

四川大学

《现代谱估计》课程报告



学	院:	电子信息学院
专	业:	信号与信息处理
姓	名:	崔 敖
学	号:	2014222050111
任 课 教 师:		夏秀渝
成	绩:	
评	语:	

目 录

第 1 章 谱估计的经典法	1
1.1 周期图法与 BT 法	1
1.1.1 周期图法	1
1.1.2 BT 法	2
1.1.3 周期图法与 BT 法的仿真实验	4
1.1.3.1 信号一：高斯白噪声污染的两个正弦信号	4
1.1.3.2 信号二：宽带 ARMA 过程	6
1.1.3.3 信号三：窄带 ARMA 过程	7
1.1.4 周期图法与 BT 法的偏差和方差分析	9
1.2 周期图法的改进方法	13
1.2.1 平均周期图法	13
1.2.2 平滑周期图法	16
1.3 本章小结	18
第 2 章 参数谱估计方法	20
2.1 随机时间序列的有理传输函数模型	20
2.2 自回归 (AR) 模型的功率谱估计	21
2.2.1 Yule-Walker 方程	21
2.2.2 Levinson-Durbin 算法	22
2.2.3 AR 参数的批估值	23
2.2.4 格形预测器	23
2.2.5 AR 参数的 Burg 算法估值	25

2.2.6 AR 参数的阶数预测	26
2.2.6.1 估计均方误差准则	26
2.2.6.2 最终预测误差准则 (FPE)	26
2.2.7 批估值与 Burg 法的仿真实验	27
2.2.7.1 信号四 宽带 AR 过程	27
2.2.7.2 信号五 窄带 AR 过程	31
2.3 滑动平均 (MA) 模型的功率谱估计	36
2.4 ARMA 模型的功率谱估计	37
2.5 Pisarenko 谐波分解法	41
2.6 本章小结	44
附录 A 信号一的仿真结果	46
附录 B 信号二的仿真结果	56
附录 C 信号三的仿真结果	66
附录 D 信号四的仿真结果	76
附录 E 信号五的仿真结果	82

第1章 谱估计的经典法

谱估计的经典法又称为非参数谱估值法,较常用的方法为周期图法和 Blackman-Tukey (一些简称为 BT 法)。对于周期图法,其本质是从各态历经随机过程的功率谱定义式出发从而得到功率谱的估计量;对于 BT 法,其本质是利用平稳随机信号的自相关函数与其功率谱密度是一对傅里叶变换对这一性质(维纳-辛钦定理),通过估计信号的自相关函数得到其功率谱密度的估计量。

本章,将就离散平稳随机过程中谱估计的经典法及其改进方法进行仿真实验与分析。

1.1 周期图法与 BT 法

1.1.1 周期图法

对于一个各态历经过程 $X(t)$,由功率谱密度函数 $G_X(\omega)$ 的定义,有:

$$G_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_T(\omega, \xi)|^2 \quad (1.1)$$

其中, $X_T(\omega, \xi)$ 为 $x(t, \xi)$ 在 $2T$ 时间上截断后的傅里叶变换。

而对这个随机过程中的一次观测结果,经过理想采样后,其功率谱密度函数 $G_X(\omega)$ 为:

$$G_X(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} |X_N(\omega)|^2 \quad (1.2)$$

将这个各态历经过程取一次有限长度 (N 点) 的观测结果,则对于这个随机过程的功率谱估计值记为 $\hat{G}_X(\omega)$, 为:

$$\hat{G}_X(\omega) = \frac{1}{N} |X_N(\omega)|^2 \quad (1.3)$$

其中, $X_N(\omega)$ 为 $x_N(0 \leq n \leq N-1)$ 的 N 点离散傅里叶变换 (DFT)。

使用(1.3)式进行功率谱估计的方法称为周期图法, 周期图法的一般计算过程如图 1-1 所示。

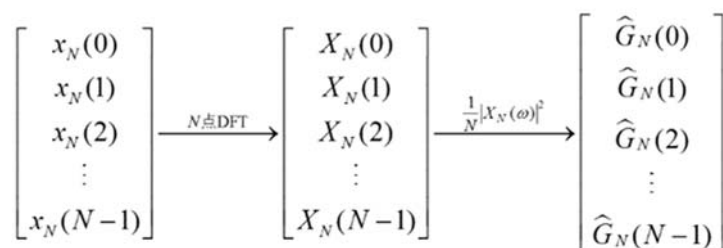


图 1-1 周期图法进行功率谱估值的计算过程

如图 1-2 所示, 为周期图法 ($N=256$) 进行功率谱估值的一个例子。

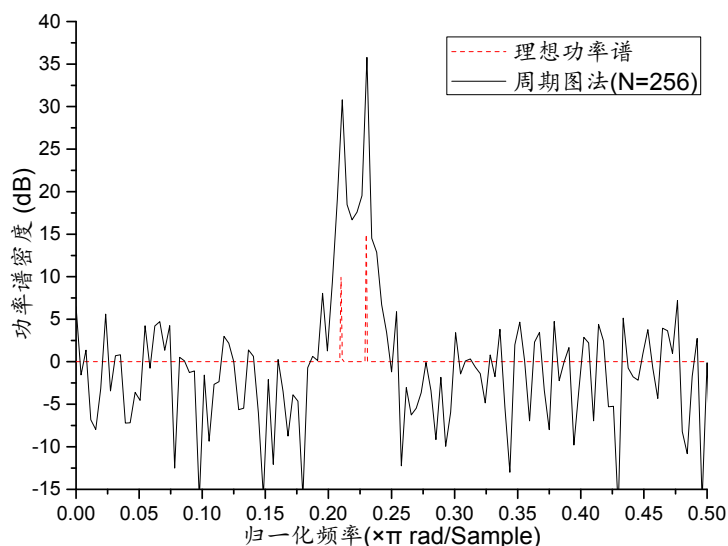


图 1-2 周期图法进行功率谱估值举例 ($N=256$)

1.1.2 BT 法

由维纳-辛钦定理出发, 可以得到这个定理的离散形式:

$$G_X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_X(k) e^{-j\omega k T_s} \quad (1.4)$$

式中 $R_X(k)$ 为平稳随机过程 $X(n)$ 的自相关函数。

用有限长度为 N 的离散平稳随机信号 $x(n), n=0, 1, \dots, N-1$ 的自相关函数 $\hat{R}_X(k), k=-N+1, \dots, 0, \dots, N-1$ 作为真实自相关函数 $R_X(k), -\infty < k < \infty$ 的估计

量来估计这个随机过程的功率谱密度：

$$\hat{G}_X(\omega) = \sum_{k=-N}^N \hat{R}_X(k) e^{-j\omega k T_s} \quad (1.5)$$

为避免可能在某些频率上的功率谱密度出现负值的情况，常用如(1.6)式所示的方法对 $R_X(k)$ 进行有偏渐进无偏估计，得到 $\hat{R}_X(k)$ 。

$$\hat{R}_X(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-|k|-1} x_i x_{i+|k|}, k=0,1,\dots,N-1 \quad (1.6)$$

使用(1.5)式进行功率谱估计的方法称为 BT 法，BT 法的一般计算过程如图 1-3 所示。

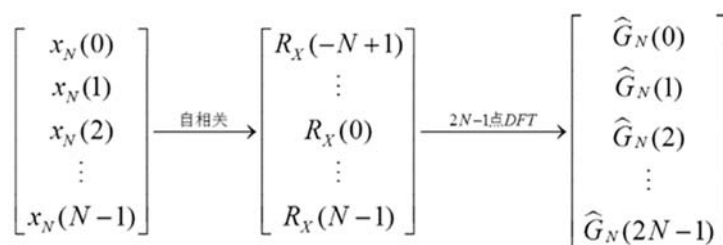


图 1-3 BT 法进行功率谱估值的计算过程

如图 1-4 所示，为 BT 法（ $N=256$ ）进行功率谱估值的一个例子。

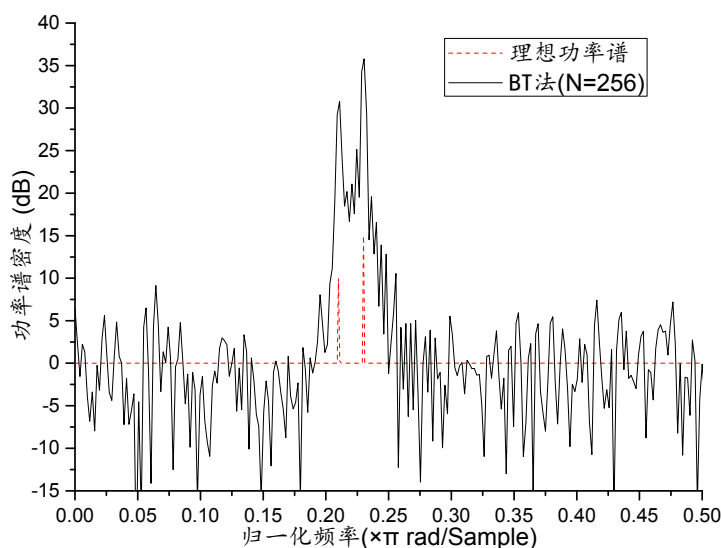


图 1-4 BT 法进行功率谱估值举例（ $N=256$ ）

1.1.3 周期图法与 BT 法的仿真实验

1.1.3.1 信号一：高斯白噪声污染的两个正弦信号

频率($\times\pi$ rad / Sample)	$f_1 = 0.21$	$f_2 = 0.23$
信噪比(dB)	$SNR_1 = 10$	$SNR_2 = 15$

表 1-1 信号一的频率及信噪比

两个正弦信号的频率和信噪比如错误!未找到引用源。所示, 待估计信号 x_k 的表达式如式所示, 其中 φ_1, φ_2 为互相独立的以 $[0, 2\pi]$ 为均匀分布的随机数, n_k 为 0 均值的高斯白噪声。

$$x_k = a_1 \sin(2\pi f_1 k + \varphi_1) + a_2 \sin(2\pi f_2 k + \varphi_2) + n_k \quad (1.7)$$

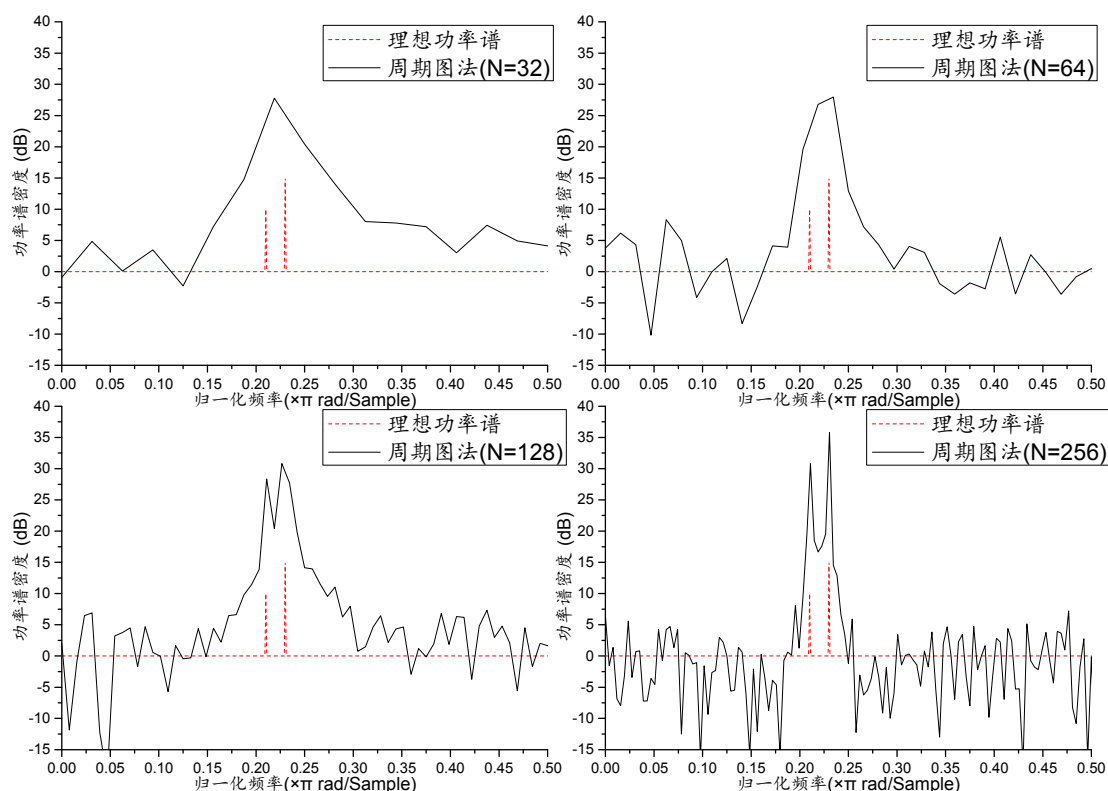


图 1-5 周期图法对信号一的功率谱估计

(数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256)

图 1-5 为待估计信号 x_k 为信号一时分别取样本长度 N 为 32、64、128 和 256 时使用周期图法对信号一进行功率谱估计的结果。可以从图上观察到的是, 当 N 较小时 ($N \leq 64$), 估计出的功率谱无法区分真实谱

的谱峰，并会在 0.21~0.23 这段频率范围内合成一个共同的谱峰，同时估计出的功率谱波动较小；随着 N 的增大 ($N > 64$)，谱分辨力逐渐上升，谱峰逐渐分开，分别对应到 0.21 和 0.23，但同时波动逐渐增大，功率谱上出现的“毛刺”逐渐增多。不仅有上述变化，还可以注意到无论 N 的取值如何，估计出的谱峰都会比真实谱峰高¹。

图 1-6 为待估计信号 x_k 为信号一时分别取样本长度 N 为 32、64、128 和 256 时使用 BT 法对信号一进行功率谱估计的结果。其特点与图 1-5 一致，随着 N 的增大，频率分辨力逐渐增加，波动逐渐增加，并且估计出的谱峰都会比真实谱峰高。

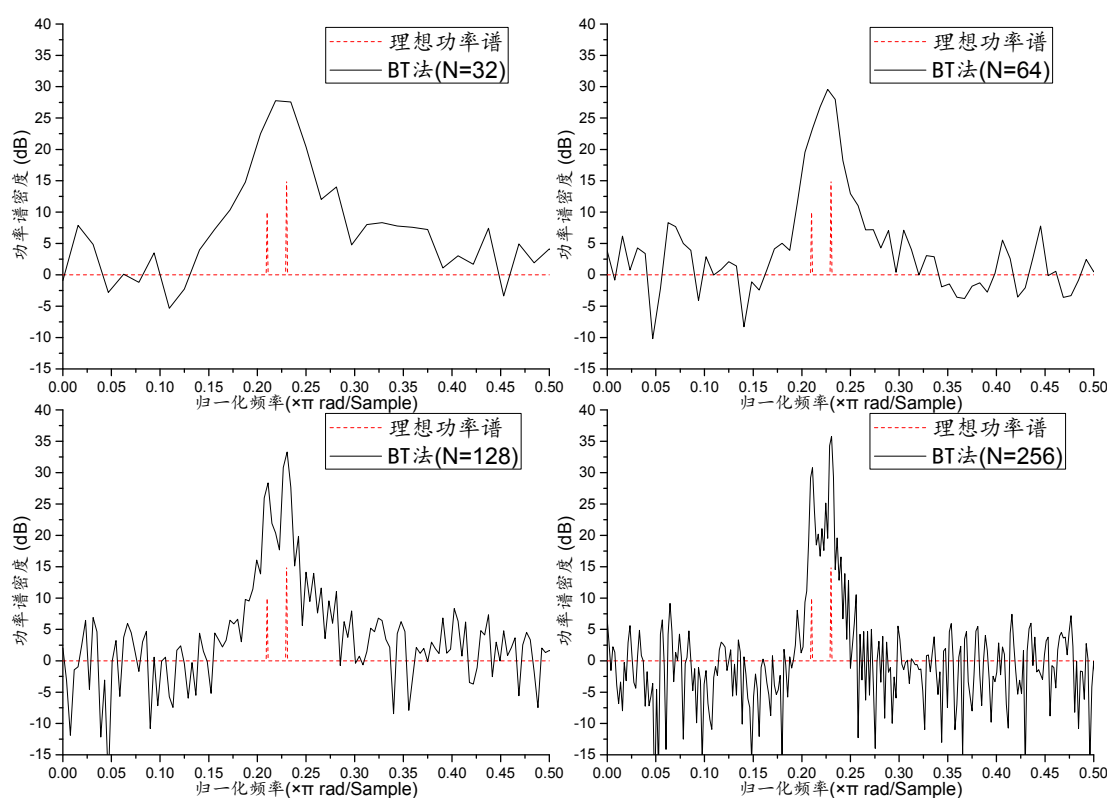


图 1-6 BT 法对信号一的功率谱估计
(数据长度 N 分别取 64、256、512 和 2048)

¹ 这也是一直困扰我的问题，即便从均值值上来看，平均后的谱峰比真实谱峰都要高得多。不管从偏差、方差分析还是从实验原理角度都无法得到一个满意的答案。

1.1.3.2 信号二：宽带 ARMA 过程

宽带 ARMA 过程输入输出关系如(1.8)式所示，其中 $W(z)$ 为 0 均值，功率为 0dB 的高斯白噪声对应的 DTFT。

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \cdot W(z)$$

$$A(z) = 1 - 1.3817z^{-1} + 1.5632z^{-2} - 0.8843z^{-3} + 0.4096z^{-4} \quad (1.8)$$

$$B(z) = 1 + 0.3544z^{-1} + 0.3508z^{-2} + 0.1736z^{-3} + 0.2401z^{-4}$$

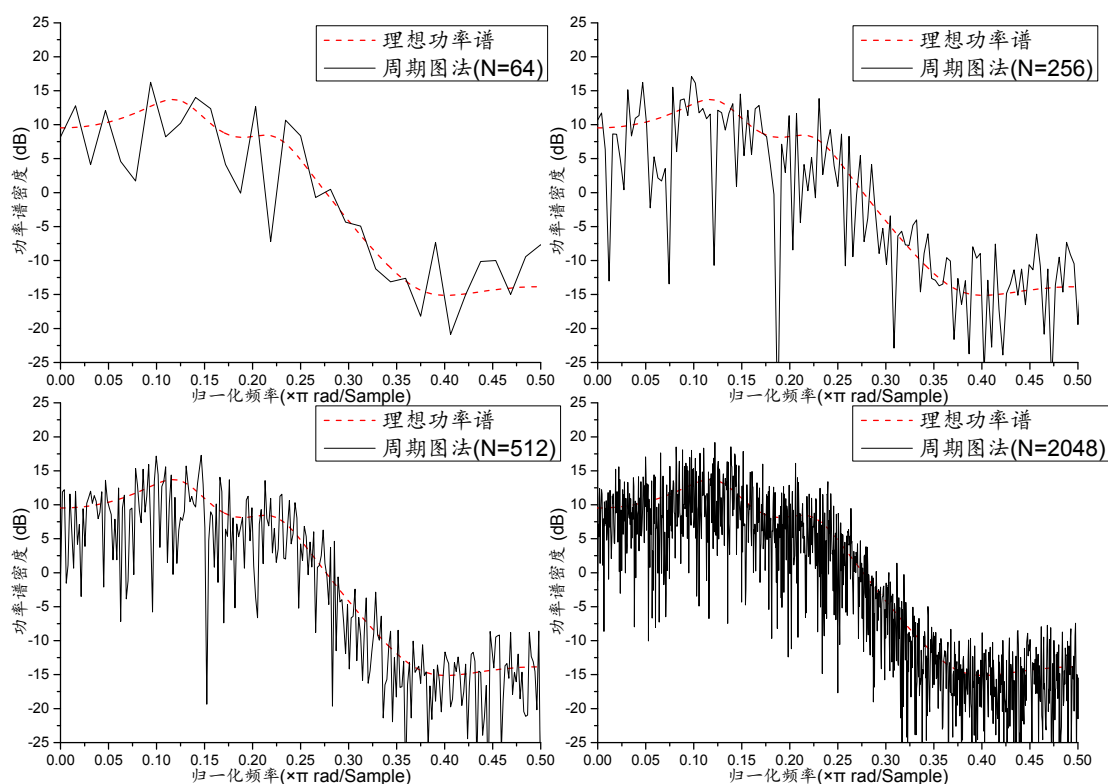


图 1-7 周期图法对信号二的功率谱估计
(数据长度 N 分别取 64、256、512 和 2048)

