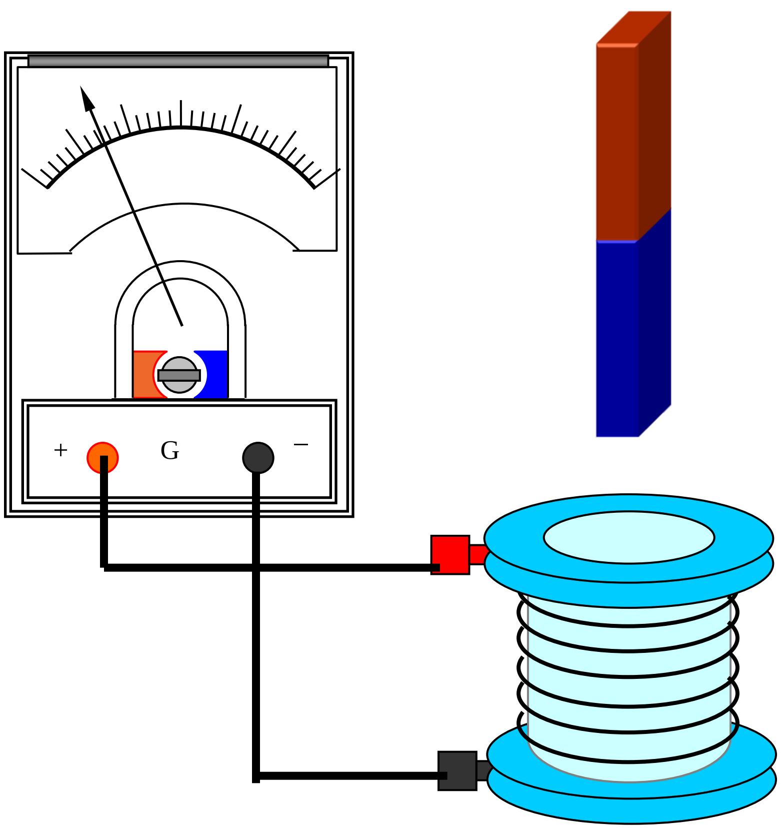
第十二章　电 磁 感 应

12.1　电磁感应定律

一. 电磁感应现象



★原因:

线圈包围面积内的磁通量发生改变

感应电流

当穿过一个闭合导体回路的磁通量发生改变时,回路中出现的电流.

注意：

(1). 通过闭合回路的磁通量变化产生的是感应电动势, 不是感应电流

(2). 感应电流仅是感应电动势的对外表现

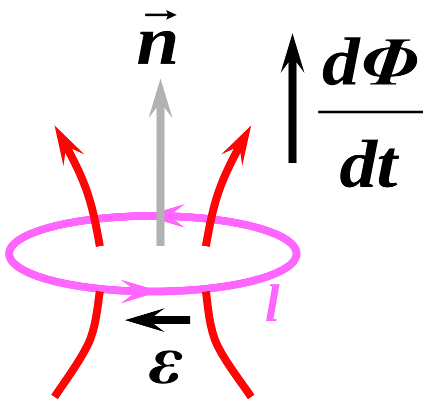
二. 法拉第电磁感应定律

闭合回路的感应电动势ξ与通过这一回路的磁通量的变化率$d\Phi/dt$成正比

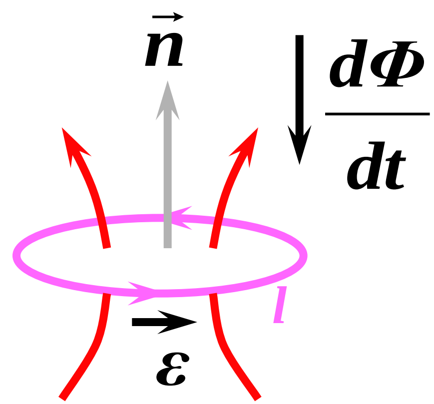
$$\xi = -\frac{d\Phi}{dt}$$

负号表示感应电动势的方向

任取回路绕行方向l，回路的单位正法线矢量n由右螺旋定则确定。



$$\Phi > 0, \frac{d\Phi}{dt} > 0, \varepsilon < 0$$



$$\Phi > 0, \frac{d\Phi}{dt} < 0, \varepsilon > 0$$

讨论：

1. 回路电阻为R，则感应电流I为

$$I=\frac{\xi}{R}=-\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}$$

2. 在t_1到t_2这段时间内通过导线上任一截面的感应电量

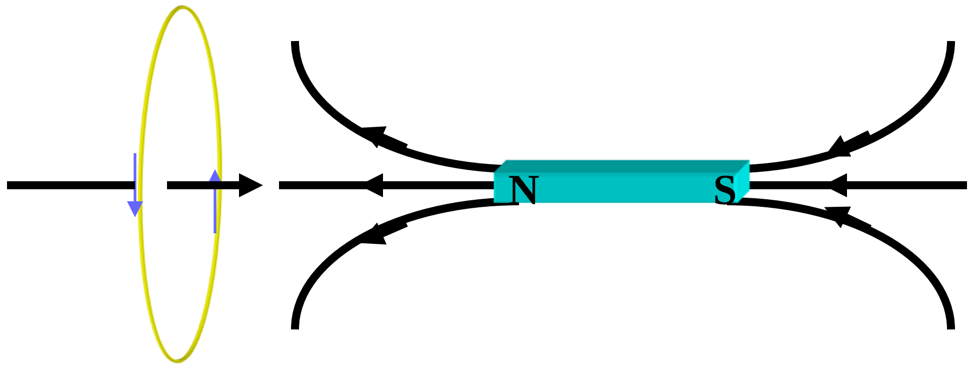
$$q=\int_{t_1}^{t_2}Idt=-\frac{1}{R}\int_{\Phi_1}^{\Phi_2}d\Phi=\frac{1}{R}(\Phi_1-\Phi_2)$$

三. 楞次定律 (判断感应电流方向的规律)

感应电流的方向总是使感应电流所起的作用是反抗产生感应的原因,即力图阻止回路中磁通量的改变.

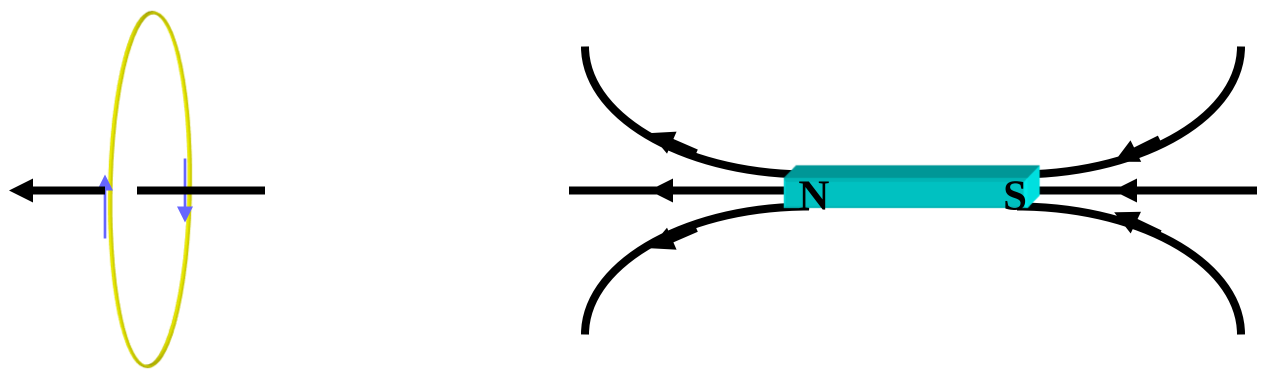
当通过闭合回路的磁通量增加时,感应电流产生的磁通量将阻止其增加;

阻碍磁铁靠近



当通过闭合回路的磁通量减少时,感应电流产生的磁通量将阻止其减少.

阻碍磁铁远离



楞次定律是能量转化和守恒定律在电磁感应中的体现

例、

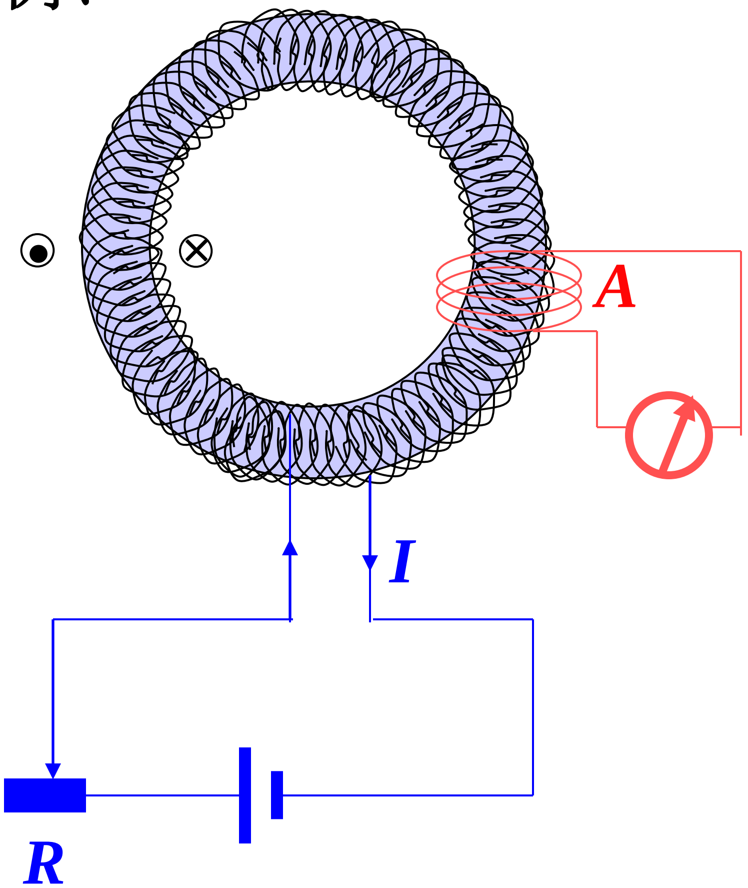
已知: n=5000匝/米,截面$S_{环}=2\times10^{-3}m^2$

N=5匝,$R_A=2\Omega$， $S_A=4\times10^{-3}m^2$

调节电阻R,使电流每秒降低20A

求:(1). 线圈A中的ξ和I;

(2). 2s内通过A的q?



