微分几何习题解答

习题一

1. 设 $\mathcal{T}$ 是 E^3 的一个(双射)变换. 假设对于 E^3 的某个开子集 U, $\mathcal{T}(U)=U$ 并且 $\mathcal{T}$ 保持 U 中任意两点的距离. 证明 $\mathcal{T}$ 是一个合同变换.

证明: 经适当修改, 与定理 2.1 的第二个证明基本相同. (须假设 $\mathcal{T}$ 是 C^2 的.)

2. 设 $\mathbf{a}(t)$ 是连续可微的向量值函数, 证明:

(1) $|\mathbf{a}(t)|$ 是常数当且仅当 $\langle \mathbf{a}(t), \mathbf{a}'(t)\rangle = 0$;

(2) 假设 $|\mathbf{a}(t)| \neq 0$. 则 $\mathbf{a}(t)$ 的方向不变当且仅当 $\mathbf{a}(t)\wedge\mathbf{a}'(t)=\mathbf{0}$.

证明:

(1) $|\mathbf{a}(t)|$=常数$\Leftrightarrow$ $|\mathbf{a}(t)|^2=\langle \mathbf{a}(t),\mathbf{a}(t)\rangle$ =常数$\Leftrightarrow$
$\langle \mathbf{a}(t),\mathbf{a}(t)\rangle' = 2\langle \mathbf{a}(t),\mathbf{a}'(t)\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \mathbf{a}(t),\mathbf{a}'(t)\rangle = 0$.

(2) 由 $|\mathbf{a}(t)|\neq 0$, $\mathbf{a}(t)$ 的方向不变$\Leftrightarrow$ $\mathbf{e}(t) := \frac{\mathbf{a}(t)}{|\mathbf{a}(t)|}$ 是单位常向量$\Leftrightarrow$ $\mathbf{e}'(t)=\mathbf{0}$. 而由 $\langle \mathbf{e}(t),\mathbf{e}(t)\rangle = 1$, 有 $\langle \mathbf{e}(t),\mathbf{e}'(t)\rangle = 0$, 即: $\mathbf{e}(t)\perp\mathbf{e}'(t)$. 因此, $\mathbf{e}'(t)=\mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{e}(t)//\mathbf{e}'(t) \Leftrightarrow \mathbf{0}=\mathbf{e}(t)\wedge\mathbf{e}'(t)=\frac{\mathbf{a}(t)}{|\mathbf{a}(t)|}\wedge(\frac{\mathbf{a}'(t)}{|\mathbf{a}(t)|}+(\frac{1}{|\mathbf{a}(t)|})'\mathbf{a}(t))=\mathbf{a}(t)\wedge\mathbf{a}'(t)$.

3. 验证性质 1.1 和性质 1.2.

性质 1.1 设 $\mathbf{v}_i$ $(1\leq i\leq 4)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的四个向量.

(1) $\mathbf{v}_1\wedge(\mathbf{v}_2\wedge\mathbf{v}_3)=\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_3\rangle\mathbf{v}_2-\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\rangle\mathbf{v}_3$;

(2) Lagrange 恒等式:

$$\langle\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\wedge\mathbf{v}_4\rangle=\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_3\rangle\langle\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_4\rangle-\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_4\rangle\langle\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\rangle;$$

(3) $(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)=(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_1)=(\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$.

证明: 设 $\mathbf{v}_i=(x^i,y^i,z^i)$ $(1\leq i\leq 4)$.

(1) 由定义, 计算有

$$\mathbf{v}_1\wedge(\mathbf{v}_2\wedge\mathbf{v}_3)=(x^1,y^1,z^1)\wedge\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\x^2&y^2&z^2\\x^3&y^3&z^3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\x^1&y^1&z^1\\y^2z^3-y^3z^2&-x^2z^3+x^3z^2&x^2y^3-x^3y^2\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}&=(x^2y^1y^3-x^3y^1y^2+x^2z^1z^3-x^3z^1z^2,-x^1x^2y^3+x^1x^3y^2+y^2z^1z^3-y^3z^1z^2,\\&\qquad -x^1x^2z^3+x^1x^3z^2-y^1y^2z^3+y^1y^3z^2)\\&=((x^1x^3+y^1y^3+z^1z^3)x^2-(x^1x^2+y^1y^2+z^1z^2)x^3,\\&\qquad(x^1x^3+y^1y^3+z^1z^3)y^2-(x^1x^2+y^1y^2+z^1z^2)y^3,\\&\qquad(x^1x^3+y^1y^3+z^1z^3)z^2-(x^1x^2+y^1y^2+z^1z^2)z^3)\\&=\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_3\rangle\mathbf{v}_2-\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\rangle\mathbf{v}_3.\end{aligned}$$

(2) 由定义, 计算有

$$\langle \mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\wedge\mathbf{v}_4\rangle=\langle\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\x^1&y^1&z^1\\x^2&y^2&z^2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\x^3&y^3&z^3\\x^4&y^4&z^4\end{vmatrix}\rangle$$

$$=\langle(y^1z^2-y^2z^1,-x^1z^2+x^2z^3,x^1y^2-x^2y^1),(y^3z^4-y^4z^3,-x^3z^4+x^4z^3,x^3y^4-x^4y^3)\rangle$$
$$=y^1y^3z^2z^4-y^1y^4z^2z^3-y^2y^3z^1z^4+y^2y^4z^1z^4+x^1x^3z^2z^4-x^1x^4z^2z^3$$
$$-x^2x^3z^1z^4+x^2x^4z^1z^3+x^1x^3y^2y^4-x^1x^4y^2y^3-x^2x^3y^1y^4+x^2x^4y^1y^3$$
$$=(x^1x^3+y^1y^3+z^1z^3)(x^2x^4+y^2y^4+z^2z^4)-(x^1x^4+y^1y^4+z^1z^4)(x^2x^3+y^2y^3+z^2z^4)$$
$$=\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_3\rangle\langle\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_4\rangle-\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_4\rangle\langle\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\rangle.$$

(3) 由定义, 计算有

$$(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_1)=\langle\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\wedge\mathbf{v}_1\rangle=\langle(x^2,y^2,z^2),\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\x^3&y^3&z^3\\x^1&y^1&z^1\end{vmatrix}\rangle$$

$$=\langle(x^2,y^2,z^2),(y^3z^1-y^1z^3,-x^3z^1+x^1z^3,x^3y^1-x^1y^3)\rangle$$
$$=x^2y^3z^1-x^2y^1z^3-x^3y^2z^1+x^1y^2z^3+x^3y^1z^2-x^1y^3z^2$$
$$=x^1(y^2z^3-y^3z^2)+y^1(-x^2z^3+x^3z^2)+z^1(x^2y^3-x^3y^2)$$
$$=\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\wedge\mathbf{v}_3\rangle=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3).$$

应用上述等式, 有

$$(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_1)=(\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2).$$

性质 1.2 设 $f=f(x,y,z)$ 是 $\mathbb{R}^3$ (或者它的一个区域)上的一个函数, 而

$$\mathbf{F}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$$

是 $\mathbb{R}^3$ (或者它的一个区域) 上的一个向量场. 则

(1) $\nabla\wedge(\nabla f)=\mathbf{rot}(\mathbf{grad}f)=\mathbf{0}$,

(2) $\langle\nabla,\nabla\wedge\mathbf{F}\rangle=div(\mathbf{rotF})=0$.

证明:

(1) 由定义, 计算得

$$\nabla\wedge(\nabla f)=\nabla\wedge(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\\frac{\partial f}{\partial x}&\frac{\partial f}{\partial y}&\frac{\partial f}{\partial z}\end{vmatrix}$$

$$=(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y},-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x},\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x})=\mathbf{0}.$$

(2) 根据定义, 计算得

$$\langle\nabla,\nabla\wedge\mathbf{F}\rangle=\langle(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}),\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\P&Q&R\end{vmatrix}\rangle$$

$$=\langle(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}),(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},-\frac{\partial R}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial z},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\rangle$$
$$=\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 R}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 Q}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 P}{\partial z\partial y}=0.$$

4. 设 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 是一个正交标架, σ 是 $\{1,2,3\}$ 的一个置换, 证明:

(1) $\{O; e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)}\}$ 是一个正交标架;

(2) $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 与 $\{O; e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)}\}$ 定向相同当且仅当 σ 是偶置换.

证明:

(1) 由于 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 是正交标架, 当 $i \neq j$ 时, $\sigma(i) \neq \sigma(j)$, 故 $\langle \mathbf{e}_{\sigma(i)}, \mathbf{e}_{\sigma(j)} \rangle = 0$; 当 $i = j$ 时, $\sigma(i) = \sigma(j)$, 故 $\langle \mathbf{e}_{\sigma(i)}, \mathbf{e}_{\sigma(j)} \rangle = 1$. 因此, $\{O; e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)}\}$ 是一个正交标架.

(2) $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 与 $\{O; e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)}\}$ 定向相同$\Leftrightarrow 1 = (e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)}) = (-1)^{|\sigma|} \Leftrightarrow |\sigma|$ 是偶数$\Leftrightarrow \sigma$ 是偶置换, 其中 $|\sigma|$ 是置换 σ 的长度.

5. 设 $\mathcal{T}$ 是 E^3 的一个合同变换, $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{w}$ 是 E^3 的两个向量, 求 $(\mathcal{T}\mathbf{v}) \wedge (\mathcal{T}\mathbf{w})$ 与 $\mathcal{T}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$ 的关系.

解: 设 $\mathcal{T} : X \mapsto XT + P$ 是 E^3 的一个合同变换, 其中 T 是一个正交矩阵. 设 $\mathbf{v} = (x^1, x^2, x^3)$, $\mathbf{w} = (y^1, y^2, y^3)$. 记 $T = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix}$. 则有

$$(\mathcal{T}\mathbf{v}) \wedge (\mathcal{T}\mathbf{w}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ (x^1 & x^2 & x^3)T \\ (y^1 & y^2 & y^3)T \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k})T^{-1} \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \end{vmatrix} |T|$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \end{vmatrix} |T| = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} |T| = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} |T|$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \end{vmatrix} T|T| = |T|\mathcal{T}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}).$$

其中 $A_1 = x^2y^3 - x^3y^2$, $A_2 = -x^1y^3 + x^3y^1$, $A_3 = x^1y^2 - x^2y^1$. 因此,

$$(\mathcal{T}\mathbf{v}) \wedge (\mathcal{T}\mathbf{w}) = |T|\mathcal{T}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}).$$

习题二

1. 求下列曲线的弧长与曲率:
(1) $y = ax^2$;
(2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;
(3) $\mathbf{r}(t) = (a\cosh t, b\sinh t)(t \in \mathbb{R})$;
(4) $\mathbf{r}(t) = (t, a\cosh\frac{t}{a})\ (a > 0)(t \in \mathbb{R})$.
解: (应用习题 2.)
(1) 显然, 曲线有参数表达式 $\mathbf{r}(t) = (t, at^2)(t \in \mathbb{R})$. 直接计算, 有

$$\mathbf{r}'(t) = (1, 2at), \quad \mathbf{r}''(t) = (0, 2a), \quad |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{1 + 4a^2t^2}.$$

因此, 弧长(作为 t 的函数) 为(注意 $a \neq 0$.)

$$s = \int_0^t |\mathbf{r}'(u)|du = \int_0^t \sqrt{1 + 4a^2u^2}du = \frac{1}{2}t\sqrt{1 + 4a^2t^2} + \frac{1}{4|a|}\log|2|a|t + \sqrt{1 + 4a^2t^2}|.$$

[上述积分的计算:
令 $\tan\theta = 2|a|u$. 则 $\sqrt{1 + 4a^2u^2} = \sec\theta$. 从而, $\int\sqrt{1 + 4a^2u^2}du = \frac{1}{2|a|}\int\sec^3\theta d\theta$.

$$I := \int\sec^3\theta d\theta = \int(\sec\theta\tan^2\theta + \sec\theta)d\theta = \int\tan\theta d(\sec\theta) + \sec\theta d\theta$$

$$= \tan\theta\sec\theta - \int\sec^3\theta d\theta + \int\sec\theta d\theta = \tan\theta\sec\theta - I + \log|\sec\theta + \tan\theta|.$$

$$= \frac{1}{2}(\tan\theta\sec\theta + \log|\sec\theta + \tan\theta|) + C = \frac{1}{2}(2|a|u\sqrt{1 + 4a^2u^2} + \log|2|a|u + \sqrt{1 + 4a^2u^2}|) + C.$$

因此,

$$\int\sqrt{1 + 4a^2u^2}du = \frac{1}{2}u\sqrt{1 + 4a^2u^2} + \frac{1}{4|a|}\log|2|a|u + \sqrt{1 + 4a^2u^2}| + C.$$

]
由习题 2, 曲率

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2a}{(1 + 4a^2t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

(2) (可以设 $a > 0$ 且 $b > 0$.) 椭圆曲线(去掉点 $(a, 0)$) 的参数表达式为

$$\mathbf{r}(t) = (a\cos t, b\sin t)(0 < t < 2\pi).$$

直接计算, 有

$$\mathbf{r}'(t) = (-a\sin t, b\cos t), \quad \mathbf{r}''(t) = (-a\cos t, -b\sin t).$$

弧长为

$$s = \int_0^t \sqrt{a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u}du = \begin{cases} at, & a = b; \\ \text{第一类椭圆积分}, & a \neq b. \end{cases}$$

曲率

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}.$$

(3) 直接计算, 有

$$\mathbf{r}'(t)=(a\sinh t, b\cosh t),\quad \mathbf{r}''(t)=(a\cosh t, b\sinh t)$$

弧长

$$s=\int_0^t\sqrt{a^2\sinh^2 u+b^2\cosh^2 u}du.$$

曲率

$$\kappa(t)=\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2+y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{ab}{(a^2\sinh^2 t+b^2\cosh^2 t)^{\frac{3}{2}}}.$$

(4) 直接计算, 有

$$\mathbf{r}'(t)=(1,\sinh\frac{t}{a}),\quad \mathbf{r}''(t)=(0,\frac{1}{a}\cosh\frac{t}{a}).$$

弧长

$$s=\int_0^t\sqrt{1+\sinh^2\frac{u}{a}}du=\int_0^t\cosh\frac{u}{a}du=a\sinh\frac{t}{a}.$$

曲率

$$\kappa(t)=\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2+y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\cosh\frac{t}{a}}{a(1+\sinh^2\frac{t}{a})^{\frac{3}{2}}}.$$

2. 设曲线 $\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t))$, 证明它的曲率是

$$\kappa(t)=\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2+y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

证明: 首先,

$$\mathbf{r}'(t)=(x'(t),y'(t)),\quad \mathbf{r}''(t)=(x''(t),y''(t)).$$

设 s 是曲线 $\mathbf{r}(t)$ 的弧长参数. 则 $s=s(t)$ 与 $t=t(s)$ 互为反函数.

$$\frac{ds}{dt}=|\mathbf{r}'(t)|=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2},\quad \frac{dt}{ds}=\frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|}=\frac{1}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}},$$

$$\frac{d^2t}{ds^2}=\frac{d}{dt}(\frac{dt}{ds})\frac{dt}{ds}=-\frac{x'(t)x''(t)+y'(t)y''(t)}{(x'(t)^2+y'(t)^2)^2}.$$

由于平面曲线的 Frenet 标架和曲率与(同向的容许)参数选择无关, 故

$$\mathbf{t}(t):=\mathbf{t}(s(t))=\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\frac{dt}{ds}=(\frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}},\frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}).$$

从而,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{t}}(s(t))&=\mathbf{r}''(t)(\frac{dt}{ds})^2+\mathbf{r}'(t)\frac{d^2t}{ds^2}\\&=(-\frac{y'(t)(x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t))}{(x'(t)^2+y'(t)^2)^2},\frac{x'(t)(x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t))}{(x'(t)^2+y'(t)^2)^2})\end{aligned}$$

$$\mathbf{n}(t):=\mathbf{n}(s(t))=(-\frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}},\frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}).$$

所以,

$$\kappa(t)=\kappa(s(t))=\langle\dot{\mathbf{t}}(s(t)),\mathbf{n}(s(t))\rangle=\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2+y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

注: 任意参数曲线 $\mathbf{r}(t)$ 的 Frenet 标架为$\{\mathbf{r}(t);\mathbf{t}(t),\mathbf{n}(t)\}$, 其中

$$\mathbf{t}(t)=\frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}=(\frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}},\frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}),$$
$$\mathbf{n}(t)==\frac{\mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}''(t)|}=(-\frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}},\frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}).$$

3. 设曲线 C 在极坐标 (r,θ) 下的表示为 $r=f(\theta)$, 证明 C 的曲率是

$$\kappa(\theta)=\frac{f^2(\theta)+2(\frac{df}{d\theta})^2-f(\theta)\frac{d^2f}{d\theta^2}}{(f^2(\theta)+(\frac{df}{d\theta})^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

证明: 曲线 C 有参数表示式 $\mathbf{r}(\theta)=(f(\theta)\cos\theta,f(\theta)\sin\theta)$. 直接计算, 有

$$\mathbf{r}'(\theta)=(f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta,f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta),$$
$$\mathbf{r}''(\theta)=(f''(\theta)\cos\theta-2f'(\theta)\sin\theta-f(\theta)\cos\theta,f''(\theta)\sin\theta+2f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta).$$

由习题 2, 有

$$\kappa(\theta)=\frac{x'(\theta)y''(\theta)-x''(\theta)y'(\theta)}{(x'(\theta)^2+y'(\theta)^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{f^2(\theta)+2f'(\theta)^2-f(\theta)f''(\theta)}{(f^2(\theta)+(f'(\theta))^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

4. 求下列曲线的曲率和挠率:

(1) $\mathbf{r}(t)=(a\cosh t,a\sinh t,bt)(a>0)$;
(2) $\mathbf{r}(t)=(3t-t^2,3t^2,3t+t^2)$;
(3) $\mathbf{r}(t)=(a(1-\sin t),a(1-\cos t),bt)(a>0)$;
(4) $\mathbf{r}(t)=(at,\sqrt{2}a\log t,\frac{a}{t})(a>0)$.

解: (应用习题 5.)

(1) 直接计算, 得

$$\mathbf{r}'(t)=(a\sinh t,a\cosh t,b),$$
$$\mathbf{r}''(t)=(a\cosh t,a\sinh t,0),$$
$$\mathbf{r}'''(t)=(a\sinh t,a\cosh t,0).$$

从而,

$$|\mathbf{r}'(t)|=\sqrt{a^2\cosh 2t+b^2},$$
$$\mathbf{r}'(t)\wedge\mathbf{r}''(t)=(-ab\sinh t,ab\cosh t,-a^2),$$
$$|\mathbf{r}'(t)\wedge\mathbf{r}''(t)|=a\sqrt{b^2\cosh 2t+a^2},$$
$$(\mathbf{r}'(t),\mathbf{r}''(t),\mathbf{r}'''(t))=\langle\mathbf{r}'(t)\wedge\mathbf{r}''(t),\mathbf{r}'''(t)\rangle=a^2b.$$

故曲率

$$\kappa(t)=\frac{|\mathbf{r}'(t)\wedge\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}=\frac{a\sqrt{b^2\cosh 2t+a^2}}{(a^2\cosh 2t+b^2)^{\frac{3}{2}}},$$

挠率

$$\tau(t)=\frac{(\mathbf{r}'(t),\mathbf{r}''(t),\mathbf{r}'''(t))}{|\mathbf{r}'(t)\wedge\mathbf{r}''(t)|^2}=\frac{b}{b^2\cosh 2t+a^2}.$$

(2) 直接计算, 得

$$\mathbf{r}'(t)=(3-2t,6t,3+2t),$$
$$\mathbf{r}''(t)=(-2,6,2),$$

$$\mathbf{r}'''(t) = \mathbf{0}.$$

从而,

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2(4t^2+18t+9)},$$
$$\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t) = (-18, -12, 18),$$
$$|\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t)| = 6\sqrt{22},$$
$$(\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t)) = 0.$$

故曲率

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3} = \frac{3\sqrt{11}}{(4t^2+18t+9)^{\frac{3}{2}}},$$

挠率

$$\tau(t) = \frac{(\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t))}{|\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t)|^2} = 0.$$

(3) 直接计算, 得

$$\mathbf{r}'(t) = (-a\cos t, a\sin t, b),$$
$$\mathbf{r}''(t) = (a\sin t, a\cos t, 0),$$
$$\mathbf{r}'''(t) = (a\cos t, -a\sin t, 0).$$

从而,

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{a^2+b^2},$$
$$\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t) = (-ab\cos t, ab\sin t, -a^2),$$
$$|\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t)| = a\sqrt{a^2+b^2},$$
$$(\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t)) = \langle \mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t) \rangle = -a^2 b.$$

故曲率

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3} = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a}{a^2+b^2},$$

挠率

$$\tau(t) = \frac{(\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t))}{|\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t)|^2} = \frac{-a^2 b}{a^2(a^2+b^2)} = -\frac{b}{a^2+b^2}.$$

(4) (注意到 $t \in (0, +\infty)$). 直接计算, 得

$$\mathbf{r}'(t) = (a, \frac{\sqrt{2}a}{t}, -\frac{a}{t^2}),$$
$$\mathbf{r}''(t) = (0, -\frac{\sqrt{2}a}{t^2}, \frac{2a}{t^3}),$$
$$\mathbf{r}'''(t) = (0, \frac{2\sqrt{2}a}{t^3}, -\frac{6a}{t^4}).$$

从而,

$$|\mathbf{r}'(t)| = \frac{a(t^2+1)}{t^2},$$
$$\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t) = (\frac{\sqrt{2}a^2}{t^4}, -\frac{2a^2}{t^3}, -\frac{\sqrt{2}a^2}{t^2}),$$
$$|\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t)| = \frac{\sqrt{2}a^2(t^2+1)}{t^4},$$

$$(\mathbf{r}'(t),\mathbf{r}''(t),\mathbf{r}'''(t))=\langle\mathbf{r}'(t)\wedge\mathbf{r}''(t),\mathbf{r}'''(t)\rangle=\frac{2\sqrt{2}a^3}{t^6}.$$

故曲率

$$\kappa(t)=\frac{|\mathbf{r}'(t)\wedge\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}=\frac{\sqrt{2}t^2}{a(t^2+1)^2},$$

挠率

$$\tau(t)=\frac{(\mathbf{r}'(t),\mathbf{r}''(t),\mathbf{r}'''(t))}{|\mathbf{r}'(t)\wedge\mathbf{r}''(t)|^2}=\frac{\sqrt{2}t^2}{a(t^2+1)^2}.$$

5. 证明: E^3 中的正则曲线 $\mathbf{r}(t)$ 的曲率和挠率分别是

$$\kappa(t)=\frac{|\mathbf{r}'(t)\wedge\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3},$$

$$\tau(t)=\frac{(\mathbf{r}'(t),\mathbf{r}''(t),\mathbf{r}'''(t))}{|\mathbf{r}'(t)\wedge\mathbf{r}''(t)|^2}.$$

证明: 设 s 是曲线 $\mathbf{r}(t)$ 的弧长参数. 则 $s=s(t)$ 与 $t=t(s)$ 互为反函数. 由于空间曲线的 Frenet 标架和曲率与(容许的)参数选取无关, 故

$$\mathbf{t}(t):=\mathbf{t}(s(t))=\frac{d\mathbf{r}(t(s))}{ds}=\mathbf{r}'(t)\frac{dt}{ds},\quad \frac{dt}{ds}=\frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|}.$$

$$\dot{\mathbf{t}}(s(t))=\mathbf{r}''(t)(\frac{dt}{ds})^2+\mathbf{r}'(t)\frac{d^2t}{ds^2},\quad \mathbf{n}(s(t))=\frac{1}{\kappa(s(t))}\dot{\mathbf{t}}(s(t)),$$

$$\ddot{\mathbf{t}}(s(t))=\mathbf{r}'''(t)(\frac{dt}{ds})^3+3\mathbf{r}''(t)\frac{dt}{ds}\frac{d^2t}{ds^2}+\mathbf{r}'(t)\frac{d^3t}{ds^3},$$

$$\begin{aligned}\mathbf{b}(s(t))&=\mathbf{t}(s(t))\wedge\mathbf{n}(s(t))=\frac{1}{\kappa(s(t))}\mathbf{t}(s(t))\wedge\dot{\mathbf{t}}(s(t))\\&=\frac{1}{\kappa(s(t))}\mathbf{r}'(t)\frac{dt}{ds}\wedge(\mathbf{r}''(t)(\frac{dt}{ds})^2+\mathbf{r}'(t)\frac{d^2t}{ds^2})\\&=\frac{1}{\kappa(s(t))}(\frac{dt}{ds})^3\mathbf{r}'(t)\wedge\mathbf{r}''(t)\end{aligned}$$

从而, 曲率

$$\kappa(t)=\kappa(s(t))=(\frac{dt}{ds})^3|\mathbf{r}'(t)\wedge\mathbf{r}''(t)|=\frac{|\mathbf{r}'(t)\wedge\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}.$$

由于 $\dot{\mathbf{t}}(s)=\kappa(s)\mathbf{n}(s)$, 故

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{t}}(s)&=\dot{\kappa(s)}\mathbf{n}(s)+\kappa(s)\dot{\mathbf{n}}(s)=\dot{\kappa}(s)\mathbf{n}(s)+\kappa(s)(-\kappa(s)\mathbf{t}(s)+\tau(s)\mathbf{b}(s))\\&=-\kappa(s)^2\mathbf{t}(s)+\dot{\kappa}(s)\mathbf{n}(s)+\kappa(s)\tau(s)\mathbf{b}(s).\end{aligned}$$

从而,

$$\begin{aligned}&\kappa(s(t))\tau(s(t))=\langle\ddot{\mathbf{t}}(s(t)),\mathbf{b}(s(t))\rangle\\&=\langle\mathbf{r}'''(t)(\frac{dt}{ds})^3+3\mathbf{r}''(t)\frac{dt}{ds}\frac{d^2t}{ds^2}+\mathbf{r}'(t)\frac{d^3t}{ds^3},\frac{1}{\kappa(s(t))}\mathbf{t}(s(t))\wedge\dot{\mathbf{t}}(s(t))\rangle\\&=\frac{1}{\kappa(s(t))}(\frac{dt}{ds})^6(\mathbf{r}'(t),\mathbf{r}''(t),\mathbf{r}'''(t)).\end{aligned}$$

因此,

$$\tau(t)=\tau(s(t))=\frac{1}{\kappa(t)^2}\frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|^6}(\mathbf{r}'(t),\mathbf{r}''(t),\mathbf{r}'''(t))=\frac{(\mathbf{r}'(t),\mathbf{r}''(t),\mathbf{r}'''(t))}{|\mathbf{r}'(t)\wedge\mathbf{r}''(t)|^2}.$$

注: 任意参数曲线 $\mathbf{r}(t)$ 的 Frenet 标架为 $\{\mathbf{r}(t);\mathbf{t}(t),\mathbf{n}(t),\mathbf{b}(t)\}$, 其中

$$\mathbf{t}(t)=\frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}=(\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}),$$

$$\mathbf{n}(t)=\frac{\mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}''(t)|},$$

$$\mathbf{b}(t)=\frac{\mathbf{r}'(t)\wedge\mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)\wedge\mathbf{r}''(t)|}.$$

6. 证明: 曲线

$$\mathbf{r}(s)=(\frac{(1+s)^{\frac{3}{2}}}{3},\frac{(1-s)^{\frac{3}{2}}}{3},\frac{s}{\sqrt{2}})\ (-1<s<1)$$

以 s 为弧长参数, 并求它的曲率、挠率和 Frenet 标架.