图 1-7 为待估计信号为信号二时分别取样本长度 N 为 64、256、512 和 2048 时使用周期图法对信号二进行功率谱估计的结果。对于这个宽带 ARMA 过程，周期图法功率谱估计值对真值的拟合较好。但还是能看出，随着 N 的增大，功率谱估值的波动也随之剧烈，“毛刺”增多。

图 1-8 为待估计信号为信号二时分别取样本长度 N 为 64、256、512 和 2048 时使用 BT 法对信号二进行功率谱估计的结果。与图 1-7 一致，

BT 法估值的结果随着 N 的增大, 功率谱估值的波动也随之剧烈, “毛刺”增多。

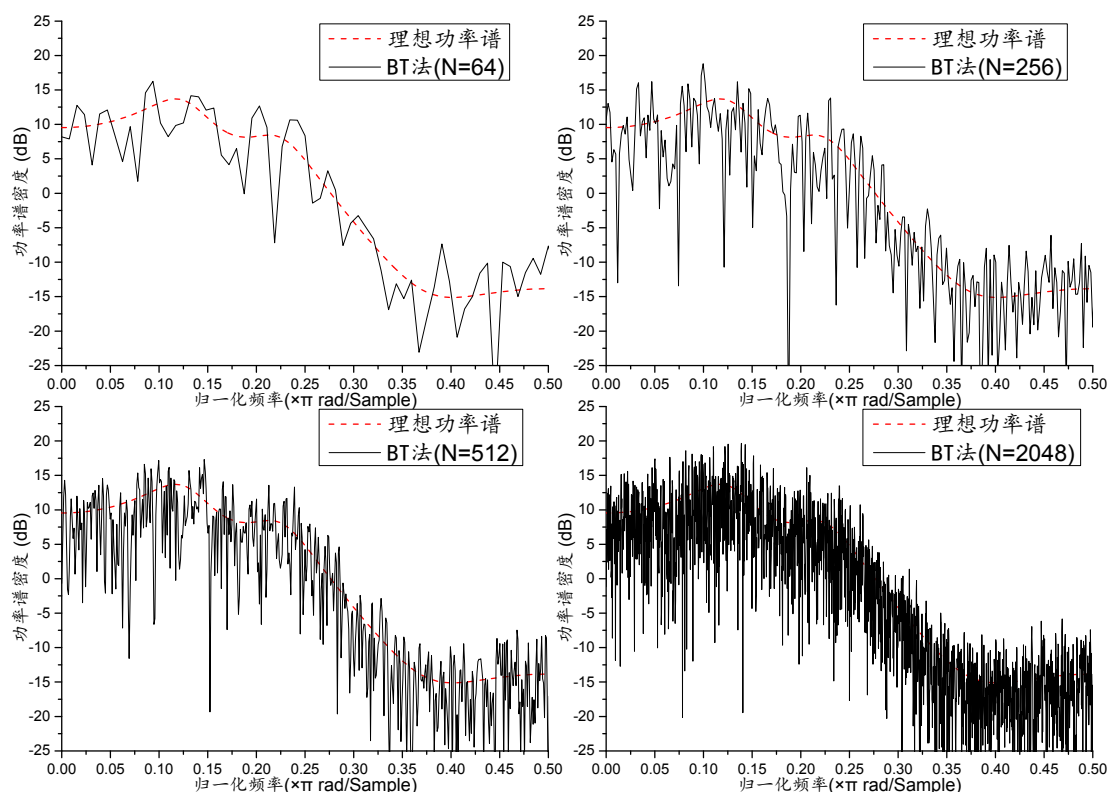


图 1-8 BT 法对信号二的功率谱估计
(数据长度 N 分别取 64、256、512 和 2048)

1.1.3.3 信号三：窄带 ARMA 过程

窄带 ARMA 过程输入输出关系如(1.9)式所示, 其中 $W(z)$ 为 0 均值, 功率为 0dB 的高斯白噪声对应的 DTFT。

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \cdot W(z)$$

$$A(z) = 1 - 1.6408z^{-1} + 2.2044z^{-2} - 1.4808z^{-3} + 0.8145z^{-4} \quad (1.9)$$

$$B(z) = 1 + 1.5857z^{-1} + 0.9604z^{-2}$$

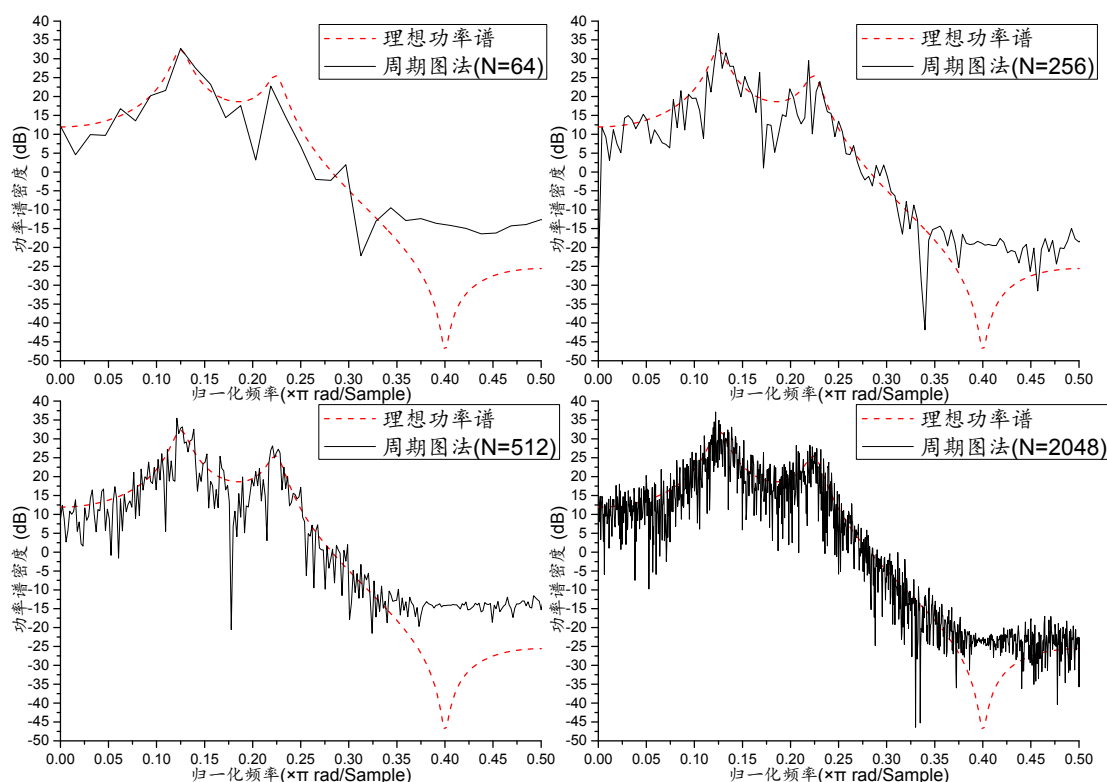


图 1-9 周期图法对信号三功率谱估计
(数据长度 N 分别取 64、256、512 和 2048)

图 1-9 为待估计信号为信号三时分别取样本长度 N 为 64、256、512 和 2048 时使用周期图法对信号三进行功率谱估计的结果。对于这个窄带 ARMA 过程，周期图法功率谱估计值对真值的频率为 0.125 和 0.225 处的谱峰拟合较好，对频率为 0.40 处的零陷拟合较差，当 N 取到 2048 长度时依然无法分辨。但还是能看出，随着 N 的增大，功率谱估值的波动也随之剧烈，“毛刺”增多。同时还有一个有意思的现象是功率谱估值在 0.40 处的零陷较为平滑，曲线抖动相比于其他频率处抖动较为不明显。

图 1-10 为待估计信号为信号三时分别取样本长度 N 为 64、256、512 和 2048 时使用 BT 法对信号三进行功率谱估计的结果。与图 1-9 表现出的特性一致，对于这个窄带 ARMA 过程，BT 法功率谱估计值对真值的频率为 0.125 和 0.225 处的谱峰拟合较好，对频率为 0.40 处的零陷拟

合较差，当 N 取到 2048 长度时依然无法分辨。并且随着 N 的增大，功率谱估值的波动也随之剧烈，“毛刺”增多，随机性增强。功率谱估值在 0.40 处的零陷较为平滑，曲线抖动相比于其他频率处抖动较为不明显。

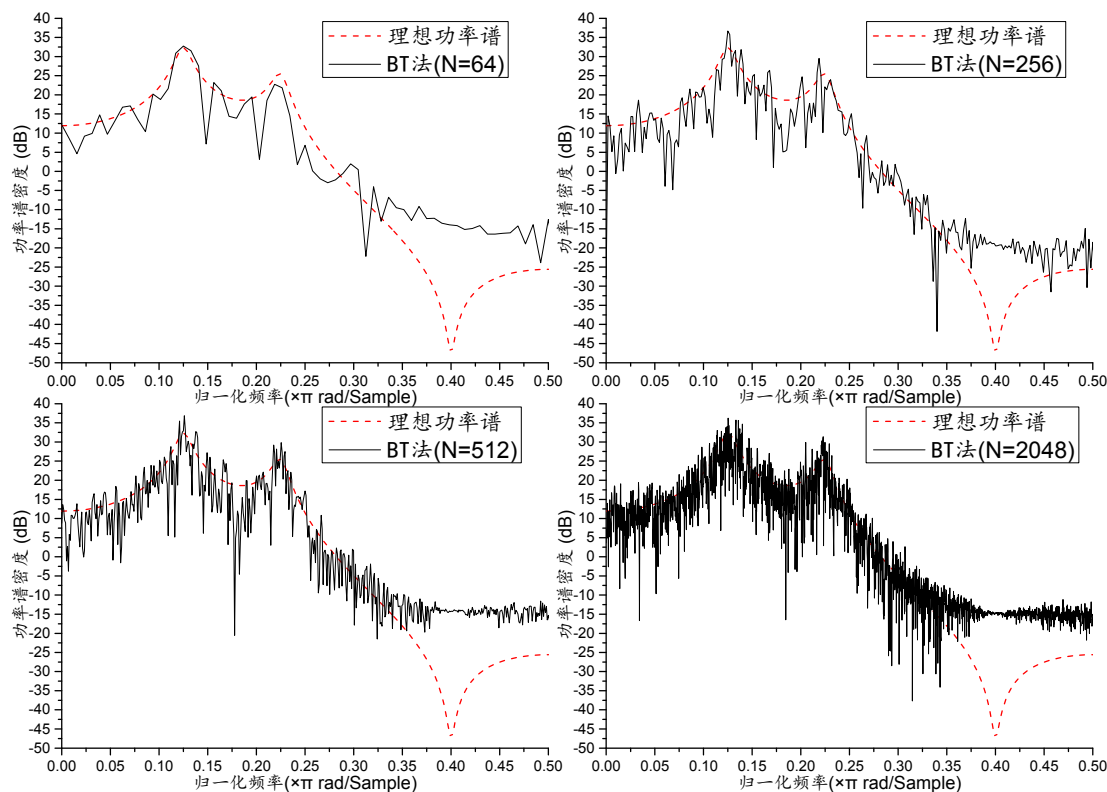


图 1-10 BT 法对信号三功率谱估计
(数据长度 N 分别取 64、256、512 和 2048)

1.1.4 周期图法与 BT 法的偏差和方差分析

由周期图法(1.3)式和 BT 法(1.5)式可知，这两种方法在进行功率谱估值时，均以对随机过程 $X(n)$ 一次观察的有限数据样本 N 为基础得到功率谱密度的估计量 $\hat{G}_X(\omega)$ 。上述两种方法在截取信号时，实际上是对原始信号加上了一个长度为 N 的矩形窗，对应到时滞域上相当于给原本的自相关函数 $R_X(k)$ 加上了一个长度为 $2N-1$ 的三角窗。这样以来，由于损失了部分信号，估计出的功率谱密度 $\hat{G}_X(\omega)$ 相对于真值 $G(\omega)$ 必定会存在误差。

定义功率谱密度估计偏倚 β ，如(1.10)式所示。当 $\beta=0$ 时 $\hat{G}_X(\omega)$ 为无

偏估计，当 $\beta \neq 0$ 时 $\hat{G}_x(\omega)$ 为有偏估计，当 $\beta \rightarrow 0$ 时为渐进无偏估计。

$$\beta = E[\hat{G}_x(\omega)] - G_x(\omega) \quad (1.10)$$

针对谱估计的经典法进行偏倚分析。以 BT 法为例，对(1.5)式取期望，有：

$$\begin{aligned} E[\hat{G}_x(\omega)] &= E\left[\sum_{k=-N}^N \hat{R}_x(k) e^{-j\omega k T_s}\right] \\ &= \sum_{k=-N}^N E[\hat{R}_x(k)] e^{-j\omega k T_s} \\ &= \sum_{k=-N}^N R_x(k) \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) e^{-j\omega k T_s} \end{aligned} \quad (1.11)$$

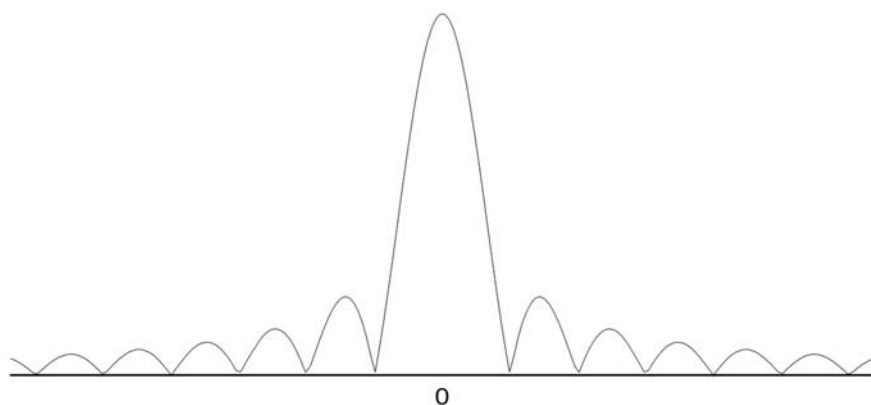
由(1.11)式可以看出，BT 法得到的功率谱估值 $\hat{G}_x(\omega)$ 为一个有偏估计量。注意式中的 $(1 - \frac{|k|}{N})$ 为时滞窗，当数据长度 $N \rightarrow \infty$ 时， $E[\hat{G}_x(\omega)] \rightarrow G_x(\omega)$ ，进而 $\beta \rightarrow 0$ 可以看出 $\hat{G}_x(\omega)$ 是渐进无偏的。

同时，(1.11)式也可等效为：

$$E[\hat{G}_x(\omega)] = \frac{1}{2\pi} G_x(\omega) * V_N(\omega) \quad (1.12)$$

(1.12)式中的 $V_N(\omega)$ 为长度等于 $2N-1$ 的三角窗对应的 DFT，其在频域的大致图像如图 1-11 所示，这样的估值 $\hat{G}_x(\omega)$ 等效于真值 $G(\omega)$ 与 $V_N(\omega)$ 在频域上的卷积结果的 $\frac{1}{2\pi}$ 倍。

周期图法由于所取数据长度为 N 的缘故，相当于在时域加上了一个长度为 N 的矩形窗，等效为在时滞域上长度为 $2N-1$ 的三角窗，因此使用周期图法得到的 $\hat{G}_x(\omega)$ 在 $N \rightarrow \infty$ 时也是有偏但渐进无偏的估计量。

图 1-11 时滞域三角窗 DFT $V_N(\omega)$ 示意

可以证明的是，当数据长度 $N \rightarrow \infty$ 时，此三角窗等效为无穷长度的矩形窗，其对应的 DFT 为 $V_N(\omega) = \delta(\omega)$ ，因此 $E[\hat{G}_X(\omega)] \rightarrow G_X(\omega)$ ，也可说明 $\hat{G}_X(\omega)$ 是渐进无偏的。

因此，在使用周期图法与 BT 法进行功率谱密度估计时，由于数据长度有限，以及所取的数据窗函数都会影响到估值效果产生偏倚（即估计量期望与真值的差）。当这种偏倚体现在整个功率谱图像上时，会造成谱泄露与频率分辨率下降的问题，主要是因为时滞域窗函数对应在频域上的 $V_N(\omega)$ 具有较宽的主瓣（引起频率分辨率下降）和非零旁瓣（谱泄露），这也与使用周期图法与 BT 法对上述三个信号进行功率谱估值得到的结果（图 1-5~图 1-10）一致。

但以上结论并不能说明在周期图法和 BT 法的实际应用中使用较大的数据样本长度 N 就能使功率谱估值尽可能准确。研究表明，估计量 $\hat{G}_X(\omega)$ 不是一致估计量，其方差满足如(1.13)式所示的关系：

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var}[\hat{G}_X(\omega)] \propto |G_X(\omega)|^2 \quad (1.13)$$

即当 $N \rightarrow \infty$ 时， $\hat{G}_X(\omega)$ 的方差与真值 $G(\omega)$ 模的平方成正比，因此会使估计出的功率谱在谱峰处出现剧烈抖动，产生不正确的估值。这样就能

够解释图 1-5~图 1-10 随着 N 的增大估计出的功率谱“毛刺”较多。并且，观察 $N=512$ 和 $N=2048$ 时使用周期图法与 BT 法对信号三进行功率谱估值的结果（如图 1-9、图 1-10 所示），在频率为 0.40 处曲线的毛刺较少，比较平滑，这是因为此处的零陷导致估值方差较小。

从图 1-12 和图 1-13 可以明显的看出，在使用周期图法与 BT 法对信号一进行功率谱估值，当 $N \rightarrow \infty$ 时，虽然频率分辨率有所上升，谱泄露的问题也得到了一定改善，但是谱峰处的方差也明显增大（由上下界的宽度和频率范围体现）。那么在实际应用中，若使用周期图法或 BT 对较短的数据进行功率谱估值，会难以得到频率上的细节信息；若对较长的数据进行功率谱一次估计，则会因为较大的方差使得估计不可靠。

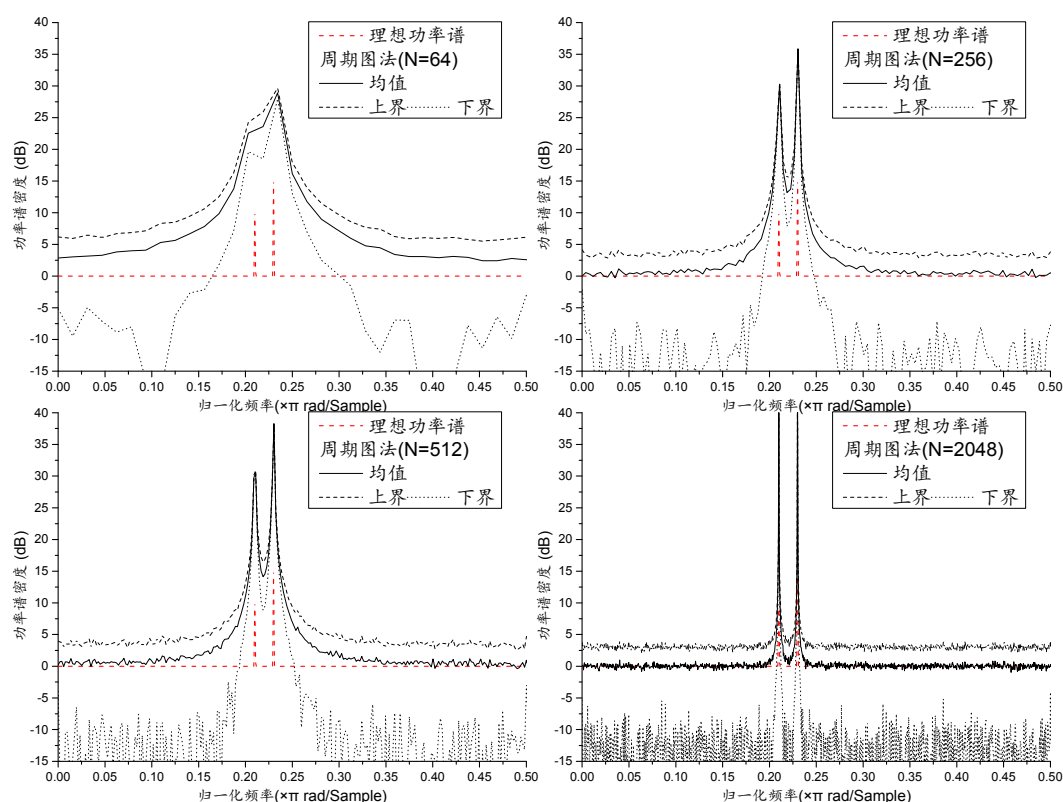


图 1-12 周期图法对信号一的功率谱估计均值和标准差
(数据长度 N 分别取 64、256、512 和 2048，统计次数为 200 次)