解: $$B=u_0 nI$$

通过线圈A的磁通量

$$\Phi = NBS = Nu_0 nIS$$

$$\therefore \xi = \left|\frac{d\Phi}{dt}\right| = u_0 nNS\left|\frac{dI}{dt}\right|$$

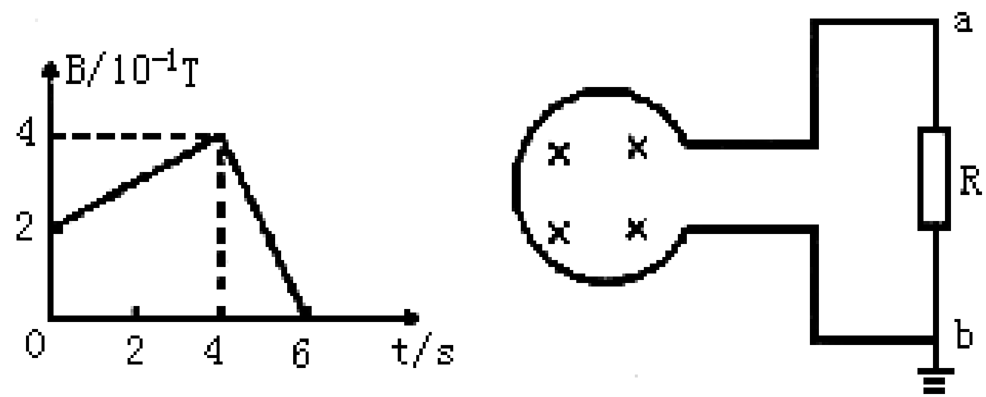
$$\xi = 1.26\times10^{-3}(V)$$

$$I=\frac{\xi}{R_A}=6.3\times10^{-4}A$$

$$q=\int_{t_1}^{t_2} Idt = I\Delta t = 1.26\times10^{-3}(C)$$

练习、如图所示，一个圆形线圈的匝数为1000，线圈面积为$200cm^2$，线圈电阻为1Ω，在线圈外接一阻值4Ω的电阻，电阻一端b跟地相接，把线圈放入一个方向垂直线圈平面向里的匀强磁场中，磁感应强度随时间变化规律如图 所示。求：（1）第3s和第5s的感应电动势；（2）*a*点最高电势？

解:



(a)　　(b)

0～4s内

$$B = B_2 + \frac{\Delta B}{\Delta t} \cdot t$$

$$= 2 \times 10^{-1} + 0.5 \times 10^{-1} t$$

$$\therefore \xi = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(NBS)}{dt} = \cdots$$

方向：逆时针

下略

12.3 动生电动势和感生电动势

一. 动生电动势

1. 导线在磁场中运动而产生的感应电动势

(1). 洛伦兹力角度（动生电动势的产生机制）

当金属棒以速度v向右运动时，自由电子也速度v向右运动

洛仑兹力 $f = eBv$

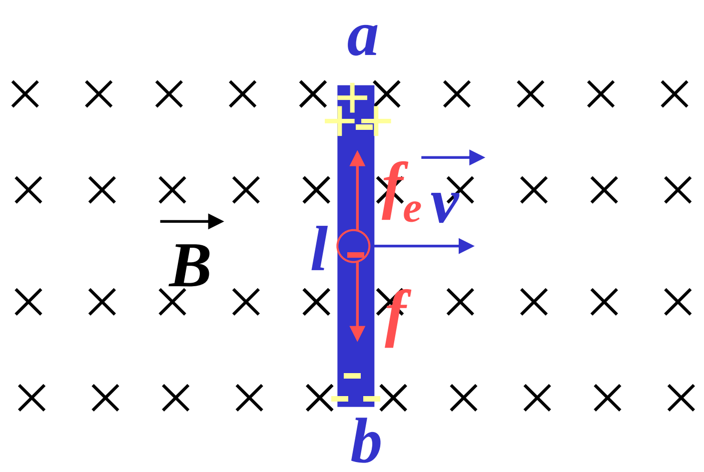
$\Downarrow$

电荷移动,a端积累正电荷;
b端积累负电荷.

形成从a指向b的电场

$\Downarrow$

电场力 $f_e = -eE$



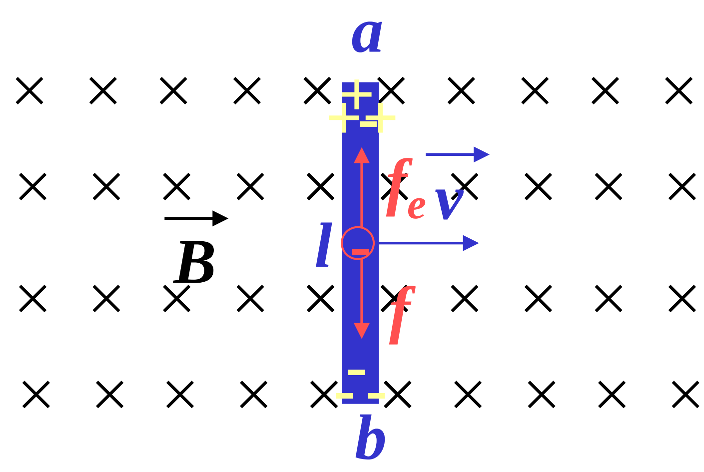
平衡时

$$eE = evB$$

$$\Rightarrow E = vB$$

$$\Rightarrow U_{ab} = El$$

$$\boxed{\text{即}\ \xi = U_{ab} = Blv}$$

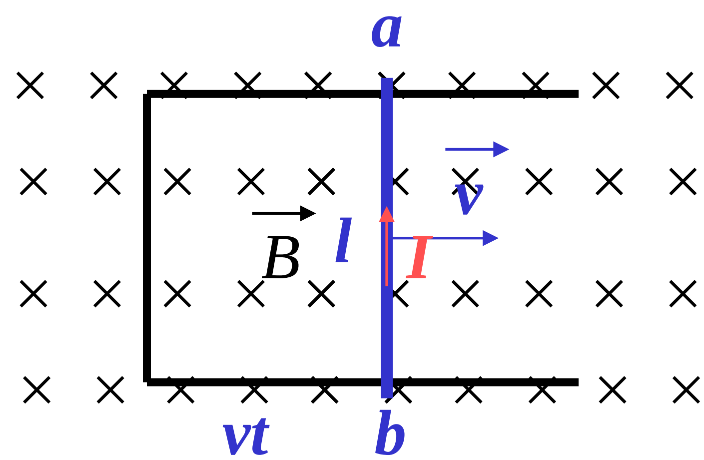


▲金属棒相当于一个电源

可见：产生动生电动势的原因为洛仑兹力。

(2). 磁通量角度

若$\overline{ab},\vec{v},\vec{B}$三者互相垂直



若导线开始时在最左端

则t时刻,通过回路的磁通量为

$$\Phi = BS = B(lvt)$$

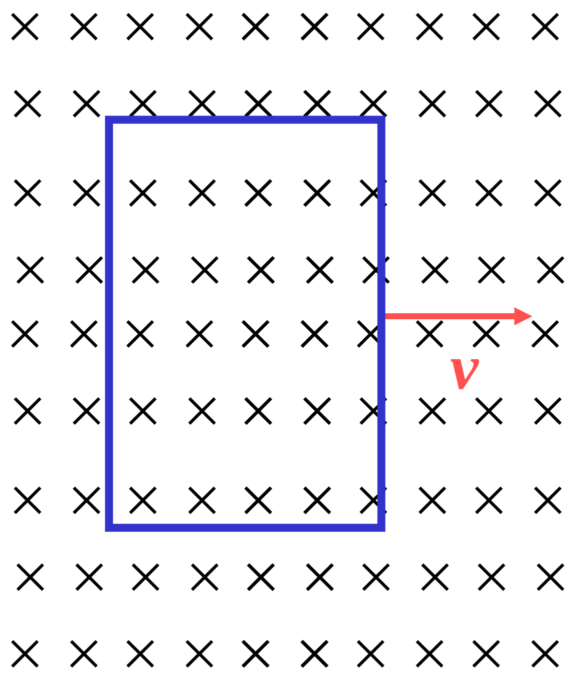
$$\xi = \left|\frac{d\Phi}{dt}\right| = Blv$$

方向: 右手法则或楞次定律

可形象地说：导线因切割磁感应线而产生电动势。

2. 线圈在磁场中运动而产生的感应电动势

(1).线圈在磁场中平动而产生的感应电动势



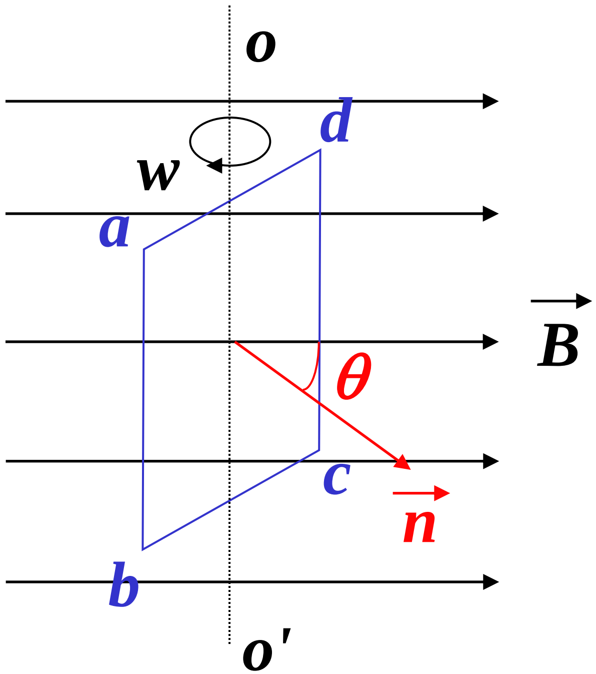
看成多根导线的组合

或通过线圈的磁通量不变

(2). 线圈在磁场中转动而产生的感应电动势

设有一线圈有N匝,面积为S,绕oo'轴以w转动

$$\Phi = NBS\cos\theta$$



由于线圈在转动,θ随 t 变化

$$\xi = -\frac{d\Phi}{dt} = NBS\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$= NBS\sin\theta w$$