证明: 由于

$$\mathbf{r}'(s)=(\frac{(1+s)^{\frac{1}{s}}}{2},-\frac{(1-s)^{\frac{1}{s}}}{2},\frac{1}{\sqrt{2}})\ \ (-1<s<1),$$

$|\mathbf{r}'(s)|=\sqrt{\frac{1+s}{4}+\frac{1-s}{4}+\frac{1}{2}}=1$. 故 s 是弧长参数. 从而,

$$\mathbf{t}(s)=\mathbf{r}'(s),$$

$$\dot{\mathbf{t}}(s)=(\frac{(1+s)^{-\frac{1}{2}}}{4},-\frac{(1-s)^{-\frac{1}{2}}}{4},0).$$

故曲率 $\kappa(s)=|\dot{\mathbf{t}}(s)|=\sqrt{\frac{1}{8(1-s^2)}}=\frac{\sqrt{2}(1-s^2)^{-\frac{1}{2}}}{4}$. 从而,

$$\mathbf{n}(s)=\frac{1}{\kappa}\dot{\mathbf{t}}(s)=(\frac{\sqrt{2}(1-s)^{\frac{1}{2}}}{2},\frac{\sqrt{2}(1+s)^{\frac{1}{2}}}{2},0),$$

$$\dot{\mathbf{n}}(s)=(-\frac{\sqrt{2}(1-s)^{-\frac{1}{2}}}{4},\frac{\sqrt{2}(1+s)^{-\frac{1}{2}}}{4},0),$$

$$\mathbf{b}(s)=\mathbf{t}(s)\wedge\mathbf{n}(s)=(-\frac{(1+s)^{\frac{1}{2}}}{2},\frac{(1-s)^{\frac{1}{2}}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}).$$

挠率

$$\tau(s)=\langle\dot{\mathbf{n}}(s),\mathbf{b}(s)\rangle(=-\langle\dot{\mathbf{b}}(s),\mathbf{n}(s)\rangle)=\frac{\sqrt{2}(1-s^2)^{-\frac{1}{2}}}{4}.$$

最后, 曲线 $\mathbf{r}(s)$ 的 Frenet 标架为 $\{\mathbf{r}(s);\mathbf{t}(s),\mathbf{n}(s),\mathbf{b}(s)\}$, 其中 $\mathbf{t},\mathbf{n},\mathbf{b}$ 如上.

7. 设曲线

$$\mathbf{r}(t)=\begin{cases}(e^{-\frac{1}{t^2}},t,0), & t<0;\\ (0,0,0)\quad, & t=0;\\ (0,t,e^{-\frac{1}{t^2}}), & t>0.\end{cases}\tag{1}$$

(1) 证明: $\mathbf{r}(\mathbf{t})$ 是一条正则曲线, 且在 $t=0$ 处曲率 $\kappa=0$;

(2) 求 $\mathbf{r}(t)(t\neq 0)$ 时的 Frenet 标架, 并讨论 $t\to 0$ 时, Frenet 标架的极限.

解: (1) 首先注意到对任意正整数 k, $(e^{-\frac{1}{t^2}})^{(k)}=\frac{P_k(t)}{t^{n_k}}e^{-\frac{1}{t^2}}$, 其中 n_k 是正整数, $P_k(t)$ 是关于 t 的一个多项式. 这由归纳法容易得到.

当 $t<0$ 时,

$$\mathbf{r}'(t)=(\frac{2}{t^3}e^{-\frac{1}{t^2}},1,0),\quad |\mathbf{r}'(t)|=(1+\frac{4}{t^6}e^{-\frac{2}{t^2}})^{\frac{1}{2}},$$

$$\mathbf{r}''(t)=(\frac{-6t^2+4}{t^6}e^{-\frac{1}{t^2}},0,0),\quad \mathbf{r}'(t)\wedge\mathbf{r}''(t)=(0,0,\frac{6t^2-4}{t^6}e^{-\frac{1}{t^2}}),$$

$$\mathbf{r}^{(k)}(t)=(\frac{P_k(t)}{t^{n_k}}e^{-\frac{1}{t^2}},0,0)(k\geq 2).$$

由上知, $\mathbf{r}(t)$ $(t<0)$ 是光滑的且 $\mathbf{r}'(t)\neq\mathbf{0}$, 即是正则的.

曲线在 $t=0$ 处的第 k-阶左导数为 $(k\geq 0)$

$$\mathbf{r}^{(k)}(0^-)=\lim_{t\to 0^-}\mathbf{r}^{(k)}(t)=\begin{cases}\quad\mathbf{0}\quad, & k\neq 1;\\ (0,1,0), & k=1.\end{cases}\tag{2}$$

类似地, 当 $t>0$ 时,

$$\mathbf{r}'(t)=(0,1,\frac{2}{t^3}e^{-\frac{1}{t^2}}),,\quad |\mathbf{r}'(t)|=(1+\frac{4}{t^6}e^{-\frac{2}{t^2}})^{\frac{1}{2}},$$

$$\mathbf{r}''(t)=(0,0,\frac{-6t^2+4}{t^6}e^{-\frac{1}{t^2}}),\quad \mathbf{r}'(t)\wedge\mathbf{r}''(t)=(\frac{-6t^2+4}{t^6}e^{-\frac{1}{t^2}},0,0),$$

$$\mathbf{r}^{(k)}(t)=(0,0,\frac{P_k(t)}{t^{n_k}}e^{-\frac{1}{t^2}})(k\geq 2).$$

故 $\mathbf{r}(t)$ $(t>0)$ 是正则的.

曲线在 $t=0$ 处的第 k-阶右导数为 $(k\geq 0,\ \mathbf{r}^{(0)}=\mathbf{r})$

$$\mathbf{r}^{(k)}(0^+)=\lim_{t\to 0^+}\mathbf{r}^{(k)}(t)=\begin{cases}\quad\mathbf{0}\quad, & k\neq 1;\\ (0,1,0), & k=1.\end{cases}\tag{3}$$

$$=\mathbf{r}^{(k)}(0^-).$$

因此, 曲线在 $t=0$ 处也是正则的. 综上, 曲线 $\mathbf{r}(t)$ $(t\in\mathbb{R})$ 是正则的. 从而, 其曲率(定义在 $\mathbb{R}$ 上)是光滑的.

由习题 5, 曲线 $\mathbf{r}(t)$ $(t\neq 0)$ 的曲率为

$$\kappa(t)=\frac{|\mathbf{r}'(t)\wedge\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}=\frac{|6t^2-4|e^{-\frac{1}{t^2}}}{t^6(1+\frac{4}{t^6}e^{-\frac{2}{t^2}})^{\frac{3}{2}}}.$$

而 $\kappa(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是光滑的; 特别地, 在 $t=0$ 处是连续的. 故有

$$\kappa(0)=\lim_{t\to 0}\kappa(t)=\lim_{t\to 0}\frac{|6t^2-4|e^{-\frac{1}{t^2}}}{t^6(1+\frac{4}{t^6}e^{-\frac{2}{t^2}})^{\frac{3}{2}}}=0.$$

(2) 由习题 5 后面的注, 曲线 $\mathbf{r}(t)(t\neq 0)$ 的 Frenet 标架为 $\{\mathbf{r}(t);\mathbf{t}(t),\mathbf{n}(t),\mathbf{b}(t)\}$, 其中

$$\mathbf{t}(t)=\frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}=\begin{cases}(\dfrac{\frac{2}{t^3}e^{-\frac{1}{t^2}}}{(1+\frac{4}{t^6}e^{-\frac{2}{t^2}})^{\frac{1}{2}}},\dfrac{1}{(1+\frac{4}{t^6}e^{-\frac{2}{t^2}})^{\frac{1}{2}}},0), & t<0;\\ (0,\dfrac{1}{(1+\frac{4}{t^6}e^{-\frac{2}{t^2}})^{\frac{1}{2}}},\dfrac{\frac{2}{t^3}e^{-\frac{1}{t^2}}}{(1+\frac{4}{t^6}e^{-\frac{2}{t^2}})^{\frac{1}{2}}}), & t>0.\end{cases}\tag{4}$$

$$\mathbf{n}(t)=\begin{cases}(\dfrac{\mathrm{sgn}(-6t^2+4)}{(1+\frac{4}{t^6}e^{-\frac{2}{t^2}})^{\frac{1}{2}}},\dfrac{2\mathrm{sgn}(6t^2-4)e^{-\frac{1}{t^2}}}{t^3(1+\frac{4}{t^6}e^{-\frac{2}{t^2}})^{\frac{1}{2}}},0), & t<0;\\ (0,\dfrac{2\mathrm{sgn}(6t^2-4)e^{-\frac{1}{t^2}}}{t^3(1+\frac{4}{t^6}e^{-\frac{2}{t^2}})^{\frac{1}{2}}},0),\dfrac{\mathrm{sgn}(-6t^2+4)}{(1+\frac{4}{t^6}e^{-\frac{2}{t^2}})^{\frac{1}{2}}}), & t>0.\end{cases}\tag{5}$$

$$\mathbf{b}(t)=\mathbf{t}(t)\wedge\mathbf{n}(t)=\begin{cases}(0,0,-1), & t<0;\\ (1,0,0), & t>0.\end{cases}\tag{6}$$

故当 $t\to 0^-$ 时, 曲线的 Frenet 标架为 $\{\mathbf{r}(0^-)=\mathbf{0};\mathbf{t}(0^-),\mathbf{n}(0^-),\mathbf{b}(0^-)\}$, 其中

$$\mathbf{t}(0^-)=(0,1,0),\quad \mathbf{n}(0^-)=(1,0,0),\quad \mathbf{b}(0^-)=(0,0,-1).$$

而当 $t\to 0^+$ 时, 曲线的 Frenet 标架为 $\{\mathbf{r}(0^+)=\mathbf{0};\mathbf{t}(0^+),\mathbf{n}(0^+),\mathbf{b}(0^+)\}$, 其中

$$\mathbf{t}(0^+)=(0,1,0),\quad \mathbf{n}(0^+)=(0,0,1),\quad \mathbf{b}(0^+)=(1,0,0).$$

因此, 当 $t\to 0$ 时, 曲线的 Frenet 标架的极限不存在(左、右极限存在但不相等).

注: 从上面可以看到, 正则曲线在曲率为 0 的点处, Frenet 标架的极限未必存在.

8. 设平面正则曲线 $C:\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ 不过点 P_0, 而 $\mathbf{r}(t_0)$ 是 C 与 P_0 距离最近的点, 证明: 向量 $\mathbf{r}(t_0)-\overrightarrow{OP_0}$ 与 $\mathbf{r}'(t_0)$ 垂直.

证明: 设 $\mathbf{p}_0$ 是 P_0 的位置向量. 由假设, $\mathbf{r}(t_0)$ 是距离函数 $d(\mathbf{r}(t),\mathbf{p}_0)$ 的最小值点, 也是极小值点. 从而, $\mathbf{r}(t_0)$ 是 $d^2(\mathbf{r}(t),\mathbf{p}_0)=\langle\mathbf{r}(t)-\mathbf{p}_0,\mathbf{r}(t)-\mathbf{p}_0\rangle$ 的极小值点. 故 $d^2(\mathbf{r}(t),\mathbf{p}_0)$ 在此点的导数为 0, 即: $(d^2(\mathbf{r}(t),\mathbf{p}_0))'(t_0)=2\langle\mathbf{r}'(t_0),\mathbf{r}(t_0)-\mathbf{p}_0\rangle=0$. 从而, $\mathbf{r}(t_0)-\mathbf{p}_0\perp\mathbf{r}'(t_0)$.

9. (1) 设 E^3 中曲线 C 的所有切线过一个定点, 证明 C 是直线.

(2) 证明: 所有主法线过定点的曲线是圆.

证明: (1) 设 P_0 是弧长参数曲线 $C:\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$ 的切线过的定点, 其位置向量为 $\mathbf{p}_0$.

方法一:

由假设,

$$\mathbf{r}(s)-\mathbf{p}_0=\lambda(s)\mathbf{t}(s),$$

其中 $\lambda(s)=\langle\mathbf{r}(s)-\mathbf{p}_0,\mathbf{t}(s)\rangle$ 是一个光滑函数. 对上式两边求导, 有

$$\mathbf{t}(s)=\lambda(s)'\mathbf{t}(s)+\lambda(s)\dot{\mathbf{t}}(s)=\lambda(s)'\mathbf{t}(s)+\lambda(s)\kappa(s)\mathbf{n}(s).$$

由于 $\mathbf{t}(s),\mathbf{n}(s)$ 处处线性无关, 有

$$\lambda(s)'=1,\quad \lambda(s)\kappa(s)=0.$$

从而, $\lambda(s)$ 不恒为 0. 因此, 由 $\kappa(s)$ 的连续性, 知 $\kappa(s)\equiv 0$. 故, C 是直线.

方法二:

由假设, $\mathbf{r}(s)-\mathbf{p}_0//\mathbf{t}(s)\Leftrightarrow(\mathbf{r}(s)-\mathbf{p}_0)\wedge\mathbf{t}(s)=0$. 若 $\mathbf{p}_0$ 不在 C 上, 则由习题一第 2 题 (2), C 是一条过 P_0 的直线, 矛盾. 因此, P_0 在 C 上. 设 $\mathbf{r}(s_0)=\mathbf{p}_0$. 由习题一第 2 题 (2), $\mathbf{r}(s)(s>s_0)$ 和 $\mathbf{r}(s)(s<s_0)$ 是两条射线. 而 $\mathbf{r}(s)$ 在 $s=s_0$ 处可微, 即: 只有一条切线, 故 C 必然是一条直线.

(2) 设弧长参数曲线 $C:\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$ 的主法线过定点 P_0 (其位置向量为 $\mathbf{p}_0$). 则有(注意: 假设了主法线存在, 故曲率恒不为 0)

$$\mathbf{r}(s)-\mathbf{p}_0=\lambda(s)\mathbf{n}(s),$$

其中 $\lambda(s)=\langle\mathbf{r}(s)-\mathbf{p}_0,\mathbf{n}(s)\rangle$ 是一个光滑函数. 对上式两边求导并应用 Frenet 公式, 有

$$\mathbf{t}(s)=\lambda(s)'\mathbf{n}(s)-\lambda(s)\kappa(s)\mathbf{t}(s)+\lambda(s)\tau(s)\mathbf{b}(s).$$

由于 $\mathbf{t}(s),\mathbf{n}(s),\mathbf{b}(s)$ 处处线性无关, 有

$$1-\lambda(s)\kappa(s)=0,\quad \lambda(s)'=0,\quad \lambda(s)\tau(s)=0.$$

由 $\lambda(s)'=0$, 知 $\lambda(s)=\lambda$ 是常数. 而由 $1-\lambda(s)\kappa(s)=0$, 有 $\lambda\neq 0$ 且 $\kappa(s)=\frac{1}{\lambda}$ 是常数. 而 $\lambda(s)\tau(s)=0$, 故 $\tau(s)\equiv 0$. 因此, 由定理 3.1 (p.22), C 是平面曲线. 而由 例 2.2 (p.17), 知 C 是圆.

10. 设 $\mathcal{T}(X)=X\mathbf{T}+P$ 是 E^3 的一个合同变换, $\det\mathbf{T}=-1$. $\mathbf{r}(t)$ 是 E^3 的正则曲线. 求曲线 $\widetilde{\mathbf{r}}(t)=\mathcal{T}\circ\mathbf{r}(t)$ 与曲线 $\mathbf{r}(t)$ 的弧长参数、曲率、挠率间的关系.

证明: 设 $\widetilde{s}$ 是 $\widetilde{\mathbf{r}}(t)$ 的弧长参数. 由于 $\mathcal{T}$ 保持距离并且 $\widetilde{\mathbf{r}}'(t)=\mathbf{r}'(t)\mathbf{T}$, 有

$$\frac{d\widetilde{s}}{dt}=|\widetilde{\mathbf{r}}'(t)|=|\mathbf{r}'(t)|=\frac{ds}{dt}.$$

故 $\widetilde{s}-s=$常数, 即: $\mathbf{r}(t)$ 与 $\widetilde{\mathbf{r}}(t)$ 的弧长参数相同. 因此, 下面将 s 看作 $\widetilde{\mathbf{r}}(t)$ 的弧长参数.

弧长参数曲线 $\widetilde{\mathbf{r}}(s)$ 的 Frenet 标架为

$$\widetilde{\mathbf{t}}(s)=\frac{d\widetilde{\mathbf{r}}(s)}{ds}=\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}\mathbf{T}=\mathbf{t}\mathbf{T},$$

$$\frac{d\widetilde{\mathbf{t}}(s)}{ds}=\frac{d\mathbf{t}}{ds}\mathbf{T},$$

因此, $\widetilde{\mathbf{n}}(s)=\mathbf{n}(s)\mathbf{T}$, $\widetilde{\kappa}(s)=\kappa(s)$. 由于 $\det\mathbf{T}=-1$, 有

$$\widetilde{\mathbf{b}}(s)=\widetilde{\mathbf{t}}(s)\wedge\widetilde{\mathbf{n}}(s)=(\mathbf{t}(s)\mathbf{T})\wedge(\mathbf{n}(s)\mathbf{T})=\det\mathbf{T}(\mathbf{t}(s)\wedge\mathbf{n}(s))\mathbf{T}=-\mathbf{b}(s)\mathbf{T}.$$

其中倒数第二个等式应用了习题一, 5 (p.13). 故

$$\widetilde{\tau}(s)=-\langle\dot{\widetilde{\mathbf{b}}}(s),\widetilde{\mathbf{n}}(s)\rangle=-\langle-\dot{\mathbf{b}}(s)\mathbf{T},\mathbf{n}(s)\mathbf{T}\rangle=\langle\dot{\mathbf{b}}(s),\mathbf{n}(s)\rangle=-\tau(s).$$

换回参数 t, 有 $\widetilde{\kappa}(t)=\kappa(t)$, $\widetilde{\tau}(t)=-\tau(t)$.

11. 设弧长参数曲线 $\mathbf{r}(s)$ 的曲线 $\kappa>0$, 挠率 $\tau>0$, $\mathbf{b}(s)$ 是 C 的副法线向量, 定义曲线 $\widetilde{C}$:

$$\widetilde{\mathbf{r}}(s)=\int_0^s\mathbf{b}(u)du.$$

(1) 证明 s 是曲线 $\widetilde{C}$ 的弧长参数且 $\widetilde{\kappa}=\tau$, $\widetilde{\tau}=\kappa$;

(2) 求 $\widetilde{C}$ 的 Frenet 标架.

解: 由于 $|\widetilde{\mathbf{r}}'(s)| = |\mathbf{b}(s)| = 1$, 故 s 是曲线 $\widetilde{C} : \widetilde{\mathbf{r}}(s)$ 的弧长参数. 设曲线 $\widetilde{C}$ 的 Frenet 标架为 $\{\widetilde{\mathbf{r}}(s), \widetilde{\mathbf{t}}(s), \widetilde{\mathbf{n}}(s), \widetilde{\mathbf{b}}(s)\}$. 首先, 有 $\widetilde{\mathbf{t}}(s) = \mathbf{b}(s)$. 由定义及 Frenet 公式, 曲线 $\widetilde{C}$ 的曲率

$$\widetilde{\kappa}(s) = |\dot{\widetilde{\mathbf{t}}}(s)| = |\dot{\mathbf{b}}(s)| = |-\tau(s)\mathbf{n}| = \tau(s).$$

从而, $\widetilde{\mathbf{n}}(s) = -\mathbf{n}(s)$ 且 $\dot{\widetilde{\mathbf{n}}}(s) = -\dot{\mathbf{n}}(s) = \kappa(s)\mathbf{t} - \tau(s)\mathbf{b}(s)$. 因此,

$$\widetilde{\mathbf{b}}(s) = \widetilde{\mathbf{t}}(s) \wedge \widetilde{\mathbf{n}}(s) = -\mathbf{b}(s) \wedge \mathbf{n}(s) = \mathbf{t}(s).$$

故 $\widetilde{C}$ 上每点的 Frenet 标架为 $\{\widetilde{\mathbf{r}}(s), \mathbf{b}(s), -\mathbf{n}(s), \mathbf{t}(s)\}$. 最后, 曲线 $\widetilde{C}$ 的挠率

$$\widetilde{\tau}(s) = \langle \dot{\widetilde{\mathbf{n}}}(s), \widetilde{\mathbf{b}}(s) \rangle = \langle \kappa(s)\mathbf{t}(s) - \tau(s)\mathbf{b}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = \kappa(s).$$

12. 给定弧长参数曲线 $\mathbf{r}(s)$, 它的曲率和挠率分别是 $\kappa = \kappa(s), \tau = \tau(s)$; $\mathbf{r}(s)$ 的单位切向量 $\mathbf{t}(s)$ 可看作单位球面 S^2 上的一条曲线, 称为曲线 $\mathbf{r}(s)$ 的切线像. 证明: 曲线 $\widetilde{\mathbf{r}}(s) := \mathbf{t}(s)$ 的曲率、挠率分别是

$$\widetilde{\kappa}(s) = \sqrt{1 + (\frac{\tau}{\kappa})^2},$$

$$\widetilde{\tau}(s) = \frac{\frac{d}{ds}(\frac{\tau}{\kappa})}{\kappa(1 + (\frac{\tau}{\kappa})^2)}.$$

证明: 由 Frenet 公式, $\widetilde{\mathbf{r}}'(s) = \dot{\mathbf{t}}(s) = \kappa\mathbf{n}$. (故 $|\widetilde{\mathbf{r}}'(s)| = \kappa$, s 未必是曲线 $\widetilde{\mathbf{r}}(s)$ 弧长参数.) 将应用习题 5 计算曲线 $\widetilde{\mathbf{r}}(s)$ 的曲率和挠率. 根据 Frenet 公式,

$$\widetilde{\mathbf{r}}''(s) = \dot{\kappa}\mathbf{n} + \kappa\dot{\mathbf{n}} = -\kappa^2\mathbf{t} + \dot{\kappa}\mathbf{n} + \kappa\tau\mathbf{b},$$

$$\widetilde{\mathbf{r}}'''(s) = -3\kappa\dot{\kappa}\mathbf{t} + (\ddot{\kappa} - \kappa^3 - \kappa\tau^2)\mathbf{n} + (2\dot{\kappa}\tau + \kappa\dot{\tau})\mathbf{b}.$$

从而,

$$\widetilde{\mathbf{r}}'(s) \wedge \widetilde{\mathbf{r}}''(s) = \kappa^2\tau\mathbf{t} + \kappa^3\mathbf{b}, \quad |\widetilde{\mathbf{r}}'(s) \wedge \widetilde{\mathbf{r}}''(s)| = \kappa^2\sqrt{\kappa^2 + \tau^2},$$

由习题 5, 有

$$\widetilde{\kappa}(s) = \frac{|\widetilde{\mathbf{r}}'(s) \wedge \widetilde{\mathbf{r}}''(s)|}{|\widetilde{\mathbf{r}}'(s)|^3} = \frac{\kappa^2\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\kappa^3} = \sqrt{1 + (\frac{\tau}{\kappa})^2}.$$

由于

$$(\widetilde{\mathbf{r}}'(s), \widetilde{\mathbf{r}}''(s), \widetilde{\mathbf{r}}'''(s)) = \kappa^3(2\dot{\kappa}\tau + \kappa\dot{\tau}) - 3\kappa^3\dot{\kappa}\tau = \kappa^3(\dot{\kappa}\tau - \kappa\dot{\tau}),$$

故有

$$\widetilde{\tau}(s) = \frac{(\widetilde{\mathbf{r}}'(s), \widetilde{\mathbf{r}}''(s), \widetilde{\mathbf{r}}'''(s))}{|\widetilde{\mathbf{r}}'(s) \wedge \widetilde{\mathbf{r}}''(s)|^2} = \frac{\kappa^3(\dot{\kappa}\tau - \kappa\dot{\tau})}{\kappa^4(\kappa^2 + \tau^2)} = \frac{\frac{\dot{\kappa}\tau - \kappa\dot{\tau}}{\kappa^2}}{\kappa + \frac{\tau^2}{\kappa}} = \frac{\frac{d}{ds}(\frac{\tau}{\kappa})}{\kappa(1 + (\frac{\tau}{\kappa})^2)}.$$

13. (1) 求曲率 $\kappa(s) = \frac{a}{a^2+s^2}$ (s 为弧长参数) 的平面曲线;

(2) 求曲率 $\kappa(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2-s^2}}$ (s 为弧长参数) 的平面曲线.

解: 一般地, 给定曲率 $\kappa(s)$ (以 s 为弧长参数), 求解平面曲线的步骤如下:

设 $\mathbf{t}(s) = \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = (\frac{dx(s)}{ds}, \frac{dy(s)}{ds}) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$ (根据引理 1.2 (p.156), 总存在这样的 $\theta(s)$且它至少是连续可微的), 则 $\kappa(s) = \langle \dot{\mathbf{t}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \frac{d\theta}{ds}$. 故

$$\theta(s) = \int_0^s \kappa(t)dt + c,$$

其中 c 为常数. 从而,

$$\frac{dx(s)}{ds} = \cos(\int_0^s \kappa(t)dt + c),$$
$$\frac{dy(s)}{ds} = \sin(\int_0^s \kappa(t)dt + c),$$

因此,

$$x(s) = \int_0^s \cos(\int_0^u \kappa(t)dt)du + c) + c_1,$$
$$y(s) = \int_0^s \sin(\int_0^u \kappa(t)dt)du + c) + c_2,$$

其中 c_1, c_2 是常数. 要求的平面曲线为

$$\mathbf{r}(s) = (\int_0^s \cos(\int_0^u \kappa(t)dt)du + c) + c_1, \int_0^s \sin(\int_0^u \kappa(t)dt)du + c) + c_2)$$

[或者, 取 $c = c_1 = c_2 = 0$, 先得到一条曲线

$$\mathbf{r}(s) = (\int_0^s \cos(\int_0^u \kappa(t)dt)du), \int_0^s \sin(\int_0^u \kappa(t)dt)du).$$

然后, 根据平面曲线论基本定理 4.4, 通过平面刚体运动得到所有满足条件的曲线.]

代入上述公式, 得要求的平面曲线($a > 0$):

(1) $\mathbf{r}(s) = (a\log(s + \sqrt{a^2 + s^2}), \sqrt{a^2 + s^2})$ (及其与任意平面刚体运动的合成);

(2) $\mathbf{r}(s) = (\frac{1}{2a}s\sqrt{a^2 - s^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{s}{a}, \frac{s^2}{2a})$ (及其与任意平面刚体运动的合成).

14. 证明: 对 E^3 的弧长参数曲线 $\mathbf{r}(s)$, 有

(1) $(\frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}) = \kappa^2\tau$;

(2) $(\frac{d\mathbf{t}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{t}}{ds^2}, \frac{d^3\mathbf{t}}{ds^3}) = \kappa^3(\kappa\dot{\tau} - \dot{\kappa}\tau) = \kappa^5\frac{d}{ds}(\frac{\tau}{\kappa})$.