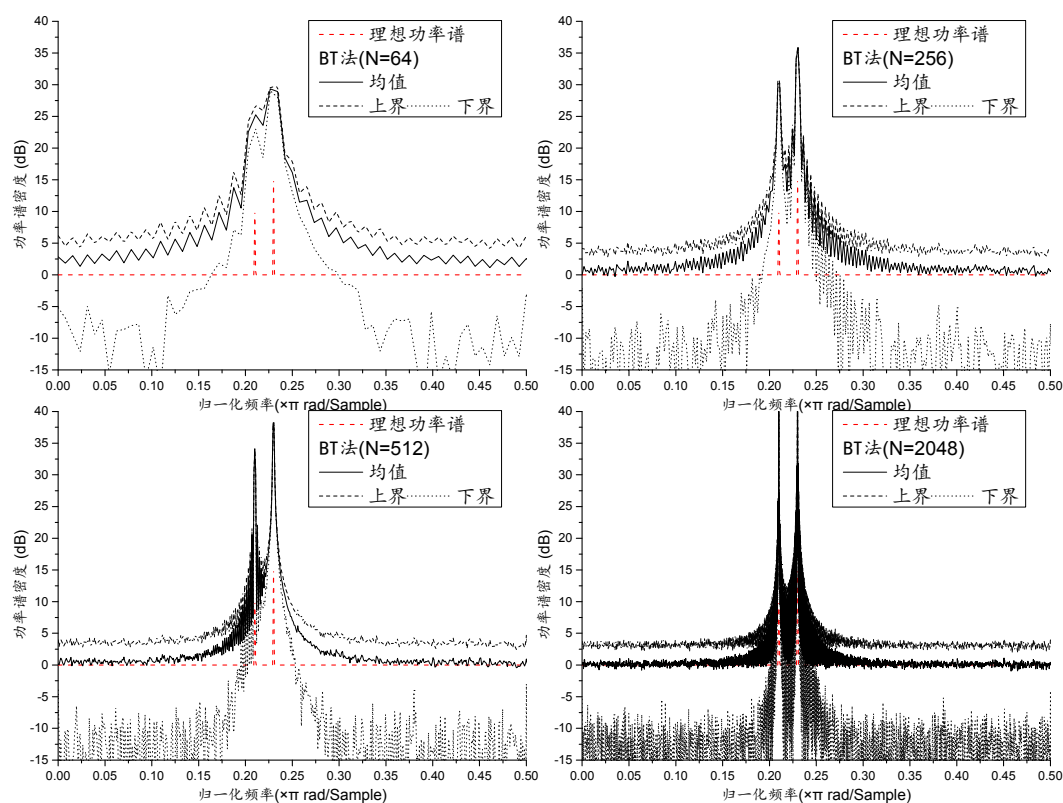


图 1-13 BT 法对信号一的功率谱估计均值和标准差
(数据长度 N 分别取 64、256、512 和 2048, 统计次数为 200 次)

1.2 周期图法的改进方法

基于在 1.1.4 节提到的使用经典周期图法和 BT 法进行功率谱估计时所产生的问题, 在实际中为了得到较高的频率分辨率, 往往需要数据量大的应用, 此时必须将周期图法进行修正。一般来说有两个改进思路: 1、从时域和频域角度出发平滑曲线减小方差; 2、利用特殊的窗函数改进谱泄露的问题。因此有以下两种基于这个思路的修正方法。

1.2.1 平均周期图法

平均法是将给定的 N 长度的数据等分为 m 段, 每段有 $M = N/m$ 个数据。分别用周期图法估计每一小段的周期图, 如(1.14)式所示。

$$\hat{G}_{M,m}(\omega) = \frac{1}{M} \left| \sum_{k=M(m-1)}^{Mm-1} x_k e^{-jk\omega} \right|^2, m=1,2,\dots,\frac{N}{M} \quad (1.14)$$

最后将得到的 m 个周期图加以平均, 如(1.15)式所示, 得到最终的功

率谱估计。

$$\hat{G}_M^{N/M}(\omega) = \frac{M}{N} \sum_{m=1}^{N/M} \hat{G}_{M,m}(\omega) \quad (1.15)$$

由于这 m 个小段周期图是取决于同一过程，因而其均值应该相同，但经过平均之后的方差却减少了。由于 K 个独立分布的随机变量的平均值的方差是单个随机变量的方差的 $1/K$ 。因而若 m 个小段周期图是统计独立的，则平均之后的方差与平均之前方差的关系如(1.16)式所示。

$$\text{Var}[\hat{G}_M^{N/M}(\omega)] = \frac{1}{m} \text{Var}[\hat{G}_{M,m}(\omega)] \quad (1.16)$$

在实际应用中，每一段数据 M 不能太少，否则会将谱峰展宽，偏倚变大，从而分辨力会变差。因而当数据量一定时，段数 m 不能太大，即方差减小不多。解决这一矛盾可以让数据段之间适当重叠，同时为分段的数据加上适当的窗函数使得数据段两端渐变至零，以减小段之间的相关性。

这种重叠分段的方法也叫 Welch 法。一般来说，可以将数据段之间的数据重叠 50% 便于计算及加对称的窗函数。常用的窗函数有 Hanning 窗 ((1.17) 式)、Bartlett 窗 ((1.18) 式) 和 Parzen 窗 ((1.19) 式)。

$$h(n) = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) & -(N-1) < n < N-1 \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases} \quad (1.17)$$

$$h(n) = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{N} & -(N-1) < n < N-1 \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases} \quad (1.18)$$

$$h(n) = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{|n|}{N/2}\right)^2 + 6\left(\frac{|n|}{N/2}\right)^3 & 0 \leq |n| \leq (N-1)/4 \\ 2\left(1 - \frac{|n|}{N/2}\right)^3 & (N-1)/4 \leq |n| \leq (N-1)/2 \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases} \quad (1.19)$$

图 1-14 为使用平均周期图法对信号一的功率谱估计均值和标准差，数据长度 N 分别取 64、256、512 和 2048，窗函数为矩形窗，分 3 段估计，每段有 50% 的重叠。与图 1-12 进行比较可以发现在保持频率分辨率的情况下，方差有明显减小，但在谱峰周围以及谱峰中间，由于矩形窗 FT 具有非零旁瓣的影响，偏倚还是较大，存在谱泄露的问题。

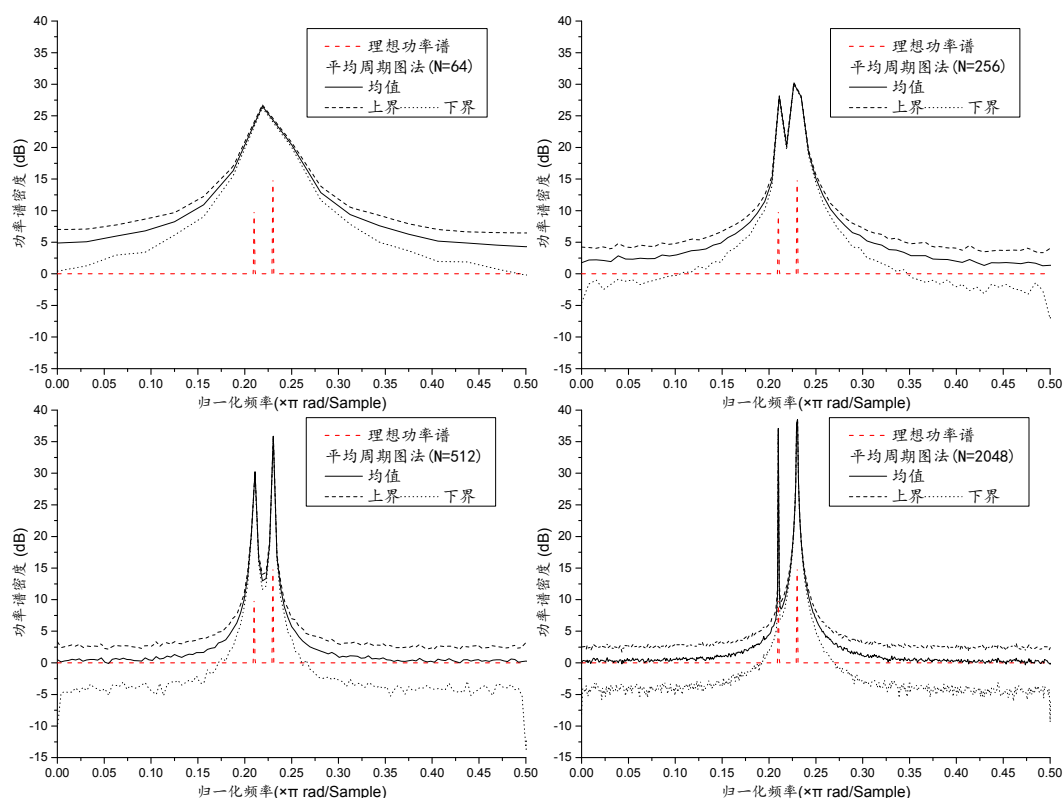


图 1-14 不同长度的平均周期图法对信号一的功率谱估计均值和标准差
(数据长度 N 分别取 64、256、512 和 2048，矩形窗，3 段，50% 重叠)

图 1-15 为使用平均周期图法对信号一的功率谱估计均值和标准差，窗函数分别取矩形窗、Hanning 窗、Bartlett 窗和 Parzen 窗，数据长

度 N 为 512，分 3 段估计，每段有 50% 的重叠。可以看出，当使用了能够减少频域非零旁瓣的窗函数后，谱峰周围的偏倚减小，谱泄露的问题得到改善，谱峰能够分开。

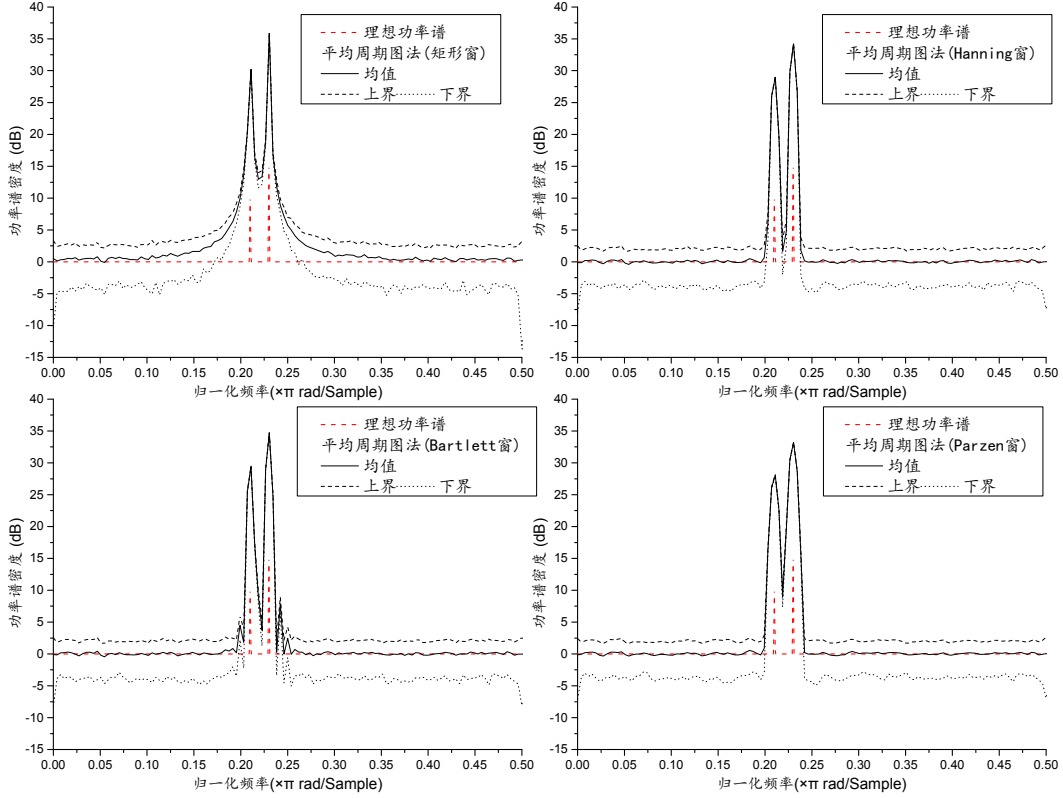


图 1-15 不同窗函数的平均周期图法对信号一的功率谱估计均值和标准差
(窗函数分别取矩形窗、Hanning 窗、Bartlett 窗和 Parzen 窗， N 为 512，3 段，50% 重叠)

1.2.2 平滑周期图法

这种方法不将数据分段，而将全部数据用来计算出一个周期图，然后在频域将其平滑化，即如(1.20)式所示。

$$\bar{G}_X(\omega_i) = \frac{1}{2L+1} \sum_{j=i-L}^{i+L} \hat{G}_X(\omega_j) \quad (1.20)$$

这种方法也等效于使用一个窗函数对 $\hat{G}_X(\omega)$ 进行滑动平均。(1.20)式即为使用矩形窗对 $\hat{G}_X(\omega)$ 滑动平均。设窗函数为 $Q_N(\omega)$ ，则可以将平滑周期图法写为(1.21)式的形式。

$$\bar{G}_X(\omega_i) = \hat{G}_X(\omega) * Q_N(\omega) \quad (1.21)$$

则根据(1.21)式，一般的平滑周期图法进行功率谱估值的计算过程如图 1-16 所示。

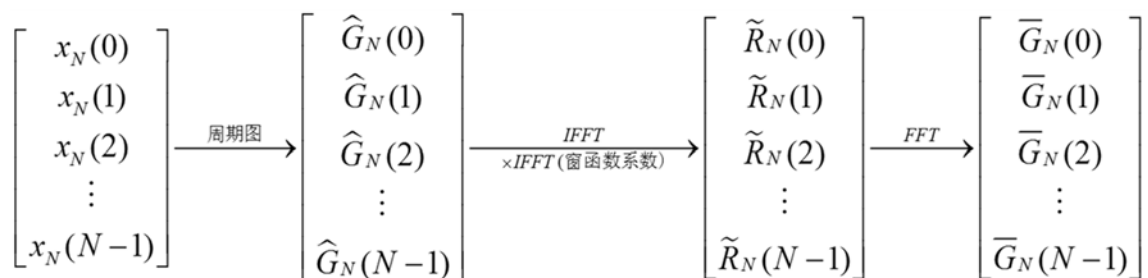


图 1-16 平滑周期图法进行功率谱估值的计算过程

图 1-17 为使用平滑周期图法对信号一的功率谱估计均值和标准差，数据长度 N 分别取 64、256、512 和 2048，窗函数为矩形窗，平滑长度 16。可以从图上看，虽然相比于图 1-12 其方差性能有所提高，但由于矩形窗的缘故，使得偏倚较大。

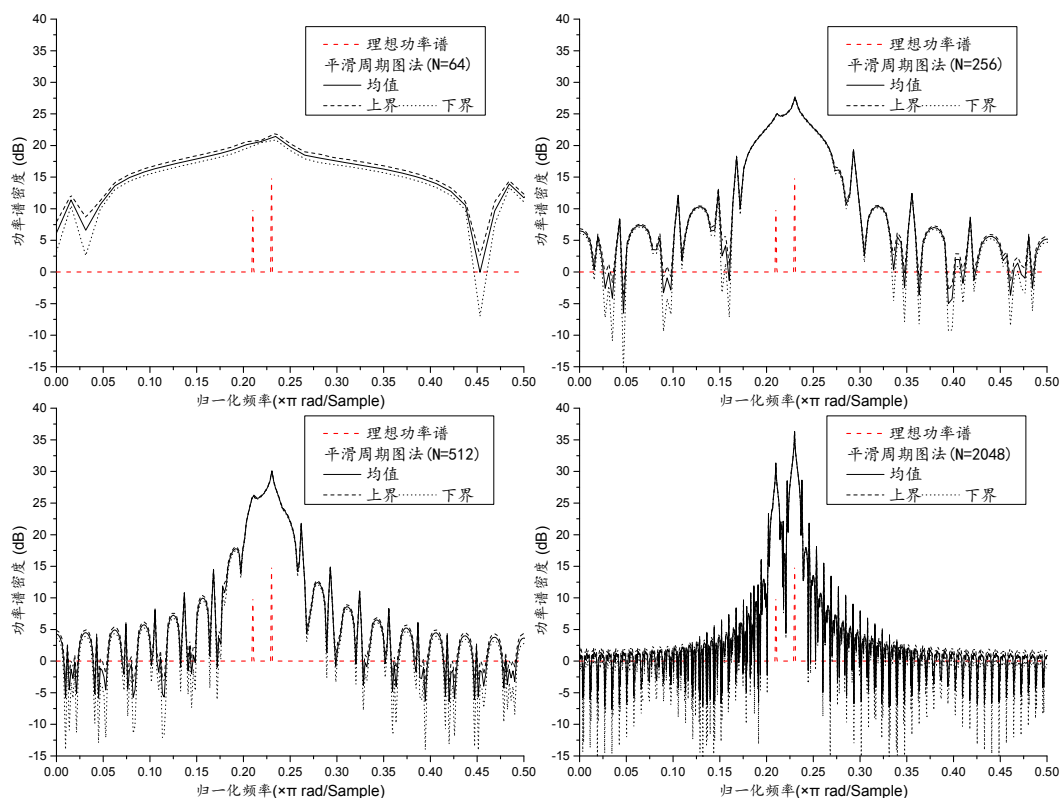


图 1-17 不同长度的平滑周期图法对信号一的功率谱估计均值和标准差
(数据长度 N 分别取 64、256、512 和 2048，矩形窗，平滑长度 16)

图 1-18 为使用平滑周期图法对信号一的功率谱估计均值和标准

差，窗函数分别取矩形窗、Hanning 窗、Bartlett 窗和 Parzen 窗，数据长度 N 为 512，平滑长度 16。可以看出，使用了能够减少频域非零旁瓣的窗函数后，整个曲线在滑动平均范围内变得比较平滑，偏倚减小，方差也有所减小。并且将本来使用矩形窗时混在一起的谱峰分离开来。

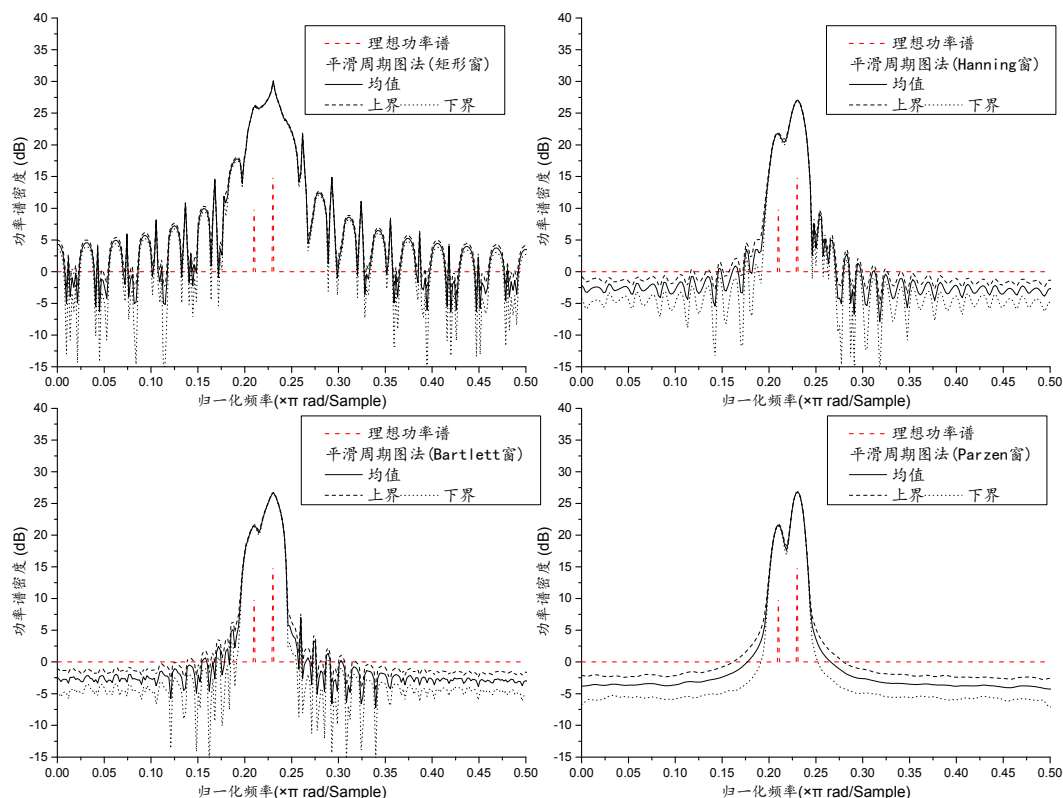


图 1-18 不同长度的平滑周期图法对信号一的功率谱估计均值和标准差
(数据长度 N 分别取 64、256、512 和 2048，矩形窗，平滑长度 16)

