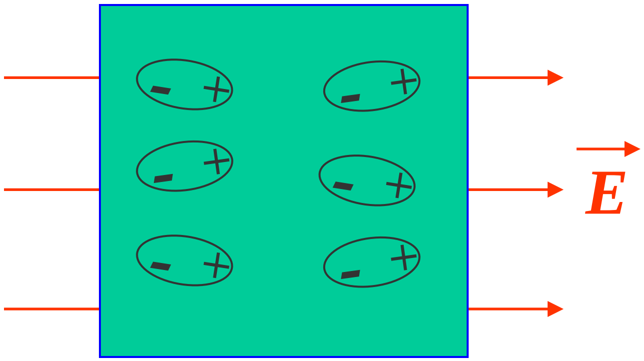
束缚电荷

位移极化

2.有极分子电介质的极化

受到力矩的作用

电偶极子p的方向转向电场方向

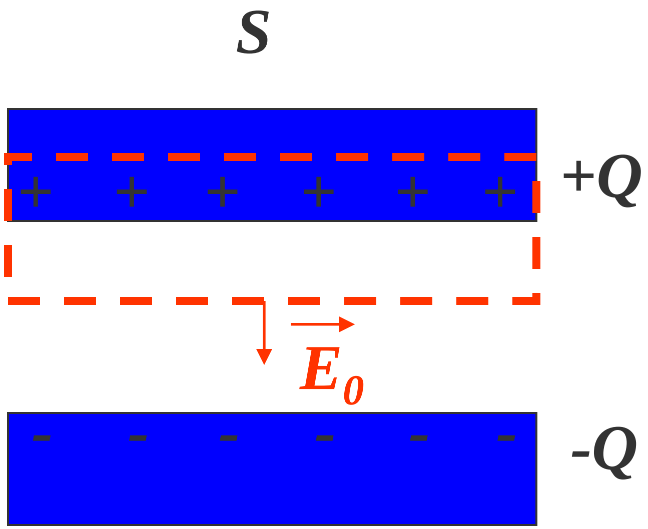


束缚电荷

取向极化

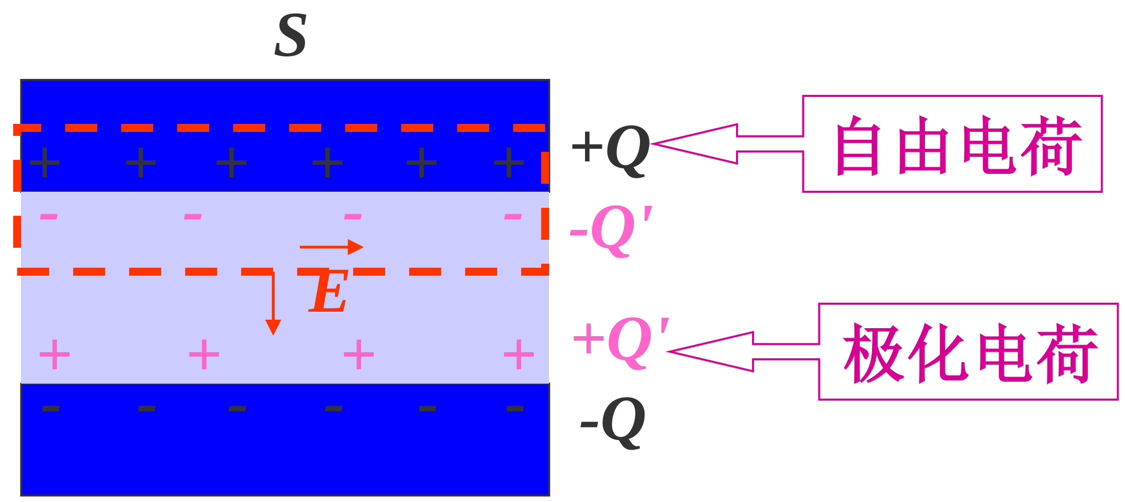
三. 有介质时的高斯定理

▲无电介质的平行板电容器



$$\oint \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = E_0 S = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \boldsymbol{E}_0 = \frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{\varepsilon}_0 \boldsymbol{S}}$$

▲充满电介质的平行板电容器



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q - Q'}{\varepsilon_0} \qquad E = \frac{Q - Q'}{\varepsilon_0 S}$$