证明: (1) 应用 Frenet 公式, 有 $\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{t}$, $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \dot{\mathbf{t}} = \kappa\mathbf{n}$, $\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} = \ddot{\mathbf{t}} = \dot{\kappa}\mathbf{n} + \kappa\dot{\mathbf{n}} = -\kappa^2\mathbf{t} + \dot{\kappa}\mathbf{n} + \kappa\tau\mathbf{b}$, $\frac{d\mathbf{r}}{ds} \wedge \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \kappa\mathbf{b}$. 故

$$(\frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}) = \langle\frac{d\mathbf{r}}{ds} \wedge \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\rangle = \langle\kappa\mathbf{b}, -\kappa^2\mathbf{t} + \dot{\kappa}\mathbf{n} + \kappa\tau\mathbf{b}\rangle = \kappa^2\tau.$$

(2) 由 Frenet 公式, $\frac{d^3\mathbf{t}}{ds^3} = -3\kappa\dot{\kappa}\mathbf{t} + (\ddot{\kappa} - \kappa^3 - \kappa\tau^2)\mathbf{n} + (2\dot{\kappa}\tau + \kappa\dot{\tau})\mathbf{b}$. 而 $\frac{d\mathbf{t}}{ds} \wedge \frac{d^2\mathbf{t}}{ds^2} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \wedge \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} = \kappa^2\tau\mathbf{t} + \kappa^3\mathbf{b}$, 故

$$(\frac{d\mathbf{t}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{t}}{ds^2}, \frac{d^3\mathbf{t}}{ds^3}) = \langle\frac{d\mathbf{t}}{ds} \wedge \frac{d^2\mathbf{t}}{ds^2}, \frac{d^3\mathbf{t}}{ds^3}\rangle = \langle\kappa^2\tau\mathbf{t} + \kappa^3\mathbf{b}, -3\kappa\dot{\kappa}\mathbf{t} + (\ddot{\kappa} - \kappa^3 - \kappa\tau^2)\mathbf{n} + (2\dot{\kappa}\tau + \kappa\dot{\tau})\mathbf{b}\rangle$$
$$= -3\kappa^3\dot{\kappa}\tau + \kappa^3(2\kappa\dot{\tau} + \kappa\dot{\tau}) = \kappa^3(\kappa\dot{\tau} - \dot{\kappa}\tau) = \kappa^5\frac{d}{ds}(\frac{\tau}{\kappa}).$$

15. 证明: 满足条件

$$(\frac{1}{\kappa})^2 + (\frac{1}{\tau}\frac{d}{ds}(\frac{1}{\kappa}))^2 = \text{常数}$$

的弧长参数曲线, 或者是球面曲线, 或者 κ 是常数.

证明: 假设弧长参数曲线 $\mathbf{r}(s)$ 的曲率函数 κ 不是常数. 考虑向量场

$$\mathbf{p}(s) = \mathbf{r}(s) + \frac{1}{\kappa}\mathbf{n} + \frac{1}{\tau}\frac{d}{ds}(\frac{1}{\kappa})\mathbf{b}.$$

求导数, 有

$$\mathbf{p}'(s) = \mathbf{t} + \frac{1}{\kappa}\dot{\mathbf{n}} + (-\frac{\dot\kappa}{\kappa^2})\mathbf{n} + \frac{1}{\tau}\frac{d}{ds}(\frac{1}{\kappa})\dot{\mathbf{b}} + \frac{d}{ds}(\frac{1}{\tau}\frac{d}{ds}(\frac{1}{\kappa}))\mathbf{b}$$
$$= \mathbf{t} - \mathbf{t} + \frac{\tau}{\kappa}\mathbf{n} - \frac{\dot\kappa}{\kappa^2}\mathbf{n} + \frac{\dot\kappa}{\kappa^2}\mathbf{n} + \frac{d}{ds}(\frac{1}{\tau}\frac{d}{ds}(\frac{1}{\kappa}))\mathbf{b} = (\frac{\tau}{\kappa} + \frac{d}{ds}(\frac{1}{\tau}\frac{d}{ds}(\frac{1}{\kappa})))\mathbf{b}.$$

而已知 $(\frac{1}{\kappa})^2 + [\frac{1}{\tau}\frac{d}{ds}(\frac{1}{\kappa})]^2 =$ 常数, 求导数, 得

$$-2\frac{\dot\kappa}{\kappa^3} - 2\frac{\dot\kappa}{\kappa^2\tau}\frac{d}{ds}(\frac{1}{\tau}\frac{d}{ds}(\frac{1}{\kappa})) = 0.$$

由于 κ 不是常数, 故 $\dot\kappa$ 不恒为 0. 由连续性, 得到

$$\frac{\tau}{\kappa} + \frac{d}{ds}(\frac{1}{\tau}\frac{d}{ds}(\frac{1}{\kappa})) \equiv 0.$$

因此, $\mathbf{p}'(s) = 0$. 故 $\mathbf{p}(s)$ 是常向量, 记为 $\mathbf{p}_0$. 而

$$|\mathbf{r}(s) - \mathbf{p}_0|^2 = (\frac{1}{\kappa})^2 + (\frac{1}{\tau}\frac{d}{ds}(\frac{1}{\kappa}))^2 = \text{常数},$$

故曲线 $\mathbf{r}(s)$ 在一个球面上.

注: (1) 设弧长参数曲线 $\mathbf{r}(s)$ 在一个半径为 a 的球面上, 即: $|\mathbf{r}(s) - \mathbf{p}_0|^2 = a^2$ 对某个常向量 $\mathbf{p}_0$. 求导数, 有 $2\langle \mathbf{r}(s) - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}\rangle = 0$. 故 $\mathbf{r}(s) - \mathbf{p}_0 \perp \mathbf{t}$. 因此,

$$\mathbf{r}(s) - \mathbf{p}_0 = \lambda(s)\mathbf{n}(s) + \mu(s)\mathbf{b}(s),$$

其中 $\lambda(s) = \langle \mathbf{r}(s) - \mathbf{p}_0, \mathbf{n}\rangle$, $\mu(s) = \langle \mathbf{r}(s) - \mathbf{p}_0, \mathbf{n}\rangle$ 是光滑函数. 对上式两边求导数, 有

$$\mathbf{t} = -\lambda\kappa\mathbf{t} + (\lambda' - \mu\tau)\mathbf{n} + (\lambda\tau + \mu')\mathbf{b}.$$

故

$$\lambda\kappa = -1,\quad \lambda' - \mu\tau = 0,\quad \lambda\tau + \mu' = 0.$$

因此,

$$\lambda = -\frac{1}{\kappa},\quad \mu = \frac{1}{\tau}\lambda' = -\frac{1}{\tau}\frac{d}{ds}(\frac{1}{\kappa}).$$

所以,

$$\mathbf{r}(s) - \mathbf{p}_0 = -\frac{1}{\kappa}\mathbf{n}(s) - \frac{1}{\tau}\frac{d}{ds}(\frac{1}{\kappa})\mathbf{b}(s).$$

故

$$(\frac{1}{\kappa})^2 + (\frac{1}{\tau}\frac{d}{ds}(\frac{1}{\kappa}))^2 = a^2.$$

这说明: 如果一个弧长参数曲线 $\mathbf{r}(s)$ 的曲率不为常数, 它落在某个球面上的一个充要条件是

$$(\frac{1}{\kappa})^2 + (\frac{1}{\tau}\frac{d}{ds}(\frac{1}{\kappa}))^2 = \text{常数}.$$

(2) 另外的证明方法:

假设 κ 不为常数. 定义曲线

$$\widetilde{\mathbf{r}}(s) := -\frac{1}{\kappa}\mathbf{n} - \frac{1}{\tau}\frac{d}{ds}(\frac{1}{\kappa})\mathbf{b}.$$

根据假设, 这是一个球面曲线. 直接计算并应用假设[参考注 (1)], 有

$$\widetilde{\mathbf{r}}'(s) = \mathbf{t}(s).$$

故 s 是 $\widetilde{\mathbf{r}}(s)$ 的弧长参数且 $\widetilde{\mathbf{r}}(s)$ 的 Frenet 标架为 $\{\widetilde{\mathbf{r}}(s);\mathbf{t},\mathbf{n},\mathbf{b}\}$. 因此,

$$\widetilde{\kappa}(s)=\kappa(s),\quad \widetilde{\tau}(s)=\tau(s).$$

根据曲线论基本定理 4.2 [唯一性], 曲线 $\widetilde{\mathbf{r}}(s)$ 与 $\mathbf{r}(s)$ 只相差一个刚体运动. 故曲线 $\widetilde{\mathbf{r}}(s)$ 也是球面曲线.

16. 设 P_0 是 E^3 中曲线 C 上的点, P 是 C 上 P_0 的邻近点, l 是 P_0 处的切线. 证明:

$$\lim_{P\to P_0}\frac{2d(P,l)}{d^2(P_0,P)}=\kappa(P_0),$$

这里 d 表示 E^3 的距离.

证明: 设 $\mathbf{r}(s)$ 是曲线 C 的弧长参数表达式且 $\mathbf{r}(s_0)=\overrightarrow{OP_0}$.

方法一: (应用 L'Hôpital 法则)

由 L'Hôpital 法则及 Frenet 公式, 有

$$\begin{aligned}\lim_{s\to s_0}\frac{\langle\mathbf{r}(s)-\mathbf{r}(s_0),\mathbf{n}(s_0)\rangle}{|\mathbf{r}(s)-\mathbf{r}(s_0)|^2}&=\lim_{s\to s_0}\frac{\langle\mathbf{t}(s),\mathbf{n}(s_0)\rangle}{2\langle\mathbf{r}(s)-\mathbf{r}(s_0),\mathbf{t}(s)\rangle}\\&=\lim_{s\to s_0}\frac{\kappa(s)\langle\mathbf{n}(s),\mathbf{n}(s_0)\rangle}{2(1+\langle\mathbf{r}(s)-\mathbf{r}(s_0),\dot{\mathbf{t}}(s)\rangle)}=\frac{1}{2}\kappa(s_0).\end{aligned}$$

所以,

$$\lim_{P\to P_0}\frac{2d(P,l)}{d^2(P_0,P)}=\lim_{s\to s_0}\frac{2|\langle\mathbf{r}(s)-\mathbf{r}(s_0),\mathbf{n}(s_0)\rangle|}{|\mathbf{r}(s)-\mathbf{r}(s_0)|^2}=\kappa(s_0)=\kappa(P_0).$$

方法二: (应用 Taylor 展式)

由 Frenet 公式, 曲线 $\mathbf{r}(s)$ 在 s_0 处的 Taylor 展式为

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(s)=\mathbf{r}(s_0)+\mathbf{t}(s_0)((s-s_0)+o(s-s_0)^2)+\mathbf{n}(s_0)(\frac{1}{2}\kappa(s_0)(s-s_0)^2+o(s-s_0)^2)\\+\mathbf{b}(s_0)o(s-s_0)^2.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}d(P,l)=|\langle\mathbf{r}(s)-\mathbf{r}(s_0),\mathbf{n}(s_0)\rangle|=\frac{1}{2}\kappa(s_0)(s-s_0)^2+o(s-s_0)^2,\\d^2(P_0,P)=|\mathbf{r}(s)-\mathbf{r}(s_0)|^2=(s-s_0)^2+o(s-s_0)^2.\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\lim_{P\to P_0}=\frac{2d(P,l)}{d^2(P_0,P)}&=\lim_{s\to s_0}\frac{2|\langle\mathbf{r}(s)-\mathbf{r}(s_0),\mathbf{n}(s_0)\rangle|}{|\mathbf{r}(s)-\mathbf{r}(s_0)|^2}\\&=\lim_{s\to s_0}\frac{2(\frac{1}{2}\kappa(s_0)(s-s_0)^2+o(s-s_0)^2)}{(s-s_0)^2+o(s-s_0)^2}=\kappa(s_0)=\kappa(P_0).\end{aligned}$$

17. 求曲率和挠率满足 $\tau=c\kappa$ (c 为常数, $\kappa>0$) 的曲线.

解: 设要求解的空间曲线的弧长参数式为 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$.

(1) $c=0$ 时, $\tau=0$. 故此时曲线落在某个平面上, 可以应用习题 13 的解中叙述过的一般方法求解. 不过, 需要注意的是, 根据定义, 平面曲线的曲率可以取负值, 与空间曲线的曲率定义略有差别. 需要求解的空间曲线作为平面曲线的曲率为 $\pm\kappa$. 因此, 最后求得两类空间曲线:

$$\mathbf{r}(s)=(\int_0^s\cos(\int_0^u\kappa(t)dt)du+a)+c_1,\int_0^s\sin(\int_0^u\kappa(t)dt)du+a)+c_2),$$

$$\widetilde{\mathbf{r}}(s) = (\int_0^s \cos(\int_0^u \kappa(t)dt)du + a) + c_1, -\int_0^s \sin(\int_0^u \kappa(t)dt)du + a) + c_2).$$

(2) 假设 $c \neq 0$. 由 Frenet 公式, 有

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa\mathbf{n} \\ \dfrac{d\mathbf{n}}{ds} = -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b} \\ \dfrac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau\mathbf{n} \end{cases} \tag{7}$$

作(容许的)参数变换 $\theta(s) = \int_0^s \kappa(t)dt$. 则 $d\theta = \kappa(s)ds$. 方程组 (7) 可以改写为

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{t}(\theta)}{d\theta} = \mathbf{n}(\theta) \\ \dfrac{d\mathbf{n}(\theta)}{d\theta} = -\mathbf{t}(\theta) + c\mathbf{b}(\theta) \\ \dfrac{d\mathbf{b}(\theta)}{d\theta} = -c\mathbf{n}(\theta) \end{cases} \tag{8}$$

由此得到

$$\frac{d^2\mathbf{n}(\theta)}{d\theta^2} = -a^2\mathbf{n}(\theta),$$

其中 $a = \sqrt{1+c^2}$. 由常微分方程理论, 此方程有通解

$$\mathbf{n}(\theta) = \cos a\theta\mathbf{e}_1 + \sin a\theta\mathbf{e}_2,$$

其中 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 是常向量. 从而, 可以解出方程组 (8) 中的第一式, 得

$$\mathbf{t}(\theta) = \frac{1}{a}(\sin a\theta\mathbf{e}_1 - \cos a\theta\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3),$$

其中 $\mathbf{e}_3$ 是常向量. 由方程组 (8) 中的第二式, 有

$$\mathbf{b}(\theta) = -\frac{c}{a}(\sin a\theta\mathbf{e}_1 - \cos a\theta\mathbf{e}_2) + \frac{1}{a}\mathbf{e}_3.$$

由于 $s=0$ 时(即: $\theta(0)=0$ 时), Frenet 标架 $\{\mathbf{r}(0); \mathbf{t}(0), \mathbf{n}(0), \mathbf{b}(0)\}$ 是右手系的且单位正交. 而易知

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}(0) \\ \mathbf{n}(0) \\ \mathbf{b}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{a} & \frac{c}{a} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c}{a} & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$$

其中的三阶矩阵是行列式为 1 的正交矩阵. 因此, 须选取 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 为右手系且单位正交. 最后, 由 $\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = \mathbf{t}(s)$ 得到所要求的弧长参数曲线:

$$\mathbf{r}(\theta) = \frac{1}{a}(\int_0^s \sin(a\theta(t))dt\mathbf{e}_1 - \int_0^s \cos(a\theta(t))dt\mathbf{e}_2 + cs\mathbf{e}_3) + \mathbf{v},$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}(\int_0^s \sin(\sqrt{1+c^2}\int_0^t \kappa(u)du)dt\mathbf{e}_1 - \int_0^s \cos(\sqrt{1+c^2}\int_0^t \kappa(u)du)dt\mathbf{e}_2 + cs\mathbf{e}_3) + \mathbf{v}$$

其中 $\mathbf{v}$ 是常向量.

注: 关键想法: 引入切向量的"转角"参数简化要求解的常微分方程组. 这一点跟平面曲线的情形类似.

18. (1) 设 $\mathbf{r}(t)$ 是平面曲线, 曲率为 $\kappa(t)$, 求曲线 $\widetilde{\mathbf{r}}(t)=\mathbf{r}(-t)$ 的曲率;

(2) 当 $\mathbf{r}(\mathbf{t})$ 是 E^3 的曲线时, 求曲线 $\widetilde{\mathbf{r}}(t)=\mathbf{r}(-t)$ 的曲率和挠率.

解: (1) 设 $\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t))$, 则 $\widetilde{\mathbf{r}}(t)=(\widetilde{x}(t),\widetilde{y}(t))=(-x(-t),-y(-t))$. 从而,

$$\widetilde{\mathbf{r}}'(t)=(\widetilde{x}'(t),\widetilde{y}'(t))=(-x'(-t),-y'(-t)),$$
$$\widetilde{\mathbf{r}}''(t)=(\widetilde{x}''(t),\widetilde{y}''(t))=(x''(-t),y''(-t)).$$

故由习题 2, 有

$$\widetilde{\kappa}(t)=\frac{\widetilde{x}'(t)\widetilde{y}''(t)-\widetilde{x}''(t)\widetilde{y}'(t)}{(\widetilde{x}'(t)^2+\widetilde{y}'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{x'(-t)y''(-t)-x''(-t)y'(-t)}{(x'(-t)^2+y'(-t)^2)^{\frac{3}{2}}}=-\kappa(-t).$$

(2) 由于 $\widetilde{\mathbf{r}}'(t)=-\mathbf{r}'(-t)$, $\widetilde{\mathbf{r}}''(t)=\mathbf{r}''(-t)$, $\widetilde{\mathbf{r}}'''(t)=-\mathbf{r}'''(-t)$, 根据习题 5, 有

$$\widetilde{\kappa}(t)=\frac{|\widetilde{\mathbf{r}}'(t)\wedge\widetilde{\mathbf{r}}''(t)|}{|\widetilde{\mathbf{r}}'(t)|^3}=\frac{|-\mathbf{r}'(-t)\wedge\mathbf{r}''(-t)|}{|-\mathbf{r}'(-t)|^3}=\frac{|\mathbf{r}'(-t)\wedge\mathbf{r}''(-t)|}{|\mathbf{r}'(-t)|^3}=\kappa(-t),$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\tau}(t)&=\frac{(\widetilde{\mathbf{r}}',\widetilde{\mathbf{r}}'',\widetilde{\mathbf{r}}''')}{|\widetilde{\mathbf{r}}'(t)\wedge\widetilde{\mathbf{r}}''(t)|^2}=\frac{(-\mathbf{r}'(-t),\mathbf{r}''(-t),-\mathbf{r}'''(-t))}{|-\mathbf{r}'(-t)\wedge\mathbf{r}''(-t)|^2}\\&=\frac{(\mathbf{r}'(-t),\mathbf{r}''(-t),\mathbf{r}'''(-t))}{|-\mathbf{r}'(-t)\wedge\mathbf{r}''(-t)|^2}=\tau(-t).\end{aligned}$$

19. 求沿弧长参数曲线 $\mathbf{r}(s)$ 的向量场 $\mathbf{v}(s)$, 同时满足以下各式:

$$\dot{\mathbf{t}}(s)=\mathbf{v}(s)\wedge\mathbf{t}(s),$$
$$\dot{\mathbf{n}}(s)=\mathbf{v}(s)\wedge\mathbf{n}(s),$$
$$\dot{\mathbf{b}}(s)=\mathbf{v}(s)\wedge\mathbf{b}(s).$$

解: (提示: 应用性质 1.1 (1), p.4.)

首先, 向量场 $\mathbf{v}=\mathbf{v}(s)$ 可以表示为

$$\mathbf{v}=\langle\mathbf{v},\mathbf{t}\rangle\mathbf{t}+\langle\mathbf{v},\mathbf{n}\rangle\mathbf{n}+\langle\mathbf{v},\mathbf{b}\rangle\mathbf{b}.$$

一方面, 由性质 1.1 (1), 有

$$\mathbf{t}\wedge(\mathbf{v}\wedge\mathbf{n})=\langle\mathbf{t},\mathbf{n}\rangle\mathbf{v}-\langle\mathbf{v},\mathbf{t}\rangle\mathbf{n}=-\langle\mathbf{v},\mathbf{t}\rangle\mathbf{n}.$$

另一方面, 由假设及 Frenet 公式, 得

$$\mathbf{t}\wedge(\mathbf{v}\wedge\mathbf{n})=\mathbf{t}\wedge\dot{\mathbf{n}}=\mathbf{t}\wedge(-\kappa\mathbf{t}+\tau\mathbf{b})=-\tau\mathbf{n}.$$

故有, $\langle\mathbf{v},\mathbf{t}\rangle=\tau$.

类似地,

$$0=\mathbf{n}\wedge(\kappa\mathbf{n})=\mathbf{n}\wedge\dot{\mathbf{t}}=\mathbf{n}\wedge(\mathbf{v}\wedge\mathbf{t})=\langle\mathbf{n},\mathbf{t}\rangle\mathbf{v}-\langle\mathbf{v},\mathbf{n}\rangle\mathbf{t}=-\langle\mathbf{v},\mathbf{n}\rangle\mathbf{t}$$
$$-\kappa\mathbf{t}=\mathbf{b}\wedge(\kappa\mathbf{n})=\mathbf{b}\wedge\dot{\mathbf{t}}=\mathbf{b}\wedge(\mathbf{v}\wedge\mathbf{t})=\langle\mathbf{b},\mathbf{t}\rangle\mathbf{v}-\langle\mathbf{v},\mathbf{b}\rangle\mathbf{t}=-\langle\mathbf{v},\mathbf{b}\rangle\mathbf{t}$$

从而, 有 $\langle\mathbf{v},\mathbf{n}\rangle=0$, $\langle\mathbf{v},\mathbf{b}\rangle=\kappa$.

因此,

$$\mathbf{v}=\tau\mathbf{t}+\kappa\mathbf{b}.$$

20. 证明: 曲线 $\mathbf{r}(t)=(t+\sqrt{3}\sin t,2\cos t,\sqrt{3}t-\sin t)$ 与曲线 $\widetilde{\mathbf{r}}(t)=(2\cos\frac{t}{2},2\sin\frac{t}{2},-t)$ 是合同的.

证明: 由例 3.2 (p.22), 曲线 $\widetilde{r}(t)$ 是圆柱螺旋线. 从而, $\widetilde{\kappa}(t)=\frac{1}{4}$, $\widetilde{\tau}(t)=-\frac{1}{4}$.

现在考虑曲线 $\mathbf{r}(t)$. 直接计算, 有

$$\mathbf{r}'(t)=(1+\sqrt{3}\cos t,-2\sin t,\sqrt{3}-\cos t),|\mathbf{r}'(t)|=2\sqrt{2},$$

$$\mathbf{r}''(t) = (-\sqrt{3}\sin t, -2\cos t, \sin t),$$
$$\mathbf{r}'''(t) = (-\sqrt{3}\cos t, 2\sin t, \cos t),$$
$$\mathbf{r}'(t)\wedge\mathbf{r}''(t) = (2\sqrt{3}\cos t - 2, -4\sin t, -2\sqrt{3} - 2\cos t), |\mathbf{r}'(t)\wedge\mathbf{r}''(t)| = 4\sqrt{2},$$
$$(\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t)) = -8.$$

由习题 5 (p.28), $\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t)\wedge\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3} = \frac{1}{4}, \tau(t) = \frac{(\mathbf{r}',\mathbf{r}'',\mathbf{r}''')}{|\mathbf{r}'(t)\wedge\mathbf{r}''(t)|^2} = -\frac{1}{4}$. 由定理 4.2 (曲线论基本定理[唯一性], p.25), 曲线 $\mathbf{r}(t)$ 和 $\widetilde{\mathbf{r}}(t)$ 相差 E^3 的一个刚体运动, 从而它们是合同的.

注: 一般地, 要证两条正曲率的曲线 $\mathbf{r}(t), \widetilde{\mathbf{r}}(t)$ 是合同的, 可以按如下步骤进行:
(1) 转化为弧长参数曲线 $\mathbf{r}(s), \widetilde{\mathbf{r}}(s)$ (定义在同一个参数区间上);
(2) 比较曲率和挠率: $\kappa(s) = \widetilde{\kappa}(s), \tau(s) = \pm\widetilde{\tau}(s)$;
(3) 由定理 4.2 (加上反刚体运动的情形), 得出结论.

21. 证明定理 4.4 (p.27).
定理 4.4 设 $\kappa(s)$ 是连续可微函数, 则
(1) 存在平面曲线 $\mathbf{r}(t)$, 它以 s 为弧长参数, 以 $\kappa(s)$ 为曲率;
(2) 上述曲线在相差平面的一个刚体运动的意义下是惟一的.
证明: 经适当修改, 与定理 4.3 的证明基本相同.

习题三

1. 求下列曲面的参数表达式:

(1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (椭球面);

(2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (单叶双曲面);

(3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ (双叶双曲面);

(4) $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ (椭圆抛物面);

(5) $z=-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ (双曲抛物面或者马鞍面);

解: 一般地, 可以按照如下步骤得到一个二次曲面的标准方程的参数表达式:

第一步: 平截化归. 将某个变量看作一个常数, 则得到一个二次曲线的方程(椭圆、双曲线或抛物线). 化归为标准方程并得到其参数表达式.

第二步: 消根号整理. 第一步得到的参数表达式一般有二次根号, 可以取适当参数消去根号并整理得到二次曲面的参数表达式.

[上述方法可以推广到某些其它类型曲面. 另外, 一些曲面的参数表达式可以根据其特定的几何性质得到.]

(1) 椭球坐标表示(类似球坐标表示)

$$\mathbf{r}(u,v)=(a\cos u\cos v,b\cos u\sin v,c\sin u)(-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2},\ 0<v<2\pi).$$

椭球极投影坐标表示(类似球极投影坐标表示)

$$\mathbf{r}(u,v)=(\frac{2u}{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+1},\frac{2v}{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+1},\frac{c(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}-1)}{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+1})((u,v)\in\mathbb{R}^2).$$

(2) 多种参数表示:

$$\mathbf{r}(u,v)=(a\sec u\cos v,b\sec u\sin v,c\tan u)(-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2},\ 0<v<2\pi);$$
$$\mathbf{r}(u,v)=(a\cosh u\cos v,b\cosh u\sin v,c\sinh u)(u\in\mathbb{R},\ 0<v<2\pi);$$
$$\mathbf{r}(u,v)=(a(\cos u-v\sin u),b(\sin u+v\cos u),cv)(0<u<2\pi,\ v\in\mathbb{R});$$
$$\mathbf{r}(u,v)=(a\sqrt{1+u^2}\cos v,b\sqrt{1+u^2}\sin v,cu)(u\in\mathbb{R},\ 0<v<2\pi).$$

(3) 多种参数表示

$$\mathbf{r}(u,v)=(a\tan u\cos v,b\tan u\sin v,c\sec u)(-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2},\ 0<v<2\pi)$$
$$\mathbf{r}(u,v)=(a\sinh u\cos v,b\sinh u\sin v,c\cosh u)(u\in\mathbb{R},\ 0<v<2\pi)$$
$$\mathbf{r}(u,v)=(a\sqrt{u^2-1}\cos v,b\sqrt{u^2-1}\sin v,cu)(|u|>1,\ 0<v<2\pi).$$

(4)

$$\mathbf{r}(u,v)=(u,v,\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2})((u,v)\in\mathbb{R}^2);$$
$$\mathbf{r}(u,v)=(au\cos v,bu\sin v,u^2)(u\in\mathbb{R},\ 0<v<2\pi).$$

(5)

$$\mathbf{r}(u,v)=(u,v,-\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2})((u,v)\in\mathbb{R}^2);$$
$$\mathbf{r}(u,v)=(au\tan v,bu\sec v,u^2)(u\neq 0,\ 0<v<2\pi)(\text{上半部分}).$$
$$\mathbf{r}(u,v)=(au\sec v,bu\tan v,-u^2)(u\neq 0,\ 0<v<2\pi)(\text{下半部分}).$$

2. (1) $\mathbf{r}(u,v)=(a(u+v),b(u-v),4uv)$ 是什么曲面?