1.3 本章小结

本章主要对功率谱估计用到的周期图法、BT 法、平均周期图法和平滑周期图法进行讨论和实验分析²。对于经典的周期图法和 BT 法，从理论推导和实验验证角度来看，其估计偏倚与方差是矛盾的，当数据量 N 较小时偏倚较大，频率分辨率下降，方差较小；当数据量 N 较大时偏倚较小，频率分辨率增强，方差较大。而对于周期图法的改进方法，即平

² 更多的实验结果请见附录

均周期图法和平滑周期图法在数据量 N 较大时,得到的结果偏倚和方差均较小。但是当能够利用的数据量较小时,其偏倚和方差的矛盾则显得尤为突出。

第2章 参数谱估计方法

由于经典谱估计方法及其改进方法在当数据长度 N 较短时频率分辨率较低和谱泄露问题较严重，往往难以满足实际应用的需求。为了克服这种直接从数据出发分析其功率谱的非参数方法的局限性，近年来提出了另一类谱估值方法，即参数谱估值方法。其基本思想是将任何实际待分析的时间序列 $\{x_n\}$ 看成是由白噪声 $\{n_n\}$ 激励一个具有有限参数的滤波器的结果。因而，只要能够从时间序列 $\{x_n\}$ 出发估算出模型的参数，即可得到其功率谱。

2.1 随机时间序列的有理传输函数模型

在实际中，所遇到的许多确定性的或随机的序列均可用一个有理函数的传输模型来加以拟合，即它们满足(2.1)式。

$$x_n = -\sum_{k=0}^p a_k x_{n-k} + \sum_{l=0}^q b_l n_{n-l} \quad (2.1)$$

(2.1)式中， $\{n_l\}$ 为输入激励序列， $\{x_n\}$ 为输出序列。这种最简单，也是最一般的线性系统模型称为自回归滑动平均（ARMA）模型。其对应的传递函数 $H(z)$ 为：

$$H(z) = B(z) / A(z) \quad (2.2)$$

(2.2)式中，

$$A(z) = \sum_{m=0}^p a_m z^{-m} \quad (2.3)$$

$$B(z) = \sum_{m=0}^q b_m z^{-m} \quad (2.4)$$

则输出的功率谱密度如(2.5)式所示

$$G_x(z) = H(z)H^*(1/z)G_n(z) = \frac{B(z)B^*(1/z)}{A(z)A^*(1/z)} \cdot G_n(z) \quad (2.5)$$

当 ARMA 模型只包含反馈回路, 即 $B(z)=1$, 即为自回归 (AR) 模型;
当 ARMA 模型只包含前向分支, 即 $A(z)=1$, 即为滑动平均 (MA) 模型。
无论哪种模型, 要估计其功率谱, 关键是如何估计它的参数 $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ 。
因而谱估值问题转化成了参数估值问题。

2.2 自回归 (AR) 模型的功率谱估计

2.2.1 Yule-Walker 方程

p 阶 AR 模型可以写为如(2.6)式所示的方程, 意指时间序列 x_n 是其自身的线性回归, n_n 则表示回归误差。也可理解为 x_n 可由它过去的样本来预测, n_n 则表示预测误差。

$$x_n = -\sum_{k=1}^p a_k x_{n-k} + n_n \quad (2.6)$$

由(2.6)式可得其自相关函数 $R_{xx}(k)$, 有

$$\begin{aligned} R_{xx}(k) &= E[x_{n+k}x_n] = E\left[x_n\left(-\sum_{l=1}^p a_l x_{n-l+k} + n_{n+k}\right)\right] \\ &= -\sum_{l=1}^p a_l R_{xx}(k-l) + E[n_{n+k}x_n] \end{aligned} \quad (2.7)$$

假设 $H(z)$ 是一个稳定的因果滤波器, 则

$$\begin{aligned} E[n_{n+k}x_n] &= E\left[n_{n+k}\sum_{l=0}^{\infty} h_l n_{n-l}\right] = \sum_{l=0}^{\infty} h_l \sigma^2 \delta_{k+l} = \sigma^2 h_{-k} \\ &= \begin{cases} 0 & k > 0 \\ \sigma^2 h_0 & k = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.8)$$

(2.8)式中, $\{h_i\}$ 为滤波器的冲激响应函数, δ_n 为离散冲激函数。由于
 $h_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} H(z) = 1$, 因而有:

$$R_{xx}(k) = \begin{cases} -\sum_{l=1}^p a_l R_{xx}(k-l) & k > 0 \\ -\sum_{l=1}^p a_l R_{xx}(-l) + \sigma^2 & k = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

(2.9)式即为 Yule-Walker (Y-W) 方程。若能够准确地估计出自相关函数 $R_{xx}(k)$ ，即可从 $k > 0$ 的 p 个方程可以解出 $\{a_k\}$ ，再从 $k = 0$ 的方程求出 σ^2 。对 $k = 1, 2, \dots, p$ ，Y-W 方程可以表示成如(2.10)式所示的矩阵形式。

$$\mathbf{R}_{xx} = \begin{bmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(-1) & \cdots & R_{xx}(-(p-1)) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & \cdots & R_{xx}(-(p-2)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{xx}(p-1) & R_{xx}(p-2) & \cdots & R_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_{xx}(1) \\ R_{xx}(2) \\ \vdots \\ R_{xx}(p) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

由于 \mathbf{R}_{xx} 是 Toeplitz 矩阵，而且只要 x_n 不是纯虚数， \mathbf{R}_{xx} 还是正定的，从而 $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ 一定有解。加入 $k = 0$ 的方程，(2.10)式还可写成(2.11)式的形式。

$$\begin{bmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(-1) & \cdots & R_{xx}(-p) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & \cdots & R_{xx}(-(p-1)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{xx}(p) & R_{xx}(p-1) & \cdots & R_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

2.2.2 Levinson-Durbin 算法

Levinson-Durbin 算法简称为 L-D 算法，该算法采用递推方式求解(2.11)式，只需要 $O(p^2)$ 次运算。概括来说，L-D 算法从低阶到高阶依次递推计算出以下参数组。

$$\{a_{11}, \sigma_1^2\}, \{a_{21}, a_{22}, \sigma_2^2\}, \dots, \{a_{p1}, a_{p2}, \dots, a_{pp}, \sigma_p^2\}$$

对第一组参数有以下初值：

$$a_{11} = -R_{xx}(1) / R_{xx}(0) \quad (2.12)$$

$$\sigma_1^2 = (1 - |a_{11}|^2) R_{xx}(0) \quad (2.13)$$

对于 $k = 2, 3, \dots, p$ ，可由(2.14)式~(2.16)式递推求解。

$$a_{kk} = - \left[R_{xx}(k) + \sum_{l=1}^{k-1} a_{k-1,l} R_{xx}(k-l) \right] / \sigma_{k-1}^2 \quad (2.14)$$

$$a_{ki} = a_{k-1,i} + a_{kk} a_{k-1,k-i} \quad (2.15)$$

$$\sigma_k^2 = (1 - |a_{kk}|^2) \sigma_{k-1}^2 \quad (2.16)$$

2.2.3 AR 参数的批估值

基于以上讨论，可由数据出发，将待估计 AR 模型信号的自相关函数 $R_{xx}(k)$ 、激励噪声功率 σ^2 及 $\{a_k\}$ 组成的 Y-W 方程用 L-D 算法求解，以估计出 $\{a_k\}$ ，这种方法为 AR 参数批估值，其计算流程如图 2-1 所示。

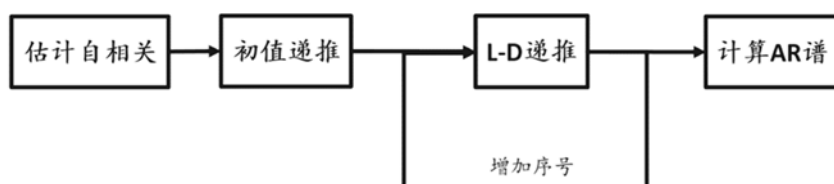


图 2-1 AR 参数的批估值计算流程

如图 2-2 所示，为 AR 参数批估值法（ $N=256$ ）进行功率谱估值的一个例子。与经典法相比较，可以看出其估计出的功率谱曲线非常光滑。

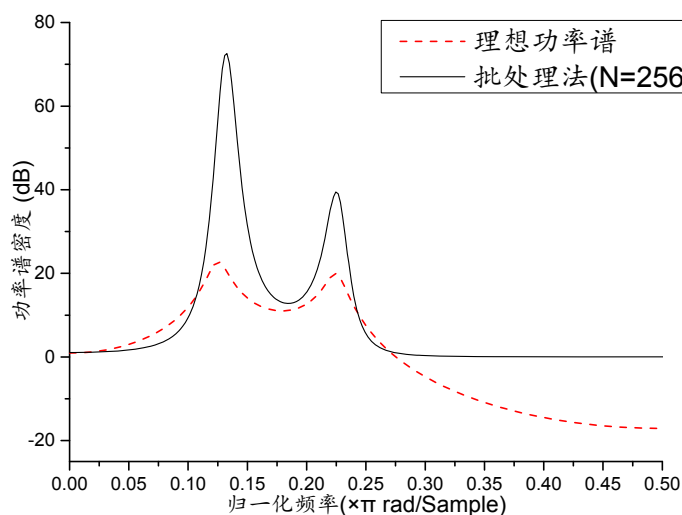


图 2-2 AR 参数的批估值举例

2.2.4 格形预测器

如图 2-3 所示，为 p 价格形预测器的基本结构。若要使用这个格形

预测器来对 $x(n)$ 进行预测，则定义第 p 级的前向预测误差 e_{pn} 如(2.17)式所示，第 p 级的后向预测误差 b_{pn} 如(2.18)式所示。

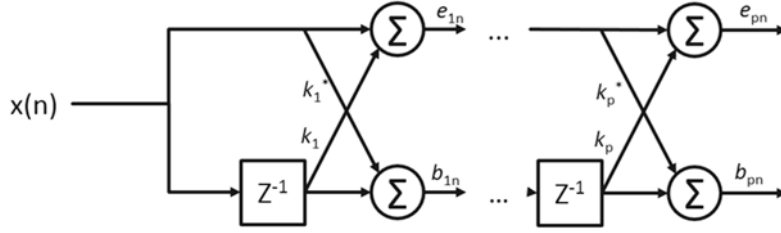


图 2-3 p 阶格形预测器的基本结构

$$e_{pn} = x_n - \hat{x}_n = e_{p-1,n} + K_p b_{p-1,n-1} \quad (2.17)$$

$$b_{pn} = x_{n-p} - \hat{x}_{n-p} = x_{n-p} + \sum_{k=1}^p a_{pk} x_{n-p+k} \quad (2.18)$$

定义预测误差功率 Q_p 如(2.19)式所示，若要准确预测 AR 模型，则应使预测误差功率 Q_p 最小。

$$Q_p = E\{|e_{pn}|^2\} = E\{|x_n - \hat{x}_n|^2\} \quad (2.19)$$

等价于解如下方程：

$$E\{e_{pn} x_k\} = 0, \quad k = n-1, \dots, n-p \quad (2.20)$$

$$R_{xx}(k) = -\sum_{l=1}^p \alpha_l R_{xx}(k-l), \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (2.21)$$

则达到的最小预测误差功率为：

$$Q_{p\min} = R_{xx}(0) + \sum_{k=1}^p \alpha_k R_{xx}(-k) \quad (2.22)$$

显然，(2.22)式与(2.9)完全一致，因而必然有：

$$\alpha_k = a_{pk}, \quad k = 1, 2, \dots, p \quad Q_{p\min} = \sigma_p^2$$

即最好的线性预测器如(2.23)式所示，其误差用(2.24)式表示。

$$\hat{x}_n = -\sum_{k=1}^p a_{pk} x_{n-k} \quad (2.23)$$

$$e_n = x_n - \hat{x}_n = \sum_{k=0}^p a_{pk} x_{n-k} \quad (2.24)$$

2.2.5 AR 参数的 Burg 算法估值

根据以上的分析,可用 L-D 算法递推格形滤波器的预测误差功率 Q_p 、反射系数 $\{K_p\}$ 及 $\{a_k\}$ 系数。

对第一组参数有以下初值:

$$P_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |x(n)|^2 \quad (2.25)$$

$$e_{0,n} = b_{0,n} = x_n \quad (2.26)$$

对于 $i=1,2,3,\dots,p$, 可由式(2.27)~(2.32)式递推求解。

$$K_i = \frac{-2 \sum_{n=i}^{N-1} e_{i-1,n} b_{i-1,n-1}^*}{\sum_{n=i}^{N-1} \left[|b_{i-1,n-1}|^2 + |e_{i-1,n}|^2 \right]} \quad (2.27)$$

$$a_{in} = a_{i-1,n} + K_i a_{i-1,i-n}^* \quad (2.28)$$

$$a_{ii} = K_i \quad (2.29)$$

$$P_i = (1 - |K_i|^2) P_{i-1} \quad (2.30)$$

$$e_{in} = e_{i-1,n} + K_i b_{i-1,n-1} \quad (2.31)$$

$$b_{in} = K_i^* e_{i-1,n} + b_{i-1,n-1} \quad (2.32)$$

这种估计 $\{a_k\}$ 参数的方法为 Burg 算法。其计算流程如图 2-4 所示。



图 2-4 AR 参数的 Burg 算法估值计算流程

如图 2-5 所示, 为 AR 参数的 Burg 算法 ($N=256$) 进行功率谱估值的一个例子。与批处理法差不多, 其估计出的功率谱曲线非常光滑。

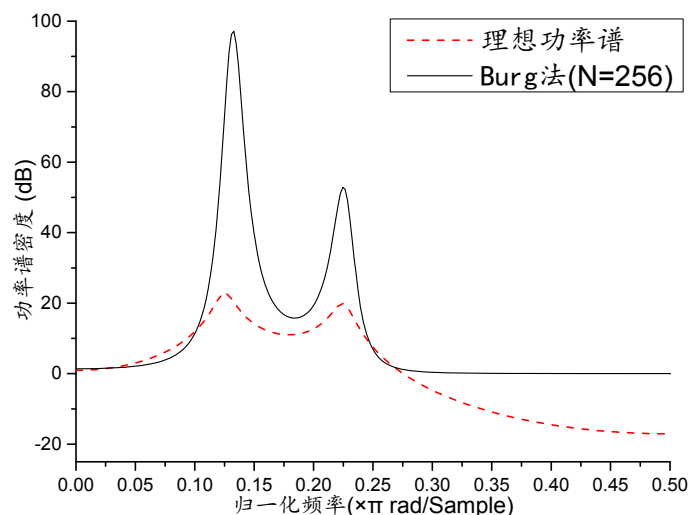


图 2-5 AR 参数的 Burg 算法估值举例

2.2.6 AR 参数的阶数预测

对 AR 参数的阶数预测问题，主要有以下几种思路。

2.2.6.1 估计均方误差准则

估计均方误差准则利用估计阶数在大于等于真实阶数的情况下，估计量对真实值的均方误差下降不明显，以此来确定一个合适的门限，估计出阶数，使其尽可能接近真实阶数。

2.2.6.2 最终预测误差准则 (FPE)

从当前估计阶数 \hat{p} 的均方误差 $\xi_{\hat{p}}$ 出发，构建 FPE 函数，如(2.33)式所示。

$$(FEP)_{\hat{p}} = \xi_{\hat{p}} \left(\frac{N + \hat{p} + 1}{N - \hat{p} + 1} \right) \quad (2.33)$$

当 $\hat{p} = p$ 时，(2.33)取得最小值，以此来估计出阶数。

除 2.2.6.1 和 2.2.6.2 所提方法以外，还有信息论准则 (AIC) 和自回归传输函数准则 (CAT) 等方法。

实践证明，在数据量 N 较小的情况下，这些方法可靠性都不高。在实际应用中，对于较短的数据长度 N ，可采用经验法估计，即令 \hat{p} 满足

(2.34)式。

$$p = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \cdot N \quad (2.34)$$

对于 2.2.3 和 2.2.5 提到的批处理法和 Burg 法，由于在迭代次数接近真实 AR 模型阶数时 σ_k^2 和 P_i 是不断单调减小的，其斜率也在逐渐趋向于 0，因此即可设置合适的门限使得批处理法和 Burg 分别在 σ_k^2 和 P_i 减小趋势不明显的时候退出算法，以此估计出 AR 模型参数，减小运算量。

2.2.7 批估值与 Burg 法的仿真实验

2.2.7.1 信号四 宽带 AR 过程

宽带 AR 过程输入输出关系如(2.35)式所示，其中 $W(z)$ 为 0 均值，功率为 0dB 的高斯白噪声对应的 DTFT。

$$Y(z) = \frac{1}{A(z)} \cdot W(z) \quad (2.35)$$

$$A(z) = 1 - 1.3817z^{-1} + 1.5632z^{-2} - 0.8843z^{-3} + 0.4096z^{-4}$$

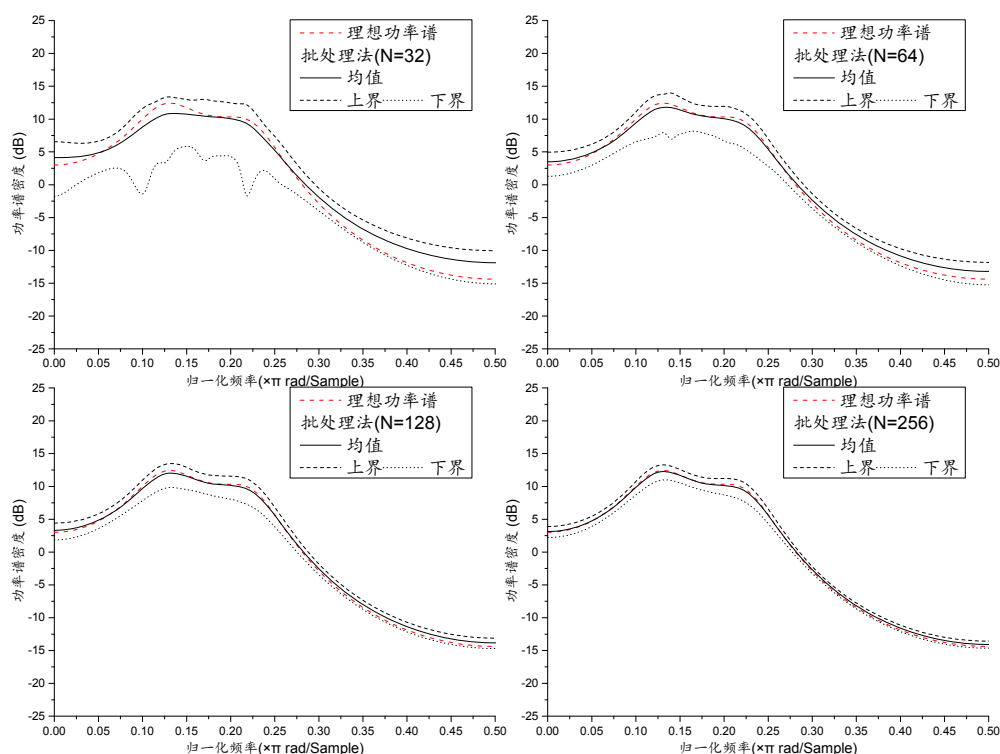


图 2-6 使用批处理法对信号四的功率谱估计均值和标准差
(数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256，固定阶数为 4)

图 2-6 为使用批处理法对信号四的功率谱估计均值和标准差，数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256，将估计算法的阶数固定为理想阶数 4。可以观察到，除了 $N=32$ 时偏倚较大，当 $N \geq 64$ 时，其均值与真值基本一致，并且可以观察到，随着 N 的增大，估计量的上界与下界距离逐渐减小，方差减小，估计量只在一个很小的区间内变化。可以与使用经典法及改进方法进行信号二（ARMA 模型）估计的结果（附图 B-1~附图 B-3、附图 B-6）进行大致比较，能够看出在相同数据长度的情况下，批处理法的估计性能要好。