如w为常量,且$t=0$时,$\theta_0=0$

$$\xi = NBSw\sin(wt)$$

令

$$\xi_0 = NBSw$$ ——— 最大感应电动势

则

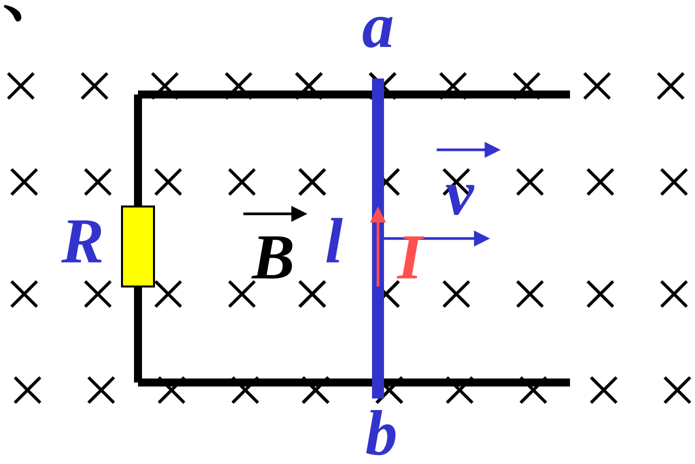
$$\xi = \xi_0 \sin(wt)$$ ——— 交变电动势

匀强磁场中转动的线圈中产生的电动势作周期性变化

$$I = I_0 \sin(wt)$$ 交变电流(交流)

▲匀强磁场中

例、



$l=0.5m, B=0.5Wb/m^2, v=4.0m/s$

无摩擦匀速运动　$R=0.2\Omega$

求: (1). 维持匀速,所需的外力;

(2). 外力作的功率;

(3). 感应电流消耗在电阻上的功率?

$$\xi = Blv = 1.00V$$

方向b到a

$$I = \frac{\xi}{R} = 5.0A$$

$$f = BIl = 1.25(N)$$

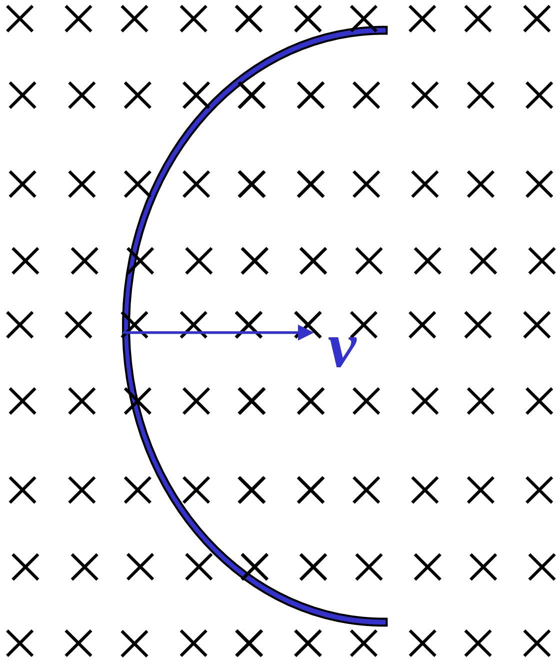
$$F_{外} = f = 1.25(N)$$

方向:向右

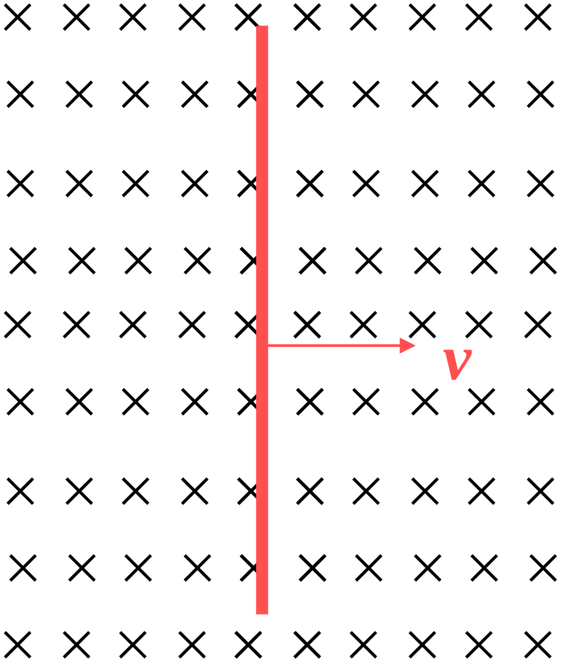
$$P_F = Fv = 5.0W$$

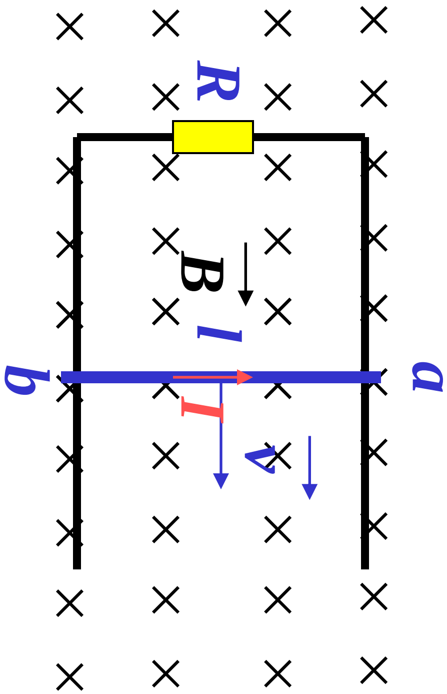
$$P = I^2R = 5.0W$$

★ 讨论：



⇔





练习：$l=0.5m, B=0.5Wb/m^2, R=0.2\Omega$，$m=1kg$

求:(1). t 时刻的速度；

(2).收尾速度?

解：(1)