真空中

$$E_0 = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

电介质中

$$E = \frac{Q - Q'}{\varepsilon_0 S}$$

$$\because E = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

$$\therefore Q' = Q(1 - \frac{1}{\varepsilon_r})$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q - Q'}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{Q}{\varepsilon}$$

$$\oint \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q$$

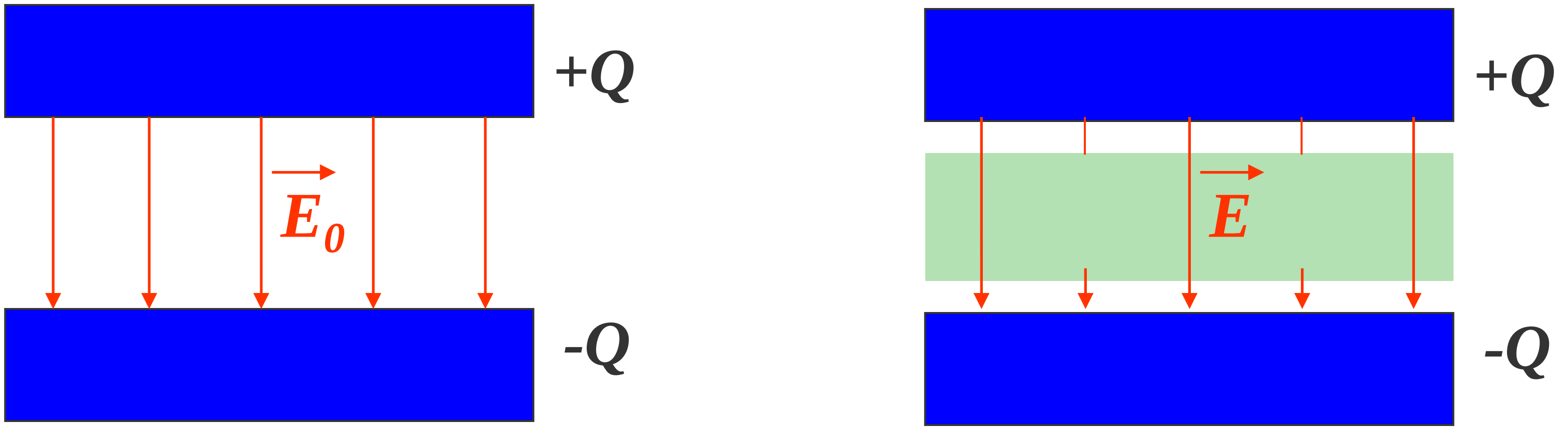
引入 $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$ ——电位移矢量

单位：c/m^2

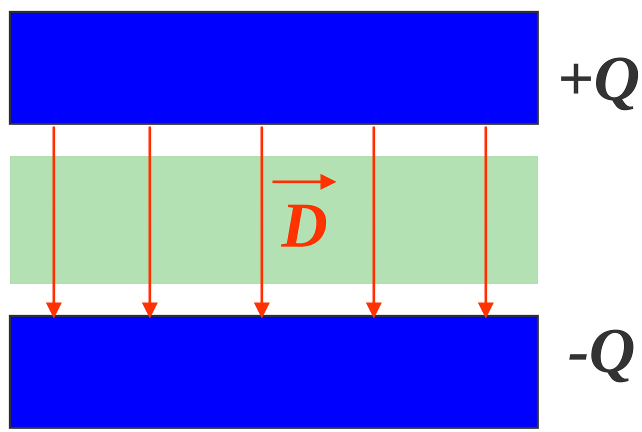
$$\boxed{\oint \vec{D} \cdot d\vec{S}} = \boxed{Q}$$