(2) $\mathbf{r}(u,v)=(au\cosh v,bu\sinh v,u^2)$ 是什么曲面?

解: (1) 此曲面的方程是 $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$, 它是双曲抛物面.

(2) 此曲面的方程也是 $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$, 但 $z\geq 0$, 因此它是双曲抛物面在 xy-平面上面的部分.

3. 求 xy-平面的曲线 $\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t))$ 沿 E^3 的常方向 $\mathbf{a}$ 平行移动所得的曲面的参数表达式.

解: 此曲面上每点的位置向量是曲线上某点的位置向量和常方向 $\mathbf{a}$ 的某个倍数的和. 故此曲面有参数表达式:

$$\widetilde{\mathbf{r}}(u,v)=(x(u),y(u),0)+v\mathbf{a}.$$

注: 一般地, 若 $\mathbf{r}(t)$ 是一条空间曲线, 则它沿 E^3 的常方向 $\mathbf{a}$ 平行移动所得的曲面的参数表达式是

$$\widetilde{\mathbf{r}}(u,v)=\mathbf{r}(u)+v\mathbf{a}.$$

4. 证明: 曲面 $F(\frac{y}{x},\frac{z}{x})=0$ 的任意切平面过原点.

证明: 记 $G(x,y,z)=F(\frac{y}{x},\frac{z}{x})$. 设点 (x,y,z) 在曲面 $G(x,y,z)=0$ 上. 则曲面在此点的一个法向量为 (G_x,G_y,G_z), 其中 $G_x=-\frac{yF_1(\frac{y}{x},\frac{z}{x})+zF_2(\frac{y}{x},\frac{z}{x})}{x^2}$, $G_y=\frac{F_1(\frac{y}{x},\frac{z}{x})}{x}$, $G_z=\frac{F_2(\frac{y}{x},\frac{z}{x})}{x}$, 这里 F_i 表示 F 对第 i 个位置的偏导数. 因此曲面在此点的切平面为

$$-(yF_1+zF_2)(X-x)+xF_1(Y-y)+xF_2(Z-z)=0.$$

由于

$$-(yF_1+zF_2)(-x)+xF_1(-y)+xF_2(-z)=0,$$

故此平面过原点.

5. 设曲面 S 与平面 Π 相交于 P 点, 且 S 位于 Π 的同一侧, 证明: Π 是曲面 S 在 P 点的切平面.

证明: 设曲面 S 的参数表达式为 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$, $P=\mathbf{r}(u_0,v_0)$. 设 $\mathbf{a}$ 是 Π 的非零法向量且指向曲面所在的一侧. 考虑曲面 S 的高度函数

$$h(u,v):=\langle\mathbf{r}(u,v)-\mathbf{r}(u_0,v_0),\mathbf{a}\rangle.$$

由假设, P 是 $h(u,v)$ 的极小值点, 从而是它的临界点. 故

$$h_u(u_0,v_0)=\langle\mathbf{r}_u(u_0,v_0),\mathbf{a}\rangle=0,$$
$$h_v(u_0,v_0)=\langle\mathbf{r}_v(u_0,v_0),\mathbf{a}\rangle=0.$$

即: $\mathbf{a}\perp\mathbf{r}_u(u_0,v_0)$ 且 $\mathbf{a}\perp\mathbf{r}_v(u_0,v_0)$. 从而, $\mathbf{a}//\mathbf{n}(u_0,v_0)$. 而平面 Π 过点 P, 因此是 P 点的切平面.

6. 证明: 曲面 S 在 P 点的切空间 T_PS 等于曲面上过 P 点的曲线在 P 点的切向量全体.

证明: 由曲面的切向量的定义, 曲面 S 上过点 P 的曲线在 P 点的切向量在切空间 T_PS 中.

反过来, 设 $P=\mathbf{r}(u_0,v_0)$, $\mathbf{v}=a\mathbf{r}_u(P)+b\mathbf{r}_v(P)\in T_PS$. 则 S 上曲线

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}(a(t-t_0)+u_0,b(t-t_0)+v_0)$$

过点 P, 因为 $\mathbf{r}(t_0)=P$. 而曲线 $\mathbf{r}(t)$ 在点 P 的切向量为 $\mathbf{v}=a\mathbf{r}_u(P)+b\mathbf{r}_v(P)$, 故 $\mathbf{v}$ 是曲面 S 在 P 点的一个切向量.

7. 求椭球面的第一基本形式.

解: 由习题 1 (1), 椭球面的一个参数表达式为

$$\mathbf{r}(u,v)=(a\cos u\cos v,b\cos u\sin v,c\sin u)(-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2},0<v<2\pi)$$

由

$$\mathbf{r}_u=(-a\sin u\cos v,-b\sin u\sin v,c\cos u),\quad \mathbf{r}_v=(-a\cos u\sin v,b\cos u\cos v,0),$$

有

$$E=\langle\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_u\rangle=a^2\sin^2u\cos^2v+b^2\sin^2u\sin^2v+c^2\cos^2u,$$
$$F=\langle\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v\rangle=\frac{a^2-b^2}{4}\sin 2u\sin 2v,$$
$$G=\langle\mathbf{r}_v,\mathbf{r}_v\rangle=a^2\cos^2u\sin^2v+b^2\cos^2u\cos^2v.$$

故第一基本形式

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(u,v)=&(a^2\sin^2u\cos^2v+b^2\sin^2u\sin^2v+c^2\cos^2u)du^2\\&+\frac{a^2-b^2}{2}\sin 2u\sin 2v dudv\\&+(a^2\cos^2u\sin^2v+b^2\cos^2u\cos^2v)dv^2.\end{aligned}$$

8/14. 求下列曲面的第一、二基本形式:

(1) 柱面: $\mathbf{r}(u,v)=(f(u),g(u),v)$;

(2) 正螺旋面: $\mathbf{r}(u,v)=(u\cos v,u\sin v,bv)$;

(3) 椭圆抛物面: $\mathbf{r}(u,v)=(a(u+v),b(u-v),u^2+v^2)$.

解: (1) 由

$$\mathbf{r}_u=(f'(u),g'(u),0),\quad \mathbf{r}_v=(0,0,1),$$

有

$$E=\langle\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_u\rangle=f'(u)^2+g'(u)^2,\quad F=\langle\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v\rangle=0,\quad G=\langle\mathbf{r}_v,\mathbf{r}_v\rangle=1.$$

故第一基本形式

$$\mathrm{I}(u,v)=(f'(u)^2+g'(u)^2)du^2+dv^2.$$

由

$$\mathbf{r}_u\wedge\mathbf{r}_v=(g'(u),-f'(u),0),$$

有

$$\mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{f'(u)^2+g'(u)^2}}(g'(u),-f'(u),0).$$

而

$$\mathbf{r}_{uu}=(f''(u),g''(u),0),\quad \mathbf{r}_{uv}=\mathbf{0},\quad \mathbf{r}_{vv}=\mathbf{0},$$

故

$$L=\langle\mathbf{r}_{uu},\mathbf{n}\rangle=\frac{f''(u)g'(u)-f'(u)g''(u)}{\sqrt{f'(u)^2+g'(u)^2}},\quad M=\langle\mathbf{r}_{uv},\mathbf{n}\rangle=0,\quad N=\langle\mathbf{r}_{vv},\mathbf{n}\rangle=0.$$

从而, 第二基本形式

$$\mathrm{II}(u,v)=\frac{f''(u)g'(u)-f'(u)g''(u)}{\sqrt{f'(u)^2+g'(u)^2}}du^2.$$

(2) 由

$$\mathbf{r}_u=(\cos v,\sin v,0),\quad \mathbf{r}_v=(-u\sin v,u\cos v,b),$$

有

$$E=\langle\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_u\rangle=1,\quad F=\langle\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v\rangle=0,\quad G=\langle\mathbf{r}_v,\mathbf{r}_v\rangle=u^2+b^2.$$

故第一基本形式

$$\mathrm{I}(u,v)=du^2+(u^2+b^2)dv^2.$$

由

$$\mathbf{r}_u\wedge\mathbf{r}_v=(b\sin v,-b\cos v,u),$$

有

$$\mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{u^2+b^2}}(b\sin v,-b\cos v,u).$$

而

$$\mathbf{r}_{uu}=\mathbf{0},\quad \mathbf{r}_{uv}=(-\sin v,\cos v,0),\quad \mathbf{r}_{vv}=(-u\cos v,-u\sin v,0),$$

故

$$L=\langle\mathbf{r}_{uu},\mathbf{n}\rangle=0,\quad M=\langle\mathbf{r}_{uv},\mathbf{n}\rangle=-\frac{b}{\sqrt{u^2+b^2}},\quad N=\langle\mathbf{r}_{vv},\mathbf{n}\rangle=0.$$

从而, 第二基本形式

$$\mathrm{II}(u,v)=-2\frac{b}{\sqrt{u^2+b^2}}dudv.$$

(3) 由

$$\mathbf{r}_u=(a,b,2u),\quad \mathbf{r}_v=(a,-b,2v),$$

有

$$E=\langle\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_u\rangle=a^2+b^2+4u^2,\ \ F=\langle\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v\rangle=a^2-b^2+4uv,\ \ G=\langle\mathbf{r}_v,\mathbf{r}_v\rangle=a^2+b^2+4v^2.$$

故第一基本形式

$$\mathrm{I}(u,v)=(a^2+b^2+4u^2)du^2+2(a^2-b^2+4uv)dudv+(a^2+b^2+4v^2)dv^2.$$

由

$$\mathbf{r}_u\wedge\mathbf{r}_v=(2b(u+v),2a(u-v),-2ab),$$

有

$$\mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{a^2(u-v)^2+b^2(u+v)^2+a^2b^2}}(b(u+v),a(u-v),-ab).$$

而

$$\mathbf{r}_{uu}=(0,0,2),\quad \mathbf{r}_{uv}=\mathbf{0},\quad \mathbf{r}_{vv}=(0,0,2),$$

故

$$L=N=-\frac{2ab}{\sqrt{a^2(u-v)^2+b^2(u+v)^2+a^2b^2}},\quad M=0.$$

从而, 第二基本形式

$$\mathrm{II}(u,v)=-\frac{2ab}{\sqrt{a^2(u-v)^2+b^2(u+v)^2+a^2b^2}}(du^2+dv^2).$$

9/15. 求曲面 $z=f(x,y)$ 的第一、二基本形式.

解: 显然, 曲面有参数表示式 $\mathbf{r}(x,y)=(x,y,f(x,y))$.
由

$$\mathbf{r}_x=(1,0,f_x),\quad \mathbf{r}_y=(0,1,f_y),$$

有

$$E=\langle\mathbf{r}_x,\mathbf{r}_x\rangle=1+f_x^2,\quad F=\langle\mathbf{r}_x,\mathbf{r}_y\rangle=f_xf_y,\quad G=\langle\mathbf{r}_y,\mathbf{r}_y\rangle=1+f_y^2.$$

故第一基本形式

$$\mathrm{I}(x,y)=(1+f_x^2)dx^2+2f_xf_ydxdy+(1+f_y^2)dy^2.$$

由

$$\mathbf{r}_x\wedge\mathbf{r}_y=(-f_x,-f_y,1),$$

有

$$\mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}(-f_x,-f_y,1).$$

而

$$\mathbf{r}_{xx}=(0,0,f_{xx}),\quad \mathbf{r}_{xy}=(0,0,f_{xy}),\quad \mathbf{r}_{yy}=(0,0,f_{yy}),$$

故

$$L=\langle\mathbf{r}_{xx},\mathbf{n}\rangle=\frac{f_{xx}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$
$$M=\langle\mathbf{r}_{xy},\mathbf{n}\rangle=\frac{f_{xy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$
$$N=\langle\mathbf{r}_{yy},\mathbf{n}\rangle=\frac{f_{yy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}.$$

从而, 第二基本形式

$$\mathrm{II}(x,y)=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}(f_{xx}dx^2+2f_{xy}dxdy+f_{yy}dy^2).$$

10. 设 $F_\lambda(x,y,z)=\frac{x^2}{a-\lambda}+\frac{y^2}{b-\lambda}+\frac{z^2}{c-\lambda}$ $(a>b>c>0)$. 当 $\lambda\in(-\infty,c)$ 时, $F_\lambda=1$ 给出了一族椭球面; $\lambda\in(c,b)$ 时, $F_\lambda=1$ 给出了一族单叶双曲面; $\lambda\in(b,a)$ 时, $F_\lambda=1$ 给出了一族双叶双曲面. 证明: 对 E^3 中任意一点 $P=(x,y,z)$ $(xyz\neq 0)$, 恰有分别属于这三族曲面的三个二次曲面过 P 点, 且它们在 P 点相互正交.

证明: 设点 $P=(x,y,z)(xyz\neq 0)$ 在曲面 $S_\lambda:\frac{x^2}{a-\lambda}+\frac{y^2}{b-\lambda}+\frac{z^2}{c-\lambda}=1$ 上. 考虑关于 λ 的三次多项式

$$f(\lambda)=(b-\lambda)(c-\lambda)x^2+(a-\lambda)(c-\lambda)y^2+(a-\lambda)(b-\lambda)z^2-(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda).$$

注意到 $f(-\infty)<0$, $f(c)>0$, $f(b)<0$ 且 $f(a)>0$. 故 $f(\lambda)$ 在区间 $(-\infty,c)$, (c,b), (b,a) 上恰好各有一根, 记为 λ_i $(1\leq i\leq 3)$. 下面只需证明它们对应的曲面 S_{λ_i} 在 P 点处相互正交, 即: 在 P 点处这三个曲面的法向量相互正交.

曲面 S_{λ_i} 有非零法向量 $\mathbf{n}_i=(\frac{x}{a-\lambda_i},\frac{y}{b-\lambda_i},\frac{z}{c-\lambda_i})$. 对于 $i\neq j$,

$$\langle\mathbf{n}_i,\mathbf{n}_j\rangle=\frac{x^2}{(a-\lambda_i)(a-\lambda_j)}+\frac{y^2}{(b-\lambda_i)(b-\lambda_j)}+\frac{z^2}{(c-\lambda_i)(c-\lambda_j)}$$

$$= \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j}[(\frac{x^2}{a-\lambda_i} - \frac{x^2}{a-\lambda_i}) + (\frac{y^2}{b-\lambda_i} - \frac{y^2}{b-\lambda_j}) + (\frac{z^2}{c-\lambda_i} - \frac{z^2}{c-\lambda_j})] = 0.$$

即: $\mathbf{n}_i$ 两两正交.

11. 设 (x,y) 是曲面 $\mathbf{r}(u,v)$ 的另一组参数, 问: $\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v$ 与 $\mathbf{r}_x \wedge \mathbf{r}_y$ 的指向是否相同?

解: 由于

$$\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \mathbf{r}_x \wedge \mathbf{r}_y,$$

故当 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} > 0$ 时, $\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v$ 与 $\mathbf{r}_x \wedge \mathbf{r}_y$ 的指向相同; 当 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} < 0$ 时, $\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v$ 与 $\mathbf{r}_x \wedge \mathbf{r}_y$ 的指向相反.

12. 使 $F = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle = 0$ 的参数 (u,v) 称为曲面的正交参数系. 给定一个曲面 S 以及它的一个参数表示 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$, 证明: 对曲面 S 上任意一点 $P_0 = \mathbf{r}(u,v)$, 存在 P_0 的领域 D 以及 D 的新参数 (s,t), 使得 (s,t) 是曲面 S 的正交参数系.

证明: 下面证明更一般的一个结果:

设曲面 S 上有两个处处线性无关的向量场 $\mathbf{a}(u,v)$, $\mathbf{b}(u,v)$. 则对任意点 $P \in S$, 存在 P 的邻域 $U \subseteq S$ 及 U 上的新参数 (s,t), 使得新参数的坐标切向量分别与 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 平行.

注: 将上述结果应用于曲面 S 上任意两个正交的向量场就证明了此习题. 正交向量场的取法有任意性, 一个自然的取法是将坐标切向量正交化.

由于向量场 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 是处处线性无关的, 可以设

$$\begin{cases} \mathbf{a} = a_1 \mathbf{r}_u + a_2 \mathbf{r}_v \\ \mathbf{b} = b_1 \mathbf{r}_u + b_2 \mathbf{r}_v \end{cases} \tag{9}$$

记 $d = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$. 假设存在局部的(容许的)参数变换 $u = u(s,t), v = v(s,t)$ 使得 $\mathbf{r}_s // \mathbf{a}$, $\mathbf{r}_t // \mathbf{b}$. 则存在函数 λ, μ 使得 $\mathbf{r}_s = \lambda \mathbf{a} = \lambda a_1 \mathbf{r}_u + \lambda a_2 \mathbf{r}_v$, $\mathbf{r}_t = \lambda b_1 \mathbf{r}_u + \lambda b_2 \mathbf{r}_v$, 其中 λ, μ 均恒不为 0. 则此变换的 Jacobi 矩阵为 $J = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda a_2 \\ \mu b_1 & \mu b_2 \end{pmatrix}$. 由于 $|J| = \lambda \mu d \neq 0$, J 是处处可逆的. 由反函数存在定理, 此变换有逆, 记为 $s = s(u,v)$, $t = t(u,v)$, 其 Jacobi 矩阵为 $J^{-1} = \frac{1}{\lambda \mu d} \begin{pmatrix} \mu b_2 & -\mu b_1 \\ -\lambda a_2 & \lambda a_1 \end{pmatrix}$. 因此,

$$ds = \frac{1}{\lambda d}(b_2 du - b_1 dv),$$

$$dt = \frac{1}{\mu d}(-a_2 du + a_1 dv).$$

由这两个微分方程知, 满足条件的局部新参数 (s,t) 存在当且仅当一次微分式 $\xi = b_2 du - b_1 dv$, $\eta = -a_2 du + a_1 dv$ 在局部上存在积分因子, 即: 存在(积分因子)函数 f, g 使得 $f\xi$, $g\eta$ 均为全微分.

只需证明: 对于定义在平面区域 D 上的两个可微函数 $f(x,y), g(x,y)$ 和点 $(x_0, y_0) \in D$, 若 $(f(x_0,y_0), g(x_0,y_0)) \neq (0,0)$, 则存在 (x_0,y_0) 的一个邻域 $U \subseteq D$ 及 U 上的可微函数 $\rho(x,y)$ 使得 ρ 是一次微分式 $fdx + gdy$ 的积分因子.

不妨设 $g(x_0,y_0) \neq 0$. 则在 (x_0,y_0) 的一个邻域内, $g(x,y) \neq 0$. 在此邻域内, 考虑关于变量 x 的常微分方程 $f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$, 即: $\frac{dy}{dx} = -\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$. 由常微分方程关于初值的依赖性, 存在 x_0 的邻域 I 和 y_0 的邻域 J 使得 $I \times J \subseteq D$ 且

对于给定的 $\widetilde{y} \in J$, 此常微分方程有惟一可微解 $y=\phi(x,\widetilde{y})$, $x \in I$, 即: $\frac{\partial \phi(x,\widetilde{y})}{\partial x} = -\frac{f(x,\phi(x,\widetilde{y}))}{g(x,\phi(x,\widetilde{y}))}$ 且 $\phi(x_0,\widetilde{y})=\widetilde{y}$. 由于 $\phi(x,\widetilde{y})$ 关于 $\widetilde{y}$ 可微, 故 $\frac{\partial \phi(x,\widetilde{y})}{\partial \widetilde{y}}|_{x=x_0} = \frac{\partial \phi(x_0,\widetilde{y})}{\partial \widetilde{y}} = 1$. 从而, 存在 x_0 的邻域 $\overline{I} \subseteq I$ 使得对于任意 $(x,\widetilde{y}) \in \overline{I} \times J$, 有 $\frac{\partial \phi(x,\widetilde{y})}{\partial \widetilde{y}} \neq 0$. 故对函数组 $x=\widetilde{x}$, $y=\phi(x,\widetilde{y})$ 应用反函数定理, 存在区域 $\widetilde{I} \times \widetilde{J} \subseteq I \times J$ 上的反函数组 $\widetilde{x}=x$, $\widetilde{y}=\psi(x,y)$.

由

$$dy = -\frac{\partial \phi(x,\widetilde{y})}{\partial x}dx + \frac{\phi(x,\widetilde{y})}{\partial \widetilde{y}}d\widetilde{y} = -\frac{f(x,\phi(x,\widetilde{y}))}{g(x,\phi(x,\widetilde{y}))}dx + \frac{\phi(x,\widetilde{y})}{\partial \widetilde{y}}d\widetilde{y},$$

有

$$d\widetilde{y} = \frac{1}{\frac{\phi(x,\widetilde{y})}{\partial \widetilde{y}}g(x,y)}(f(x,y)dx+g(x,y)dy) = \frac{1}{\frac{\phi(x,\psi(x,y))}{\partial \widetilde{y}}g(x,y)}(f(x,y)dx+g(x,y)dy).$$

故 $\rho(x,y) := \frac{1}{\frac{\phi(x,\psi(x,y))}{\partial \widetilde{y}}g(x,y)}$ 是 $f(x,y)dx+g(x,y)dy$ 在区域 $\widetilde{I} \times \widetilde{J}$ 上的积分因子.

13. 在曲面 $S: \mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ 上一点, 由方程 $P\lambda^2+2Q\lambda\mu+R\mu^2=0$ 确定两个切方向. 证明: 这两个切方向相互正交的充要条件是 $ER-2FQ+GP=0$.

证明: 设非零向量 (λ_1,μ_1), (λ_2,μ_2) 是方程 $P\lambda^2+2Q\lambda\mu+R\mu^2=0$ 的不平行的两个解. 则曲面 S 的切向量 $\mathbf{v}_1 := \lambda_1\mathbf{r}_u+\mu_1\mathbf{r}_v$ 与 $\mathbf{v}_2 := \lambda_2\mathbf{r}_u+\mu_2\mathbf{r}_v$ 正交等价于

$$0 = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \lambda_1\lambda_2 E + (\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1)F + \mu_1\mu_2 G.$$

情形 1: $\mu_1\mu_2=0$. 不妨设 $\mu_1=0$, 则 $\mu_2 \neq 0$, 这是因为 (λ_1,μ_1) 与 (λ_2,μ_2) 不平行. 故 $P\lambda_1^2=0$. 由 $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, 有 $\lambda_1 \neq 0$, 从而, $P=0$. 因此, $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2 \Leftrightarrow \lambda_1(\lambda_2 E+\mu_2 F)=0 \Leftrightarrow \lambda_2 E+\mu_2 F=0 \Leftrightarrow \frac{\lambda_2}{\mu_2}=-\frac{F}{E}$. 而由 $2Q\lambda_2+R\mu_2=0$, 知 $\frac{\lambda_2}{\mu_2}=-\frac{R}{2Q}$. 故 $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2 \Leftrightarrow -\frac{F}{E}=-\frac{R}{2Q} \Leftrightarrow ER-2FQ=0$.

情形 2: $\mu_1\mu_2 \neq 0$. 由 Vieta 定理, 有 $\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_2}=-\frac{2Q}{P}$, $\frac{\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2}=\frac{R}{P}$. 因此, $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2 \Leftrightarrow \frac{\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2}E+(\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_2})F+G=0 \Leftrightarrow \frac{R}{P}E-\frac{2Q}{P}F+G=0 \Leftrightarrow ER-2FQ+GP=0$.

16 求曲面 $F(x,y,z)=0$ 的第一、二基本形式.

解: 设点 $P=(x,y,z)$ 在曲面 $S: F(x,y,z)=0$ 上. 由 $\nabla F(x,y,z) \neq \mathbf{0}$, 不妨设在点 P, $F_z \neq 0$. 则在 P 的一个邻域 U 内, $F_z \neq 0$ 且 S 有显式表达 $z=f(x,y)$. 从而, 在 U 内, S 有参数表达式 $\mathbf{r}(x,y)=(x,y,f(x,y))$. 由于 $f_x=-\frac{F_x}{F_z}$, $f_y=-\frac{F_y}{F_z}$, 应用习题 9/15, 则在 U 内, 曲面 S 的第一基本形式

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}(x,y) &= (1+f_x^2)dx^2+2f_xf_ydxdy+(1+f_y^2)dy^2 \\
&= (1+\frac{F_x^2}{F_z^2})dx^2+2\frac{F_xF_y}{F_z^2}dxdy+(1+\frac{F_y^2}{F_z^2})dy^2.
\end{aligned}$$

由于

$$f_{xx} = \frac{-F_z^2F_{xx}+2F_xF_zF_{xz}-F_x^2F_{zz}}{F_z^3},$$

$$f_{xy} = \frac{-F_z^2F_{xy}+F_yF_zF_{xz}+F_xF_zF_{yz}-F_xF_yF_{zz}}{F_z^3},$$

$$f_{yy} = \frac{-F_z^2F_{yy}+2F_yF_zF_{yz}-F_y^2F_{zz}}{F_z^3},$$

应用习题 9/15, 曲面 S 在 U 内的第二基本形式

$$\begin{aligned}\mathrm{II}(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}(f_{xx}dx^2+2f_{xy}dxdy+f_{yy}dy^2)\\ &= \frac{\mathrm{sgn}(F_z)}{F_z^2\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}[(-F_z^2F_{xx}+2F_xF_zF_{xz}-F_x^2F_{zz})dx^2\\ &\quad +2(-F_z^2F_{xy}+F_yF_zF_{xz}+F_xF_zF_{yz}-F_xF_yF_{zz})dxdy\\ &\quad +(-F_z^2F_{yy}+2F_yF_zF_{yz}-F_y^2F_{zz})dy^2].\end{aligned}$$

17. 证明: 在曲面的任意一点, 任何两个相互正交的切方向的法曲率之和为常数.

证明: 设曲面 S 在其上任意一点 P 的主曲率为 k_1, k_2, 而 v_1, v_2 是 P 点处相互垂直的任意两个切向量. 由 Euler 公式, 有

$$\begin{aligned}k_n(v_1)+k_n(v_2) &= k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta+k_1\cos^2(\theta\pm\frac{\pi}{2})+k_2\sin^2(\theta\pm\frac{\pi}{2})\\ &= k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta+k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta=k_1+k_2=2H(P),\end{aligned}$$

是点 P 处的常数.

18. 设曲面 S 由方程 $x^2+y^2-f(z)=0$ 给定, f 满足 $f(0)=0,\ f'(0)\neq 0$. 证明: S 在点 $(0,0,0)$ 的法曲率为常数.