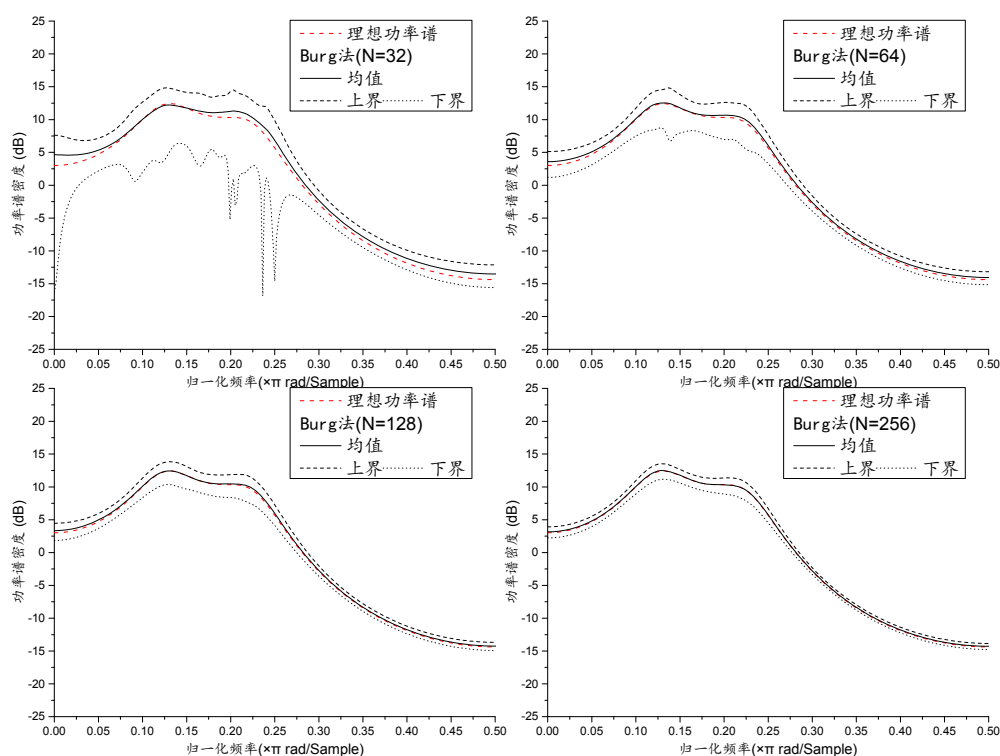


图 2-7 使用 Burg 法对信号四的功率谱估计均值和标准差
(数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256，固定阶数为 4)

图 2-7 为使用 Burg 法对信号四的功率谱估计均值和标准差，数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256，将估计算法的阶数固定为理想阶数 4。可以观察到，其均值与真值基本一致，并且可以观察到，随着 N 的增大，估计量的上界与下界距离逐渐减小，方差减小，估计量只在一个很

小的区间内变化。可以与使用批处理法进行信号二估计的结果(图 2-6)比较,能够看出 Burg 法的偏倚性能要优于批处理法,而方差性能比批处理法稍差,其总体性能在当 $N \geq 128$ 时基本一致。

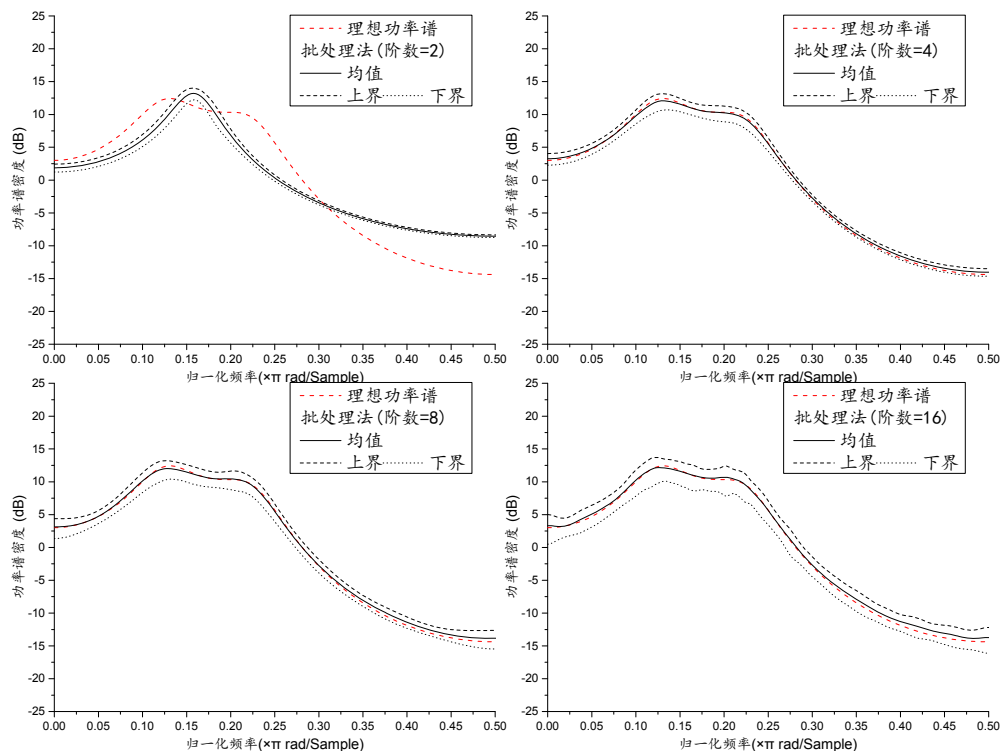


图 2-8 使用批处理法对信号四的功率谱估计均值和标准差
(阶数分别取 2、4、8 和 16, 固定数据长度 N 为 256)

图 2-8 为使用批处理法对信号四的功率谱估计均值和标准差, 数据长度 N 固定为 256, 估计算法的阶数分别取 2、4、8 和 16。可以观察到, 当估计阶数较小时, 偏倚较大, 方差较小。随着估计阶数的增大, 其偏倚减小, 基本与实际功率谱曲线重合, 方差有所增大, 但是增大幅度并不大。总体来说, 当估计阶数与真实阶数一致时, 估计性能最好。

图 2-9 为使用 Burg 法对信号四的功率谱估计均值和标准差, 数据长度 N 固定为 256, 估计算法的阶数分别取 2、4、8 和 16。与图 2-8 的结论一致, 即当估计阶数较小时, 偏倚较大, 方差较小。随着估计阶数的增大, 其偏倚减小, 基本与实际功率谱曲线重合, 方差有所增大, 但

是增大幅度并不大，当估计阶数与真实阶数一致时，估计性能最好。

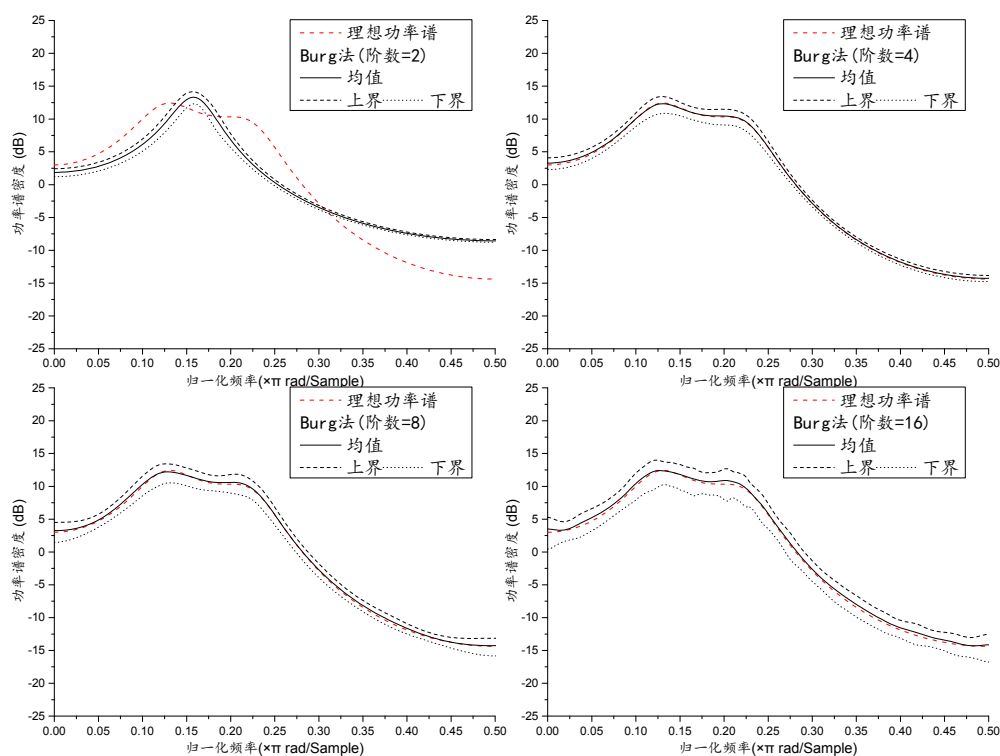


图 2-9 使用 Burg 法对信号四的功率谱估计均值和标准差
(阶数分别取 2、4、8 和 16，固定数据长度 N 为 256)

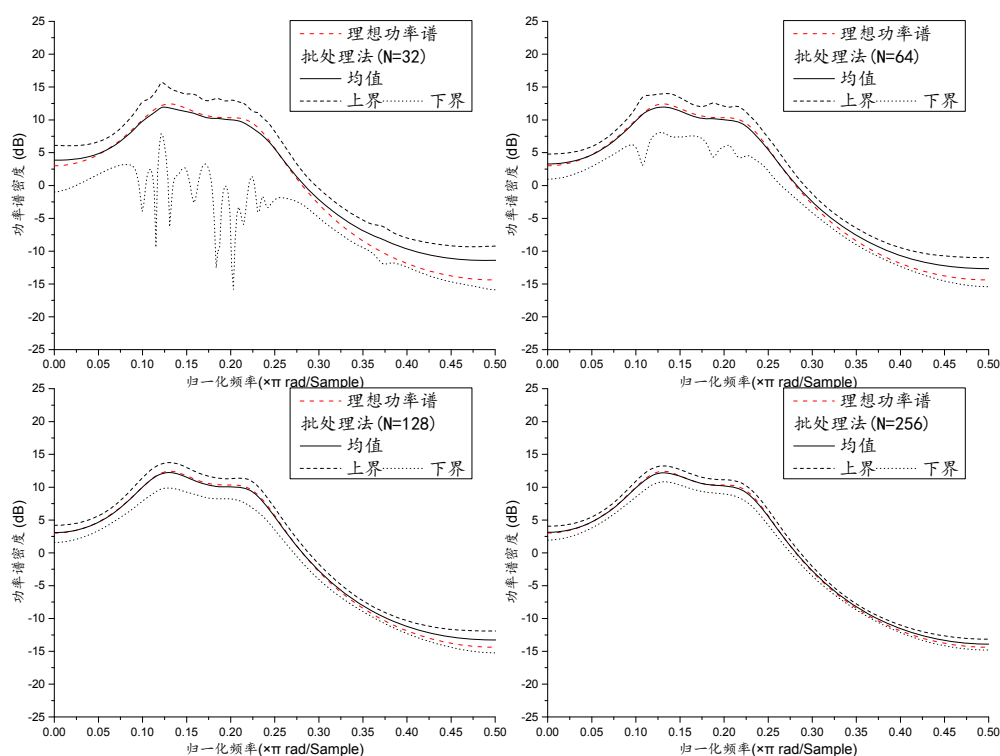


图 2-10 使用批处理法对信号四的功率谱估计均值和标准差
(数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256，估计阶数，门限为 0.01)

图 2-10 为使用批处理法对信号四的功率谱估计均值和标准差，此

处使用阶数估计，阶数估计门限为 0.01，数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256。可以观察到的是随着 N 的增大偏倚性能和方差性能均提高较大，这是因为较大的 N 能够获得较精确的自相关函数估计，从而在门限的限制下解得更精确的参数。

图 2-11 为使用 Burg 法对信号四的功率谱估计均值和标准差，此处使用阶数估计，阶数估计门限为 0.01，数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256。可得到和图 2-10 一致的结论，因此较长的 N 能使基于阶数估计的批处理法与 Burg 法性能提高。

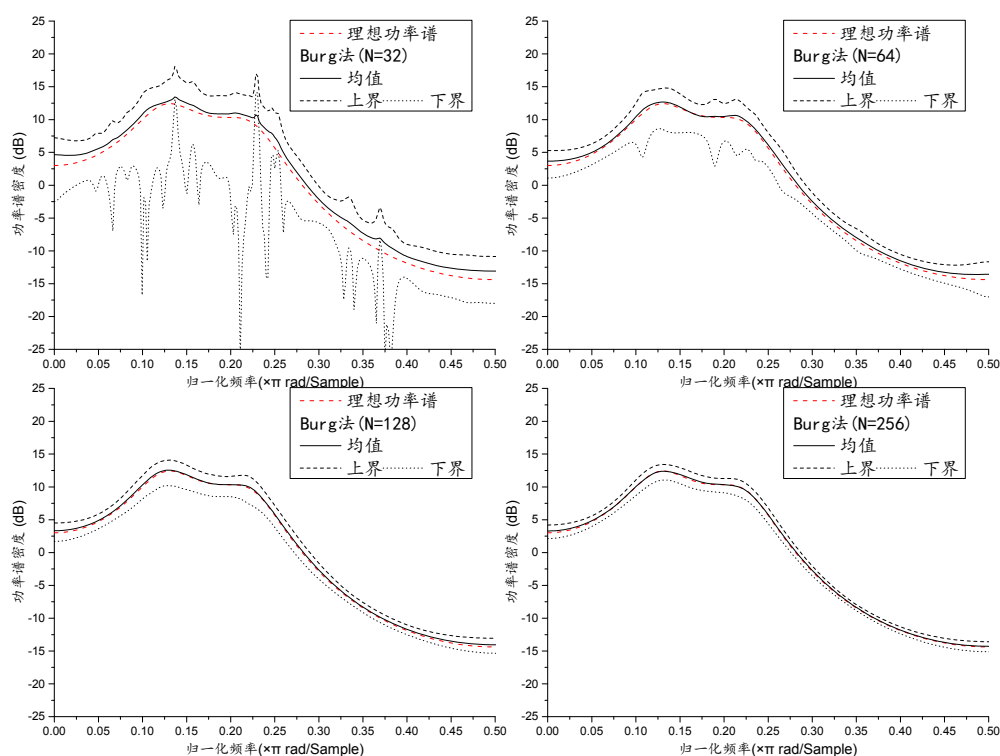


图 2-11 使用 Burg 法对信号四的功率谱估计均值和标准差
(数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256，估计阶数，门限为 0.01)

2.2.7.2 信号五 窄带 AR 过程

窄带 AR 过程输入输出关系如式所示，其中 $W(z)$ 为 0 均值，功率为 0dB 的高斯白噪声对应的 DTFT。

$$Y(z) = \frac{1}{A(z)} \cdot W(z) \quad (2.36)$$

$$A(z) = 1 - 1.6408z^{-1} + 2.2044z^{-2} - 1.4808z^{-3} + 0.8145z^{-4}$$

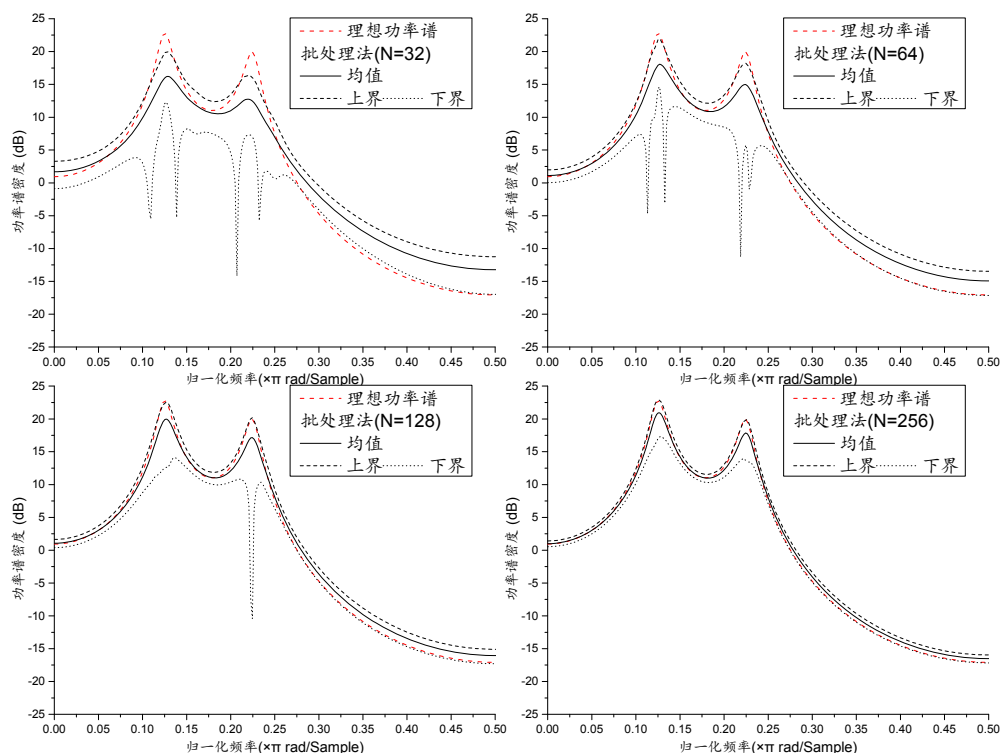


图 2-12 使用批处理法对信号五的功率谱估计均值和标准差
(数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256，固定阶数为 4)

图 2-12 为使用批处理法对信号五的功率谱估计均值和标准差，数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256，将估计算法的阶数固定为理想阶数 4。可以观察到，除了 N 为 32 和 64 时偏倚较大，当 $N \geq 128$ 时，其均值与真值基本一致，并且可以观察到，随着 N 的增大，估计量的上界与下界距离逐渐减小，方差减小，估计量只在一个很小的区间内变化。可以与使用经典法及改进方法进行信号三（ARMA 模型）估计的结果（附图 C-1~附图 C-3、附图 C-6）进行大致比较，能够看出在相同数据长度的情况下，批处理法的估计性能要好。

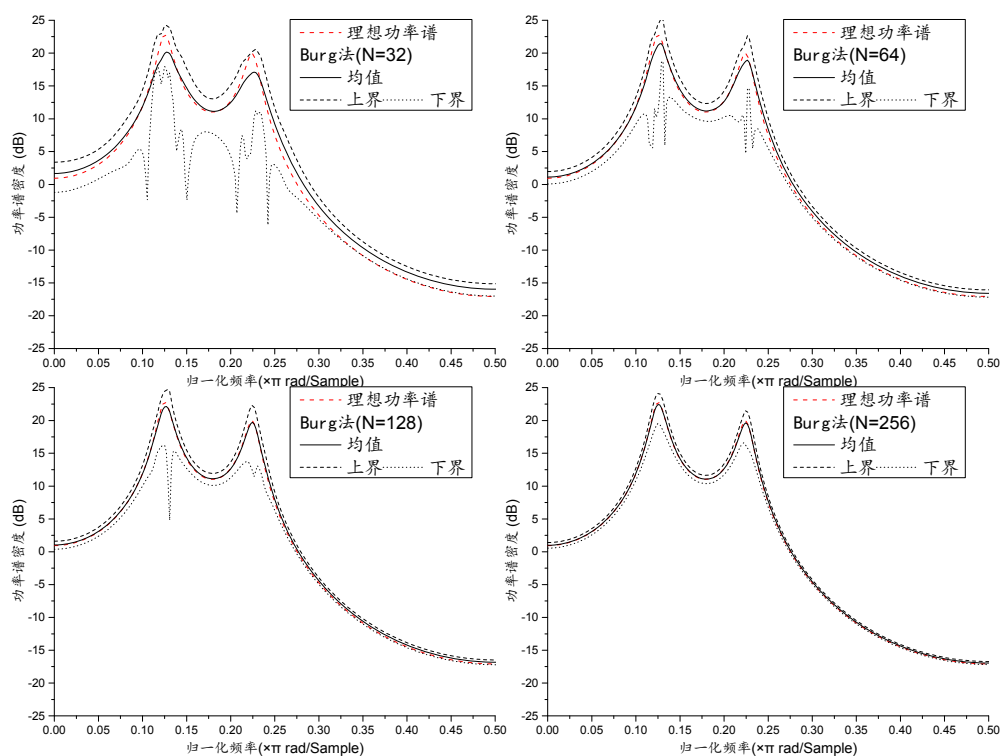


图 2-13 使用 Burg 法对信号五的功率谱估计均值和标准差
(数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256，固定阶数为 4)