$$\varepsilon = Blv$$

$$F = BIl = Bl\frac{\varepsilon}{R}$$

$$mg - F = m\frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \cdots$$

（2）

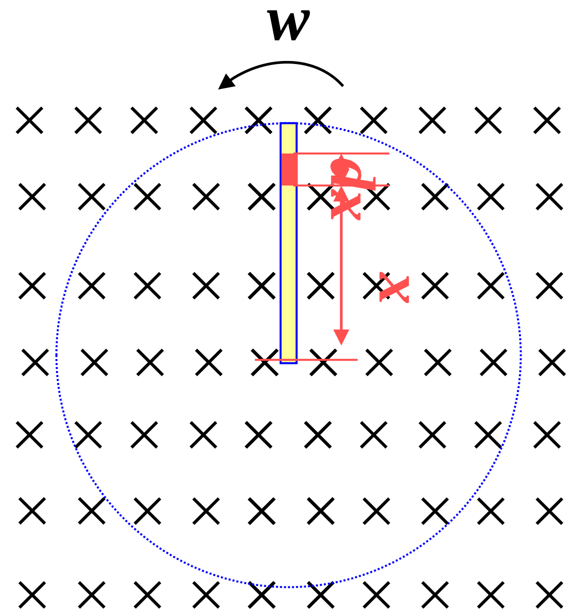
$$\varepsilon = Blv_T$$

$$F = BIl = Bl\frac{\varepsilon}{R}$$

$$mg = F$$

$$\Rightarrow \cdots$$

例、长度为L的一根铜棒，在均匀磁场B中以角速度*w*旋转，求铜棒两端之间产生的电动势。



解：距原点*x*处取一长度元*dx*,则

$$d\xi = Bvdx$$

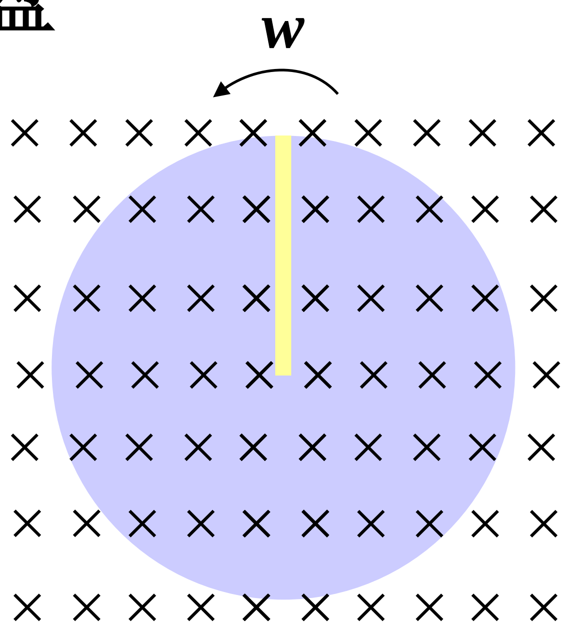
$$= Bwxdx$$

$$\xi = \int d\xi = \int_0^L Bwxdx = \frac{1}{2}BwL^2$$

方向: 指向圆心

★ 讨论：

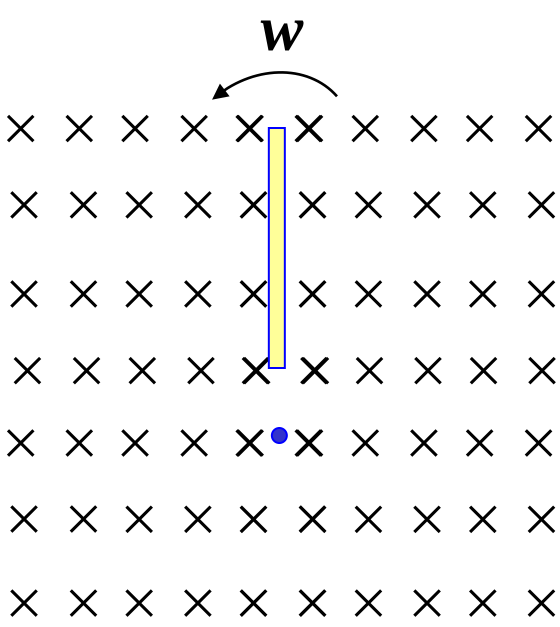
1. 若为金属圆盘

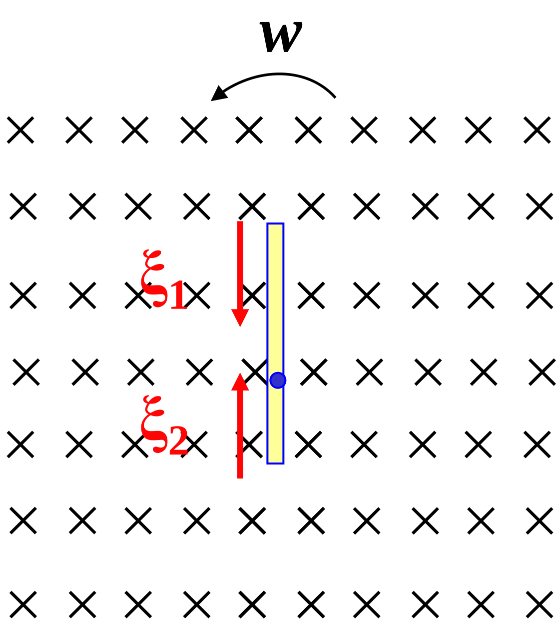


看成无数根铜棒并联而成

$$\varepsilon = \frac{1}{2} BwL^2$$

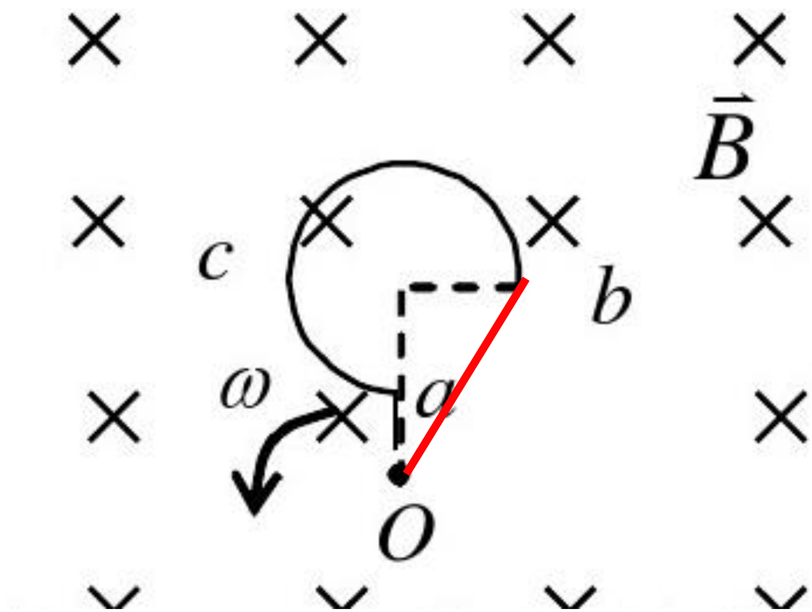
2. 若转轴不在棒端，情况如何?





$$\varepsilon = \int_a^{a+l} Bwxdx$$

$$\varepsilon = \left|\varepsilon_2 - \varepsilon_1\right|$$



oa=R

$$\varepsilon = \frac{5}{2} B w L^2$$

例、如图所示，一矩形线圈面积为400 cm²，匝数为100匝，绕线圈的中心轴线OO′ 以角速度*w*匀速转动，匀强磁场的磁感强度1.414T，转动轴与磁感线垂直，线圈电阻为$R=0.2\Omega$， $R_1=3\Omega$， $R_2=6\Omega$， $R_3=12\Omega$，其余电阻不计，电键K断开，当线圈转到线圈平面与磁感线平行时，线圈所受磁场力矩为16Nm 。求：

（1）线圈转动的角速度 。

（2）电键K闭合后，线圈的输出功率。

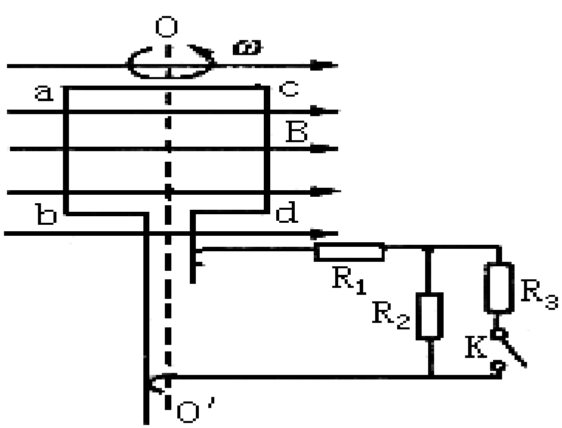
解：（1）当线圈平面与磁感线平行时，感应电动势最大，线圈所受磁场力矩也最大。

$$\varepsilon_m = NB\omega S$$

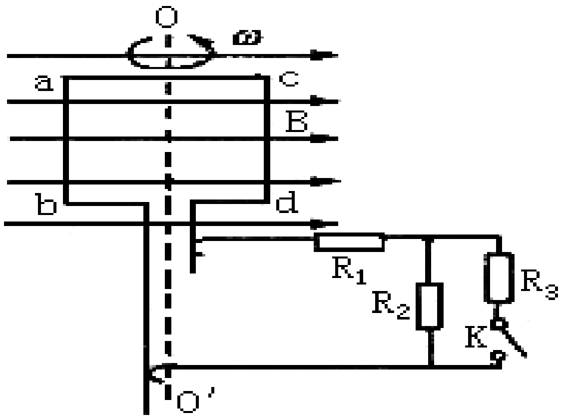
$$I = \frac{\varepsilon_m}{r + R_1 + R_2} = \frac{NB\omega S}{r + R_1 + R_2}$$

$$M = NBIS = \frac{N^2B^2S^2\omega}{r + R_1 + R_2} = 16$$

$$\omega = 5\,rad\ /\ s$$



（2）当K闭合后，外电路总电阻为



$$R = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 7\Omega$$

$$I = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{2}(R + r)} = 2.5A$$

$$P_{出} = I^2 R = 43.75W$$

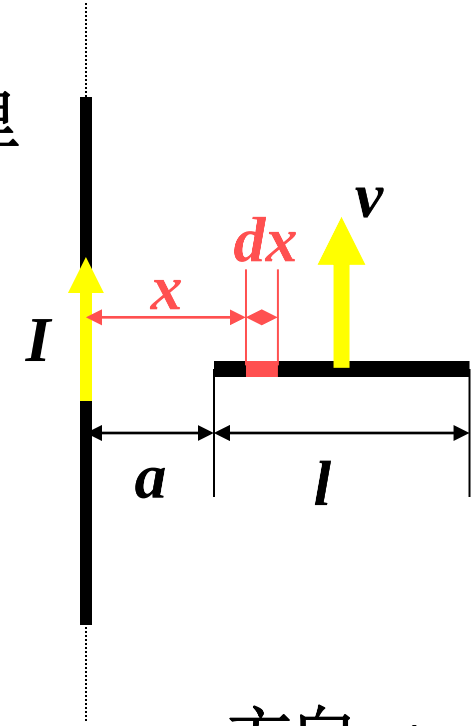
▲非匀强磁场中

例、$I=10A, l=0.2m, a=0.1m, v=2.0m/s$,匀速运动,两导线在同一平面内

求: 金属棒中的动生电动势?

解:

$$B = \frac{u_0 I}{2\pi x}$$ 方向：垂直纸面向里



距导线x处取一长度元dx,则

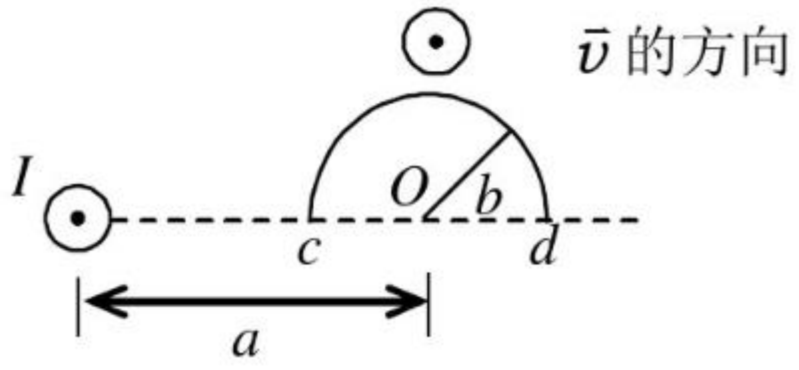
$$d\xi = Bvdx$$

$$= \frac{u_0 I}{2\pi x} \cdot vdx$$

方向: ←

$$\xi = \int d\xi = \frac{u_0 Iv}{2\pi} \int_a^{a+l} \frac{1}{x} dx = \frac{u_0 Iv}{2\pi} ln \frac{a+l}{a} = \cdots$$

★ 讨论：



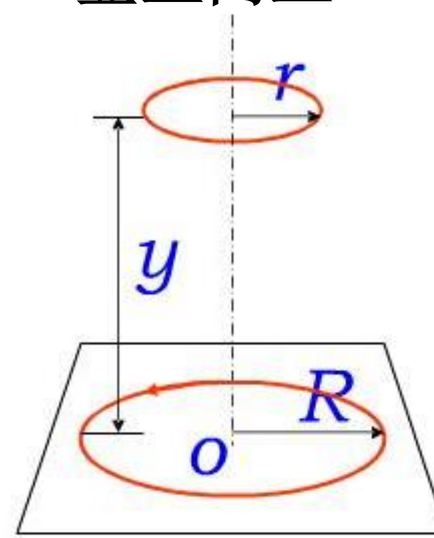
$$\varepsilon = \frac{u_0 I v}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a-b}$$