证明: 由 $f(0)=0$ 知, 原点 $O\in S$. 记 $F(x,y,z)=x^2+y^2-f(z)$. 则显然有 $F_z(O)=-f'(0)\neq 0$. 故在 O 的某领域内, 隐函数 $F=0$ 有显式表达 $z=g(x,y)$. 从而, 在 O 的某领域内, 曲面 S 有参数表达式 $\mathbf{r}(x,y)=(x,y,g(x,y))$. 直接计算, 有

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_x &= (1,0,g_x)=(1,0,\frac{2x}{f'(z)}),\\ \mathbf{r}_y &= (0,1,g_y)=(0,1,\frac{2y}{f'(z)}).\end{aligned}$$

故

$$\mathbf{r}_x(O)=(1,0,0),\quad \mathbf{r}_y(O)=(0,1,0).$$

由此, S 在 O 点的切平面是 xy-平面. 由

$$\mathbf{r}_x\wedge\mathbf{r}_y=(-\frac{2x}{f'(z)},-\frac{2y}{f'(z)},1),$$

有

$$\mathbf{n}=\frac{\mathrm{sgn}(f'(z))}{\sqrt{4x^2+4y^2+f'(z)^2}}(-2x,-2y,f'(z)).$$

而

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{xx} &= (0,0,\frac{2f'(z)^2-4x^2f''(z)}{f'(z)^3}),\\ \mathbf{r}_{xy} &= (0,0,-\frac{4xyf''(z)}{f'(z)^3}),\\ \mathbf{r}_{yy} &= (0,0,\frac{2f'(z)^2-4y^2f''(z)}{f'(z)^3}).\end{aligned}$$

故

$$L=\langle \mathbf{r}_{xx},\mathbf{n}\rangle=\operatorname{sgn}(f'(z))\frac{2f'(z)^2-4x^2f''(z)}{f'(z)^2\sqrt{4x^2+4y^2+f'(z)^2}},$$
$$M=\langle \mathbf{r}_{xy},\mathbf{n}\rangle=-\operatorname{sgn}(f'(z))\frac{4xyf''(z)}{f'(z)^2\sqrt{4x^2+4y^2+f'(z)^2}},$$
$$N=\langle \mathbf{r}_{yy},\mathbf{n}\rangle=\operatorname{sgn}(f'(z))\frac{2f'(z)^2-4y^2f''(z)}{f'(z)^2\sqrt{4x^2+4y^2+f'(z)^2}}.$$

从而,

$$L(O)=\frac{2}{f'(0)},\quad M(O)=0,\quad N(O)=\frac{2}{f'(0)}.$$

对于 S 在 O 点的任意单位切向量 $v=(\cos\theta,\sin\theta,0)$, 法曲率

$$k_n(v)=L(O)\cos^2\theta+2M(O)\cos\theta\sin\theta+N(O)\sin^2\theta=\frac{2}{f'(0)},$$

是常数. 从而, 原点处的法曲率为常数 $\frac{2}{f'(0)}$.

注: 曲面 S 是 xz-平面上的曲线 $(\sqrt{f(u)},f(u))(u\geq 0)$ 绕 z-轴旋转得到的旋转曲面. 直观上看, 在 O 点法曲率有旋转不变性.

19. 定义 $\mathrm{III}=\langle d\mathbf{n},d\mathbf{n}\rangle$ 为曲面的第三基本形式, 证明: $K\mathrm{I}-2H\mathrm{II}+\mathrm{III}=0$.

证明: 方法一:

设曲面 S 的参数表达式为 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$. (注意到要证的性质是局部的且与同定向的参数系选取无关, 故只需对曲面的一个参数式证明即可.) 由 Weingarten 方程

$$\mathbf{n}_u=\frac{MF-LG}{EG-F^2}\mathbf{r}_u+\frac{LF-ME}{EG-F^2}\mathbf{r}_v,$$
$$\mathbf{n}_v=\frac{NF-MG}{EG-F^2}\mathbf{r}_u+\frac{MF-NE}{EG-F^2}\mathbf{r}_v.$$

有

$$\langle \mathbf{n}_u,\mathbf{n}_u\rangle=\frac{L^2G-2LMF+M^2E}{EG-F^2},$$
$$\langle \mathbf{n}_u,\mathbf{n}_v\rangle=\frac{M(LG+NE)-(LN+M^2)F}{EG-F^2},$$
$$\langle \mathbf{n}_v,\mathbf{n}_v\rangle=\frac{M^2G-2MNF+N^2E}{EG-F^2}.$$

因此,

$$\mathrm{III}(u,v)=\frac{L^2G-2LMF+M^2E}{EG-F^2}du^2+2\frac{M(LG+NE)-(LN+M^2)F}{EG-F^2}dudv$$
$$+\frac{M^2G-2MNF+N^2E}{EG-F^2}dv^2$$

设 $K\mathrm{I}-2H\mathrm{II}+\mathrm{III}=fdu^2+2gdudv+hdv^2$, 则

$$f=KE-2HL+\frac{L^2G+M^2E-2LMF}{EG-F^2}=0,$$
$$g=KF-2HM+\frac{M(LG+NE)-(LN+M^2)F}{EG-F^2}=0,$$

$$h = KG - 2HN + \frac{M^2G + N^2E - 2MNF}{EG - F^2} = 0.$$

因此,

$$K\mathrm{I} - 2H\mathrm{II} + \mathrm{III} = 0.$$

方法二:

设 $\mathcal{W}$ 为曲面 S 的切空间的 Weingarten 变换. 由 $\mathcal{W}(\mathbf{r}_u) = -\mathbf{n}_u, \mathcal{W}(\mathbf{r}_v) = -\mathbf{n}_v$, 有

$$\mathcal{W}(d\mathbf{r}) = -d\mathbf{n}.$$

由于 Weingarten 变换是对称的, 故

$$\mathrm{III} = \langle \mathcal{W}(d\mathbf{r}), \mathcal{W}(d\mathbf{r}) \rangle = \langle \mathcal{W}^2(d\mathbf{r}), d\mathbf{r} \rangle.$$

而 Weigarten 变换 $\mathcal{W}$ 的特征多项式为 $t^2 - 2Ht + K = 0$, 故由 Cayley-Hamilton 定理, 有

$$\mathcal{W}^2 - 2H\mathcal{W} + K\mathcal{I}_2 = 0,$$

其中 $\mathcal{I}_2$ 是二维恒等变换. 从而,

$$\begin{aligned} K\mathrm{I} - 2H\mathrm{II} + \mathrm{III} &= \langle \mathcal{W}^2(d\mathbf{r}), d\mathbf{r} \rangle - 2H\langle \mathcal{W}(d\mathbf{r}), d\mathbf{r} \rangle + K\langle d\mathbf{r}, d\mathbf{r} \rangle \\ &= \langle (\mathcal{W}^2 - 2H\mathcal{W} + K\mathcal{I})(d\mathbf{r}), d\mathbf{r} \rangle = 0. \end{aligned}$$

注: (1) 方法一中, 若取 (u,v) 为正交曲率参数, 则证明更为简单. 此时, $F = M = 0$. (参考习题 26, 29.) 主曲率

$$k_1 = \frac{L}{E}, \quad k_2 = \frac{N}{G}.$$

注意到平均曲率 $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$, Gauss 曲率 $G = k_1k_2$. 由 Weingarten 方程,

$$\mathbf{n}_u = -k_1\mathbf{r}_u, \quad \mathbf{n}_v = -k_2\mathbf{r}_v.$$

故

$$\begin{aligned} \mathrm{I}(u,v) &= Edu^2 + Gdv^2, \\ \mathrm{II}(u,v) &= k_1Edu^2 + k_2Gdv^2, \\ \mathrm{III}(u,v) &= k_1^2Edu^2 + k_2^2Gdv^2. \end{aligned}$$

从而,

$$\begin{aligned} &K\mathrm{I} - 2H\mathrm{II} + \mathrm{III} \\ =\ &k_1k_2(Edu^2 + Gdv^2) - (k_1 + k_2)(k_1Edu^2 + k_2Gdv^2) + k_1^2Edu^2 + k_2^2Gdv^2 = 0. \end{aligned}$$

(2) 设第一、二、三基本形式对应的矩阵分别是 A, B, C. 由 Weingarten 方程

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{n}_u \\ -\mathbf{n}_v \end{pmatrix} = BA^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_v \end{pmatrix},$$

有

$$\begin{aligned} C &= \langle \begin{pmatrix} -\mathbf{n}_u \\ -\mathbf{n}_v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\mathbf{n}_u & -\mathbf{n}_v \end{pmatrix} \rangle = \langle BA^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{r}_u & \mathbf{r}_v \end{pmatrix} A^{-1}B \rangle \\ &= BA^{-1}AA^{-1}B = BA^{-1}B = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

故

$$\mathrm{III}(u,v) = \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}.$$

20. 设曲面 S_1 和 S_2 的交线 C 的曲率为 κ, 曲线 C 在曲面 S_i 上的法曲率为 k_i $(i=1,2)$; 若沿 C, S_1 和 S_2 法向的夹角为 θ, 证明:

$$\kappa^2\sin^2\theta = k_1^2+k_2^2-2k_1k_2\cos\theta.$$

证明: 设曲线 $C:\mathbf{r}(s)$ 以弧长为参数, $\mathbf{n}_i(s)$ 是曲面 S_i 沿曲线 C 的法向量. 由定义, 曲面 S_i 沿曲线 C 的切向量的法曲率 $k_i=k_i(s)=\langle\dot{\mathbf{t}}(s),\mathbf{n}_i(s)\rangle$. 则

$$\begin{aligned}
&k_1^2+k_2^2-2k_1k_2\cos\theta\\
&=\langle\dot{\mathbf{t}}(s),\mathbf{n}_1(s)\rangle^2+\langle\dot{\mathbf{t}}(s),\mathbf{n}_2(s)\rangle^2-2\langle\dot{\mathbf{t}}(s),\mathbf{n}_1(s)\rangle\langle\dot{\mathbf{t}}(s),\mathbf{n}_2(s)\rangle\cos(\widehat{\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2})\\
&=|\langle\dot{\mathbf{t}}(s),\mathbf{n}_1(s)\rangle\mathbf{n}_2-\langle\dot{\mathbf{t}}(s),\mathbf{n}_2(s)\rangle\mathbf{n}_1|^2\\
&=|\dot{\mathbf{t}}(s)\wedge(\mathbf{n}_2(s)\wedge\mathbf{n}_1(s))|^2 \qquad (10)\\
&=|\dot{\mathbf{t}}(s)\wedge(\mathbf{t}(s)|^2\sin^2\theta\\
&=\kappa(s)^2|\mathbf{n}(s)\wedge(\mathbf{t}(s)|^2\sin^2\theta\\
&=\kappa(s)^2\sin^2\theta.
\end{aligned}$$

这里第四个等式用到了 $\mathbf{n}_2(s)\wedge\mathbf{n}_1(s)=\pm\mathbf{t}\sin\theta$, 这由外积的定义得到.

21. 求下列曲面的 Gauss 曲率和平均曲率.
(1) 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$;
(2) 环面 $\mathbf{r}(u,v)=((R+r\cos u)\cos v,(R+r\cos u)\sin v,r\sin u)(0<r<R)$.
解: (1) 一个参数表达式为

$$\mathbf{r}(u,v)=(a\sec u\cos v,b\sec u\sin v,c\tan u)(-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2},\ 0<v<2\pi).$$

由

$$\mathbf{r}_u=(a\sec u\tan u\cos v,b\sec u\tan u\sin v,c\sec^2 u),$$
$$\mathbf{r}_v=(-a\sec u\sin v,b\sec u\cos v,0),$$

有

$$E=\langle\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_u\rangle=a^2\sec^2 u\tan^2 u\cos^2 v+b^2\sec^2 u\tan^2 u\sin^2 v+c^2\sec^4 u,$$
$$F=\langle\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v\rangle=(b^2-a^2)\sec^2 u\tan u\sin v\cos v,$$
$$G=\langle\mathbf{r}_v,\mathbf{r}_v\rangle=a^2\sec^2 u\sin^2 v+b^2\sec^2 u\cos^2 v.$$

又

$$\mathbf{r}_u\wedge\mathbf{r}_v=(-bc\sec^3 u\cos v,-ac\sec^3 u\sin v,ab\sec^2 u\tan u),$$
$$\mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{c^2(a^2\sin^2 v+b^2\cos^2 v)+a^2b^2\sin^2 u}}(-bc\cos v,-ac\sin v,ab\sin u),$$
$$\mathbf{r}_{uu}=(a\sec u(\sec^2 u+\tan^2 u)\cos v,b\sec u(\sec^2 u+\tan^2 u)\sin v,2c\sec^2 u\tan u),$$
$$\mathbf{r}_{uv}=(-a\sec u\tan u\sin v,b\sec u\tan u\cos v,0),$$
$$\mathbf{r}_{vv}=(-a\sec u\cos v,-b\sec u\sin v,0),$$

有

$$L=\langle\mathbf{r}_{uu},\mathbf{n}\rangle=-\frac{abc\sec u}{\sqrt{c^2(a^2\sin^2 v+b^2\cos^2 v)+a^2b^2\sin^2 u}},$$
$$M=\langle\mathbf{r}_{uv},\mathbf{n}\rangle=0,$$

$$N=\langle \mathbf{r}_{vv},\mathbf{n}\rangle=\frac{abc\sec u}{\sqrt{c^2(a^2\sin^2 v+b^2\cos^2 v)+a^2b^2\sin^2 u}}.$$

故平均曲率

$$H=\frac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)}$$

$$=\frac{abc\cos u(a^2(\sin^2 u\cos^2 v-\cos^2 u\sin^2 v)+b^2(\sin^2 u\sin^2 v-\cos^2 u\cos^2 v)+c^2)}{2(a^2b^2\sin^2 u\cos^2 u+a^2c^2\sin^2 v+b^2c^2\cos^2 v)\sqrt{a^2b^2\sin^2 u+c^2(a^2\sin^2 v+b^2\cos^2 v)}},$$

Gauss 曲率

$$G=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$$

$$=\frac{-a^2b^2c^2\cos^4 u}{(a^2b^2\sin^2 u\cos^2 u+a^2c^2\sin^2 v+b^2c^2\cos^2 v)\sqrt{a^2b^2\sin^2 u+c^2(a^2\sin^2 v+b^2\cos^2 v)}}.$$

(2) 环面的一个参数表达式为

$$\mathbf{r}(u,v)=((R+r\cos u)\cos v,(R+r\cos u)\sin v,r\sin u)(0<r<R).$$

由

$$\mathbf{r}_u=(-r\sin u\cos v,-r\sin u\sin v,r\cos u),$$
$$\mathbf{r}_v=(-(R+r\cos u)\sin v,(R+r\cos u)\cos v,0),$$

有

$$E=\langle \mathbf{r}_u,\mathbf{r}_u\rangle=r^2,\quad F=\langle \mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v\rangle=0,\quad G=\langle \mathbf{r}_v,\mathbf{r}_v\rangle=(R+r\cos u)^2.$$

又

$$\mathbf{r}_u\wedge\mathbf{r}_v=(-r(R+r\cos u)\cos u\cos v,-r(R+r\cos u)\cos u\sin v,-r(R+r\cos u)\sin u),$$
$$\mathbf{n}=(-\cos u\cos v,-\cos u\sin v,-\sin u),$$
$$\mathbf{r}_{uu}=(-r\cos u\cos v,-r\cos u\sin v,-r\sin u),$$
$$\mathbf{r}_{uv}=(r\sin u\sin v,-r\sin u\cos v,0),$$
$$\mathbf{r}_{vv}=(-(R+r\cos u)\cos v,-(R+r\cos u)\sin v,0),$$

有

$$L=\langle \mathbf{r}_{uu},\mathbf{n}\rangle=r^2,\quad M=\langle \mathbf{r}_{uv},\mathbf{n}\rangle=0,\quad N=\langle \mathbf{r}_{vv},\mathbf{n}\rangle=(R+r\cos u)\cos u.$$

故平均曲率

$$H=\frac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)}=\frac{1}{2}(1+\frac{\cos u}{R+r\cos u}),$$

Gauss 曲率

$$G=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{\cos u}{R+r\cos u}.$$

从而, 两个主曲率为

$$k_1=1,\quad k_2=\frac{\cos u}{R+r\cos u}.$$

22. 求曲面 $z=f(x,y)$ 的平均曲率和 Gauss 曲率.

解: 由习题 9/15, 平均曲率

$$H=\frac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)}=\frac{f_{xx}(1+f_y^2)-2f_xf_yf_{xy}+f_{yy}(1+f_x^2)}{2(1+f_x^2+f_y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

Gauss 曲率

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2}{(1+f_x^2+f_y^2)^2}.$$

23. 求曲面 $\mathbf{r}(u,v)=(u,v,u^2+v^2)$ 的椭圆点、双曲点和抛物点.

解: 由

$$\mathbf{r}_u=(1,0,2u),\quad \mathbf{r}_v=(0,1,2v),$$

得

$$E=\langle\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_u\rangle=1+4u^2,\quad F=\langle\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v\rangle=4uv,\quad G=\langle\mathbf{r}_v,\mathbf{r}_v\rangle=1+4v^2.$$

由 $\mathbf{r}_u\wedge\mathbf{r}_v=(-2u,-2v,1)$, 有 $\mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}(-2u,-2v,1)$. 而又

$$\mathbf{r}_{uu}=(0,0,2),\quad \mathbf{r}_{uv}=\mathbf{0},\quad \mathbf{r}_{uu}=(0,0,2),$$

有

$$L=N=\frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}},\quad M=0.$$

故

$$LN-M^2=\frac{4}{1+4u^2+4v^2}>0.$$

所以, 曲面上所有点都是椭圆点, 没有双曲点和抛物点.

24. 求曲面 $\mathbf{r}(u,v)=(u^3,v^3,u+v)$ 上的抛物点的轨迹.

解: 由

$$\mathbf{r}_u=(3u^2,0,1),\quad \mathbf{r}_v=(0,3v^2,1),$$

知

$$\mathbf{r}_u\wedge\mathbf{r}_v=(-3v^2,-3u^2,9u^2v^2),\quad \mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{u^4+v^4+9u^4v^4}}(-v^2,-u^2,3u^2v^2).$$

由

$$\mathbf{r}_{uu}=(6u,0,0),\quad \mathbf{r}_{uv}=\mathbf{0},\quad \mathbf{r}_{uu}=(0,6v,0),$$

有

$$L=\langle\mathbf{r}_{uu},\mathbf{n}\rangle=-\frac{6uv^2}{\sqrt{u^4+v^4+9u^4v^4}},$$
$$M=\langle\mathbf{r}_{uv},\mathbf{n}\rangle=0,$$
$$N=\langle\mathbf{r}_{uu},\mathbf{n}\rangle=-\frac{6u^2v}{\sqrt{u^4+v^4+9u^4v^4}}.$$

故曲面上的抛物点满足方程

$$LN-M^2=\frac{36u^3v^3}{u^4+v^4+9u^4v^4}=0\Leftrightarrow uv=0\Leftrightarrow u=0 \text{ 或者 } v=0.$$

当 $u=0$ 时, 抛物点轨迹的参数方程为 $\mathbf{r}(0,v)=(0,v^3,v)$, 这是 yz-平面中的三次曲线: $y=z^3$.

当 $v=0$ 时, 抛物点轨迹的参数方程为 $\mathbf{r}(u,0)=(u^3,0,u)$, 这是 xz-平面中的三次曲线: $x=z^3$.

25. 求曲面 $\mathbf{r}(u,v)=(a(u+v),b(u-v),4uv)$ 的 Gauss 曲率、平均曲率、主曲率及对应的主方向.

解: 由

$$\mathbf{r}_u=(a,b,4v),\quad \mathbf{r}_v=(a,-b,4u),$$

有

$$E=\langle\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_u\rangle=a^2+b^2+16v^2,$$
$$F=\langle\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v\rangle=a^2-b^2+16uv,$$
$$G=\langle\mathbf{r}_v,\mathbf{r}_v\rangle=a^2+b^2+16u^2.$$

又(记 $\Delta=4(a^2+b^2)(u^2+v^2)+8(b^2-a^2)uv+a^2b^2$.)

$$\mathbf{r}_u\wedge\mathbf{r}_v=(4b(u+v),4a(v-u),-2ab),\quad \mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}(2b(u+v),2a(v-u),-ab),$$

$$\mathbf{r}_{uu}=\mathbf{0}=\mathbf{r}_{vv},\quad \mathbf{r}_{uv}=(0,0,4),$$

有

$$L=N=0,\quad M=-\frac{4ab}{\sqrt{\Delta}}.$$

从而, 平均曲率

$$H=\frac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)}=\frac{ab(a^2-b^2+16uv)}{\Delta^{\frac{3}{2}}},$$

Gauss 曲率

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=-\frac{4a^2b^2}{\Delta^2}.$$

从而, 主曲率

$$k=H\pm\sqrt{H^2-K}=\frac{ab(a^2-b^2+16uv\pm\sqrt{(a^2+b^2+16u^2)(a^2+b^2+16v^2)})}{\Delta^{\frac{3}{2}}}.$$

设切向量 $\lambda\mathbf{r}_u+\mu\mathbf{r}_v$ 是一个主方向, Weingarten 变换在自然基 $\{\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v\}$ 之下的系数矩阵为 A, 则

$$(\lambda\ \ \mu)(kI-A)=0$$

即:

$$\begin{pmatrix}\lambda & \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pm\frac{ab\sqrt{(a^2+b^2+16u^2)(a^2+b^2+16v^2)}}{\Delta^{\frac{3}{2}}} & \frac{ab(a^2+b^2+16v^2)}{\Delta^{\frac{3}{2}}}\\ \frac{ab(a^2+b^2+16u^2)}{\Delta^{\frac{3}{2}}} & \pm\frac{ab\sqrt{(a^2+b^2+16u^2)(a^2+b^2+16v^2)}}{\Delta^{\frac{3}{2}}}\end{pmatrix}=0.$$

$\Leftrightarrow$

$$\sqrt{a^2+b^2+16v^2}\lambda\pm\sqrt{a^2+b^2+16u^2}\mu=0.$$

因此,

$$\begin{pmatrix}\lambda & \mu\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}\sqrt{a^2+b^2+16u^2} & \mp\sqrt{a^2+b^2+16v^2}\end{pmatrix},$$

其中 $c\in\mathbb{R}$ 为常数.

故对应的主方向

$$\mathbf{e}=c(\sqrt{a^2+b^2+16u^2}\mathbf{r}_u\mp\sqrt{a^2+b^2+16v^2}\mathbf{r}_v).$$

注: 主方向的另一种求法: 设切向量 $\mathbf{v}=\lambda\mathbf{r}_u+\mu\mathbf{r}_v$ 是点 $\mathbf{r}(u,v)$ 的一个主方向. 则有实数 k 使得 $\mathcal{W}(\mathbf{v})=k\mathbf{v}$, 即: $-(\lambda\mathbf{n}_u+\mu\mathbf{n}_v)=k(\lambda\mathbf{r}_u+\mu\mathbf{r}_v)$. 这等价于(将上式分别与 $\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v$ 作内积得到)两个方程:

$$\begin{cases}L\lambda+M\mu=k(E\lambda+F\mu)\\ M\lambda+N\mu=k(F\lambda+G\mu)\end{cases}\tag{11}$$

而这两个方程等价于

$$\begin{vmatrix} L\lambda+M\mu & E\lambda+F\mu \\ M\lambda+N\mu & F\lambda+G\mu \end{vmatrix}=0$$

$\Leftrightarrow$

$$(LF-ME)\lambda^2+(LG-NE)\lambda\mu+(MG-NF)\mu^2=0$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} \mu^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix}=0.$$

故上面证明了: 切向量 $\mathbf{v}=\lambda\mathbf{r}_u+\mu\mathbf{r}_v$ 是点 $\mathbf{r}(u,v)$ 的一个主方向当且仅当

$$\begin{vmatrix} \mu^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix}=0.$$

对应的主曲率可以由式-(11) 得到:

$$k=\frac{L\lambda+M\mu}{E\lambda+F\mu}=\frac{M\lambda+N\mu}{F\lambda+G\mu}.$$

将上述方法应用到习题: 只需解方程

$$\begin{vmatrix} \mu^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 \\ a^2+b^2+16v^2 & a^2-b^2+16uv & a^2+b^2+16u^2 \\ 0 & -\frac{4ab}{\sqrt{\Delta}} & 0 \end{vmatrix}=0.$$

$\Leftrightarrow$

$$(a^2+b^2+16u^2)\mu^2-(a^2+b^2+16v^2)\lambda^2=0$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix}\lambda & \mu\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}\sqrt{a^2+b^2+16u^2} & \pm\sqrt{a^2+b^2+16v^2}\end{pmatrix}.$$

对应的主曲率

$$k=\frac{ab(a^2-b^2+16uv\mp\sqrt{(a^2+b^2+16u^2)(a^2+b^2+16v^2)})}{\Delta^{\frac{3}{2}}}.$$

26. 设 P 是曲面 S 上的一点. 证明: 当 P 不是脐点时, S 的主曲率 k_1、k_2 是 P 附近的光滑函数; 当 P 是脐点时, 主曲率是 P 附近的连续函数.

证明: 首先, 主曲率

$$k=H\pm\sqrt{H^2-K}$$

是连续的. 注意到点 P 是脐点当且仅当 $H^2(P)-K(P)=0$.

当 P 是脐点时, 主曲率在此点未必可微, 除非在其某个小邻域内所有点都是脐点.

当 P 是非脐点时, 由 H, K 的光滑性, 知在 P 点附近, 主曲率是光滑的.

27. 设曲面 $S:\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ 上没有抛物点, $\mathbf{n}$ 是 S 的法向量; 曲面 $\widetilde{S}:\widetilde{\mathbf{r}}=\mathbf{r}(u,v)+\lambda\mathbf{n}(u,v)$ (常数 λ 充分小) 称为 S 的平行曲面.

(1) 证明曲面 S 和 $\widetilde{S}$ 在对应点的切平面平行;

(2) 可以选取 $\widetilde{S}$ 的单位法向 $\widetilde{\mathbf{n}}$, 使得 $\widetilde{S}$ 的 Gauss 曲率和平均曲率分别为

$$\widetilde{K}=\frac{K}{1-2\lambda H+\lambda^2K},\quad \widetilde{H}=\frac{H-\lambda K}{1-2\lambda H+\lambda^2K}.$$

证明: (1) 只需证明对曲面 S 上任意点 P 及其在曲面 $\widetilde{S}$ 上的对应点 $\widetilde{P}$ 的切空间相同, 即: $T_P S = T_{\widetilde{P}}\widetilde{S}$. 由 Weigareten 方程知, $\widetilde{\mathbf{r}}_u = \mathbf{r}_u + \lambda\mathbf{n}_u$, $\widetilde{\mathbf{r}}_v = \mathbf{r}_v + \lambda\mathbf{n}_v \in T_P S$. 而两个切空间都是二维的, 故 $T_P S = T_{\widetilde{P}}\widetilde{S}$.

(2) 方法一:

由 (1) 知, 曲面 $\widetilde{S}$ 的单位法向量 $\widetilde{\mathbf{n}} = \pm\mathbf{n}$.

(a): $\widetilde{\mathbf{n}} = \mathbf{n}$. 设 $S, \widetilde{S}$ 的 Weingarten 变换在坐标切向量下的系数矩阵分别为 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \widetilde{A}$. 由

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{r}}_u \\ \widetilde{\mathbf{r}}_v \end{pmatrix} = (I_2 - \lambda A)\begin{pmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_v \end{pmatrix},$$

有

$$\widetilde{\mathcal{W}}\begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{r}}_u \\ \widetilde{\mathbf{r}}_v \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{n}}_u \\ \widetilde{\mathbf{n}}_v \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \mathbf{n}_u \\ \mathbf{n}_v \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_v \end{pmatrix} = A(I_2 - \lambda A)^{-1}\begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{r}}_u \\ \widetilde{\mathbf{r}}_v \end{pmatrix}.$$

即:

$$\widetilde{A} = A(I_2 - \lambda A)^{-1} = \frac{1}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K}\begin{pmatrix} a - \lambda K & b \\ c & d - \lambda K \end{pmatrix}.$$

因此,

$$\widetilde{H} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\widetilde{A} = \frac{H - \lambda K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K},$$
$$\widetilde{K} = \det\widetilde{A} = \frac{K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K}.$$

(b): $\widetilde{\mathbf{n}} = -\mathbf{n}$. 此时,

$$\widetilde{A} = -A(I_2 - \lambda A)^{-1} = -\frac{1}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K}\begin{pmatrix} a - \lambda K & b \\ c & d - \lambda K \end{pmatrix}.$$

故

$$\widetilde{H} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\widetilde{A} = -\frac{H - \lambda K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K},$$
$$\widetilde{K} = \det\widetilde{A} = \frac{K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K}.$$

综上所述, 单位法向量 $\widetilde{\mathbf{n}} = \mathbf{n}$ 即为所求.