电位移通量

自由电荷

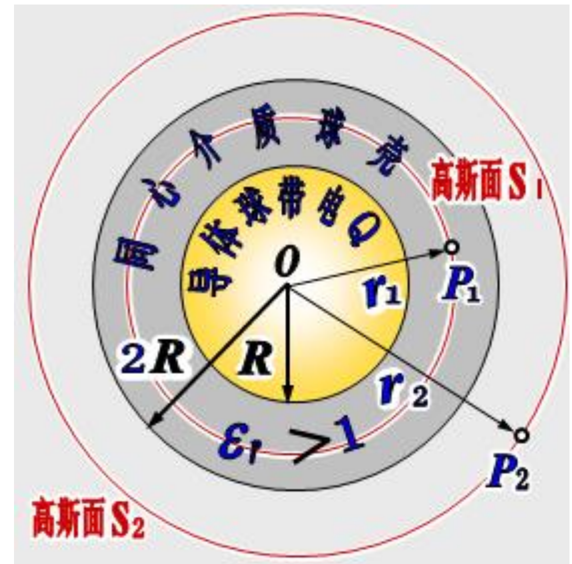


介质中和真空中的场强不同,$E_{真}>E_{介}$



介质中和真空中的电位移矢量相同,$D_{真}=D_{介}$

例. 一个带电量为Q、半径为R导体球，被相对介电常数为ε_r的均匀各向同性电介质球壳包围，壳的外半径为$2R$，求空间的电场分布以及导体球的电势？



解：选取同心高斯封闭球面

$$\oiint \vec{D}\cdot d\vec{S} = D4\pi r^2 = \sum q$$

$$D = 0 \qquad E_I = 0 \qquad (r < R)$$

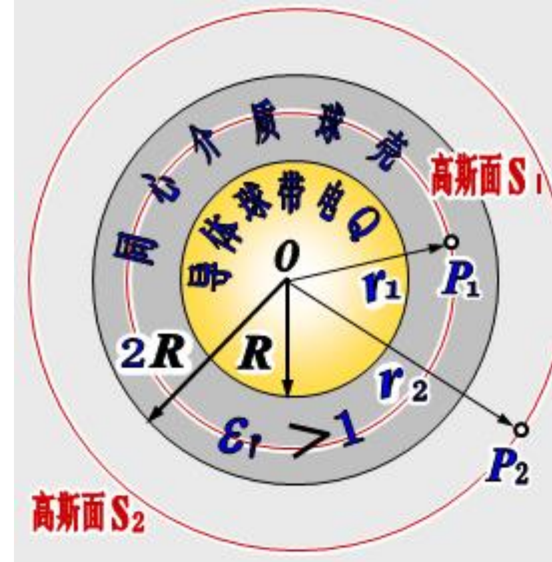
$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} \qquad E_{II} = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} \qquad (R < r < 2R)$$

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} \qquad E_{III} = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (r > 2R)$$

$$E_I = 0 \quad (r < R)$$

$$E_{II} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} \quad (R < r < 2R)$$

$$E_{III} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (r > 2R)$$



$$U = \int_R^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_R^{2R} E_{II} \cdot dr + \int_{2R}^{\infty} E_{III} \cdot dr$$

$$= \int_R^{2R} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} dr + \int_{2R}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 2R}$$

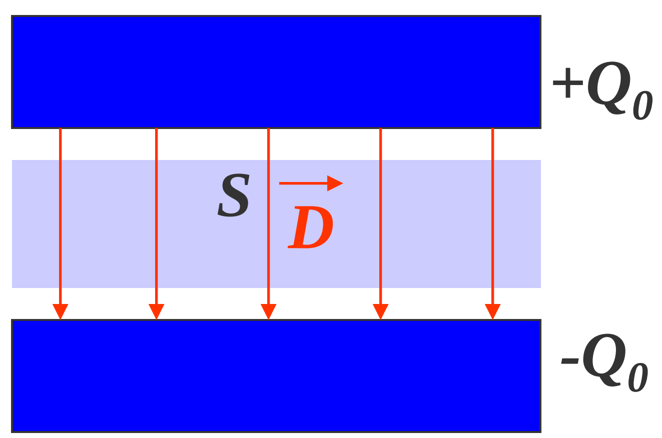
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 2R}\left(\frac{1}{\varepsilon_r} + 1\right)$$

例、平行板电容器极板面积$S=100cm^2$，间距$d=1.0cm$。现将它充电至$U_0=100V$，然后将电池断开，再将厚度$b=0.5cm$的电介质板插入，设电介质板的$\varepsilon_r=7$，求：