例、两个同轴的导体回路，小回路在大回路上面距离*y*处，大回路中电流为*I*，如图所示。*y*远大于大回路的半径R，因此大回路内电流产生的磁场在小回路所包围面积πr^2内可近似看做是均匀的。假设小回路以$v=dy/dt$运动。求：（1）通过小回路的磁通量Φ和*y*之间的关系；（2）小回路内产生的感应电动势？

解：(1)y>>R

$$B=\frac{u_0 IR^2}{2(y^2+R^2)^{3/2}}\approx\frac{u_0 IR^2}{2y^3}$$

竖直向上



$$\Phi=BS=\frac{u_0 IR^2}{2y^3}\pi r^2=\frac{u_0 IR^2\pi r^2}{2y^3}$$

(2) $$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{u_0 IR^2\pi r^2}{2}\frac{d\left(1/y^3\right)}{dt}$$

$$=\frac{3u_0 IR^2\pi r^2}{2y^4}\frac{dy}{dt}=\frac{3}{2}\frac{u_0 IR^2\pi r^2}{y^4}v$$

▲ 求动生电动势的两种方法：

1. 用法拉第电磁感应定律：

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

（假想回路部分不能有感应电动势）

2. 利用公式：

$$\varepsilon = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

二. 感生电动势

在变化的磁场中,导体（不动）内产生的感应电动势

根据法拉第电磁感应定律,可知

$$\xi = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\int \vec{B}\cdot d\vec{S}}{dt} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

上式表明感生电动势是变化磁场本身引起的。

麦克斯韦提出

感生电场E_r
(涡旋电场)　　变化的磁场在其周围空间激发一种新的电场

感生电场的电场线是闭合的　　感生电场不是保守场

当变化的磁场中有导体回路时：自由电子受感生电场的作用而产生感生电动势。所以：产生感生电动势的原因为非静电场E_r。

由电动势定义，感生电动势为：

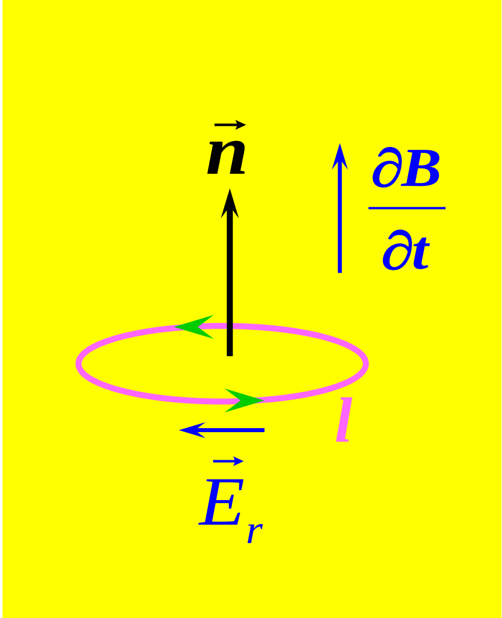
$$\varepsilon = \oint_l \vec{E}_r \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

环流：

$$\oint \vec{E}_r \cdot d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

由于磁场的变化，穿过空间某一闭合回路所包围面积的磁通量发生变化，那么此闭合回路上的感生电动势总是等于感生电场沿该闭合回路的环流。

环流:　$\oint \vec{E}_r \cdot d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$



注意:

① 感生电场的环流不为零，说明感生电场不是保守场，其电场线为闭合曲线。

② 式中“−”号说明$\vec{E}_r$和$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$的方向关系符合楞次定律。

▲由感生电场的环流可知，感生电场的方向与感生电动势同向。

（如图磁场增加）

③ 感生电场具有某种对称性才有可能计算出来。

▲变化磁场中感生电场在一段导体*ab*两端上的感生电动势：

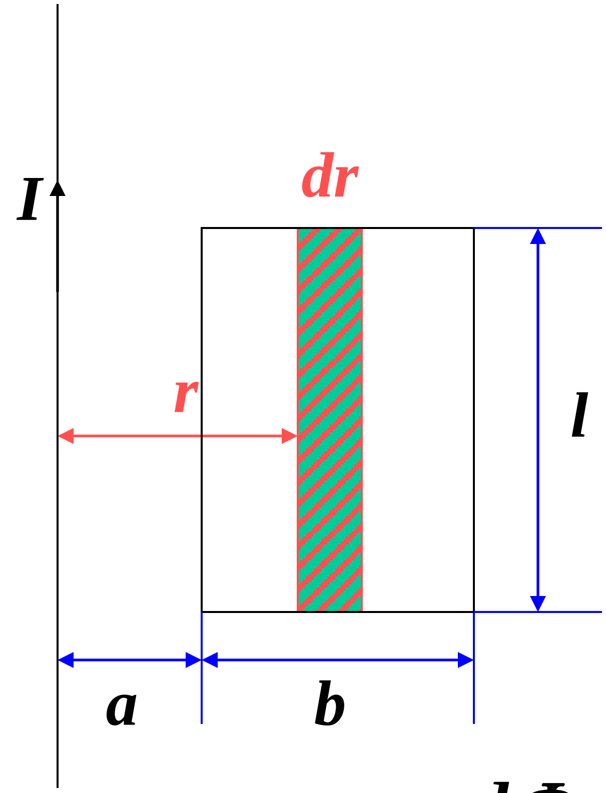
$$\varepsilon = \int_a^b \vec{E}_r \cdot d\vec{l}$$

例、如图 $I=20\sin(10\pi t)$, $a=10cm$, $b=20cm$, $l=25cm$

求:线圈中的感应电动势?

解：距导线r处取一宽为dr的面积元

$$B=\frac{u_0 I}{2\pi r}$$



$$d\Phi=\vec{B}\cdot d\vec{S}=BdS$$

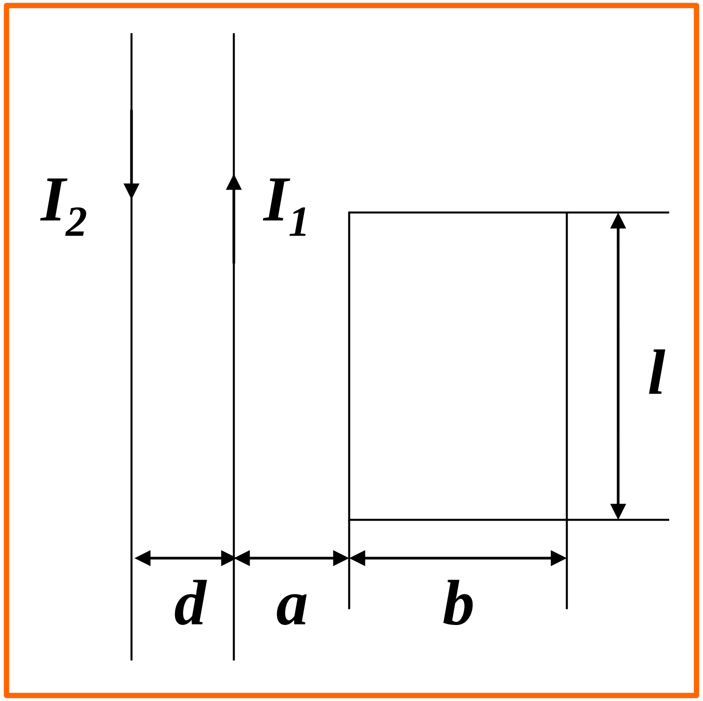
$$=\frac{u_0 I}{2\pi r}\cdot ldr$$

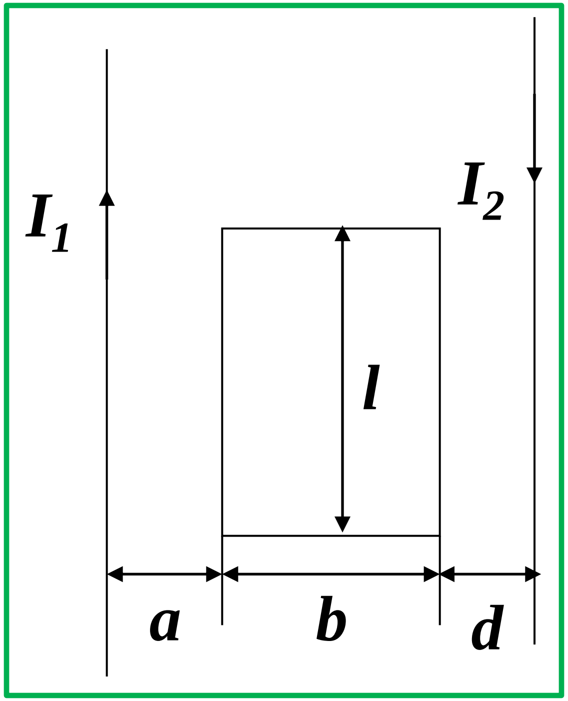
$$\xi=-\frac{d\Phi}{dt}=\cdots$$

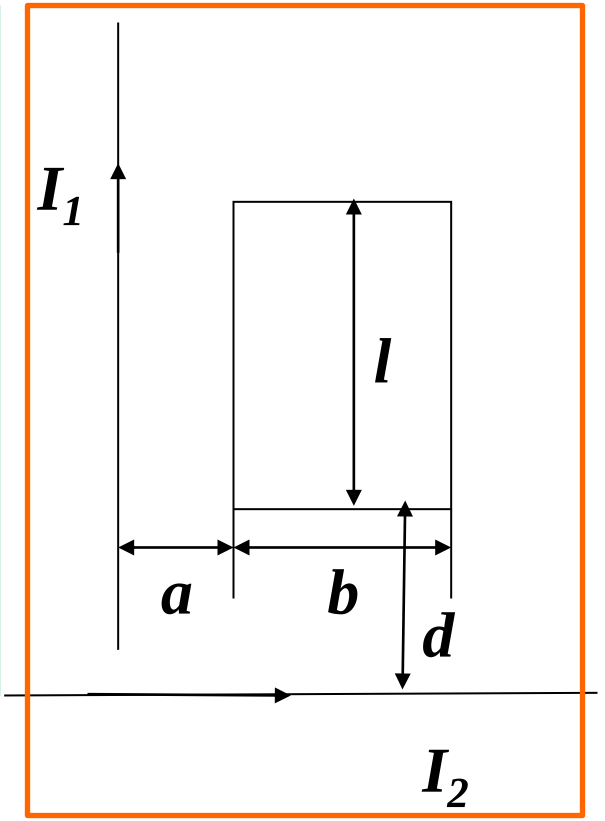
$$\Phi=\int d\Phi=\frac{u_0 Il}{2\pi}\int_a^{a+b}\frac{1}{r}dr=\frac{u_0 Il}{2\pi}ln\frac{a+b}{a}$$