图 2-13 为使用 Burg 法对信号五的功率谱估计均值和标准差，数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256，将估计算法的阶数固定为理想阶数 4。可以观察到，其均值与真值基本一致，并且可以观察到，随着 N 的增大，估计量的上界与下界距离逐渐减小，方差减小，估计量只在一个很小的区间内变化。可以与使用批处理法进行信号二估计的结果（图 2-12）比较，能够看出 Burg 法的偏倚性能和方差性能在此应用中要优于批处理法，其总体性能在当 $N \geq 128$ 时基本一致。

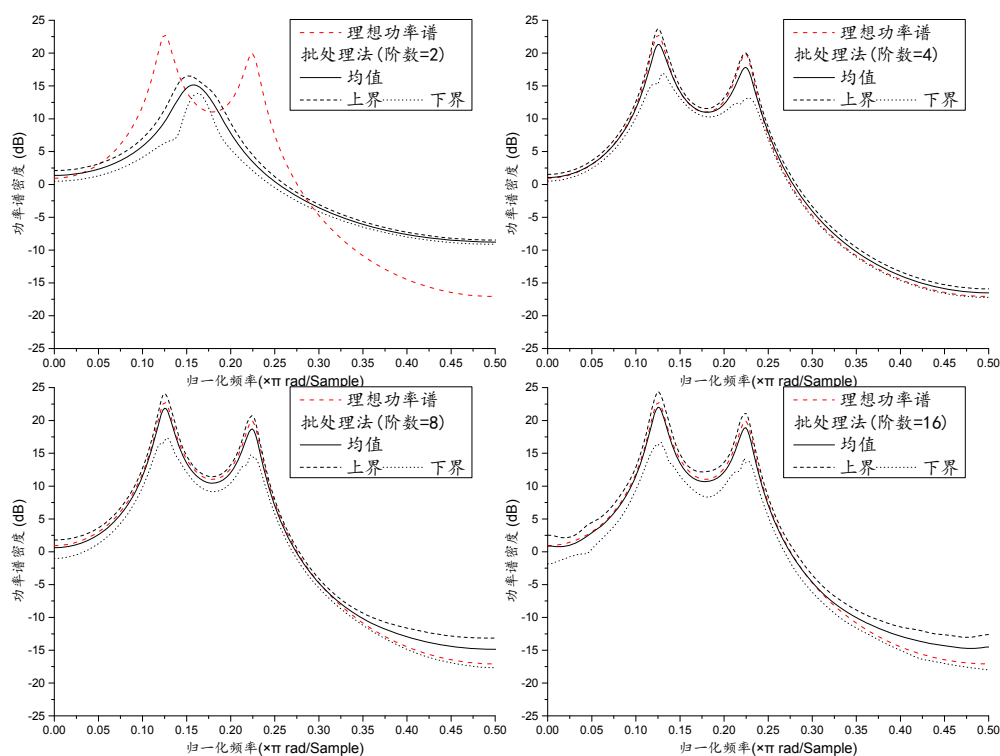


图 2-14 使用批处理法对信号五的功率谱估计均值和标准差
(阶数分别取 2、4、8 和 16，固定数据长度 N 为 256)

图 2-14 为使用批处理法对信号五的功率谱估计均值和标准差，数据长度 N 固定为 256，估计算法的阶数分别取 2、4、8 和 16。可以观察到，当估计阶数较小时，偏倚较大，方差较小。随着估计阶数的增大，其偏倚减小，基本与实际功率谱曲线重合，方差有所增大，但是增大幅度并不大。总体来说，当估计阶数与真实阶数一致时，估计性能最好。

图 2-15 为使用 Burg 法对信号五的功率谱估计均值和标准差，数据长度 N 固定为 256，估计算法的阶数分别取 2、4、8 和 16。与图 2-14 的结论一致，即当估计阶数较小时，偏倚较大，方差较小。随着估计阶数的增大，其偏倚减小，基本与实际功率谱曲线重合，方差有所增大，但是增大幅度并不大，当估计阶数与真实阶数一致时，估计性能最好。

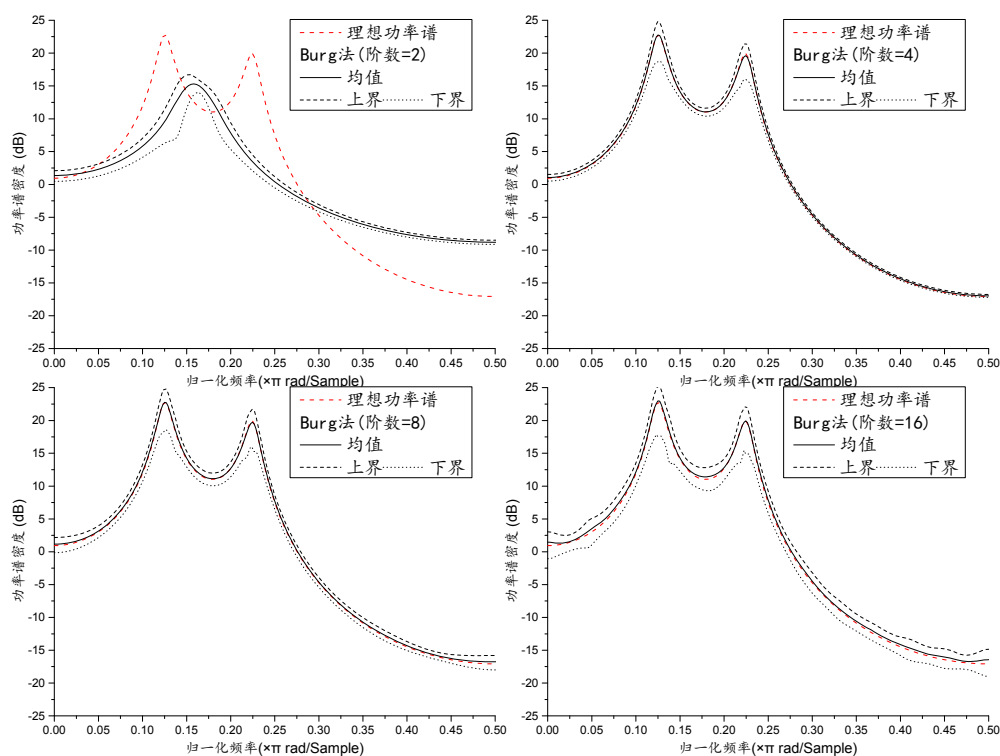


图 2-15 使用 Burg 法对信号五的功率谱估计均值和标准差
(阶数分别取 2、4、8 和 16，固定数据长度 N 为 256)

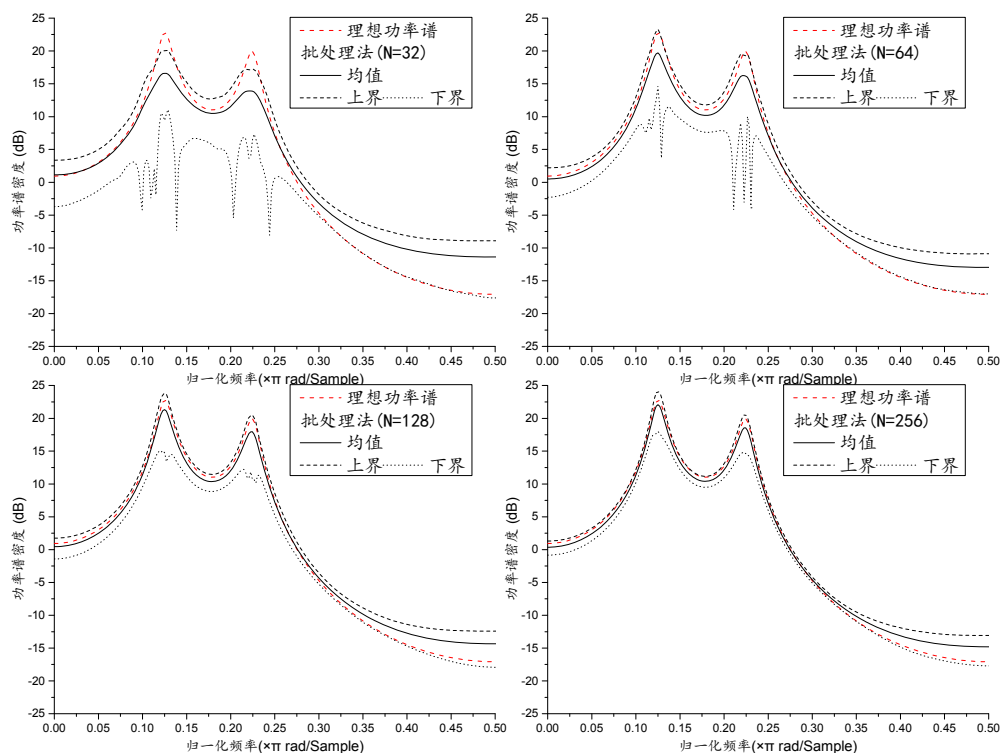


图 2-16 使用批处理法对信号五的功率谱估计均值和标准差
(数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256，估计阶数，门限为 0.01)

图 2-16 为使用批处理法对信号五的功率谱估计均值和标准差，此处使用阶数估计，阶数估计门限为 0.01，数据长度 N 分别取 32、64、

128 和 256。可以观察到的是随着 N 的增大偏倚性能和方差性能均提高较大，这是因为较大的 N 能够获得较精确的自相关函数估计，从而在门限的限制下解得更精确的参数。

图 2-17 为使用 Burg 法对信号五的功率谱估计均值和标准差，此处使用阶数估计，阶数估计门限为 0.01，数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256。可得到和图 2-16 一致的结论，因此较长的 N 能使基于阶数估计的批处理法与 Burg 法性能提高。

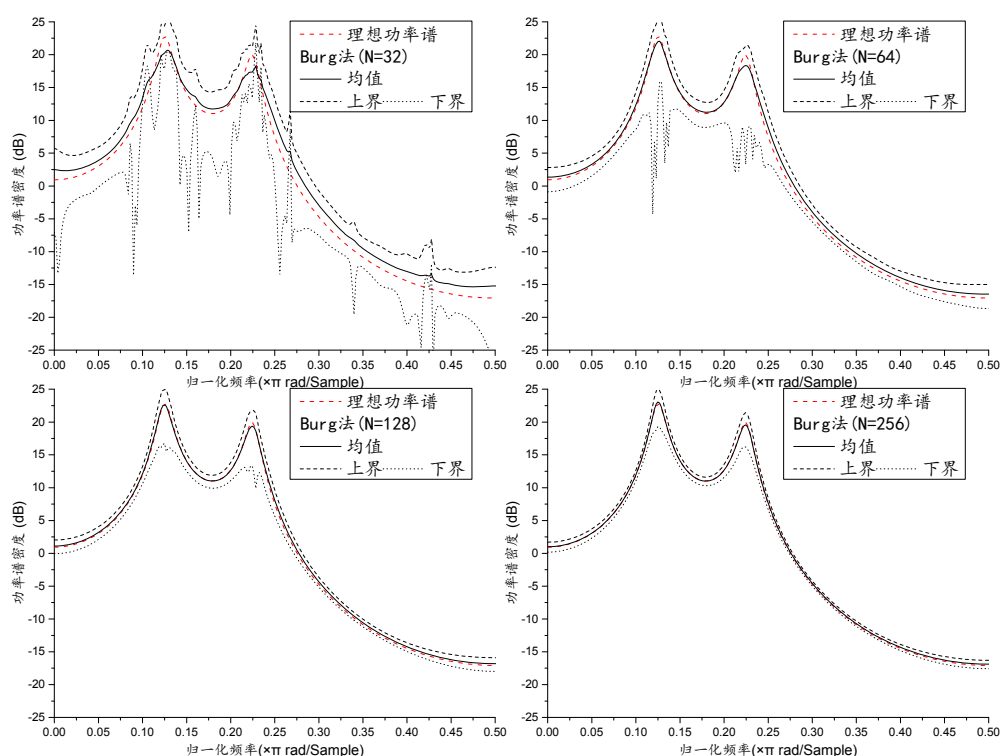


图 2-17 使用 Burg 法对信号五的功率谱估计均值和标准差
(数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256，估计阶数，门限为 0.01)

2.3 滑动平均 (MA) 模型的功率谱估计

MA 过程是由零均值白噪声激励一个传输函数只包含有零点的滤波器的输出，即如(2.37)式所示

$$x_n = \sum_{m=0}^q b_m n_{n-m} \quad (2.37)$$

由于 q 阶 MA 过程的自相关函数如(2.38)式所示，因此若已知自相关

函数 $R_{xx}(k)$ 即可通过解非线性方程组得到 $\{b_k\}$ 。但是往往由于解(2.38)式这个非线性方程组非常复杂，因此在实际中使用估计出的 $R_{xx}(k)$ 利用 BT 法得到 MA 模型的功率谱估计，或是将其等效为无限阶的 AR 模型来处理。

$$R_{xx}(k) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{i=0}^{q-k} b_i b_{i+k} & k = 0, 1, \dots, q \\ 0 & k > q \end{cases} \quad (2.38)$$

2.4 ARMA 模型的功率谱估计

对于 ARMA 模型，可得其自相关函数 $R_{xx}(l)$ 与 $\{a_k\} \{b_k\}$ 的关系如(2.39)式所示。

$$R_{xx}(l) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^p a_k R_{xx}(l-k) + \sum_{k=0}^q b_k R_{xx}(l-k) & l = 0, 1, \dots, q \\ -\sum_{k=1}^p a_k R_{xx}(l-k) & l = q+1, q+2, \dots \end{cases} \quad (2.39)$$

代入 $R_{xx}(k) = \sigma^2 h_{-k}$ ，有 ARMA 模型的 Y-W 方程(2.40)式。

$$R_{xx}(l) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^p a_k R_{xx}(l-k) + \sigma^2 \sum_{k=0}^q b_k h_{k-l} & l = 0, 1, \dots, q \\ -\sum_{k=1}^p a_k R_{xx}(l-k) & l = q+1, q+2, \dots \end{cases} \quad (2.40)$$

对 ARMA 过程可用一个无限阶的 AR 过程来等价(如(2.41)式所示)。使用 AR 技术来估计参数 $\{c_k\}$ ，然后求得相应的 ARMA 参数。特别是设 $C(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{-k}$ 是 AR 参数估值时，式中 $M \geq p+q$ ，并设 $p > q$ ，则如(2.42)式所示。

$$\frac{B(z)}{A(z)} = \frac{1}{C(z)} \quad (2.41)$$

$$\frac{\hat{B}(z)}{\hat{A}(z)} = \frac{1}{\hat{C}(z)} \quad (2.42)$$

(2.42)式中, $\hat{b}_0=0$, 由于 $n>p$, $a_n=0$, 则设:

$$\sum_{k=0}^q \hat{b}_k \hat{c}_{n-k} = 0 \quad n = p+1, p+2, \dots, p+q \quad (2.43)$$

其矩阵形式为:

$$\begin{bmatrix} \hat{c}_p & \hat{c}_{p-1} & \cdots & \hat{c}_{p+1-q} \\ \hat{c}_{p+1} & \hat{c}_p & \cdots & \hat{c}_{p+2-q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{c}_{p+q-1} & \hat{c}_{p+q-2} & \cdots & \hat{c}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \vdots \\ \hat{b}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{c}_{p+1} \\ \hat{c}_{p+2} \\ \vdots \\ \hat{c}_{p+q} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

解得 $\{\hat{b}_1, \hat{b}_2, \dots, \hat{b}_q\}$, 则 $\{\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_p\}$ 可由下列方程求解:

$$\sum_{k=0}^q \hat{b}_k \hat{c}_{n-k} = \hat{a}_n \quad n = 1, 2, \dots, p \quad (2.45)$$

(2.45)式中 $\hat{c}_0 \equiv 0$, 则矩阵形式为:

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{c}_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hat{c}_2 & \hat{c}_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{c}_p & \hat{c}_{p-1} & \hat{c}_{p-2} & \cdots & \hat{c}_{p-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{b}_1 \\ \vdots \\ \hat{b}_q \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

这个估计 ARMA 参数的方法叫恒等式法。

图 2-18 为使用恒等式法对信号二 (宽带 ARMA 过程) 的功率谱估计均值和标准差, 其数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256, 将估计算法的阶数固定为理想阶数 4。从图上可以看出, 估计出的曲线虽然大致趋势与实际功率谱较为一致, 但无论均值和方差抖动都非常剧烈, 非常不稳定, 其估计结果不如同等数据长度 N 的经典法及其改进方法 (附图 B-1~附图 B-8)。

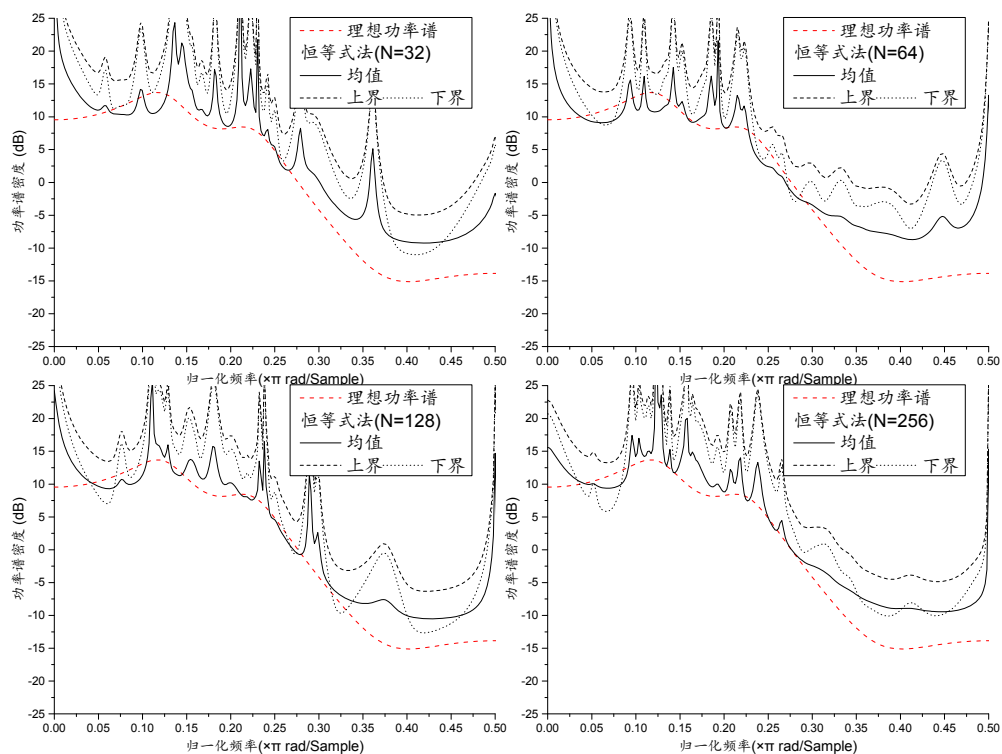


图 2-18 使用恒等式法对信号二的功率谱估计均值和标准差
(数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256，固定阶数均为 4)

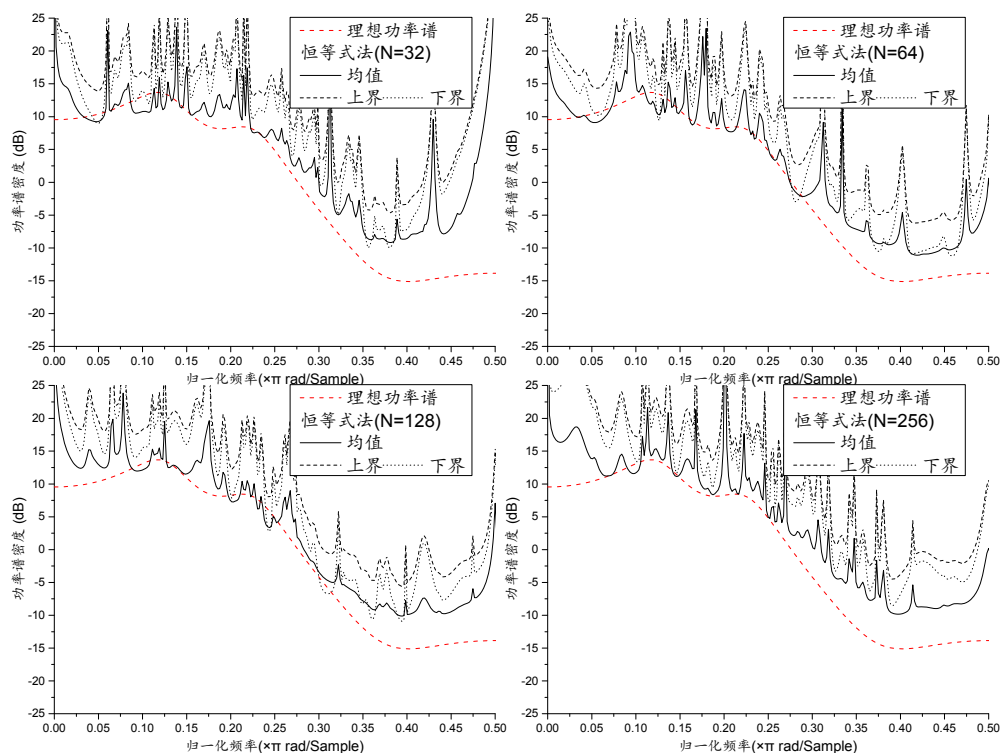


图 2-19 使用恒等式法对信号二的功率谱估计均值和标准差
(数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256，估计阶数，AR 门限 0.01，MA 门限 0.5)