方法二:

(a): $\widetilde{\mathbf{n}} = \mathbf{n}$. 如方法一, 求得

$$\widetilde{A} = A(I_2 - \lambda A)^{-1}.$$

曲面 S 的主曲率 k_1, k_2 是矩阵 A 的特征值, 故曲面 $\widetilde{S}$ 的主曲率 $\widetilde{k}_i$ 是矩阵 $\widetilde{A}$ 的特征值:

$$\widetilde{k}_i = \frac{k_i}{1 - \lambda k_i}, \quad i = 1, 2.$$

故

$$\widetilde{H} = \frac{1}{2}(\widetilde{k}_1 + \widetilde{k}_2) = \frac{\frac{1}{2}(k_1 + k_2) - \lambda k_1 k_2}{(1 - \lambda k_1)(1 - \lambda k_2)} = \frac{H - \lambda K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K},$$
$$\widetilde{K} = \widetilde{k}_1\widetilde{k}_2 = \frac{k_1 k_2}{(1 - \lambda k_1)(1 - \lambda k_2)} = \frac{K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K}.$$

(b): $\widetilde{\mathbf{n}}=-\mathbf{n}$. 此时,

$$\widetilde{A}=-A(I_2-\lambda A)^{-1}.$$

故

$$\widetilde{k}_i=-\frac{k_i}{1-\lambda k_i},\quad i=1,2.$$

从而,

$$\widetilde{H}=\frac{1}{2}(\widetilde{k}_1+\widetilde{k}_2)=-\frac{\frac{1}{2}(k_1+k_2)-\lambda k_1k_2}{(1-\lambda k_1)(1-\lambda k_2)}=-\frac{H-\lambda K}{1-2\lambda H+\lambda^2K},$$

$$\widetilde{K}=\widetilde{k}_1\widetilde{k}_2=\frac{k_1k_2}{(1-\lambda k_1)(1-\lambda k_2)}=\frac{K}{1-2\lambda H+\lambda^2K}.$$

综上所述, 单位法向量 $\widetilde{\mathbf{n}}=\mathbf{n}$ 即为所求.

注: 之所以要求曲面 S 没有抛物点, 是因为要取到充分小的常数 λ 使得曲面 $\widetilde{S}$ 有定义. 具体地, 由

$$\begin{pmatrix}\widetilde{\mathbf{r}}_u\\ \widetilde{\mathbf{r}}_v\end{pmatrix}=(I_2-\lambda A)\begin{pmatrix}\mathbf{r}_u\\ \mathbf{r}_v\end{pmatrix}$$

知, 曲面 $\widetilde{S}$ 有定义当且仅当矩阵 $I_2-\lambda A$ 可逆当且仅当

$$\det(I_2-\lambda A)=1-2H\lambda+\lambda^2K\neq 0$$

当且仅当 $\lambda k_1=\lambda(H+\sqrt{H^2-K})\neq 1$ 且 $\lambda k_2=\lambda(H-\sqrt{H^2-K})\neq 1$.

曲面 S 没有抛物点等价于 K 恒不为 0 等价于两个主曲率均恒不为 0. 这样在局部上, 总可以取充分小的常数 λ 使得它取值于 $\frac{1}{k_1}$ 和 $\frac{1}{k_2}$ 之间. 从而, $1-2H\lambda+\lambda^2K\neq 0$, 即: 曲面 $\widetilde{S}$ 有定义.

28. 曲面 S 上的一条曲线 C 称为曲率线, 如果 C 在每点的切向量都是曲面 S 在该点的一个主方向. 证明: 曲线 $C:\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}(u(t),v(t))$ 是曲率线当且仅当沿着 C, $\frac{d\mathbf{n}(t)}{dt}$ 与 $\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$ 平行.

证明: 曲线 $C:\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}(u(t),v(t))$ 是曲率线当且仅当

$$-\mathbf{n}'(t)=-(\mathbf{n}_u(t)u'(t)+\mathbf{n}_v(t)v'(t))=\mathcal{W}(\mathbf{r}'(t))=k\mathbf{r}'(t),$$

对某个 $k\in\mathbb{R}$. 而这等价于 $\mathbf{r}'(t)//\mathbf{n}'(t)$.

29. 设 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ 是一个无脐点的曲面的参数表示. 证明: 曲面 S 的参数曲线 $u=$常数和 $v=$常数是曲率线的充要条件是 $F=M=0$.

证明: 设曲面 S 的参数曲线是曲率线, 则

$$-\mathbf{n}_u=\mathcal{W}(\mathbf{r}_u)=k_1\mathbf{r}_u,$$

$$-\mathbf{n}_v=\mathcal{W}(\mathbf{r}_v)=k_2\mathbf{r}_v,$$

其中主曲率 k_1 和 k_2 不相等(这是因为曲面无脐点). 那么对应的主方向必然是垂直的, 即:

$$F=\langle\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v\rangle=0.$$

从而,

$$M=-\langle\mathbf{r}_u,\mathbf{n}_v\rangle=k_2\langle\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v\rangle=k_2F=0.$$

反过来, 设 $F=M=0$. 故 $\mathbf{r}_u\perp\mathbf{r}_v$ 且 $\mathbf{r}_u\perp\mathbf{n}_v$. 由于 $\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v,\mathbf{n}_v$ 共面, $\mathbf{n}_v=-k_2\mathbf{r}_v$ 对某个 $k_2\in\mathbb{R}$. 从而,

$$\mathcal{W}(\mathbf{r}_v)=-\mathbf{n}_v=k_2\mathbf{r}_v.$$

即: $\mathbf{r}_v$ 是主方向. 同理, $\mathbf{r}_u$ 也是主方向. 因此, 曲面 S 的参数曲线是曲率线.

注: 事实上, 上面也证明了: 对任意曲面 S 的参数表达式 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$, 坐标切向量是相互正交的主方向当且仅当 $F=M=0$. 此时, 主曲率 $k_1=\frac{L}{E}$, $k_2=\frac{N}{G}$.

30. 求曲面 $F(x,y,z)=0$ 的曲率线所满足的微分方程.

解: 设曲线 $C:\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ 在曲面 $S:F(x,y,z)=0$ 上. 则

$$F(x(t),y(t),z(t))=0.$$

故

$$F_x(x(t),y(t),z(t))x'(t)+F_y(x(t),y(t),z(t))y'(t)+F_z(x(t),y(t),z(t))z'(t)=0,$$

即:

$$F_xdx+F_ydy+F_zdz=0.$$

从而,

$$\mathbf{n}=\pm\frac{1}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}(F_x,F_y,F_z).$$

曲线 C 是曲率线当且仅当沿着 C, 存在某个实函数 k 使得

$$-d\mathbf{n}=\mathcal{W}(d\mathbf{r})=kd\mathbf{r}$$

$\Leftrightarrow$

$$d\mathbf{r}//d\mathbf{n}$$

$\Leftrightarrow$

$$d\mathbf{r}\wedge d\mathbf{n}=\mathbf{0}.$$

现在

$$d\mathbf{r}=(dx,dy,dz),$$

满足

$$F_xdx+F_ydy+F_zdz=0.$$

而

$$\begin{aligned}d\mathbf{n}=\pm\frac{1}{(F_x^2+F_y^2+F_z^2)^{\frac{3}{2}}}&((F_y^2+F_z^2-F_x(F_y+F_z))(F_{xx}dx+F_{xy}dy+F_{xz}dz),\\&(F_x^2+F_z^2-F_y(F_x+F_z))(F_{xy}dx+F_{yy}dy+F_{yz}dz),\\&(F_x^2+F_y^2-F_z(F_x+F_y))(F_{xz}dx+F_{yz}dy+F_{zz}dz)).\end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned}\phi&=(F_y^2+F_z^2-F_x(F_y+F_z))(F_{xx}dx+F_{xy}dy+F_{xz}dz),\\\varphi&=(F_x^2+F_z^2-F_y(F_x+F_z))(F_{xy}dx+F_{yy}dy+F_{yz}dz),\\\psi&=(F_x^2+F_y^2-F_z(F_x+F_y))(F_{xz}dx+F_{yz}dy+F_{zz}dz)).\end{aligned}$$

则

$$d\mathbf{r}\wedge d\mathbf{n}=\mathbf{0}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\dx&dy&dz\\\phi&\varphi&\psi\end{vmatrix}=\mathbf{0}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} dy\psi - dz\varphi = 0 \\ dx\psi - dz\phi = 0 \\ dx\varphi - dy\phi = 0. \end{cases} \tag{12}$$

故曲面 S 上的曲率线满足的微分方程为

$$\begin{cases} F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0 \\ dy\psi - dz\varphi = 0 \\ dx\psi - dz\phi = 0 \\ dx\varphi - dy\phi = 0. \end{cases} \tag{13}$$

注: 设曲面 S 的参数表示式为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$. 由习题 25 后的注, 曲面 S 上的曲线 $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(u(t),v(t))$ 是曲率线当且仅当

$$\begin{vmatrix} u'(t)^2 & -u'(t)v'(t) & v'(t)^2 \\ E(u(t),v(t)) & F(u(t),v(t)) & G(u(t),v(t)) \\ L(u(t),v(t)) & M(u(t),v(t)) & N(u(t),v(t)) \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} (\frac{du(t)}{dt})^2 & -\frac{du(t)}{dt}\frac{dv(t)}{dt} & (\frac{dv(t)}{dt})^2 \\ E(u(t),v(t)) & F(u(t),v(t)) & G(u(t),v(t)) \\ L(u(t),v(t)) & M(u(t),v(t)) & N(u(t),v(t)) \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

这就是曲面 S 上曲率线满足的微分方程. 反过来, 其积分曲线是曲率线.

31. 曲面 S 上的一个切方向是渐进方向, 如果沿此方向的法曲率为 0; S 上的一条曲线 C 称为渐进线, 如果它的每个切方向都是渐进方向. 证明曲面 $S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$ 的参数曲线是渐近线当且仅当 $L = N = 0$.

证明: 曲面 $S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$ 的参数曲线是渐近线当且仅当

$$\mathcal{W}(\mathbf{r}_u) = \frac{L}{E} = 0 \ \text{ 且 } \ \mathcal{W}(\mathbf{r}_v) = \frac{N}{G} = 0$$

当且仅当

$$L = N = 0.$$

注: 由定义, 切向量 $\lambda\mathbf{r}_u + \mu\mathbf{r}_v$ 是渐进方向当且仅当

$$L\lambda^2 + 2M\lambda\mu + N\mu^2 = 0.$$

从而, 渐进曲线满足的微分方程为

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0.$$

反过来, 此微分方程的积分曲线是渐近线.

在点 $\mathbf{r}(u,v)$, 有两个线性无关的渐进方向当且仅当

$$LN - M < 0,$$

即: 点 $\mathbf{r}(u,v)$ 是双曲点. 故由习题 12 的证明, 在双曲点附近, 存在渐进曲线网. 反过来, 曲面在一点附近存在渐进曲线网, 则此点必为双曲点.

32. 证明: 若曲面的切平面过定点, 则该曲面是锥面.

证明: 方法一:

设曲面 $S:\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ 的切平面过定点 P_0, 其位置向量为 $\mathbf{p}_0$. 则

$$\mathbf{r}(u,v)-\mathbf{p}_0=\lambda(u,v)\mathbf{r}_u+\mu(u,v)\mathbf{r}_v,$$

其中 $\lambda(u,v),\mu(u,v)$ 是光滑函数. 从而,

$$\mathbf{r}_u=\lambda_u\mathbf{r}_u+\lambda\mathbf{r}_{uu}+\mu_u\mathbf{r}_v+\mu\mathbf{r}_{uv},\quad \mathbf{r}_v=\lambda_v\mathbf{r}_u+\lambda\mathbf{r}_{uv}+\mu_v\mathbf{r}_v+\mu\mathbf{r}_{vv}.$$

将以上两式与 $\mathbf{n}$ 作内积, 有

$$\lambda L+\mu M=0,$$
$$\lambda M+\mu N=0.$$

故

$$\lambda(LN-M^2)=0,$$
$$\mu(LN-M^2)=0.$$

由于 $\lambda(u,v),\mu(u,v)$ 只在一点同时为 0, 故 $LN-M^2=0$. 从而, Gauss 曲率 $K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=0$.

设 S 上的点 P 是非脐点, 则在它的一个小邻域内, S 无脐点. 由习题 12, 对应于两个主方向量场, 在更小的邻域内, S 有正交参数, 仍记为 (u,v). (对应的参数曲线是正交曲率线) 而由 $K=0$, 此小邻域内每点都是严格抛物点(非平点), 只沿一个方向法曲率为 0. 故其中一族参数曲线是曲率线且是渐近线. 而沿着方向 $\mathbf{r}(u,v)-\mathbf{p}_0$, 法曲率

$$k_n(\mathbf{r}(u,v)-\mathbf{p}_0)=\frac{L\lambda^2+2M\lambda\mu+N\mu^2}{E\lambda^2+2F\lambda\mu+G\mu^2}=0.$$

因此, 这族曲率渐近线的切方向都过同一定点 P_0. 由习题二 9 (1), 它们必是一束直线.

现在设 S 上点 P 是脐点, 则它是平点. 若存在 P 的一个邻域, S 上每点都是平点. 则 S 在此邻域内是平面的一部分. 若 P 不存在这样的邻域, 则在 P 的附近, 脐点的轨迹至多是一些曲线, 不能决定曲面的形状.

综上所述, 曲面 S 上每点都在曲面上的一条直线上且所有这些直线过定点, 即: S 是锥面.

方法二: (初等的几何证明)

设曲面 S 的所有切平面过定点 P_0. 取曲面上任意点 $P\neq P_0$. 设点 P_0 与过点 P 法线张成的平面为 Π, 而曲面 S 与平面 Π 的相交曲线为 C. 对于 C 上任意一点 Q, 直线 $\overline{P_0Q}$ 在平面 Π 中. 而由假设, S 的切平面都过 P_0, 故在 Q 点附近, 曲线 C 只在直线 $\overline{P_0Q}$ 的一侧. 类似于习题 5, 点 Q 是平面 Π 中曲线 C 的高度函数的极小值点, 故直线 $\overline{P_0Q}$ 是曲线 C 在点 Q 的切线. 由习题二 9 (1), 曲线 C 必是直线. 因此, S 由过定点的直线构成, 是锥面.

33. 证明: 直纹面是可展曲面当且仅当沿着直母线, 曲面的切平面不变.

证明: 设直纹面 S 的参数式为 $\mathbf{r}(u,v)=\mathbf{a}(u)+v\mathbf{b}(u)$.

沿着直母线, 曲面的切平面不变 $\Leftrightarrow$ 对于任意 u, 及 $v_1\neq v_2$, $\mathbf{n}(u,v_1)//\mathbf{n}(u,v_2)$ $\Leftrightarrow$

$$\mathbf{r}_u(u,v_1)\wedge\mathbf{r}_v(u,v_1)//\mathbf{r}_u(u,v_2)\wedge\mathbf{r}_v(u,v_2)$$

$\Leftrightarrow$

$$0=(\mathbf{r}_u(u,v_1)\wedge\mathbf{r}_v(u,v_1))\wedge(\mathbf{r}_u(u,v_2)\wedge\mathbf{r}_v(u,v_2))=((\mathbf{a}'+v_1\mathbf{b}')\wedge\mathbf{b})\wedge((\mathbf{a}'+v_2\mathbf{b}')\wedge\mathbf{b})$$

$$= \langle \mathbf{a}' + v_1\mathbf{b}', (\mathbf{a}' + v_2\mathbf{b}') \wedge \mathbf{b}\rangle \mathbf{b} - \langle \mathbf{b}, (\mathbf{a}' + v_2\mathbf{b}') \wedge \mathbf{b}\rangle(\mathbf{a}' + v_1\mathbf{b}')$$
$$= \langle \mathbf{a}', v_2\mathbf{b}' \wedge \mathbf{b}\rangle + \langle v_1\mathbf{b}', \mathbf{a}' \wedge \mathbf{b}\rangle = (v_1 - v_2)(\mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}')$$

$\Leftrightarrow$

$$(\mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}') = 0$$

$\Leftrightarrow$ 曲面 S 是可展曲面(性质 6.1).

34. 求曲面 $\mathbf{r}(u,v) = (3u + 3uv^2 - u^3, v^3 - 3v - 3u^2v, 3(u^2 - v^2))$ 的平均曲率和 Gauss 映射的像集.

解: 由

$$\mathbf{r}_u = (3 - 3v^2 - 3u^2, -6uv, 6u), \quad \mathbf{r}_v = (6uv, 3v^2 - 3 - 3u^2, -6v),$$

有

$$E = G = 9(1 + u^2 + v^2)^2, \quad F = 0.$$

由

$$\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v = (18u(1 + u^2 + v^2), 18v(1 + u^2 + v^2), 9(u^2 + v^2 - 1)(1 + u^2 + v^2)),$$

有

$$\mathbf{n} = \frac{1}{1 + u^2 + v^2}(2u, 2v, u^2 + v^2 - 1).$$

而

$$\mathbf{r}_{uu} = (-6u, -6v, 6), \quad \mathbf{r}_{uv} = (6v, -6u, 0), \quad \mathbf{r}_{vv} = (6u, 6v, -6),$$

故

$$L = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n}\rangle = -6, \quad M = \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n}\rangle = 0, \quad N = \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n}\rangle = 6.$$

因此,

$$H = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)} = 0, \quad G = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{4}{9(1 + u^2 + v^2)^4}.$$

Gauss 映射 $g : S \to S^2$ 的像集等于映射 $\mathbf{r}(u,v) : E^2 \to S$ 与 g 的合成的像集, 即是映射 $\mathbf{n}(u,v) : E^2 \to S^2$ 的像集. 而这正是单位球极投影坐标参数式的像集 $S^2 - \{(0,0,1)\}$.

35. 证明: 形如 $z = f(x) + g(y)$ 的极小曲面, 若非平面, 则除相差一个常数外, 它可以写成

$$z = \frac{1}{a}\log\frac{\cos ay}{\cos ax}.$$

此曲面称为 Scherk 曲面.

证明: 设方程 $z = f(x) + g(y)$ 定义了一个极小曲面 S. 显然, 它有参数表达式

$$\mathbf{r}(u,v) = (u, v, f(u) + g(v)).$$

直接计算, 有

$$\mathbf{r}_u = (1, 0, f'(u)), \quad \mathbf{r}_v = (0, 1, g'(v)).$$

故

$$E = 1 + f'(u)^2, \quad F = f'(u)g'(v), \quad G = 1 + g'(v).$$

由

$$\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v = (-f'(u), -g'(v), 1),$$

知

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'(u)^2 + g'(v)^2}}(-f'(u), -g'(v), 1).$$

而

$$\mathbf{r}_{uu} = (0, 0, f''(u)), \quad \mathbf{r}_{uv} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r}_{vv} = (0, 0, g''(v)),$$

故

$$L = \frac{f''(u)}{\sqrt{1+f'(u)^2+g'(v)^2}}, \quad M = 0, \quad N = \frac{g''(v)}{\sqrt{1+f'(u)^2+g'(v)^2}}.$$

由于曲面是极小的,

$$H = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)} = \frac{f''(u)(1+g'(v)^2) + g''(v)(1+f'(u)^2)}{2(1+f'(u)^2+g'(v)^2)^{\frac{3}{2}})} = 0.$$

这等价于

$$f''(u)(1+g'(v)^2) + g''(v)(1+f'(u)^2) = 0.$$

继而, 等价于

$$\frac{f''(u)}{1+f'(u)^2} = -\frac{g''(v)}{1+g'(v)^2}.$$

由于上面等式两边是关于不同变量的函数, 故它们只能为同一常数, 记为 a. 若 S 不是平面, 则必有 $a \neq 0$. 否则, 由 $f''(u) = 0 = g''(v)$, 有 $f(u) = ku + m$, $g(v) = lv + n$, 其中. 从而, S 是平面.

现在

$$d(\arctan f'(u)) = d(au), \quad d(\arctan g'(v)) = d(-av).$$

故

$$\arctan f'(u) = au + b, \quad \arctan g'(v) = -av - c,$$

其中 b, c 为常数. 从而,

$$f(u) = -\frac{1}{a}\log\cos(au+b) + d, \quad g(v) = \frac{1}{a}\log\cos(av+c) + e,$$

其中 d, e 为常数. 所以,

$$z = f(x) + g(y) = \frac{1}{a}\log\frac{\cos(ay+c)}{\cos(ax+b)} + d + e.$$

36. 证明: 正螺旋面 $\mathbf{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, bv)$ 是极小曲面; 并证明: 直纹极小曲面是平面或者正螺旋面.

证明: 直接计算, 有

$$\mathbf{r}_u = (\cos v, \sin v, 0), \quad \mathbf{r}_v = (-u\cos v, u\sin v, b), \quad \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{u^2+b^2}}(b\sin v, b\cos v, u).$$

故

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = u^2 + b^2.$$

又

$$\mathbf{r}_{uu} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r}_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0), \quad \mathbf{r}_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0),$$

故

$$L = 0, \quad M = -\frac{b}{\sqrt{u^2+b^2}}, \quad N = 0.$$

从而, 平均曲率

$$H = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)} = 0.$$

即: 正螺旋面是极小曲面.

设极小直纹面 S 的参数表示为 $\mathbf{r}(u,v)=\mathbf{a}(u)+v\mathbf{c}(u)$. 则

$$\mathbf{r}_u=\mathbf{a}'+v\mathbf{c}',\quad \mathbf{r}_v=\mathbf{c},\quad \mathbf{r}_u\wedge\mathbf{r}_v=\mathbf{a}'\wedge\mathbf{c}+v\mathbf{c}'\wedge\mathbf{c}.$$

故

$$E=\langle\mathbf{a}',\mathbf{a}'\rangle+v\langle\mathbf{a}',\mathbf{c}'\rangle+v^2\langle\mathbf{c}',\mathbf{c}'\rangle,\quad F=\mathbf{a}'\wedge\mathbf{c}+v\mathbf{c}'\wedge\mathbf{c},\quad G=\langle\mathbf{c},\mathbf{c}\rangle.$$

为取得 (u,v) 是正交参数, 即: $F=0$, 可以假设 $|\mathbf{c}(u)|=1$; 然后, 经过参数变换 $\widetilde{u}=u$, $\widetilde{v}=v+\int_0^u\langle\mathbf{a}'(t),\mathbf{c}(t)\rangle dt$, 可以设 $\langle\mathbf{a}'(u),\mathbf{c}(u)\rangle=0$. 此时, $F=0$ 且 $G=1$. 记 $\Delta=|\mathbf{r}_u\wedge\mathbf{r}_v|$.

由

$$\mathbf{r}_{uu}=\mathbf{a}''+v\mathbf{c}'',\quad \mathbf{r}_{uv}=\mathbf{c}',\quad \mathbf{r}_{vv}=\mathbf{0},$$

有

$$L=\frac{1}{\Delta}[(\mathbf{a}'',\mathbf{a}',\mathbf{c})+v((\mathbf{a}',\mathbf{c},\mathbf{c}'')+(\mathbf{a}'',\mathbf{c}',\mathbf{c}))+v^2(\mathbf{c}'',\mathbf{c}',\mathbf{c})],\quad M=\frac{1}{\Delta}(\mathbf{a}',\mathbf{c},\mathbf{c}'),\quad N=0.$$

曲面 S 是极小的 $\Leftrightarrow H=0\Leftrightarrow$

$$0=\Delta(LG-2MF+NE)=(\mathbf{a}'',\mathbf{a}',\mathbf{c})+v((\mathbf{a}',\mathbf{c},\mathbf{c}'')+(\mathbf{a}'',\mathbf{c}',\mathbf{c}))+v^2(\mathbf{c}'',\mathbf{c}',\mathbf{c}).$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}(\mathbf{a}'',\mathbf{a}',\mathbf{c})=0\\(\mathbf{a}',\mathbf{c},\mathbf{c}'')+(\mathbf{a}'',\mathbf{c}',\mathbf{c})=0\\(\mathbf{c}'',\mathbf{c}',\mathbf{c})=0.\end{cases}\tag{14}$$

由式-(14) 中第三式, 知 $\mathbf{c}(u)$ 在某个平面上. 而由假设, $\mathbf{c}(u)$ 是一条单位球面曲线(注意 $\mathbf{c}(u)$ 不能为常向量), 故 $\mathbf{c}(u)$ 是一个单位圆.

若 $\mathbf{a}(u)$ 为常向量, 则 S 是平面. 现在假设 $\mathbf{a}(u)$ 不为常向量, 即: 它是一条曲线. 可以设 u 是曲线 $\mathbf{a}(u)$ 的弧长参数, 其 Frenet 标架为 $\{\mathbf{a}(u);\mathbf{t}(u),\mathbf{n}(u),\mathbf{b}(u)\}$, 其曲率为 $\kappa(u)$, 挠率为 $\tau(u)$. 由式-(14) 中第一式, 有

$$0=(\mathbf{a}'',\mathbf{a}',\mathbf{c})=\kappa(\mathbf{n},\mathbf{t},\mathbf{c})=-\kappa\langle\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle.$$

若 $\kappa=0$, 则 $\mathbf{a}(u)$ 是直线. 而 $\mathbf{c}(u)$ 是一个单位圆. 可以设

$$\mathbf{a}(u)=(0,0,bu).$$

由假设 $\mathbf{t}\perp\mathbf{c}(u)$, 故

$$\mathbf{c}(u)=(\cos u,\sin u,0).$$

从而, 曲面 S 的参数表达式为

$$\mathbf{r}(u,v)=\mathbf{a}(u)+v\mathbf{c}(u)=(v\cos u,v\sin u,bu).$$

即: 曲面 S 为正螺旋面.

若 κ 不恒为 0, 只需考虑 $\kappa\neq0$ 的部分, 则 $\langle\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle=0$. 而由假设, $\langle\mathbf{t},\mathbf{c}\rangle=0$. 故 $\mathbf{c}=\pm\mathbf{n}$. 从而, 可以设 $\mathbf{c}=\mathbf{n}$. 由式-(14) 中第二式, 有

$$0=(\mathbf{a}',\mathbf{c},\mathbf{c}'')+(\mathbf{a}'',\mathbf{c}',\mathbf{c})=(\mathbf{t},\mathbf{n},\ddot{\mathbf{n}})+(\dot{\mathbf{t}},\dot{\mathbf{n}},\mathbf{n})=\dot{\tau}.$$

故 τ 是常数.

若 $\tau=0$, 则 $\mathbf{a}(u)$ 为平面曲线. 而 $\mathbf{c}=\mathbf{n}$ 是其(主)法向量, 故 S 是平面.