★ 讨论：

$$\Phi = \Phi_1 \pm \Phi_2$$







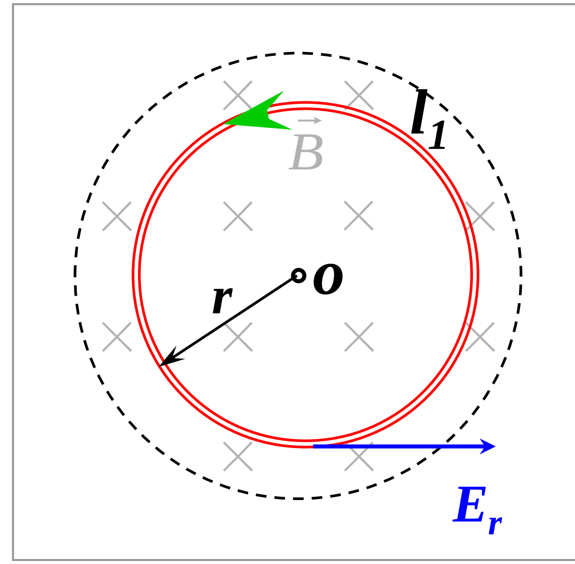
例、半径为R的无限长螺线管内部磁感强度的大小随时间而增加，$dB/dt > 0$。求管内外感生电场的分布。

解：$r < R$

$$\oint \vec{E}_r \cdot d\vec{l} = E_r \cdot 2\pi r = \left|\frac{d\phi}{dt}\right| = \left|\frac{dB}{dt}\pi r^2\right|$$

$$E_r = \frac{r}{2}\frac{dB}{dt}$$

E_r沿逆时针方向。

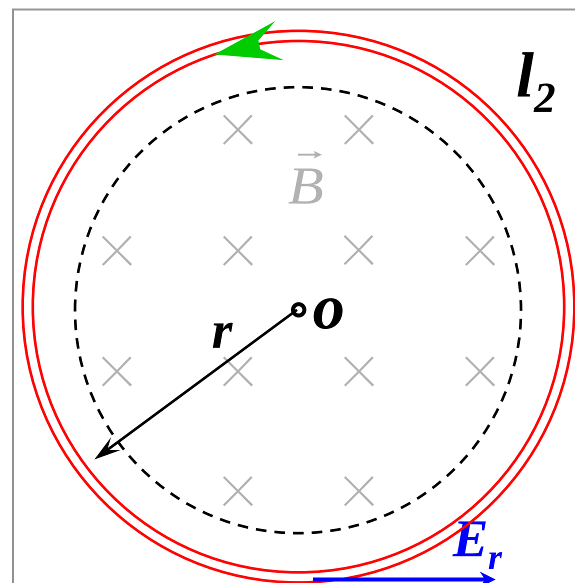


$r > R$

$$\oint \vec{E}_r \cdot d\vec{l} = E_r \cdot 2\pi r = \left|\frac{d\phi}{dt}\right| = \left|\frac{dB}{dt}\pi R^2\right|$$

$$E_r = \frac{R^2}{2r}\frac{dB}{dt}$$

E_r沿逆时针方向。

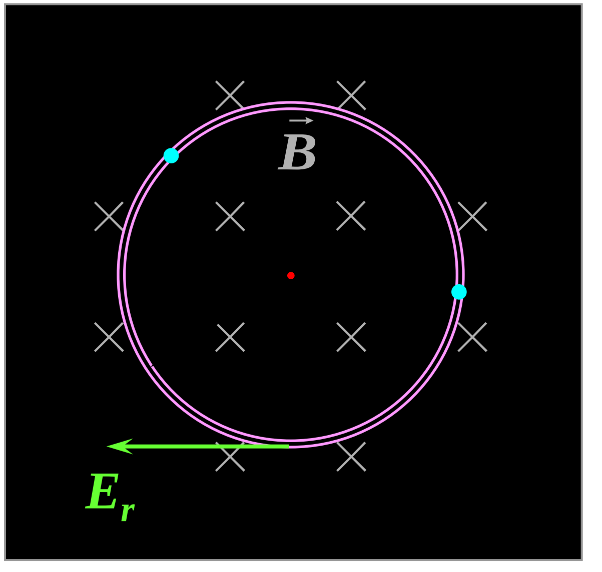


例、在虚线圆内有均匀磁场，$dB/dt = -0.1T/s$。设某时刻 $B=0.5T$。求：(1)在半径 $r=10cm$ 的导体圆环任一点上涡旋电场的大小和方向；(2)若导体环电阻为 2Ω，求环内电流；(3)环上任意两点 a、b 间的电势差；(4)若将环上某点切开并稍许分开，求两端间电势差。

解：(1) $$\oint \vec{E}_r \cdot d\vec{l} = E_r \cdot 2\pi r = \left|\frac{d\Phi}{dt}\right| = \left|\frac{dB}{dt}\pi r^2\right|$$

$$E_r = \frac{r}{2}\frac{dB}{dt} = 5\times 10^{-3}\ V/m$$

E_r 沿顺时针方向。

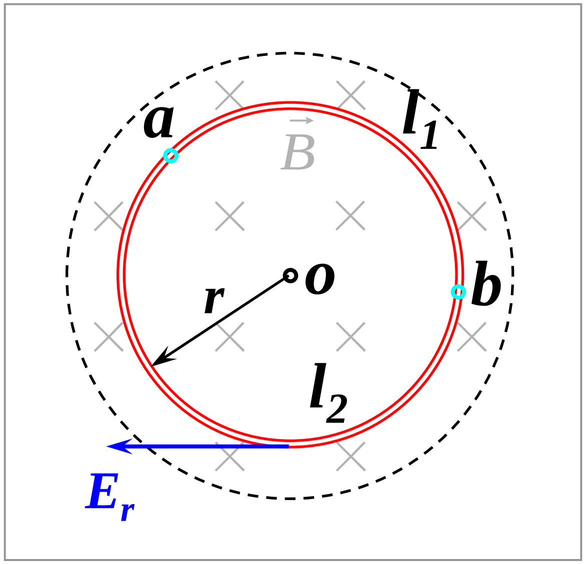


(2) $$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{1}{R}\left|\frac{d\Phi}{dt}\right| = \frac{\pi r^2}{R}\left|\frac{dB}{dt}\right|$$

$$= 1.57\times 10^{-3}\ A$$

注意: a、b间的电势差不等同于a、b间的感应电动势.

(3)将导体环等效为下面的闭合电路。



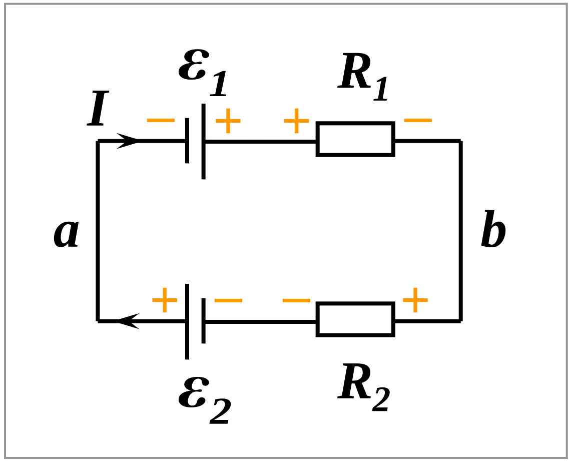
由欧姆定律:

$$I=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{R_1+R_2}$$

$$U_{ba}=\varepsilon_1-IR_1=\varepsilon_1-\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{R_1+R_2}R_1$$

$$=\frac{R_2\varepsilon_1-R_1\varepsilon_2}{R_1+R_2}$$

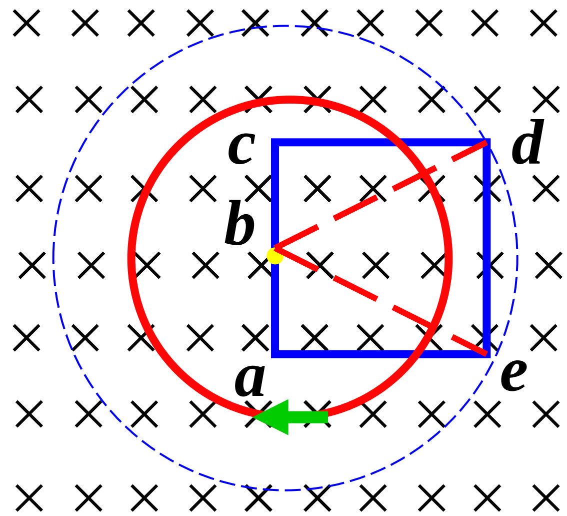
$$\because \quad R_2=\frac{l_2}{l_1}R_1\,, \quad \varepsilon_2=\frac{l_2}{l_1}\varepsilon_1$$