图 2-19 为使用恒等式法对信号二（宽带 ARMA 过程）的功率谱估计均值和标准差，其数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256，使用阶数

估计，AR 门限定为 0.01，MA 门限定为 0.5。从图上可以看出，估计出的曲线虽然大致趋势与实际功率谱较为一致，但其无论均值和方差抖动也都非常剧烈，非常不稳定，其估计结果不如同等数据长度 N 的经典法及其改进方法（附图 B-1~附图 B-8）。

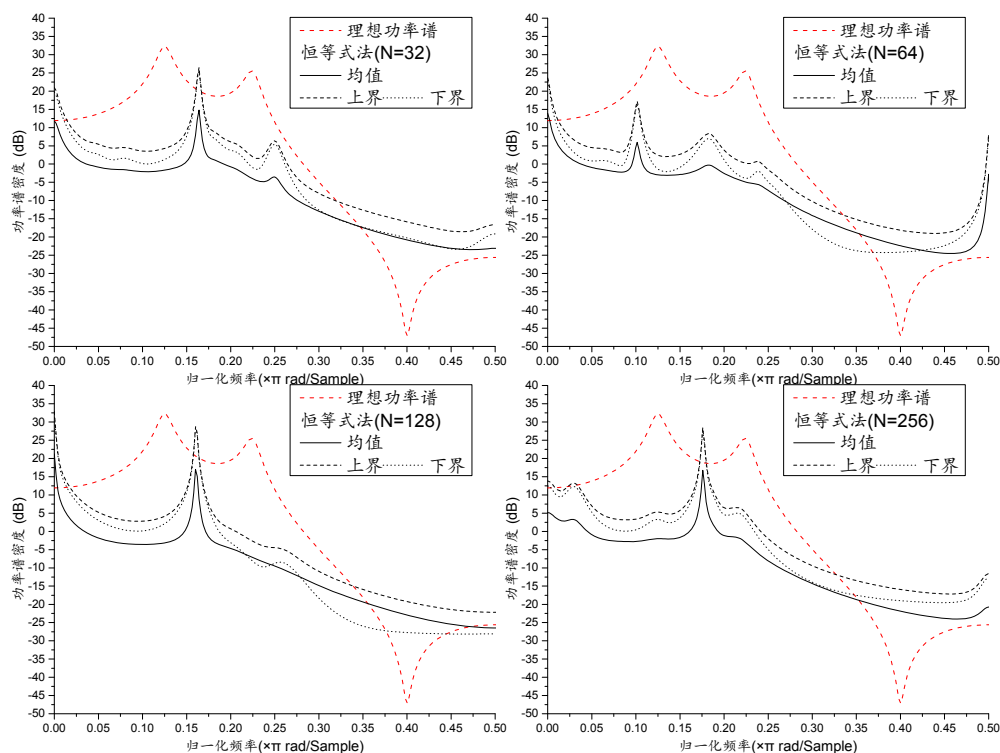


图 2-20 使用恒等式法对信号三功率谱估计均值和标准差
(数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256，固定阶数均为 4)

图 2-20 为使用恒等式法对信号三（窄带 ARMA 过程）的功率谱估计均值和标准差，其数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256，将估计算法的阶数固定为理想阶数 4。从图上可以看出，估计出的曲线虽然较为平滑，但结果完全不可靠，甚至无法反映真实谱的大概轮廓，其估计结果不如同等数据长度 N 的经典法及其改进方法（附图 C-1~附图 C-8）。

图 2-21 为使用恒等式法对信号三（窄带 ARMA 过程）的功率谱估计均值和标准差，其数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256，使用阶数估计，AR 门限定为 0.01，MA 门限定为 0.5。从图上可以看出，估计出

的曲线虽然大致趋势与实际功率谱较为一致，但其无论均值和方差抖动也都非常剧烈，非常不稳定，其估计结果不如同等数据长度 N 的经典法及其改进方法（附图 C-1~附图 C-8）。

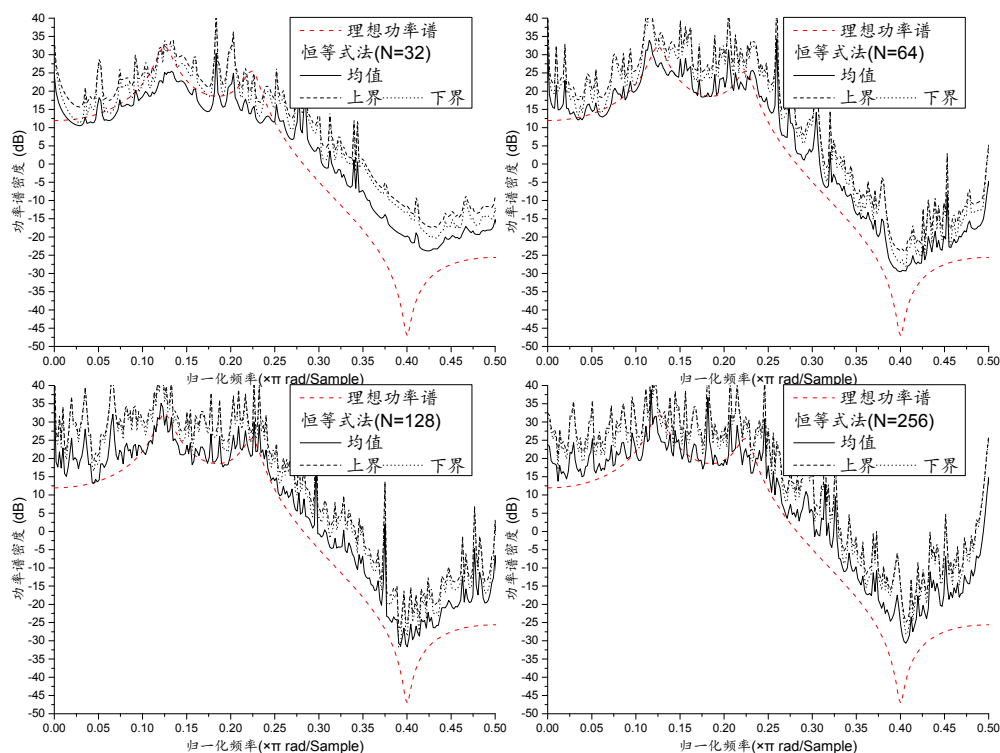


图 2-21 使用恒等式法对信号三的功率谱估计均值和标准差

（数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256，估计阶数，AR 门限 0.01，MA 门限 0.5）

以上实验和分析可以看出，恒等式法对 ARMA 过程参数估计结果往往不如使用经典法或经典法的改进方法。这是因为 ARMA 过程的 Y-W 方程是一个非线性方程，目前为止并没有一种可靠高效的方法解这个方程，现有方法的实质也只能做到对参数模糊估计。由于 ARMA 模型的特殊性，这种模糊的参数反应到模型上时往往会产生较大的误差。

2.5 Pisarenko 谐波分解法

Pisarenko 谐波分解法 (PHD) 基于这样的—个事实： N 个正弦波加白噪声的自相关函数可以表示为如式所示的形式。

$$\begin{aligned} R_{yy}(k) &= R_{ss}(k) + R_{ww}(k) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{A_i^2}{2} \cos(2\pi f_i k \Delta t) + \sigma_w^2 \delta(k), 0 \leq k \leq M \end{aligned} \quad (2.47)$$

若已知非零滞后值的数量 M 大于或等于正弦信号个数的两倍, 则噪声功率可以准确的确定, 并将它从零滞后的自相关函数中减去, 剩下的信号自相关函数为

$$\begin{aligned} R_{ss}(k) &= R_{yy}(k) - \sigma_w^2 \delta(k) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{A_i^2}{2} \cos(2\pi f_i k \Delta t), 0 \leq k \leq M \end{aligned} \quad (2.48)$$

对这个无噪声的自相关函数 $R_{ss}(k)$ (信噪比无限大), 应用 AR 功率谱估值, 可以得到多个正弦波的无限精细分辨。

1、	<p>设 $\mathbf{Y}^T = [y_n \quad y_{n-1} \quad \cdots \quad y_{n-2p}]$, $\mathbf{A}^T = [1 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_{2p}]$</p> <p>$p$ 为正弦波的个数, $E[\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T] = \mathbf{R}_{yy}$</p> <p>求解 \mathbf{R}_{yy} 的最小特征向量, 即为噪声功率 σ_w^2, 最小特征值对应的特征向量即为 \mathbf{A}</p>
2、	<p>求解 $z^{2p} + a_1 z^{2p-1} + \cdots + a_{2p-1} z + a_{2p} = 0$ 的根, 由于这个根具有 $z_n = e^{j2\pi f_n \Delta t}$ 的形式, 从而得到各正弦波频率 $\{f_k\}$</p>
3、	<p>由 $\mathbf{F}\mathbf{P} = \mathbf{r}$ 求得功率向量 \mathbf{P}。</p> <p>其中, $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \cos(2\pi f_1 \Delta t) & \cdots & \cos(2\pi f_p \Delta t) \\ \vdots & & \vdots \\ \cos(2\pi f_1 p \Delta t) & \cdots & \cos(2\pi f_p p \Delta t) \end{bmatrix}$</p> <p>$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} R_{yy}(1) \\ \vdots \\ R_{yy}(p) \end{bmatrix}$, $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_p \end{bmatrix}$</p>

表 2-1 PHD 算法流程

图 2-22 为使用 Pisarenko 谐波分解法对信号一的功率谱估计均值和

标准差，其中 $f_1 = 0.21$ ， $SNR_1 = 10dB$ ， $f_2 = 0.23$ ， $SNR_2 = 15dB$ ，数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256。从图上可以观察到，Pisarenko 法的偏倚和方差主要体现在对谱峰频率值、谱峰功率和噪声功率上。随着 N 的增大，偏倚和方差均逐渐减小。

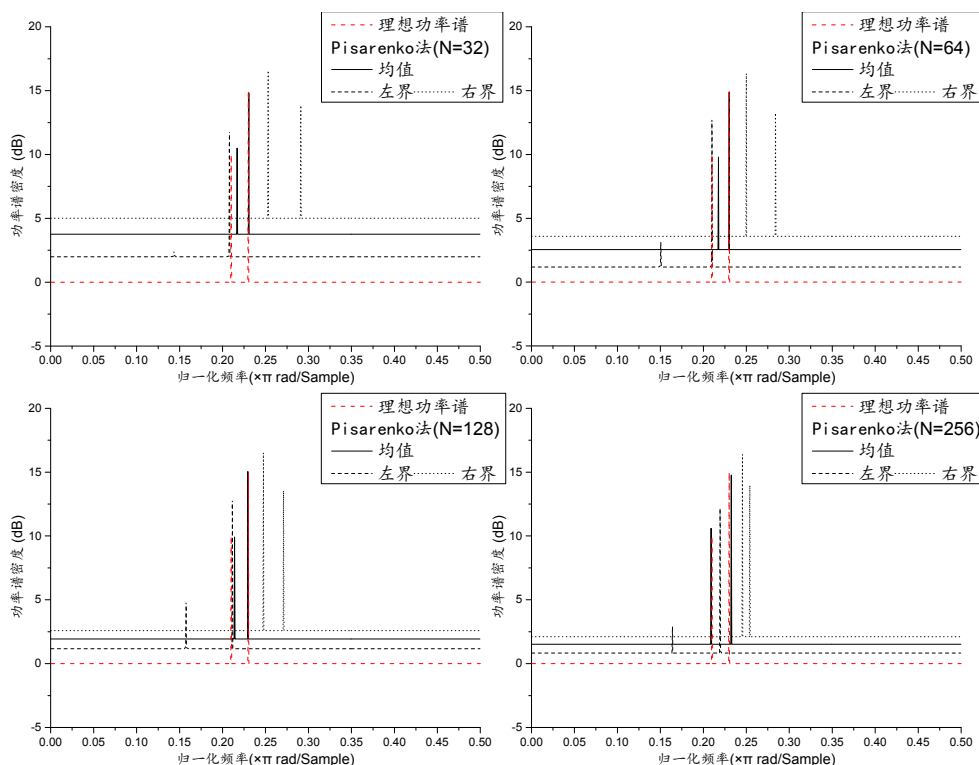


图 2-22 使用 Pisarenko 谐波分解法对信号一的功率谱估计均值和标准差

(数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256， $f_1 = 0.21$ ， $SNR_1 = 10$ ， $f_1 = 0.23$ ， $SNR_1 = 15$)

图 2-23 为使用 Pisarenko 谐波分解法对信号一的功率谱估计均值和标准差，其中 $f_1 = 0.21$ ， $SNR_1 = 20dB$ ， $f_2 = 0.23$ ， $SNR_2 = 25dB$ ，数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256。与图 2-22 所反映的现象较为一致，Pisarenko 法的偏倚和方差主要体现在对谱峰频率值、谱峰功率和噪声功率上。随着 N 的增大，偏倚和方差均逐渐减小。但 SNR 较高的情况下，对谱峰频率值、谱峰功率较准，但对噪声功率估计偏倚较大。

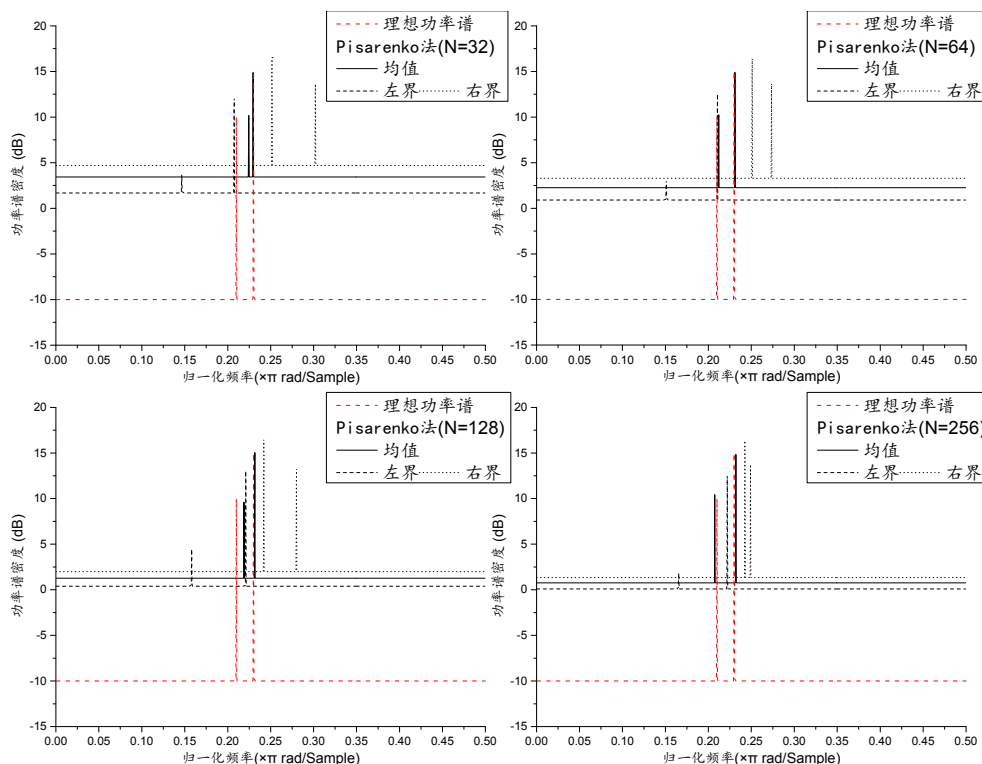


图 2-23 使用 Pisarenko 谐波分解法对信号一的功率谱估计均值和标准差

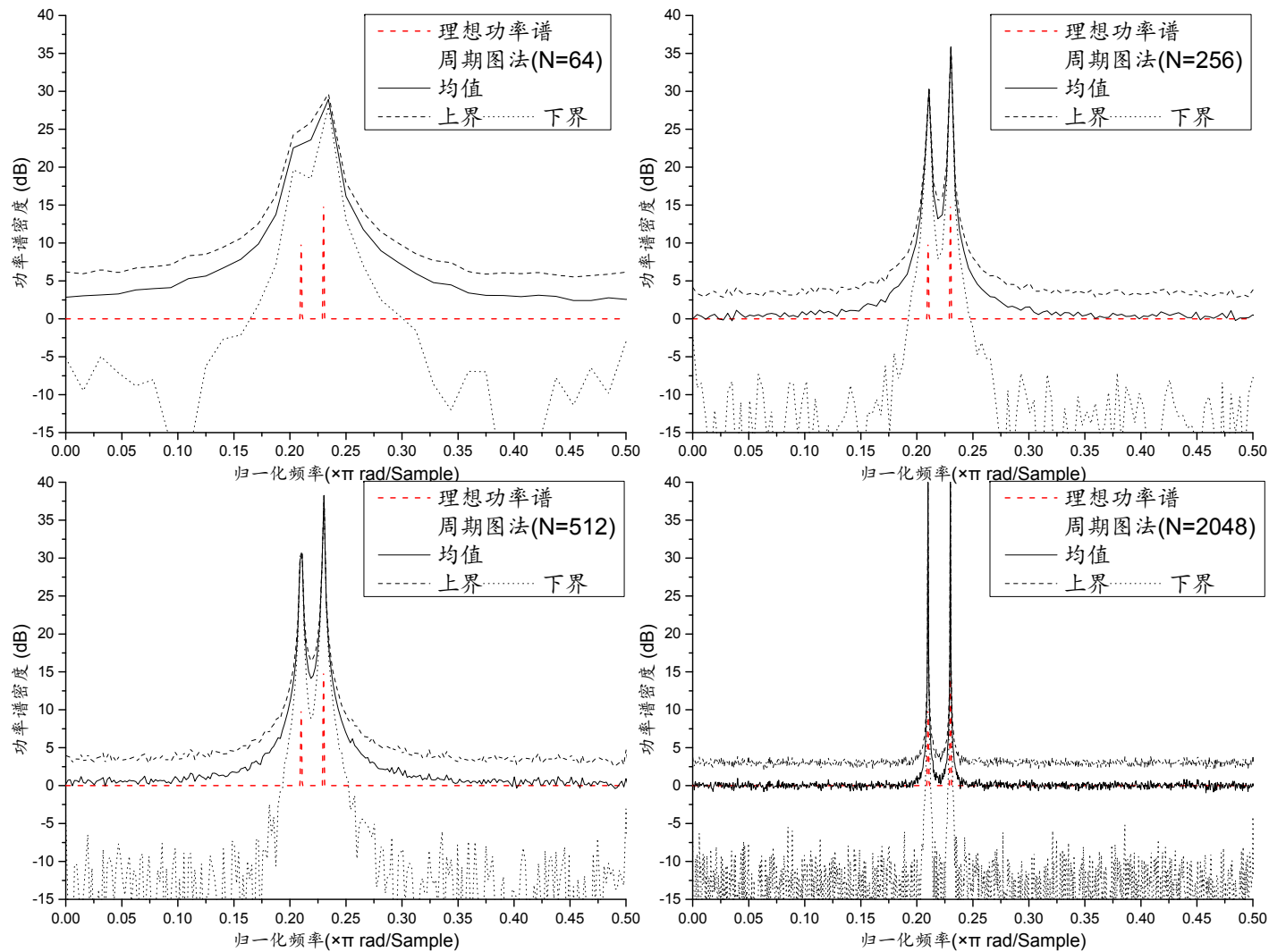
(数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256, $f_1 = 0.21$, $SNR_1 = 20$, $f_2 = 0.23$, $SNR_2 = 25$)