若 $\tau\neq0$, 则由式-(14) 中第三式, 有

$$0=(\mathbf{c}'',\mathbf{c}',\mathbf{c})=(\ddot{\mathbf{n}},\dot{\mathbf{n}},\mathbf{n})=\dot{\kappa}\tau.$$

因此, $\dot{\kappa}=0$, 即: κ 为常数. 故 $\mathbf{a}(u)$ 是圆柱螺旋线. 可以设

$$\mathbf{a}(u) = (\frac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2}\cos(\sqrt{\kappa^2+\tau^2}u), \frac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2}\sin(\sqrt{\kappa^2+\tau^2}u), \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}u)$$

则

$$\mathbf{c}(u) = \mathbf{n}(u) = (-\cos(\sqrt{\kappa^2+\tau^2}u), -\sin(\sqrt{\kappa^2+\tau^2}u), 0).$$

故

$$\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{a}(u) + v\mathbf{c}(u) = ((\frac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2} - v)\cos(\sqrt{\kappa^2+\tau^2}u),$$
$$(\frac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2} - v)\sin(\sqrt{\kappa^2+\tau^2}u), \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}u).$$

作参数变换 $\widetilde{v} = \sqrt{\kappa^2+\tau^2}u$, $\widetilde{u} = \frac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2} - v$, 则曲面 S 的参数表达式变为

$$\mathbf{r}(\widetilde{u}, \widetilde{v}) = (\widetilde{u}\cos\widetilde{v}, \widetilde{u}\sin\widetilde{v}, \frac{\tau}{\kappa^2+\tau^2}\widetilde{v}).$$

故曲面 S 是正螺旋面.

习题 四

1. (1) $$g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta} = \delta^{\alpha}_{\alpha} = 2.$$

(2) $$\frac{\partial \ln\sqrt{g}}{\partial u^\alpha} = \frac{1}{\sqrt{g}}\cdot\frac{\frac{\partial g}{\partial u^\alpha}}{2\sqrt{g}} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial u^\alpha} = \frac{1}{2g}\left(g_{11}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^\alpha} + g_{22}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^\alpha} - 2g_{12}\frac{\partial g_{12}}{\partial u^\alpha}\right)$$

$$\left(g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial u^\alpha} = g_{11}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^\alpha} + g_{22}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^\alpha} - 2g_{12}\frac{\partial g_{12}}{\partial u^\alpha}\right) \quad = \frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^\alpha} + g^{12}\frac{\partial g_{12}}{\partial u^\alpha} + \frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^\alpha}.$$

$$\Gamma^1_{1\alpha} + \Gamma^2_{2\alpha} = \frac{1}{2}g^{1\beta}\left(\frac{\partial g_{1\beta}}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{1\alpha}}{\partial u^\beta}\right) + \frac{1}{2}g^{2\beta}\left(\frac{\partial g_{2\beta}}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{2\alpha}}{\partial u^\beta}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^\alpha} + \cancel{g^{11}\frac{\partial g_{1\alpha}}{\partial u^1} - g^{11}\frac{\partial g_{1\alpha}}{\partial u^1}}\right) + \frac{1}{2}\left(g^{12}\frac{\partial g_{12}}{\partial u^\alpha} + \cancel{g^{12}\frac{\partial g_{2\alpha}}{\partial u^1}} - \cancel{g^{12}\frac{\partial g_{1\alpha}}{\partial u^2}}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(g^{12}\frac{\partial g_{12}}{\partial u^\alpha} + \cancel{g^{12}\frac{\partial g_{1\alpha}}{\partial u^2}} - \cancel{g^{12}\frac{\partial g_{2\alpha}}{\partial u^1}}\right) + \frac{1}{2}\left(g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^\alpha} + \cancel{g^{22}\frac{\partial g_{2\alpha}}{\partial u^2} - g^{22}\frac{\partial g_{2\alpha}}{\partial u^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^\alpha} + g^{12}\frac{\partial g_{12}}{\partial u^\alpha} + \frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^\alpha}$$

$$= \frac{\partial \ln\sqrt{g}}{\partial u^\alpha}.$$

2. (1) $\tilde{r} = \tilde{r}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) = r(u^1(\tilde{u}^1,\tilde{u}^2), u^2(\tilde{u}^1,\tilde{u}^2))$. $\tilde{r}_i = r_\alpha\cdot\frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^i} = r_\alpha\cdot a^\alpha_i$.

$$\tilde{r}_{ij} = r_{\alpha\beta}\cdot a^\beta_j\cdot a^\alpha_i + r_\alpha\cdot a^\alpha_{ij} \qquad \left(a^\alpha_{ij} := \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial\tilde{u}^i\partial\tilde{u}^j}\right)$$

$$\tilde{g}_{ij} = \langle \tilde{r}_i, \tilde{r}_j\rangle = \langle r_\alpha\cdot a^\alpha_i, r_\beta a^\beta_j\rangle = g_{\alpha\beta}\cdot a^\alpha_i\cdot a^\beta_j.$$

$$\tilde{r}_1\wedge\tilde{r}_2 = \det(a^\alpha_i)\, r_1\wedge r_2. \quad \tilde{n} = \frac{\tilde{r}_1\wedge\tilde{r}_2}{|\tilde{r}_1\wedge\tilde{r}_2|} = \mathrm{sgn}(\det(a^\alpha_i))\, n.$$

$$\tilde{b}_{ij} = \langle\tilde{r}_{ij}, \tilde{n}\rangle = \langle r_{\alpha\beta}a^\alpha_i\cdot a^\beta_j + r_\alpha\cdot a^\alpha_{ij},\ \mathrm{sgn}(\det(a^\alpha_i))\, n\rangle$$
$$= \mathrm{sgn}(\det(a^\alpha_i))\, b_{\alpha\beta}\, a^\alpha_i\cdot a^\beta_j.$$

3. $\frac{1}{2} b_{\alpha\beta} \cdot g^{\beta\alpha} = \frac{1}{2} b_{\alpha}^{\alpha} = H$, (b_{α}^{β})は Weingarten変換の行列.

4. $(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$, $(g^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}$. $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} \left(\frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial u^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial u^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\delta}} \right)$

$\gamma = 1$, $\Gamma_{\alpha\beta}^{1} = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{1\alpha}}{\partial u^{\beta}} + \frac{\partial g_{1\beta}}{\partial u^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{1}} \right)$

$(\alpha, \beta) = (2,2)$, $\Gamma_{22}^{1} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} = r$

$(\alpha, \beta) \neq (2,2)$, $\Gamma_{\alpha\beta}^{1} = 0$

$\gamma = 2$, $\Gamma_{\alpha\beta}^{2} = \frac{1}{2} g^{12} \left(\frac{\partial g_{2\alpha}}{\partial u^{\beta}} + \frac{\partial g_{2\beta}}{\partial u^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{2}} \right)$

$(\alpha, \beta) \cancel{\neq} (1,2)$, $\Gamma_{12}^{2} = \Gamma_{21}^{2} = \frac{1}{2} g^{22} \cdot \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot 2r = \frac{1}{r}$

$(\alpha, \beta) \neq (1,2)$, $\Gamma_{\alpha\beta}^{2} = 0$.

5. $I = (1+f_x^2) dx^2 + 2 f_x f_y \cancel{dx} dx dy + (1+f_y^2) dy^2$

$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1+f_x^2 & f_x f_x \\ f_x f_y & 1+f_y^2 \end{pmatrix}$ $\qquad g^{\alpha\beta}) = \frac{1}{1+f_x^2+f_y^2} \begin{pmatrix} 1+f_y^2 & -f_x f_y \\ -f_x f_y & 1+f_x^2 \end{pmatrix}$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} \left(\frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial u^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial u^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\delta}} \right)$$

$$\Gamma_{11}^{1} = \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} + g^{12} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} - \frac{1}{2} g^{12} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}$$

$(2f_x f_{xx} + 2f_y f_{xy}) f_x f_y$

$$= \frac{1}{2} \frac{1+f_y^2}{1+f_x^2+f_y^2} \frac{2f_y f_{xy}(1+f_x^2+f_y^2) - 2(f_x f_{xx} + f_y f_{xy})(1+f_y^2)}{(1+f_x^2+f_y^2)^2} + \left(-\frac{f_x f_y}{1+f_x^2+f_y^2} \right) \frac{(f_{xx} f_y + f_x f_{xy})(1+f_x^2+f_y^2) -}{(1+f_x^2+f_y^2)^2}$$

$$-\frac{1}{2} \left(-\frac{f_x f_y}{1+f_x^2+f_y^2} \right) \cdot \frac{2f_y f_{yy}(1+f_x^2+f_y^2) - 2(f_x f_{xy} + 2f_y f_{yy})(1+f_y^2)}{(1+f_x^2+f_y^2)^2}$$

$$= \frac{-f_x(1+f_y^2+f_x^2 f_y^2) f_{xx} + f_x^2 f_y (1+f_x^2-f_y^2) f_{xy} + f_x^3 f_y^2 f_{yy}}{(1+f_x^2+f_y^2)^3}$$

6. 设(u,v)是正交曲率参数，则 $F=M=0$.

Codazzi方程：
$$\begin{cases}\left(\dfrac{L}{\sqrt{E}}\right)_v = N\dfrac{(\sqrt{E})_v}{G} & ①\\[2ex] \left(\dfrac{N}{\sqrt{G}}\right)_u = L\dfrac{(\sqrt{G})_u}{E}. & ②\end{cases}$$

①：左边 $= \dfrac{L_v}{\sqrt{E}} - \dfrac{LE_v}{2E^{\frac{3}{2}}}$，①：右边 $= \dfrac{N}{G}\cdot\dfrac{E_v}{2\sqrt{E}}$

$$L_v = \left(\frac{L}{2E}+\frac{N}{2G}\right)E_v = \frac{LG+NE}{2EG}E_v = HE_v.$$

同理，

② $\Leftrightarrow$ $\quad N_u = HG_u$.

7. 设曲面S无脐点，则 $k_1 \neq k_2$. 不妨设 $k_1 > H > k_2$.

取(u,v)是S的正交曲率线参数，则 $\begin{cases} L_v = HE_v, \\ N_u = HG_u.\end{cases}$

故 $L = HE + f(u)$, $N = HG + g(v)$.

则 $k_1 = \dfrac{L}{E} = H + \dfrac{f(u)}{E}$, $k_2 = \dfrac{N}{G} = H + \dfrac{g(v)}{G}$.

则 $f(u)<0$ 且 $g(v)<0$. $\dfrac{f(u)}{E} = -\dfrac{g(v)}{G} =: \lambda$

$E = \lambda f(u)$, $G = -\lambda g(v)$.

$$\mathrm{I} = \lambda(f(u)du^2 - g(v)dv^2) = \lambda\,(d\tilde{u}^2 + d\tilde{v}^2) \qquad \begin{cases}\tilde{u} = \int\sqrt{f(u)}\,du \\ \tilde{v} = \int\sqrt{g(v)}\,dv.\end{cases}$$

$$\mathrm{II} = L\,du^2 + N\,dv^2 = (\lambda H+1)f(u)du^2 + (-\lambda H+1)g\,dv^2$$
$$= (\lambda H+1)\,d\tilde{u}^2 + (\lambda H-1)\,d\tilde{v}^2$$

注 S可能有脐点，但非全脐点曲面.

8. 由 E,F,G,L,M,N 均为常数，k_1,k_2 均为常数

则由例 6.4，S 为平面或球面或圆柱面

但 球面：第一类基本量不为常数 故 S 为平面或圆柱面.

9. Gauss 方程 $\frac{LN-M^2}{EG}=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v+\left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right)$ $F=M=0$ 时

Codazzi 方程 $\begin{cases} L_v = HE_v, \\ N_u = HG_u \end{cases}$.

(1) Gauss 方程 $-1\neq 0$ 不满足.

(2) Gauss 方程 $\frac{\cos^2 u}{\cos^2 u}=1=-\frac{1}{\sqrt{\cos^2 u}}\left((\sqrt{\cos^2 u})_{uu}\right)$. 满足

Codazzi 方程 $\begin{cases} 0=L_v=0=E_v \quad \checkmark \\ N_u=0\neq-\frac{\cos^4 u+1}{\cos^2 u}\sin 2u=HG_u. \quad \times \end{cases}$

$\begin{cases} H=\frac{LG-2MF+NE}{EG-F^2}=\frac{\cos^4 u+1}{\cos^2 u} \\ G_u=-\sin 2u \end{cases}$

4-6

10. $\mathrm{I}=\left(1+\frac{F_x^2}{F_z^2}\right)dx^2+\frac{2F_xF_y}{F_z^2}dxdy+\left(1+\frac{F_y^2}{F_z^2}\right)dy^2$. $F_z\neq 0$.

$$\mathrm{II}=\frac{\operatorname{sgn}(F_z)}{F_z^2\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}\Big(\left(-F_z^2F_{xx}+2F_xF_zF_{xz}-F_x^2F_{zz}\right)dx^2+2\left(-F_z^2F_{xy}+F_yF_zF_{xz}+F_xF_zF_{yz}-F_xF_yF_{zz}\right)dxdy$$

$$+\left(-F_z^2F_{yy}+2F_yF_zF_{yz}-F_y^2F_{zz}\right)dy^2\Big)$$

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{1}{F_z^2\left(F_x^2+F_y^2+F_z^2\right)^2}\Big(F_x^2F_z^2F_{xx}F_{yy}+F_y^2F_z^2F_{xx}F_{zz}+F_x^4F_{yy}F_{zz}-2F_yF_z^3F_{xx}F_{yz}$$

$$-2F_x^3F_zF_{xz}F_{yy}+2F_xF_yF_z^2F_{xz}F_{yz}-F_z^4F_{xy}^2-F_y^2F_z^2F_{xz}^2-F_x^2F_z^2F_{yz}^2$$

$$+2F_yF_z^3F_{xy}F_{xz}+2F_xF_z^3F_{xy}F_{yz}-2F_xF_yF_z^2F_{xy}F_{zz}\Big)$$

11. 设 $S: r=r(u,v)$. 令 $e_1=\frac{r_u}{\sqrt{E}}$, $e_2=\frac{r_v}{\sqrt{G}}$, $e_3=n=e_1\wedge e_3$.

则 由正交标架的运动方程
$$\begin{cases} dr=\omega_1e_1+\omega_2e_2\\ de_1=\omega_{12}e_2+\omega_{13}e_3\\ de_2=\omega_{21}e_1+\omega_{23}e_3\\ de_3=\omega_{31}e_1+\omega_{32}e_2\end{cases}$$

$\omega_1=\sqrt{E}du$, $\omega_2=\sqrt{G}dv$. $\begin{cases}\omega_{12}=-\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}du+\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}dv\\ \omega_{13}=\frac{L}{\sqrt{E}}du+\frac{M}{\sqrt{E}}dv\\ \omega_{23}=\frac{M}{\sqrt{G}}du+\frac{N}{\sqrt{G}}dv\end{cases}$

则
$$\begin{cases} e_{1u}=-\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}e_2+\frac{L}{\sqrt{E}}e_3=\frac{1}{1+u^2}e_3 & ①\\ e_{2u}=\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}e_1+\frac{M}{\sqrt{G}}e_3=0 & ②\\ e_{3u}=-\frac{L}{\sqrt{E}}e_1-\frac{M}{\sqrt{G}}e_2=-\frac{1}{1+u^2}e_1 & ③\\ e_{1v}=\frac{G_u}{2\sqrt{EG}}e_2+\frac{M}{\sqrt{E}}e_3=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}e_2 & ④\\ e_{2v}=-\frac{G_u}{2\sqrt{EG}}e_1+\frac{N}{\sqrt{G}}e_3=-\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}e_1+\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}e_3 & ⑤\\ e_{3v}=-\frac{M}{\sqrt{E}}e_1-\frac{N}{\sqrt{G}}e_2=-\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}e_2 & ⑥\end{cases}$$

由②，$\cancel{e_2(u)}\ e_2(v)$. 设弧长参数曲线 $C:\ \vec{r}=\vec{r}(v)$ 然 $\dot{\vec{r}}=t=e_2(v)$

其Frenet标架 $\{\vec{r}, t, n, b\}$. 则
$$\begin{cases} e_1 = n\cos\theta + b\sin\theta & ⑦ \\ e_2 = t & ⑧ \\ e_3 = +n\sin\theta - b\cos\theta & ⑨ \end{cases}$$

由⑦，
$$e_{1v} = -\kappa\cos\theta\, e_2 + (\tau+\theta_v)e_3 \overset{④}{=} \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}e_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tau+\theta_v=0 & ⑩ \\ -\kappa\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} & ⑪ \end{cases}$$

由⑧，
$$e_{2v} = \kappa n = \kappa\cos\theta\, e_1 + \kappa\sin\theta\, e_2 \overset{⑤}{=} -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}e_1 + \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}e_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \kappa\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \\ +\kappa\sin\theta = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{\kappa\sqrt{1+u^2}} \\ \sin\theta = \frac{u}{\kappa\sqrt{1+u^2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \kappa = 1. \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}, \\ \sin\theta = +\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}. \end{cases} \Rightarrow \theta_v = 0.$$

$\overset{⑩}{\Rightarrow} \tau=0. \Rightarrow C$ 是单位圆 可设 $C:\ \vec{r}=(\cos v, \sin v, 0)$.

则 $t=(-\sin v, \cos v, 0)$，$n=(-\cos v, -\sin v, 0)$，$b=(0,0,+1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} e_1 = (-\cos\theta\cos v, -\cos\theta\sin v, \sin\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}(\cos v, \sin v, +u) \\ e_2 = (-\sin v, \cos v, 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_u = \sqrt{E}e_1 = (\cos v, \sin v, u) \\ r_v = \sqrt{G}e_2 = (-u\sin v, u\cos v, 0) \end{cases} \Rightarrow \vec{r} = \left(u\cos v, u\sin v, \frac{u^2}{2}\right)$$

4-8 故 S 是抛物线 $\begin{cases} z=\frac{1}{2}x^2 \\ y=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转得到之抛物面.

12. (1) 设 φ,ψ 是曲面 S 的第一、二基本形式，则 φ,ψ 满足 Gauss-Codazzi 方程

由 $F=M=0$，(u,v) 是正交曲率参数，则 E,G,λ 满足

$$\begin{cases} \lambda^2 = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right) \\ \frac{\partial(\lambda E)}{\partial v} = \lambda\frac{\partial E}{\partial v} \Rightarrow E\frac{\partial\lambda}{\partial v} = 0 \\ \frac{\partial(\lambda G)}{\partial u} = \lambda\frac{\partial G}{\partial u} \Rightarrow G\frac{\partial\lambda}{\partial u} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H=\lambda \\ K=\lambda^2 \end{cases}.$$

S 全脐点.

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial\lambda}{\partial v}=0 \\ \frac{\partial\lambda}{\partial u}=0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \text{常数. 且 } \lambda^2 = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right).$$

若 $E=G$，则
$$\lambda^2 = -\frac{1}{\sqrt{E}^2}\left((\ln\sqrt{E})_{uu} + (\ln\sqrt{E})_{vv}\right)$$
$$= -\frac{1}{E}\Delta\ln\sqrt{E} \Leftrightarrow \Delta\ln\sqrt{E} = -\lambda^2 E.$$

13. $r(u,v) = (u\cos v,\ u\sin v,\ f(u))\quad (u>0)$

$$\begin{cases} r_u = (\cos v,\ \sin v,\ f'(u)) \\ r_v = (-u\sin v,\ u\cos v,\ 0) \end{cases} \begin{cases} E = 1+f'(u)^2 \\ F = 0 \\ G = u^2 \end{cases} \quad \mathrm{I} = (1+f'(u)^2)du^2 + u^2dv^2.$$

$$r_u\wedge r_v = (-uf'(u)\cos v,\ -uf'(u)\sin v,\ u) \qquad n = \frac{1}{\sqrt{1+f'(u)^2}}(-f'(u)\cos v,\ f(u)\sin v,\ 1)$$

$$\begin{cases} r_{uu} = (0,0,f''(u)) \\ r_{uv} = (-\sin v,\ \cos v,\ 0) \\ r_{vv} = (-u\cos v,\ -u\sin v,\ 0) \end{cases} \qquad \begin{cases} L = \frac{f''(u)}{\sqrt{1+f'(u)^2}} \\ M = 0 \\ N = \frac{uf'(u)}{\sqrt{1+f'(u)^2}} \end{cases}$$

令 $\begin{cases} e_1 = \frac{r_u}{\sqrt{1+f'(u)^2}} \\ e_2 = \frac{r_v}{u} \\ e_3 = n \end{cases}$，则 $\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{1+f'(u)^2}\,du \\ \omega_2 = u\,dv \end{cases}$

$$\omega_{12} = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}du + \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}dv = \frac{1}{\sqrt{1+f'(u)^2}}dv$$

$$\omega_{13} = \frac{L}{\sqrt{E}}du + \frac{M dv}{\sqrt{E}} = \frac{f''(u)}{1+f'(u)^2}du$$

$$\omega_{23} = \frac{M}{\sqrt{G}}du + \frac{N}{\sqrt{G}}dv = \frac{f'(u)}{\sqrt{1+f'(u)^2}}dv.$$

14. $\overline{\omega}_{12} = \omega_{12} + d\theta \Rightarrow d\overline{\omega}_{12} = d\omega_{12}$. $\omega_1 \wedge \omega_2 = \overline{\omega}_1 \wedge \overline{\omega}_2$.

故 $\dfrac{d\overline{\omega}_{12}}{\overline{\omega}_1 \wedge \overline{\omega}_2} = \dfrac{d\omega_{12}}{\omega_1 \wedge \omega_2}$.

15. $r(u,v) = (a\cos u\cos v,\ a\cos u\sin v,\ a\sin u)\ (-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2},\ 0 < v < 2\pi)$

$$\begin{cases} r_u = (-a\sin u\cos v, -a\sin u\sin v, a\cos u) \\ r_v = (-a\cos u\sin v, a\cos u\cos v, 0) \end{cases} \quad \begin{cases} E = a^2 \\ F = 0 \\ G = a^2\cos^2 u \end{cases}.$$

$$r_u \wedge r_v = (-a^2\cos^2 u\cos v, -a^2\cos^2 u\sin v, -a^2\cos u\sin u)$$

$$n = (-\cos u\cos v, -\cos u\sin v, -\sin u)$$

$$\begin{cases} r_{uu} = (-a\cos u\cos v, -a\cos u\sin v, -a\sin u) \\ r_{uv} = (a\sin u\sin v, -a\sin u\cos v, 0) \\ r_{vv} = (-a\cos u\cos v, -a\cos u\sin v, 0) \end{cases} \quad \begin{cases} L = a \\ M = 0 \\ N = a\cos^2 u \end{cases}.$$

(1) $\begin{cases} e_1 = \dfrac{r_u}{a} \\ e_2 = \dfrac{r_v}{a\cos u} \\ e_3 = n \end{cases}$

(2) $\omega_1 = a\,du$, $\omega_2 = a\cos u\,dv$

$$\begin{cases} \omega_{12} = -\sin u\,dv \\ \omega_{13} = du \\ \omega_{23} = \cos u\,dv \end{cases}$$

(3) $\mathrm{II} = \omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23} = a\,du^2 + a\cos^2 u\,dv^2$.

4.10

16. 设 e_1, e_2 是 S 之主方向向量场. $\tilde{n} = \pm n$.

(a) $\tilde{n} = n$, 取 $e_3 = n$. 设 $dr = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2$, $\mathcal{W}(e_i) = k_i e_i$.

则 $-dn = \mathcal{W}(dr) = \omega_1 \mathcal{W}(e_1) + \omega_2 \mathcal{W}(e_2) = k_1\omega_1 e_1 + k_2 \omega_2 e_2$.

$$dn = k_1\omega_1 e_1 + k_2\omega_2 e_2. \qquad \begin{cases} \omega_{13} = k_1\omega_1 \\ \omega_{23} = k_2\omega_2 \end{cases}$$

$$\tilde{\omega}_1 e_1 + \tilde{\omega}_2 e_2 = d\tilde{r} = (1-\lambda k_1)\omega_1 e_1 + (1-\lambda k_2)\omega_2 e_2$$

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_1 = (1-\lambda k_1)\omega_1 \\ \tilde{\omega}_2 = (1-\lambda k_2)\omega_2 \end{cases} \qquad \tilde{\omega}_1 \wedge \tilde{\omega}_2 = (1-\lambda k_1)(1-\lambda k_2)\omega_1\wedge\omega_2 = (1-2H\lambda+\lambda^2 K)\omega_1\wedge\omega_2$$

$$\tilde{\omega}_{12} = \langle de_1, e_2\rangle = \omega_{12}. \qquad K = -\frac{d\omega_{12}}{\omega_1\wedge\omega_2}$$

$$\tilde{K} = -\frac{d\tilde{\omega}_{12}}{\tilde{\omega}_1\wedge\tilde{\omega}_2} = -\frac{d\omega_{12}}{(1-2H\lambda+\lambda^2K)\,\omega_1\wedge\omega_2} = \frac{K}{1-2\lambda H+\lambda^2 K}.$$

$$H = +\frac{\omega_1\wedge\omega_{23} - \omega_2\wedge\omega_{13}}{2\,\omega_1\wedge\omega_2}$$

$$\tilde{H} = +\frac{\tilde{\omega}_1\wedge\tilde{\omega}_{23} - \tilde{\omega}_2\wedge\tilde{\omega}_{13}}{2\,\tilde{\omega}_1\wedge\tilde{\omega}_2} = +\frac{(1-\lambda k_1)\omega_1\wedge\omega_{23} - (1-\lambda k_2)\omega_2\wedge\omega_{13}}{2(1-2\lambda H+\lambda^2K)\,\omega_1\wedge\omega_2}$$

$$= +\frac{\omega_1\wedge\omega_{23} - \omega_2\wedge\omega_{13}}{2(1-2\lambda H+\lambda^2K)\,\omega_1\wedge\omega_2} - \frac{\lambda\,\omega_{13}\wedge\omega_{23} - \lambda\,\omega_{23}\wedge\omega_{13}}{2(1-2\lambda H+\lambda^2K)\,\omega_1\wedge\omega_2}$$

$$= \frac{H}{1-2\lambda H+\lambda^2K} - \frac{\lambda K}{1-2\lambda H+\lambda^2K}$$

$$= \frac{H-\lambda K}{1-2\lambda H+\lambda^2K}.$$

17. 由例6.5得非脐点邻域 若P是脐点，若∃邻域，全脐点则S是平面，而~~若P~~P无此邻域时，脐点不决定S之形状

故S是直纹面且Gauss曲率为0. 4.11

18. $K=0$.

19. Codazzi 方程 $\begin{cases} d\omega_{13} = \omega_{12}\wedge\omega_{23} \\ d\omega_{23} = \omega_{21}\wedge\omega_{13} \end{cases}$ $\begin{cases} \omega_{12} = -\dfrac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}du + \dfrac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}dv \\ \omega_{13} = \dfrac{L}{\sqrt{E}}du + \dfrac{M}{\sqrt{E}}dv \\ \omega_{23} = \dfrac{M}{\sqrt{G}}du + \dfrac{N}{\sqrt{G}}dv \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{L}{\sqrt{E}}\right)_v - \left(\dfrac{M}{\sqrt{E}}\right)_u - N\dfrac{(\sqrt{E})_v}{G} - M\dfrac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}} = 0, \\ \left(\dfrac{N}{\sqrt{G}}\right)_u - \left(\dfrac{M}{\sqrt{G}}\right)_v - L\dfrac{(\sqrt{G})_u}{E} - M\dfrac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}} = 0. \end{cases}$$

20. $\begin{cases} \omega_{13} = k_1\omega_1, \\ \omega_{23} = k_2\omega_2 \end{cases}$ Codazzi 方程 $\begin{cases} d\omega_{13} = \omega_{12}\wedge\omega_{23} \\ d\omega_{23} = \omega_{21}\wedge\omega_{13} \end{cases}$.

$$\begin{cases} dk_1\wedge\omega_1 + k_1 d\omega_1 = \omega_{12}\wedge k_2\omega_2 \\ dk_2\wedge\omega_2 + k_2 d\omega_2 = \omega_{21}\wedge k_1\omega_1, \end{cases} \Updownarrow$$

由 $\begin{cases} d\omega_1 = \omega_2\wedge\omega_{21} = \omega_{12}\wedge\omega_2 \\ d\omega_2 = \omega_1\wedge\omega_{12} = \omega_{21}\wedge\omega_1 \end{cases}$ $\begin{cases} dk_1\wedge\omega_1 = (k_2-k_1)\,\omega_{12}\wedge\omega_2, \\ dk_2\wedge\omega_2 = (k_1-k_2)\,\omega_{21}\wedge\omega_1. \end{cases}$

习题五

1. (1) $K=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v+\left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right)=0$ (2) $K=1$

(3) $K=4c$ (4) $K=0=-\frac{d\omega_{12}}{\omega_1\wedge\omega_2}$.