代入上式得: $U_{ab}=0$

(4) $U=2\pi r\cdot E_r=\varepsilon=3.14\times10^{-3}\ V$

例、边长l=20cm的正方形导体回路，放在虚线圆内的均匀磁场中，$dB/dt = -0.1T/s$。其ac边沿着直径，b点在场的中心，求各边内感应电动势。



变化磁场中一段导线中感生电动势

$$\varepsilon = \int \vec{E}_r \cdot d\vec{l}$$

ac段： E与dl处处垂直

$$\varepsilon_{ac} = \int \vec{E}_r \cdot d\vec{l} = 0$$

cd、de、ea段：

通过补线组闭合回路求解

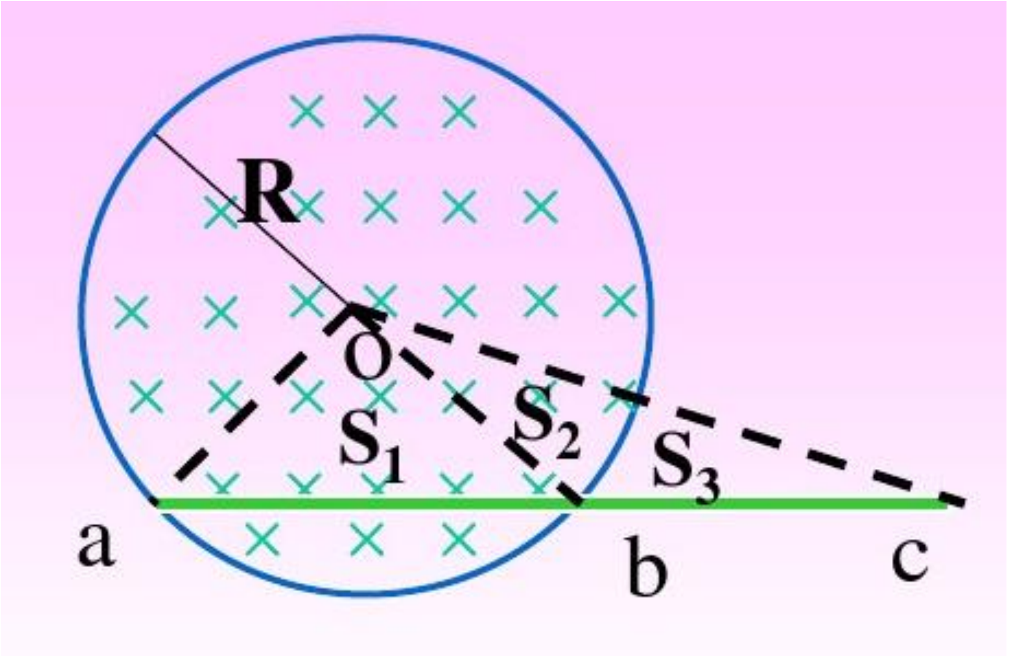
$$\varepsilon_{bc} = \int \vec{E}_r \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\varepsilon_{bd} = \int \vec{E}_r \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\varepsilon_{cd} = \varepsilon_{bcdb} = -\frac{d\Phi_{bcdb}}{dt}$$

……

★ 讨论：



▲ 求感生电动势的两种方法：

1. 用法拉第电磁感应定律：

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

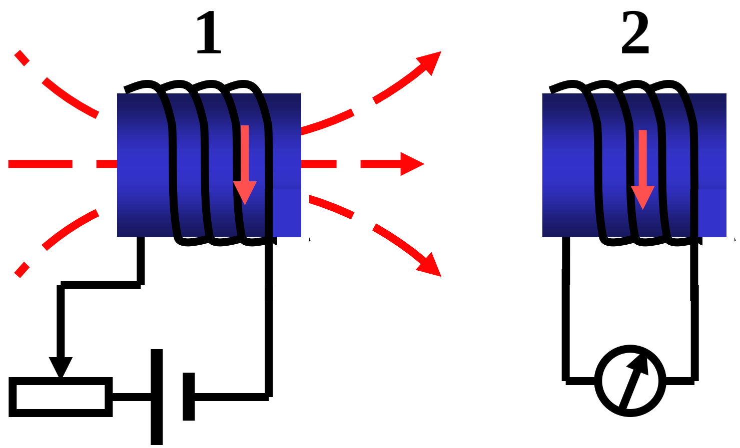
（假想回路部分不能有感应电动势）

2. 利用公式：

$$\varepsilon = \int \vec{E}_r \cdot d\vec{l}$$

12.4 互感和自感

一. 互感



当两个线圈中,任一线圈的电流变化,在另一个线圈中就会产生感应电动势.

与两线圈的形状,大小,匝数及相对位置有关,与电流无关.

$$M=\frac{\Phi_{21}}{I_1}=\frac{\Phi_{12}}{I_2}$$

单位: 亨利 (H) $1H=1Wb/A=1V\cdot s/A$

▲线圈中的感应电动势

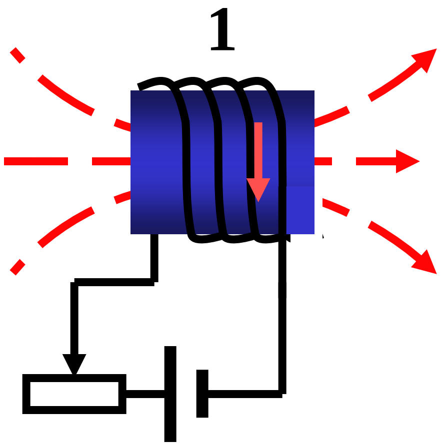
线圈2中的感应电动势

$$\xi_2 = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt}$$

线圈1中的感应电动势

$$\xi_1 = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -M\frac{dI_2}{dt}$$

二. 自感



当线圈中的电流变化时,其激发的磁场穿过自身的磁通量将发生改变,线圈中就会产生感应电动势.

与线圈本身的形状,大小,匝数有关,与电流无关.

$$L = \frac{\Phi}{I}$$

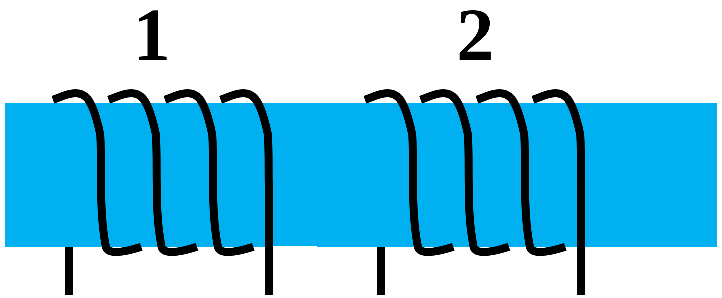
▲线圈中的感应电动势

$$\xi = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

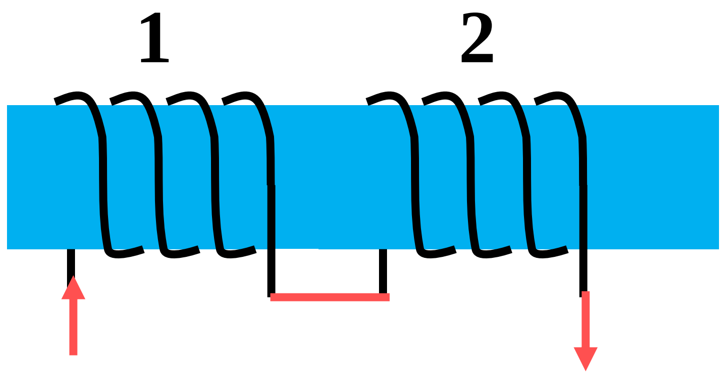
负号表示自感电动势反抗自身电流的变化.

三. 两串联线圈的总自感

两线圈中的电流相等



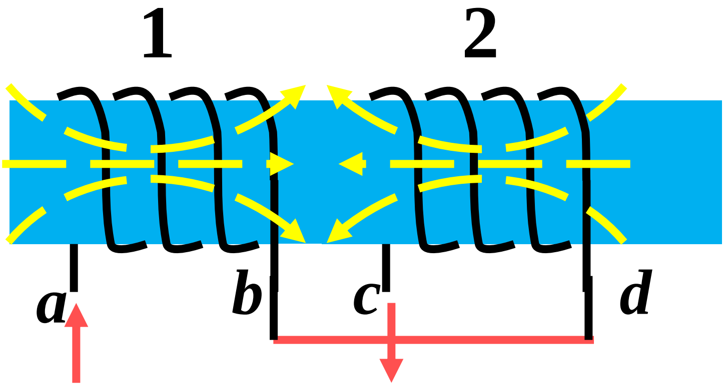
1. 顺接



磁场加强

$$L = -\frac{\xi}{dI/dt} = L_1 + L_2 + 2M$$

2. 反接



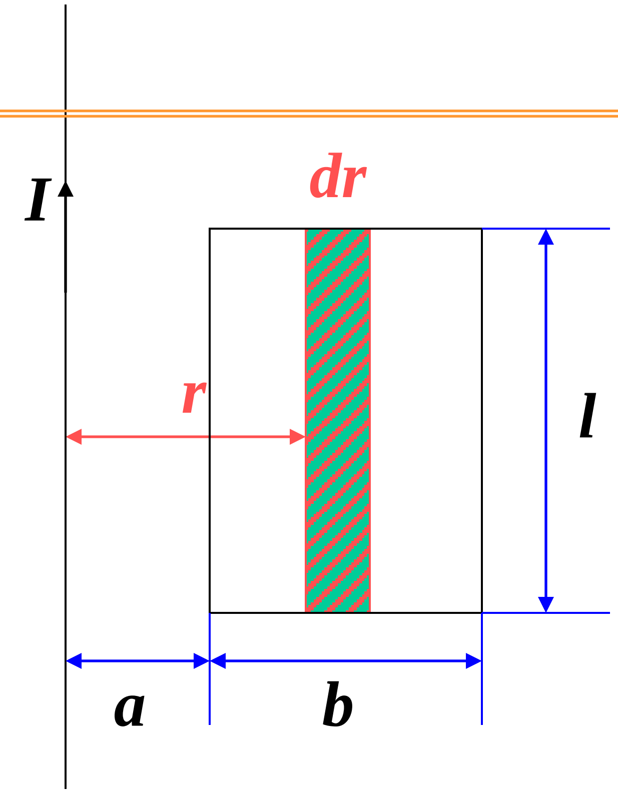
磁场减弱

$$L = -\frac{\xi}{dI/dt} = L_1 + L_2 - 2M$$

例、如图 I, a, b, l

求:线圈中的互感?