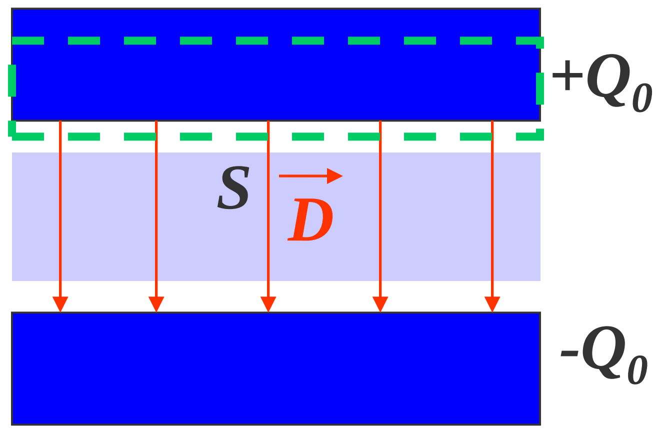
（1）电容器内部空隙内电场以及电介质板中的电场；

（2）插入电介质板后两极板的电势差；

（3）插入电介质板后的电容。



解:



介质中和真空中的电位移矢量相同,$D_{真}=D_{介}$

$$C_0=\frac{\varepsilon_0 S}{d}=8.85pF$$

$$Q_0=C_0U_0=8.85\times10^{-10}C$$

插入介质后,极板的带电量不变

$$\oint\vec{D}\cdot d\vec{S}=DS=Q_0$$

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = DS = Q_0$$

$$D = \frac{Q_0}{S}$$

真空中

$$E_0 = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{Q_0}{\varepsilon_0 S} = 1.0\times 10^4 V / m$$

介质中

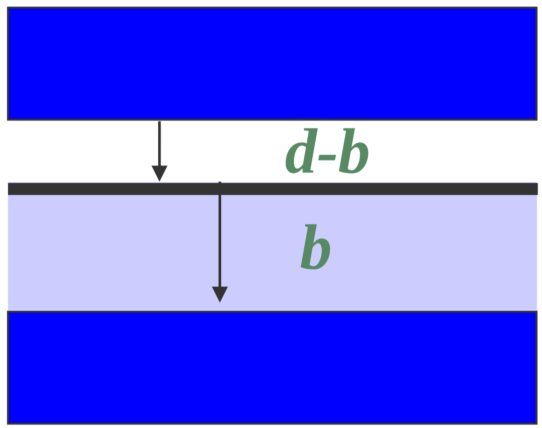
$$E = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{Q_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r S} = 0.14\times 10^4 V / m$$

$$U = E_0(d-b) + Eb = 57(V)$$

$$C = \frac{Q_0}{U} = 15.5(pF)$$

▲讨论:

(1).



等效于两个电容器的串联

$$C = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2} = \frac{\frac{\varepsilon_0 S}{d-b}\ \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{b}}{\frac{\varepsilon_0 S}{d-b} + \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{b}} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{\varepsilon_r d + b(1-\varepsilon_r)} = 15.5\ pF$$

(2).

若插入的是厚度为b的金属板,则电容为多少?

插入金属板后,相当于原来的电容器间距减小了b

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d - b}$$

(3).

若插入电介板后电源不断开,则真空和介质中场强为多少?

$$U = E_0(d - b) + Eb$$

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

9.4 电场能量

一. 电容器的能量W

充电的电容器短路放电 $\Rightarrow$ 充电的电容器内储有能量

$$W=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}QU$$

$(\because Q=CU)$ ——电容器储能公式

适用范围：任何电容器

二. 电场的能量和能量密度

1. 电场的能量W

带电系统的带电过程即其周围电场的形成过程

带电系统的能量就是其周围电场的能量

$$\left\{\begin{aligned} & W=\frac{1}{2}CU^2 \\ & U=Ed \\ & C=\frac{\varepsilon_0 S}{d} \end{aligned}\right. \Rightarrow W=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 Sd$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 V$$

体 积

▲电场的能量分布在电场所占的整个体积内

2. 电场的能量密度w

单位体积内的电场能量

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

介质中,以上各式中 $\varepsilon_0\varepsilon_r \to \varepsilon_0$

用电位移矢量表示 $$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} DE$$

3. 任一带电系统整个电场所储存的总能量

真空中 $$W = \int_V w dV = \int_V \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 dV$$

电介质中 $$W = \int_V w dV = \int_V \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 dV$$

$$W = \int_V w dV = \int_V \frac{1}{2} DE dV$$

例. 一球形电容器,内外半径分别为R_1和R_2,两球间充满相对介电常数ε_r的电介质,求此电容器带有电量Q时,所储存的能量?