2. 设 $\tilde{I}=\tilde{\omega}_1^2+\tilde{\omega}_2^2$. 令 $\omega_i=\sqrt{\lambda}\,\tilde{\omega}_i$，则 $I=\lambda\tilde{I}=\omega_1^2+\omega_2^2$.

$$\begin{cases} d\tilde{\omega}_1=\tilde{\omega}_{12}\wedge\tilde{\omega}_2 \\ d\tilde{\omega}_2=\tilde{\omega}_{21}\wedge\tilde{\omega}_1\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} d\omega_1=\tilde{\omega}_{12}\wedge\omega_2 \\ d\omega_2=\tilde{\omega}_{21}\wedge\omega_1\end{cases} \Rightarrow \omega_{12}=\tilde{\omega}_{12}.$$

$$K=-\frac{d\omega_{12}}{\omega_1\wedge\omega_2}=-\frac{1}{\lambda}\frac{d\tilde{\omega}_{12}}{\tilde{\omega}_1\wedge\tilde{\omega}_2}=\frac{1}{\lambda}\tilde{K}.$$

3. (1) $D=E^2$. $\begin{cases} r_u=(a,0,au) \\ r_v=(0,b,bv)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E=a^2(1+u^2) \\ F=abuv \\ G=b^2(1+v^2)\end{cases} \Rightarrow ab\neq 0$

$r_u\wedge r_v=(-abu,-abv,ab)$ $n=\frac{\operatorname{sgn}(ab)}{\sqrt{1+u^2+v^2}}(-u,-v,1)$

$$\begin{cases} r_{uu}=(0,0,a) \\ r_{uv}=\vec{0} \\ r_{vv}=(0,0,b)\end{cases} \quad \begin{cases} L=\frac{\operatorname{sgn}(ab)a}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \\ M=0 \\ N=\frac{\operatorname{sgn}(ab)b}{\sqrt{1+u^2+v^2}}\end{cases}. \quad K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{1}{ab(1+u^2+v^2)^2}$$
$$=\frac{1}{\tilde{a}\tilde{b}(1+u^2+v^2)^2}=\tilde{K}(u,v).$$

(2) 假设 S 与 $\tilde{S}$ 之间有等距变换：$D\xrightarrow{\sigma}\tilde{D}$ $(u,v)\mapsto(\tilde{u}(u,v),\tilde{v}(u,v))$ 则

$$\frac{1}{ab(1+u^2+v^2)}=K(u,v)=\tilde{K}(u,v)=\frac{1}{\tilde{a}\tilde{b}(1+\tilde{u}^2+\tilde{v}^2)}.$$

$\Longleftrightarrow$ $\frac{1+\tilde{u}^2+\tilde{v}^2}{1+u^2+v^2}=c:=\frac{ab}{\tilde{a}\tilde{b}}$. $\Longleftrightarrow$ 一阶偏导数均为0且在一点值为 c

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{2(\tilde{u}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial u}+\tilde{v}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial u})(1+u^2+v^2)-2u(1+\tilde{u}^2+\tilde{v}^2)}{(1+u^2+v^2)^2}=0 \\ \frac{2(\tilde{u}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial v}+\tilde{v}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial v})-2u(1+\tilde{u}^2+\tilde{v}^2)}{(1+u^2+v^2)^2}=0\end{cases} \& \ 1+\tilde{u}^2(0,0)+\tilde{v}^2(0,0)=c.$$

$$\Longleftrightarrow (*) \begin{cases} \tilde{u}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial u}+\tilde{v}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial u}=cu \\ \tilde{v}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial v}+\tilde{v}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial v}=cv\end{cases} \& \ 1+\tilde{u}^2(0,0)+\tilde{v}^2(0,0)=c.$$

$O=(0,0)$

取$(u,v)=(0,0)$ $\Longrightarrow \begin{cases}\tilde u(0,0)=0\\ \tilde v(0,0)=0\end{cases}$ & $c=1 \iff \sigma(O)=O$ & $ab=\tilde a\tilde b$.

将(*)再求一次偏导数 $\Longrightarrow \begin{cases}\left(\frac{\partial\tilde u}{\partial u}\right)^2+\tilde u\frac{\partial^2\tilde u}{\partial u^2}+\left(\frac{\partial\tilde v}{\partial u}\right)^2+\tilde v\frac{\partial^2\tilde v}{\partial u^2}=1\\ \frac{\partial\tilde u}{\partial u}\cdot\frac{\partial\tilde u}{\partial v}+\tilde u\frac{\partial^2\tilde u}{\partial u\partial v}+\frac{\partial\tilde v}{\partial u}\cdot\frac{\partial\tilde v}{\partial v}+\tilde v\frac{\partial^2\tilde v}{\partial u\partial v}=0\\ \left(\frac{\partial\tilde u}{\partial v}\right)^2+\tilde u\frac{\partial^2\tilde u}{\partial v^2}+\left(\frac{\partial\tilde v}{\partial v}\right)^2+\tilde v\frac{\partial^2\tilde v}{\partial v^2}=1\end{cases}$

取$(u,v)=(0,0)$ $\Longrightarrow \begin{cases}\left(\frac{\partial\tilde u}{\partial u}(0)\right)^2+\left(\frac{\partial\tilde v}{\partial u}(0)\right)^2=1\\ \frac{\partial\tilde u}{\partial u}(0)\frac{\partial\tilde u}{\partial v}(0)+\frac{\partial\tilde v}{\partial u}(0)\frac{\partial\tilde v}{\partial v}(0)=0\\ \left(\frac{\partial\tilde u}{\partial v}(0)\right)^2+\left(\frac{\partial\tilde v}{\partial v}(0)\right)^2=1\end{cases} \iff J_0$ 是正交阵

$$\iff J_0=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\delta\sin\theta & \delta\cos\theta\end{pmatrix},\ \theta\text{是固定角度},\ \delta=\pm1.$$

由σ是等距，
$$\begin{pmatrix}a^2(1+u^2) & abuv\\ abuv & b^2(1+v^2)\end{pmatrix}=J_\sigma\begin{pmatrix}\tilde a^2(1+\tilde u^2) & \tilde a\tilde b\tilde u\tilde v\\ \tilde a\tilde b\tilde u\tilde v & \tilde b^2(1+\tilde v^2)\end{pmatrix}J_\sigma^t$$

取$(u,v)=(0,0)$ $\Longrightarrow$
$$\begin{pmatrix}a^2 & 0\\ 0 & b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\delta\sin\theta & \delta\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde a^2 & 0\\ 0 & \tilde b^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\delta\sin\theta\\ \sin\theta & \delta\cos\theta\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\tilde a^2\cos^2\theta+\tilde b^2\sin^2\theta & \delta(\tilde b^2-\tilde a^2)\sin\theta\cos\theta\\ \delta(\tilde b^2-\tilde a^2)\sin\theta\cos\theta & \tilde a^2\sin^2\theta+\tilde b^2\cos^2\theta\end{pmatrix}$$

$$\iff\begin{cases}\tilde a^2\cos^2\theta+\tilde b^2\sin^2\theta=a^2\\ (\tilde b^2-\tilde a^2)\sin\theta\cos\theta=0\\ \tilde a^2\sin^2\theta+\tilde b^2\cos^2\theta=b^2\end{cases}\iff\begin{cases}ab=\tilde a\tilde b,\\ (\tilde a^2,\tilde b^2)=(a^2\ b^2)\text{或}(b^2\ a^2)\end{cases}$$

在此条件下，S与$\tilde S$之间都存在等距：
$$D\longrightarrow\tilde D$$
$$(u,v)\longmapsto(\tilde u,\tilde v)=(\pm u,\pm v)\text{或}(\pm v,\pm u).$$

7. (1). $\omega_1=\sqrt{U+V}\,du,\ \omega_2=\sqrt{U+V}\,dv \Rightarrow \omega_1\wedge\omega_2=(U+V)\,du\wedge dv$.

$$\begin{cases} d\omega_1 = -\dfrac{V'(v)}{2\sqrt{U+V}}\,du\wedge dv = -\dfrac{V'(v)}{2(U+V)^{\frac{3}{2}}}\,\omega_1\wedge\omega_2 \\ d\omega_2 = \dfrac{U'(u)}{2\sqrt{U+V}}\,du\wedge dv = \dfrac{U'(u)}{2(U+V)^{\frac{3}{2}}}\,\omega_1\wedge\omega_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \omega_{12} = -\frac{V'(v)}{2(U+V)^{\frac{3}{2}}}\,\omega_1 + \frac{U'(u)}{2(U+V)^{\frac{3}{2}}}\,\omega_2 = -\frac{V'(v)\,du}{2(U+V)} + \frac{U'(u)\,dv}{2(U+V)}.$$

$$K = -\frac{d\omega_{12}}{\omega_1\wedge\omega_2} = -\frac{(U''+V'')(U+V)-U'^2-V'^2}{2(U+V)^3}.$$

(2) $\omega_1=\dfrac{du-2v\,dv}{2\sqrt{u-v^2}},\ \omega_2=dv \qquad \omega_1\wedge\omega_2=\dfrac{1}{2\sqrt{u-v^2}}\,du\wedge dv$

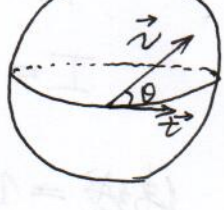
$$\begin{cases} d\omega_1 = \dfrac{v}{(u-v^2)^{\frac{3}{2}}}\,du\wedge dv = \dfrac{2v}{u-v^2}\,\omega_1\wedge\omega_2 \\ d\omega_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \omega_{12} = \frac{2v}{u-v^2}\,\omega_1 = \frac{v\,du-2v^2\,dv}{(u-v^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\Rightarrow d\omega_{12} = -\frac{du\wedge dv}{(u-v^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$K = -\frac{d\omega_{12}}{\omega_1\wedge\omega_2} = \frac{2}{u-v^2}.$$

8. 赤道是测地线，其单位切向量场 $\vec{t}$ 是平行的。



对任意切向量 v_0，它平移(沿赤道)保持与 $\vec{t}$ 的内积，从而夹角不变。

由平移的唯一性，v_0 平移得到：切向量场 $\vec{v}$ 与 $\vec{t}$ 保持固定夹角 $\theta\in[0,2\pi)$

9. $\vec{v}$ 平行 $\Leftrightarrow 0=\dfrac{Dv}{dt}=\left(\dfrac{df^\alpha}{dt}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}f^\beta\dfrac{du^\gamma}{dt}\right)r_\alpha$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2E^{\frac{3}{2}}}\dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^\alpha}\dfrac{du^\alpha}{dt}+\Gamma^1_{1\alpha}\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{du^\alpha}{dt}=0 \quad (\text{恒成立}) \\ \Gamma^2_{1\alpha}\dfrac{du^\alpha}{dt}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \Gamma^2_{1\alpha}\frac{du^\alpha}{dt}=0.$$

10. (1) $I = a^2du^2 + a^2\cos^2 u dv^2$

Liouville公式 $\Rightarrow k_g = \frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial \ln E}{\partial v}\cos\theta + \frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial \ln G}{\partial u}\sin\theta$

$= \frac{d\theta}{ds} - \frac{a\sin u}{a\cos u}\sin\theta \quad \left(\sin\theta = \sqrt{G}\frac{dv}{ds} = a\cos u\frac{dv}{ds}\right)$

$= \frac{d\theta}{ds} - \sin u\frac{dv}{ds}$

(2) 纬圆 = v-线. 由(1), $k_g = \frac{d\theta}{ds} - \sin u_0 \frac{dv}{ds} \quad \left(\frac{dv}{ds} = \frac{1}{a\cos u_0}\right)$

$C_{u_0}: r(u_0, v)$ $\quad \overset{\theta=\frac{\pi}{2}}{=} -\sin u_0 \frac{1}{a\cos u_0}$

$= -\frac{1}{a}\tan u_0.$

11. $r(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)) \quad (f>0)$

$I = (f'^2 + g'^2)du^2 + f^2dv^2.$

纬线 = v-线 $\quad k_g(C_{u_0}) = \frac{1}{2\sqrt{E(u_0,v)}}\frac{\partial \ln G(u_0,v)}{\partial u} = \frac{f'}{f\sqrt{f'^2+g'^2}}.$

经线 = u-线 $\quad k_g(C_{v_0}) = -\frac{1}{2\sqrt{G(u,v_0)}}\frac{\partial \ln E(u,v_0)}{\partial v} = 0.$

12. (1) $\lambda_1 = \langle \frac{de_1}{ds}, e_2 \rangle = k_g, \quad \lambda_2 = \langle \frac{de_1}{ds}, e_3 \rangle = k_n.$

(2) $\lambda_3 = \langle \frac{de_2}{ds}, e_3 \rangle = \tau_g, \quad e_2 = e_3 \wedge e_1, \; \dot{e}_2 = \dot{e}_3 \wedge e_1 + e_3 \wedge \dot{e}_1$

$= \langle \dot{e}_3 \wedge e_1, e_3 \rangle + \langle e_3 \wedge \dot{e}_1, e_3 \rangle$

$= (\dot{e}_3, e_1, e_3) + (e_3, e_1, e_3)$

$= (e_3, \dot{e}_3, e_1) = (n, \dot{n}, \dot{r}).$

13. 可设 t 是 $C: r(t)$ 之弧长参数. 令 $e_1 = v,\ e_2 = n\wedge v,\ e_3 = n$.

则 $w = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2$, $\quad n\wedge w = -\sin\theta\, e_1 + \cos\theta\, e_2$.

$$\frac{Dw}{dt} = \frac{d\theta}{dt}(-\sin\theta\, e_1 + \cos\theta\, e_2) + \cos\theta \frac{De_1}{dt} + \sin\theta \frac{De_2}{dt}$$

$$\xrightarrow{\langle n\wedge w,\cdot\rangle} \left\langle \frac{Dw}{dt}, n\wedge w\right\rangle = \frac{d\theta}{dt} + \cos^2\theta \left\langle \frac{De_1}{dt}, e_2\right\rangle - \sin^2\theta \left\langle \frac{De_2}{dt}, e_1\right\rangle$$

$$\overset{\langle \frac{De_1}{dt}, e_2\rangle + \langle \frac{De_2}{dt}, e_1\rangle = 0}{=} \frac{d\theta}{dt} + \left\langle \frac{Dv}{dt}, n\wedge v\right\rangle.$$

14. $I = (f'^2+g'^2)du^2 + f^2 dv^2$.

测地线 C 满足:
$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\theta}{ds} &= -\frac{f'}{f\sqrt{f'^2+g'^2}}\sin\theta \\ \frac{du}{ds} &= \frac{\cos\theta}{\sqrt{f'^2+g'^2}} \\ f\frac{dv}{ds} &= \sin\theta \end{aligned}\right. \Rightarrow d(\ln\sin\theta) = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta = -\frac{f'}{f}du = -d(\ln f)$$

$\Rightarrow f\sin\theta =$ 常数.

15. $I = (1+f'^2)du^2 + u^2 dv^2$. 设 $C: r(s)$ 是测地线 (弧长参数)

则由 Liouville 公式,
$$\left\{\begin{aligned} \frac{du}{ds} &= \frac{\cos\theta}{\sqrt{1+f'^2}} & ① \\ \frac{dv}{ds} &= \frac{\sin\theta}{u} & ② \\ \frac{d\theta}{ds} &= -\frac{\sin\theta}{u\sqrt{1+f'^2}} & ③ \end{aligned}\right.$$

$\frac{②}{①} \Rightarrow \frac{dv}{du} = \frac{\sqrt{1+f'^2}}{u}\tan\theta$, $\quad \frac{③}{①} \Rightarrow \frac{d\theta}{du} = -\frac{\tan\theta}{u}$

$u\sin\theta = c$ 常数 $\Rightarrow \cos\theta = \sqrt{1-\frac{c^2}{u^2}}$, $\tan\theta = \frac{c}{\sqrt{u^2-c^2}}$.

$$\frac{dv}{du}=\frac{c\sqrt{1+f'^2}}{u\sqrt{u^2-c^2}} \Rightarrow v=v_0+\int_{v_0}^{u}\frac{c\sqrt{1+f'^2}}{u\sqrt{u^2-c^2}}du.$$

$C=0$时，C是经线.

16. $$K=-\frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}} \Rightarrow (\sqrt{G})_{uu}=-K\sqrt{G}$$

$$G_u=2\sqrt{G}(\sqrt{G})_u,\quad G_{uu}=2\left(((\sqrt{G})_u)^2+2\sqrt{G}(\sqrt{G})_{uu}\right)$$

$$G_{uu}(0,v)=2(\sqrt{G})_{uu}(0,v)=-2K(0,v).$$

将$G(u,v)$在$u=0$展开：

$$G(u,v)=G(0,v)+uG_u(0,v)+\frac{u^2}{2}G_{uu}(0,v)+o(u^2)$$
$$=1-u^2K(0,v)+o(u^2)$$

17. $\mathrm{I}=du^2+Gdv^2 \quad G(0,v)=1$，由$u=0$是测地线，

$$0=k_g(C_{u_0})=\frac{1}{2\sqrt{E(0,v)}}\frac{G_u(0,v)}{G(0,v)} \Leftrightarrow G_u(0,v)=0.$$

$$K=-\frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}=\text{常数} \Leftrightarrow (\sqrt{G})_{uu}+K\sqrt{G}=0$$

(1) $K=0$. $(\sqrt{G})_{uu}=0 \Rightarrow (\sqrt{G})_u=\frac{G_u}{2\sqrt{G}}=f(v) \xrightarrow[G_u(0,v)=0]{G(0,v)=1} f(v)=0$

$\Rightarrow \sqrt{G}=g(v) \xrightarrow{G(0,v)=1} g(v)=1 \Rightarrow G=1 \Rightarrow \mathrm{I}=du^2+dv^2$

(2) $K=\frac{1}{a^2}>0$. $(\sqrt{G})_{uu}+a^2\sqrt{G}=0 \Rightarrow \sqrt{G}=f(v)\cos\frac{u}{a}+g(v)\sin\frac{u}{a} \xrightarrow{G(0,v)=1} f(v)=1$

$G=\left(\cos\frac{u}{a}+g(v)\sin\frac{u}{a}\right)^2 \Rightarrow G_u=2\left(\cos\frac{u}{a}+g(v)\sin\frac{u}{a}\right)\left(-\frac{1}{a}f(v)\sin\frac{u}{a}+\frac{1}{a}g(v)\cos\frac{u}{a}\right)$

$\xrightarrow{G(0,v)=1} g(v)=0 \Rightarrow G=\cos^2\frac{u}{a}$

$\Rightarrow \mathrm{I}=du^2+\cos^2\frac{u}{a}dv^2=du^2+\cos^2(\sqrt{K}u)dv^2.$

(3) $K=-\frac{1}{a^2}>0$. $(\sqrt{G})_{uu}-\frac{1}{a^2}\sqrt{G}=0 \Rightarrow G=\cosh^2\frac{u}{a}=\cosh^2(\sqrt{-K}u)$

$\Rightarrow \mathrm{I}=du^2+\cosh^2(\sqrt{-K}u)dv^2.$

18. 取 P 为原点的局部测地极坐标系 (ρ,θ)，$\mathrm{I}=d\rho^2+Gd\theta^2$，$\lim\limits_{\rho\to 0}\sqrt{G}=0$，$\lim\limits_{\rho\to 0}(\sqrt{G})_\rho=1$.

$$K=-\frac{(\sqrt{G})_{\rho\rho}}{\sqrt{G}} \Leftrightarrow (\sqrt{G})_{\rho\rho}=-K\sqrt{G} \Rightarrow \lim_{\rho\to 0}(\sqrt{G})_{\rho\rho}=0$$

$$(\sqrt{G})_{\rho\rho\rho}=-K_\rho\sqrt{G}-K(\sqrt{G})_{\rho\rho} \Rightarrow \lim_{\rho\to 0}(\sqrt{G})_{\rho\rho\rho}=-K(P)$$

将 $\sqrt{G}$ 在 $\rho\to 0^+$ 展开：

$$\sqrt{G}=\sqrt{G(0^+,\theta)}+\rho(\sqrt{G_\rho(0^+,\theta)})_\rho+\frac{\rho^2}{2}(\sqrt{G(0^+,\theta)})_{\rho\rho}+\frac{\rho^3}{6}(\sqrt{G(0^+,\theta)})_{\rho\rho\rho}+o(\rho^3)$$

$$=\rho-\frac{\rho^3}{6}K(P)+o(\rho^3)$$

由 $L_r=\int_0^{2\pi}\sqrt{G(r,\theta)}d\theta=\int_0^{2\pi}(r-\frac{r^3}{6}K(P)+o(r^3))d\theta=2\pi(r-\frac{r^3}{6}K(P)+o(r^3))$，

$$K(P)=\lim_{r\to 0^+}\frac{3}{\pi}\frac{2\pi r-L_r}{r^3}.$$

由 $A_r=\int_0^r\int_0^{2\pi}\sqrt{G(\rho,\theta)}\,d\theta d\rho=\int_0^r\int_0^{2\pi}(\rho-\frac{\rho^3}{6}K(P)+o(\rho^3))d\theta d\rho$

$$=\int_0^r(2\pi(\rho-\frac{\rho^3}{6}K(P))+o(\rho^3))d\rho=\pi r^2-\frac{\pi}{12}r^4K(P)+o(r^4),$$

$$K(P)=\lim_{r\to 0^+}\frac{12}{\pi}\frac{\pi r^2-A_r}{r^4}.$$

19. 测地圆 $C_{\rho_0}:r(\rho_0,\theta)$.

由 P.127，
$$\mathrm{I}=\begin{cases} d\rho^2+\rho^2d\theta^2, & K=0\\ d\rho^2+\frac{1}{K}\sin^2(\sqrt{K}\rho)d\theta^2, & K>0\\ d\rho^2-\frac{1}{K}\sinh^2(\sqrt{-K}\rho)d\theta^2, & K<0\end{cases}.$$

由 Liouville 公式，
$$k_g(C_{\rho_0})=\begin{cases}\frac{1}{\rho_0}, & K=0\\ \frac{\sqrt{K}\cos(\sqrt{K}\rho_0)}{\sin(\sqrt{K}\rho_0)}, & K>0\\ \frac{\sqrt{-K}\cosh(\sqrt{-K}\rho_0)}{\sinh(\sqrt{-K}\rho_0)}, & K<0\end{cases}.$$

20. $\forall p\in S$，取 P 附近的正交参数系 (u,v) 使得 v 线是一族测地线

则 $I = Edu^2 + Gdv^2$. 由 $k_g(C_v) = -\frac{1}{\sqrt{G}}\cdot\frac{E_v}{E} = 0$，$E_v = 0$.

故 $E(u,v) = E(u)$. 设另一族测地线与 v 线夹角为 $\theta_0 \in (0,\pi)$

对过 P 之测地线 C_p 应用 Liouville 公式，

$$0 = k_g(C_p) = -\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{E_v}{E}\cos\theta_0 + \frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{G_u}{G}\sin\theta_0$$

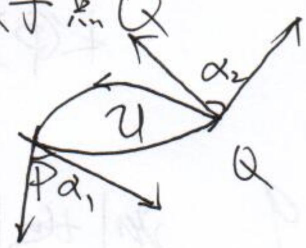
$$= \frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{G_u}{G}\sin\theta_0$$

故 $G_u = 0$. $G(u,v) = G(v)$. 作变换 $\tilde{u} = \int\sqrt{E}du$, $\tilde{v} = \int\sqrt{G}dv$

则 $I = Edu^2 + Gdv^2 = d\tilde{u}^2 + d\tilde{v}^2$.

故 $S \sim$ 等距 平面.

21. 假设由 P 出发的两条测地线相交于点 Q



考虑如图：二边形. 由 Gauss-Bonnet 公式，

$$\iint_U KdA + \alpha_1 + \alpha_2 = 2\pi, \quad \alpha_i \in (0,\pi)$$

故
$$2\pi > \alpha_1 + \alpha_2 = 2\pi - \iint_U KdA \overset{K<0}{>} 2\pi, \text{矛盾}.$$

22. 由 Gauss-Bonnet 公式，（β_i 是外角）

$$\iint_A K d\sigma + \int_{\partial A} k_g ds + \sum_{i=1}^{4} \beta_i = 2\pi$$

由 $\alpha_i + \beta_i = \pi$， $\iint_A K d\sigma + \int_{\partial A} k_g ds = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i - 2\pi$.

23. 由 $d\tilde{s}^2 = d\tilde{u}^2 + e^{\frac{2\tilde{u}}{a}} d\tilde{v}^2 = e^{\frac{2\tilde{u}}{a}} (e^{-\frac{2\tilde{u}}{a}} d\tilde{u}^2 + d\tilde{v}^2)$,

（作变换 $\begin{cases} u = \frac{1}{a}\tilde{v} \\ v = e^{-\frac{\tilde{u}}{a}} \end{cases}$，则） $= \frac{a^2}{v^2}(du^2 + dv^2)$.

24. "$\Rightarrow$". C 单位切向量场 $\vec{t}(s) = \vec{v}(t) \cdot \frac{dt}{ds}$.

$$C \text{ 是测地线} \Leftrightarrow \vec{0} = \frac{D\vec{t}(s)}{ds} = \frac{d^2t}{ds^2}\vec{t}(s) + \frac{dt}{ds}\frac{D\vec{v}(t)}{ds}$$

$$= \frac{dt}{ds}\left(\frac{d^2t}{ds^2}\vec{v}(t) + \frac{dt}{ds}\frac{D\vec{v}(t)}{dt}\right)$$

取 $\lambda = -\frac{d^2t}{ds^2} \cdot \frac{ds}{dt}$，则 $\frac{D\vec{v}(t)}{dt} + \lambda \vec{v}(t) = 0$.

"$\Leftarrow$". $\vec{v}(t) = \vec{t}(s)\frac{ds}{dt}$.

$$\vec{0} = \frac{D\vec{v}(t)}{dt} + \lambda\vec{v}(t) = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{t}(s) + \frac{ds}{dt}\frac{ds}{dt}\frac{D\vec{t}(s)}{ds} + \lambda\frac{ds}{dt}\vec{t}(s)$$

$$= \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{D\vec{t}(s)}{ds} + \left(\lambda\frac{ds}{dt} + \frac{d^2s}{dt^2}\right)\vec{t}(s)$$

取 $\vec{n}(s)$ 是沿 C 的单位切向量场，使得 $\vec{n} \perp \vec{t}$ 且 $\vec{n}, \vec{t}$ 与 $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ 定向一致.

则 $\xrightarrow{\langle \vec{n}(s), \cdot \rangle}$ $0 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 k_g \Rightarrow k_g = 0$.