解:距导线 r 处取一宽为 dr 的面积元



$$B = \frac{u_0 I}{2\pi r}$$

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = BdS$$

$$= \frac{u_0 I}{2\pi r} \cdot ldr$$

$$M = \frac{\Phi}{I} = \cdots$$

$$\Phi = \int d\Phi = \frac{u_0 Il}{2\pi} \int_a^{a+b} \frac{1}{r} dr = \frac{u_0 Il}{2\pi} ln \frac{a+b}{a}$$

例、截面积为S，平均周长为 l 的密绕螺线环，初级绕组N_1匝，次级绕组N_2匝。求：(1)每一线圈的自感系数；(2)两组线圈间的互感系数； (3) 自感系数与互感系数的关系。

---

(1) 设线圈1中有电流I_1，则环内磁感强度为：

$$B_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l} I_1$$

通过线圈1的磁通量：$\Phi_1 = N_1 B_1 S = \mu_0 \frac{N_1^2}{l} S I_1$

所以：$$\boxed{L_1 = \frac{\Phi_1}{I_1} = \mu_0 \frac{N_1^2}{l} S = \mu_0 n_1^2 V}$$

$$n = \frac{N}{l}, \quad V = lS$$

同理：$$L_2 = \mu_0 \frac{N_2^2}{l} S = \mu_0 n_2^2 V$$

长直密绕螺线管的自感系数结果同上。

(2) 设线圈*1*中有电流I_1，则穿过线圈2的磁通量为：

$$\Phi_{21} = N_2 B_1 S = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S I_1$$

由互感的定义：$\boxed{M = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S}$

(3) 由*(1)*和*(2)*的结果： $L_1 L_2 = (\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S)^2 = M^2$

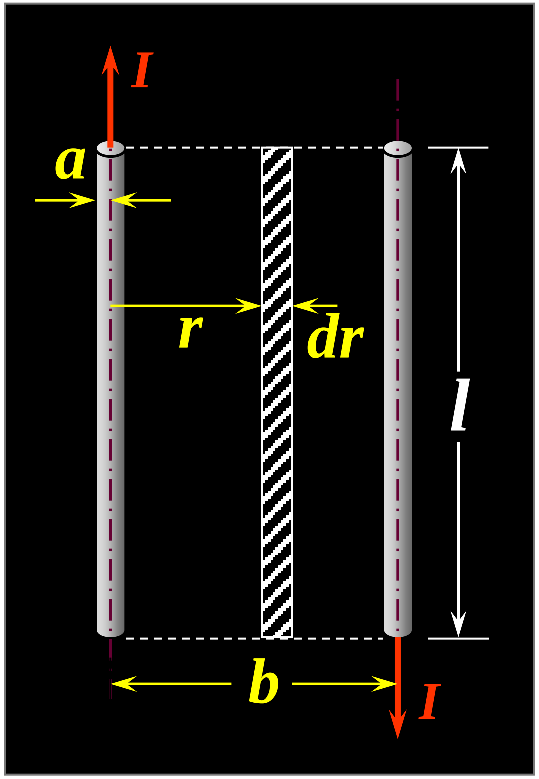
即： $\boxed{M = \sqrt{L_1 L_2}}$

上式为“完全耦合”的结果，一般情况下：

$$\boxed{M = K\sqrt{L_1 L_2}}$$

*K*称为两线圈的“耦合系数”。

例、两根平行长直导线，横截面半径都是a，中心相距 b，属于同一回路。设两导线内的磁通量可忽略不计，求这对导线长为 l 一段的自感 L。



一根导线产生的磁感强度：$B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

取图示的面积元：

$$d\Phi_1=\vec{B}\cdot d\vec{S}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}l dr$$

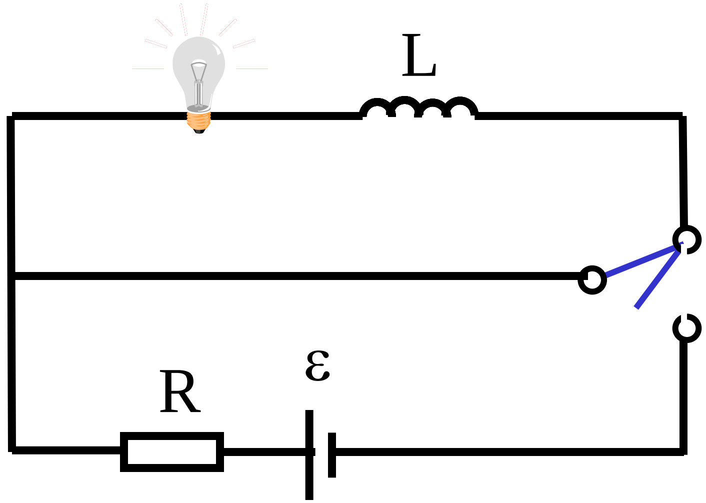
通过长为 l 一段内的磁通量：

$$\Phi=2\times\Phi_1=\frac{\mu_0 Il}{\pi}\int_a^{b-a}\frac{dr}{r}=\frac{\mu_0 Il}{\pi}\ln\frac{b-a}{a}$$

$$\therefore\quad L=\frac{\Phi}{I}=\frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{b-a}{a}$$

12.5 磁 场 能 量

一. 自感磁能



线圈中储有能量

$$W_{自} = \int_0^I dW_{自} = \int_0^I Lidi = \frac{1}{2} LI^2$$

三. 磁场能量

电流激发磁场

在线圈中建立电流I的过程中线圈储存的能量即磁场的能量

四. 磁场能量密度

单位体积内的磁能

$$\omega = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{u_0}$$

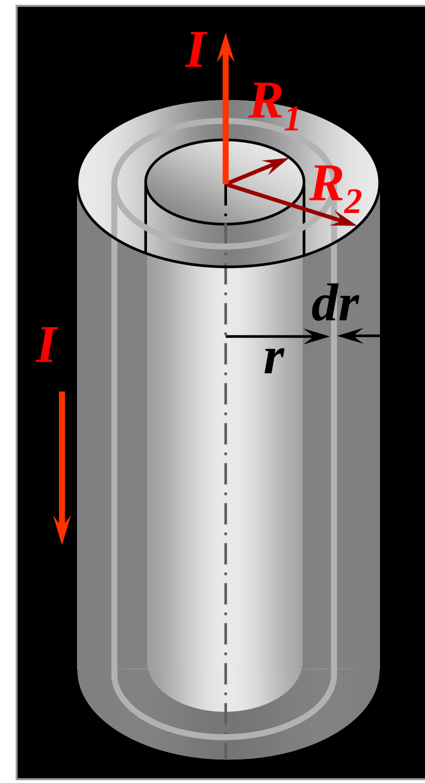
$$W = \int_V \omega dV = \frac{1}{2}\int_V \frac{B^2}{u_0} dV$$

▲ 可用来计算自感系数

例、用磁能概念，求同轴电缆单位长度的自感系数。

$$\oint \vec{B}\cdot dl = B2\pi r = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad w_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}$$



取单位长度同轴圆柱薄层。

$$dW_m = w_m dV = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi r} dr$$

总磁能： $$W_m = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

与 $W_{自} = \frac{1}{2}LI^2$ 比较： $$L = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

例、直径$d=0.254cm$, $I=10A$的长直铜导线，电阻率$\rho=1.7\times10^{-8}\Omega m$。求：(1)导线表面处的磁场能量密度$w_m$；(2)导线表面处的电场能量密度$w_e$。

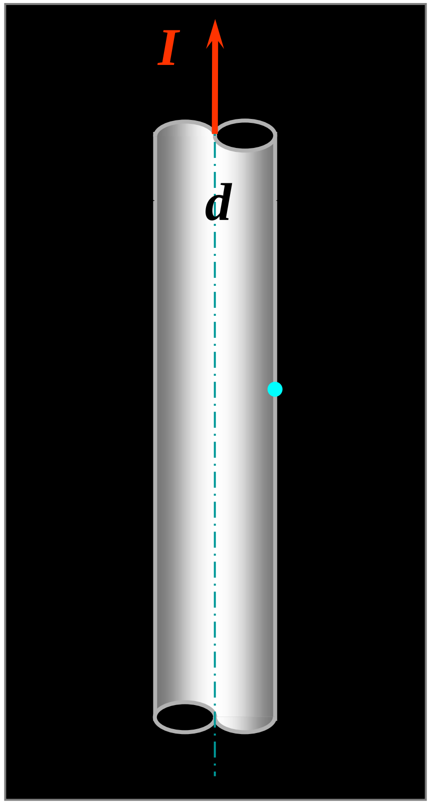
(1)导线表面处的磁感强度：$B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}$

$$w_m=\frac{B^2}{2\mu_0}=\frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2 R^2}\cdot\frac{1}{2\mu_0}=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2 d^2}=0.987\ J/m^3$$

(2)由欧姆定律的微分形式：

$$E=\rho j=\rho\frac{I}{\frac{1}{4}\pi d^2}=\frac{4\rho I}{\pi d^2}$$

$$w_e=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{16\rho^2 I^2}{\pi^2 d^4}=\frac{8\varepsilon_0\rho^2 I^2}{\pi^2 d^4}=4.98\times10^{-15}\ J/m^3$$



★求解*L*的步骤：

▲ 利用$L=\phi/I$ 求解

1. 取一回路，假设电路中通有电流I；

2. 求出电流I在回路面积上的磁场分布；

3. 求出通过此回路的磁通量ϕ；

4. 根据$L=\phi/I$ 求出此电路的自感系数。

▲ 利用磁场能量和自感磁能的关系求解

1.先根据条件*I*，求出磁场分布；

2. 求出磁场能量密度；

3. 求出总磁场能量；

4. 利用 $W_m = \frac{1}{2}LI^2$ 求出*L*。