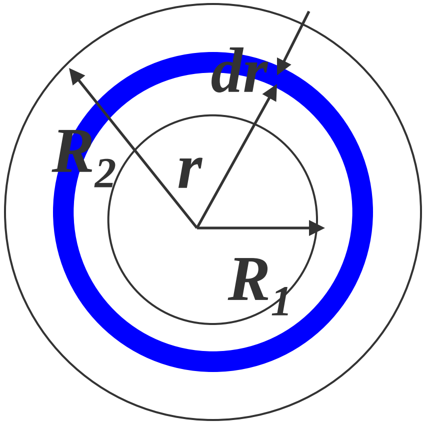
解:

$$\Phi_{DS} = \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum_i q_i$$

$$\Rightarrow D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$$

$$w = \frac{1}{2}DE$$



在距球心r处取一宽为dr的球壳

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

$$\Rightarrow W = \int_V w dV = \int_V \frac{1}{2} DE dV$$

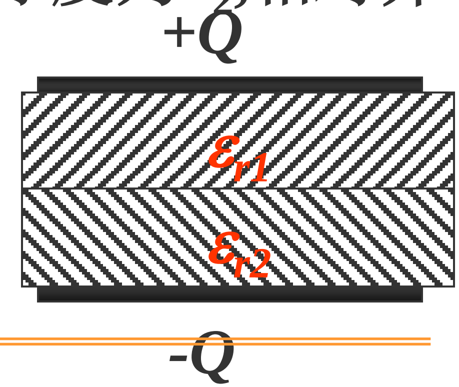
$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r \left(\frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2}$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\because W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \qquad \therefore C = \frac{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

例. 一平行板电容器的极板面积为是S,间距为d,两板间充以两层均匀电介质,一层厚度为d_1,相对介电常数为ε_{r1},另一层厚度为d_2,相对介电常数为ε_{r2},如果两板分别带有等量异号电荷Q,求:



(1). 每层介质中的电场能量密度;

(2). 每层介质中的总能量;

(3). 利用能量公式求等值电容?

解:

$$D = \frac{Q}{S}$$

$$E_1 = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} S} \qquad E_2 = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} S}$$

(1).

$$w_1 = \frac{1}{2} D_1 E_1 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} S^2}$$

$$w_2 = \frac{1}{2} D_2 E_2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} S^2}$$

(2).

$$W_1 = w_1 V_1 = \frac{1}{2}\frac{Q^2 d_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} S}$$

$$W_2 = w_2 V_2 = \frac{1}{2}\frac{Q d_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} S}$$

(3).

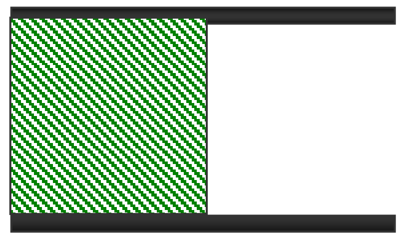
$$W = W_1 + W_2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 S}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}}\right)$$

$$\because W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \qquad \therefore C = \frac{\varepsilon_0 S}{\left(\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}}\right)}$$

▲ 讨论:

若已知条件改为已知加在两极板上的电压为U,则情况如何?

$$\left\{\begin{aligned} &U = E_1 d_1 + E_2 d_2 \\ &E_1 = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}} \\ &E_2 = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}} \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow D = \frac{U}{\left(\dfrac{d_1}{\varepsilon_1} + \dfrac{d_2}{\varepsilon_2}\right)}$$



$$C = C_1 + C_2 \qquad U = \frac{Q}{C}$$

$$E = \frac{U}{d}$$

★ 电容的求解方法:

法1. 利用电容的定义式求解

(1). 先假定两极板已带等量电荷±Q，求出电场的分布;

(2). 由电场的分布求出 两极板间的电势差;

(3). 根据电容的定义式求出结果。

法2. 利用电容器的储能公式求解

(1). 先根据条件Q或U，求出电场分布；

(2). 求出电场能量密度；

(3). 求出总电场能量；

(4). 利用电容器的储能公式计算.

$$W=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \qquad W=\frac{1}{2}CU^2$$