2.6 本章小结

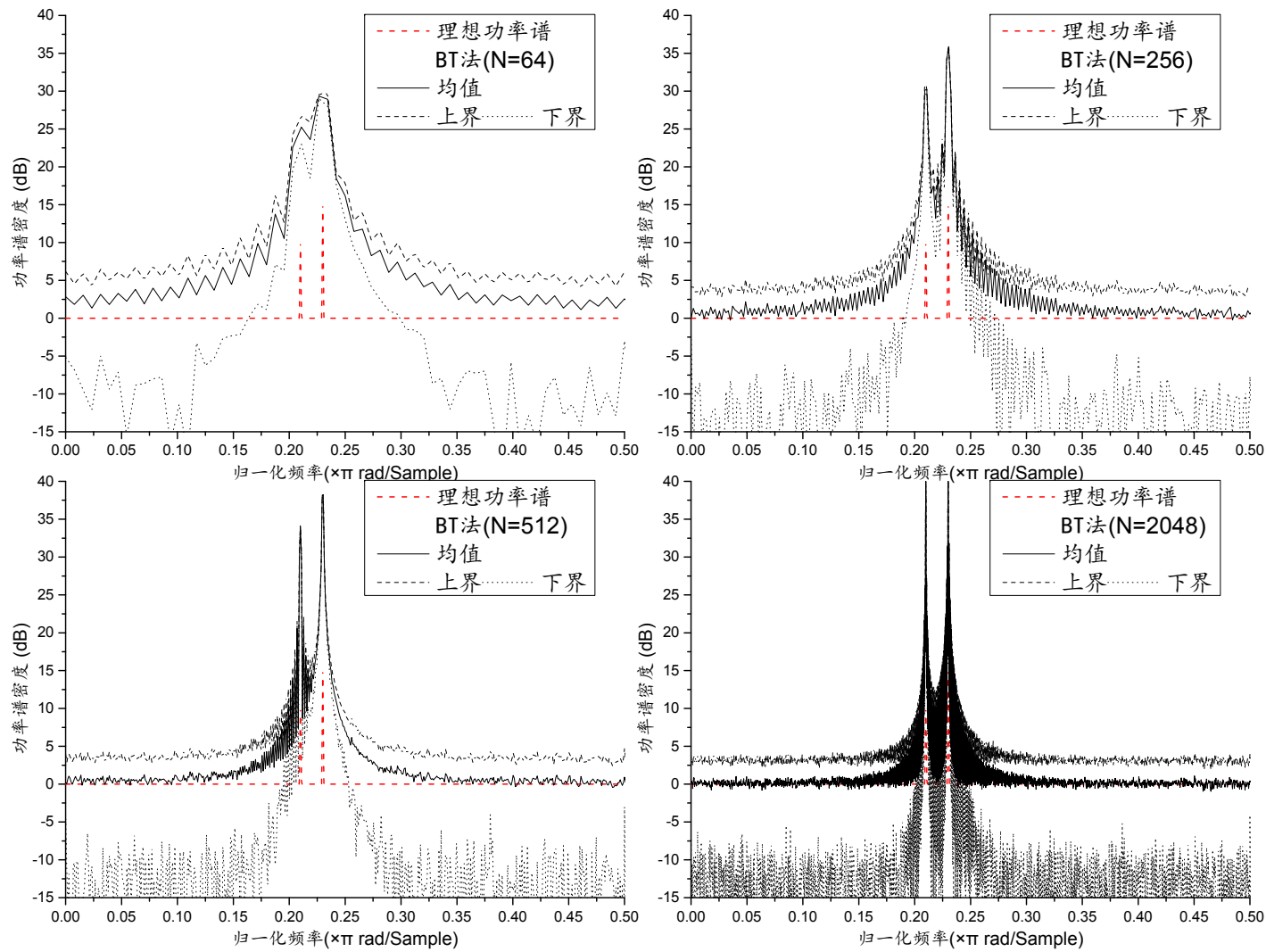
本章主要对功率谱估计用到的有理传输模型 (AR、MA、ARMA) 参数估计法 (批处理法、Burg 法、恒等式法) 和基于谐波分解的 Pisarenko 法进行讨论和实验分析。对用于估计 AR 参数的批处理法和 Burg 法, 其性能较好, 在较短数据长度的情况下能够达到较为理想的偏倚性能和方差性能, 影响其性能的关键因素在于阶数和自相关函数估计的准确性; 对用于估计 ARMA 参数的恒等式法, 由于将其等效为 AR 模型, 在实际处理中往往难以达到阶数非常大的要求, 因此会造成后续估计出的 $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ 参数存在较大误差, 继而因为模型的特殊性影响到估计结果, 使得其效果并不好; 对于 Pisarenko 谐波分解法, 虽然其估计出的功率谱“毛刺”较少, 但其偏倚性能和方差性能对数据长度和信噪比均比较敏感,

并且实际应用中待估计信号可能有非常复杂的频率成分，可能会使此种方法的运算代价过高。

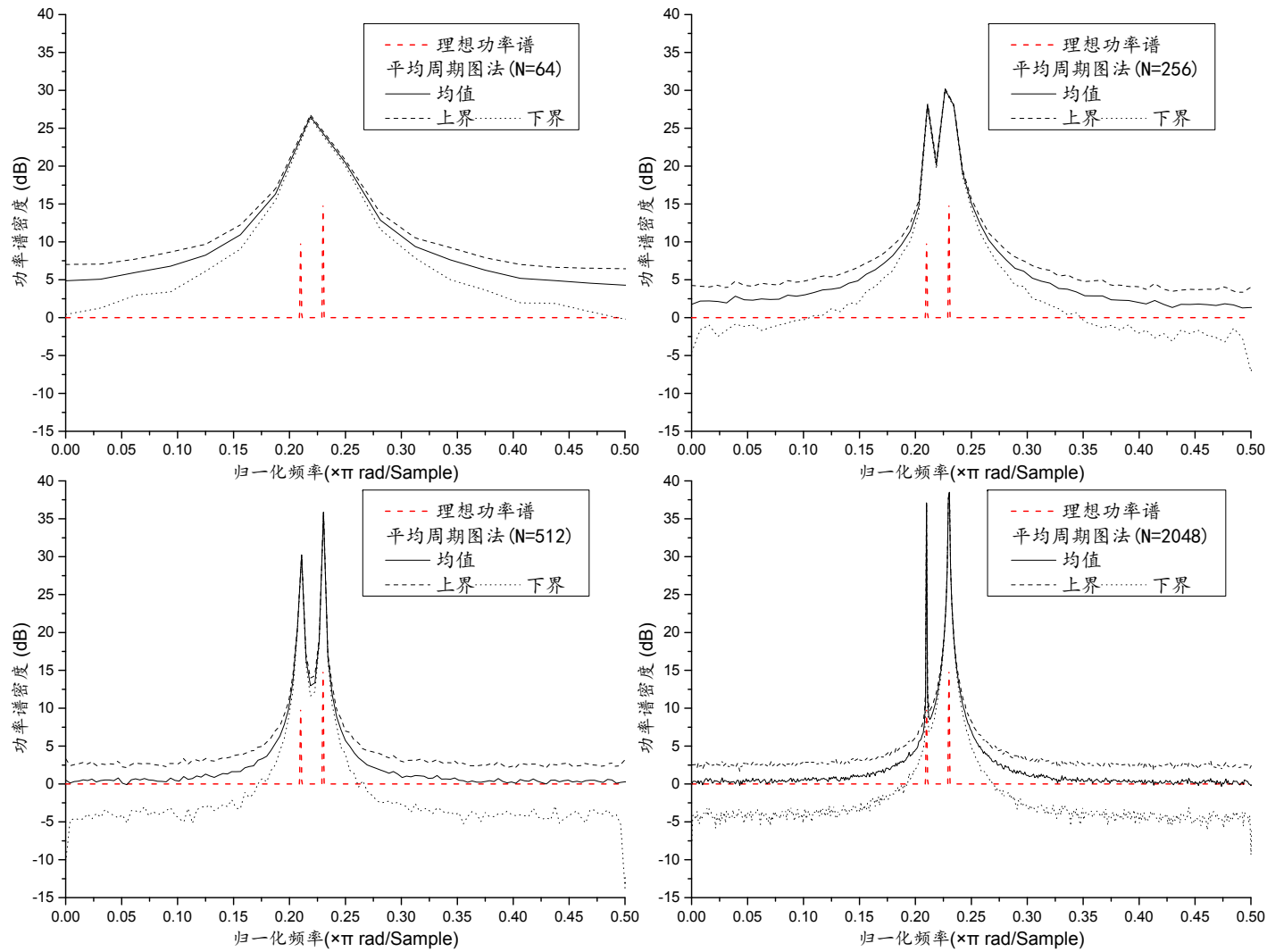
附录A 信号一的仿真结果



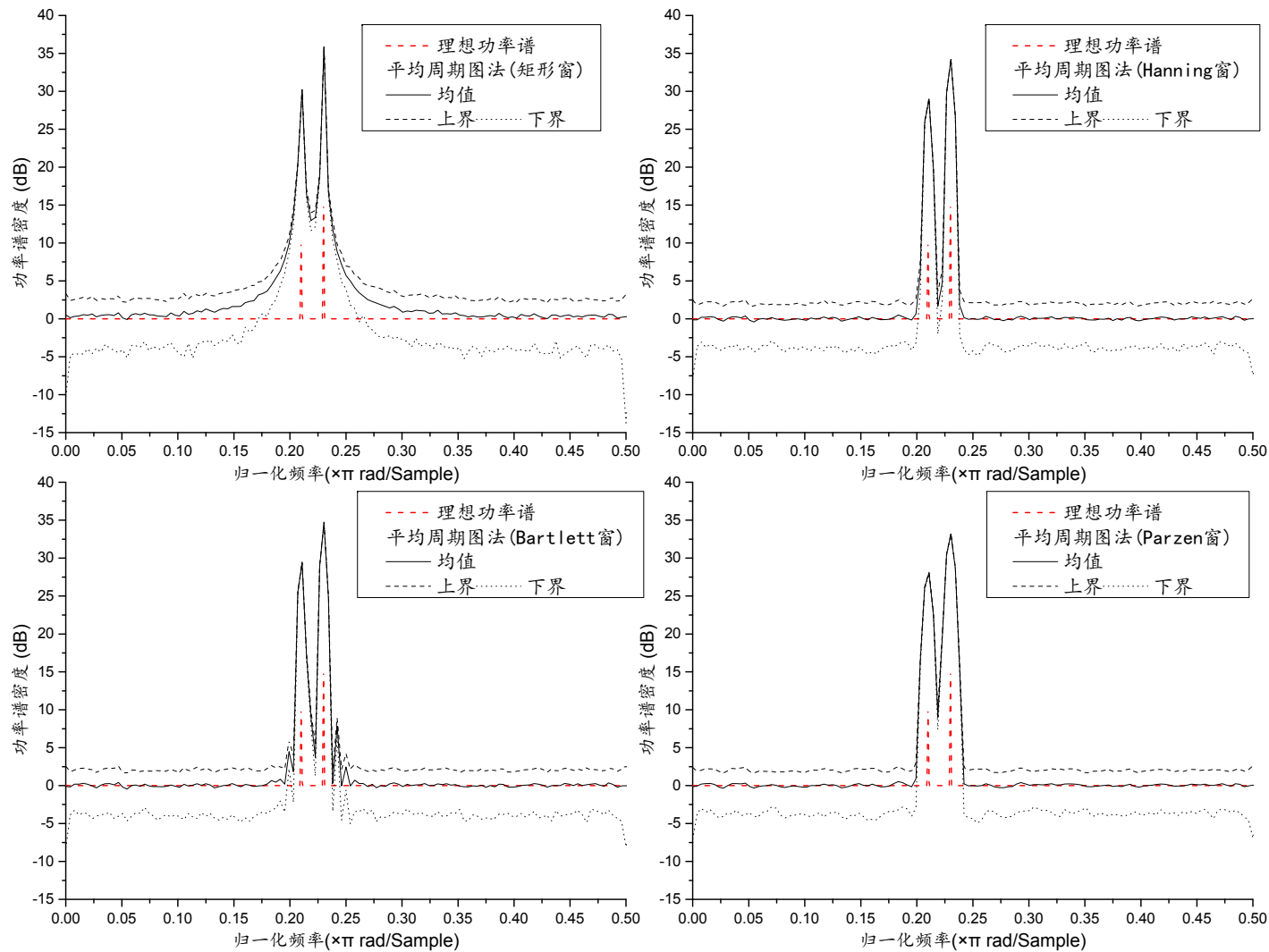
附图 A-1 使用周期图法对信号一进行功率谱估计均值和标准差
(数据长度 N 分别取 64、256、512 和 2048)



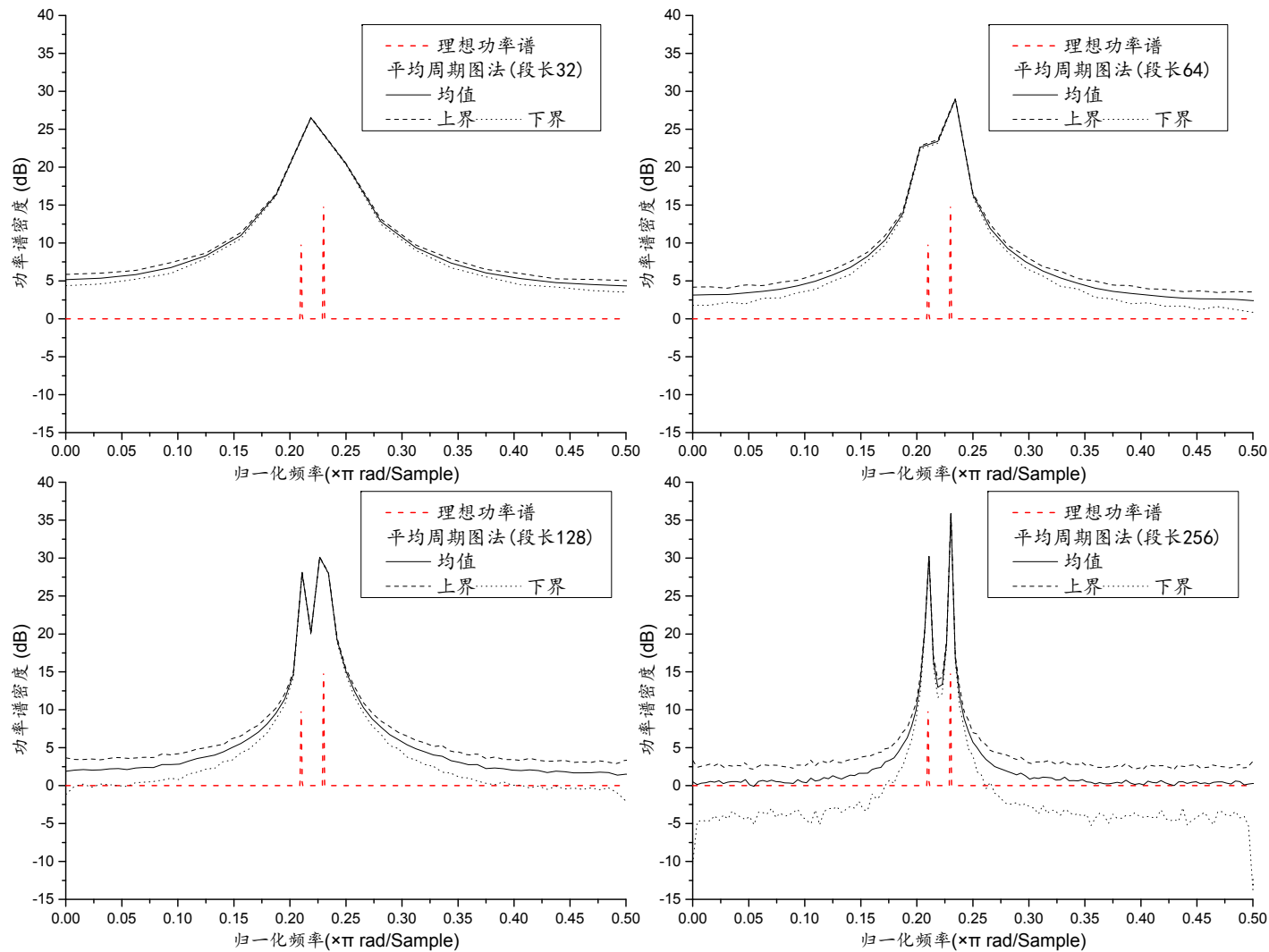
附图 A-2 使用 BT 法对信号一进行功率谱估计均值和标准差
(数据长度 N 分别取 64、256、512 和 2048)



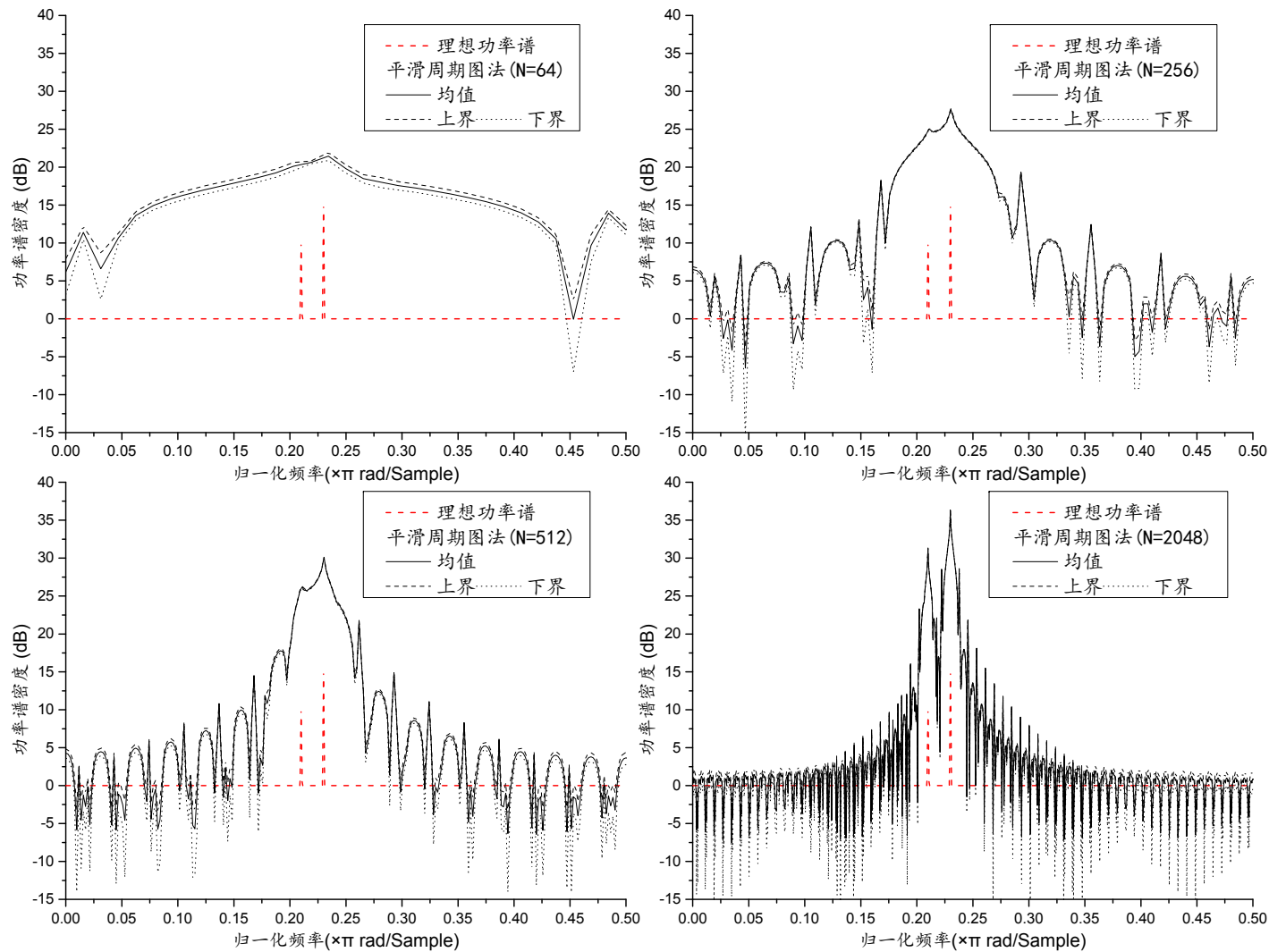
附图 A-3 使用平均周期图法对信号一进行功率谱估计均值和标准差
(数据长度 N 分别取 64、256、512 和 2048, 分 3 段, 矩形窗, 50%重叠)



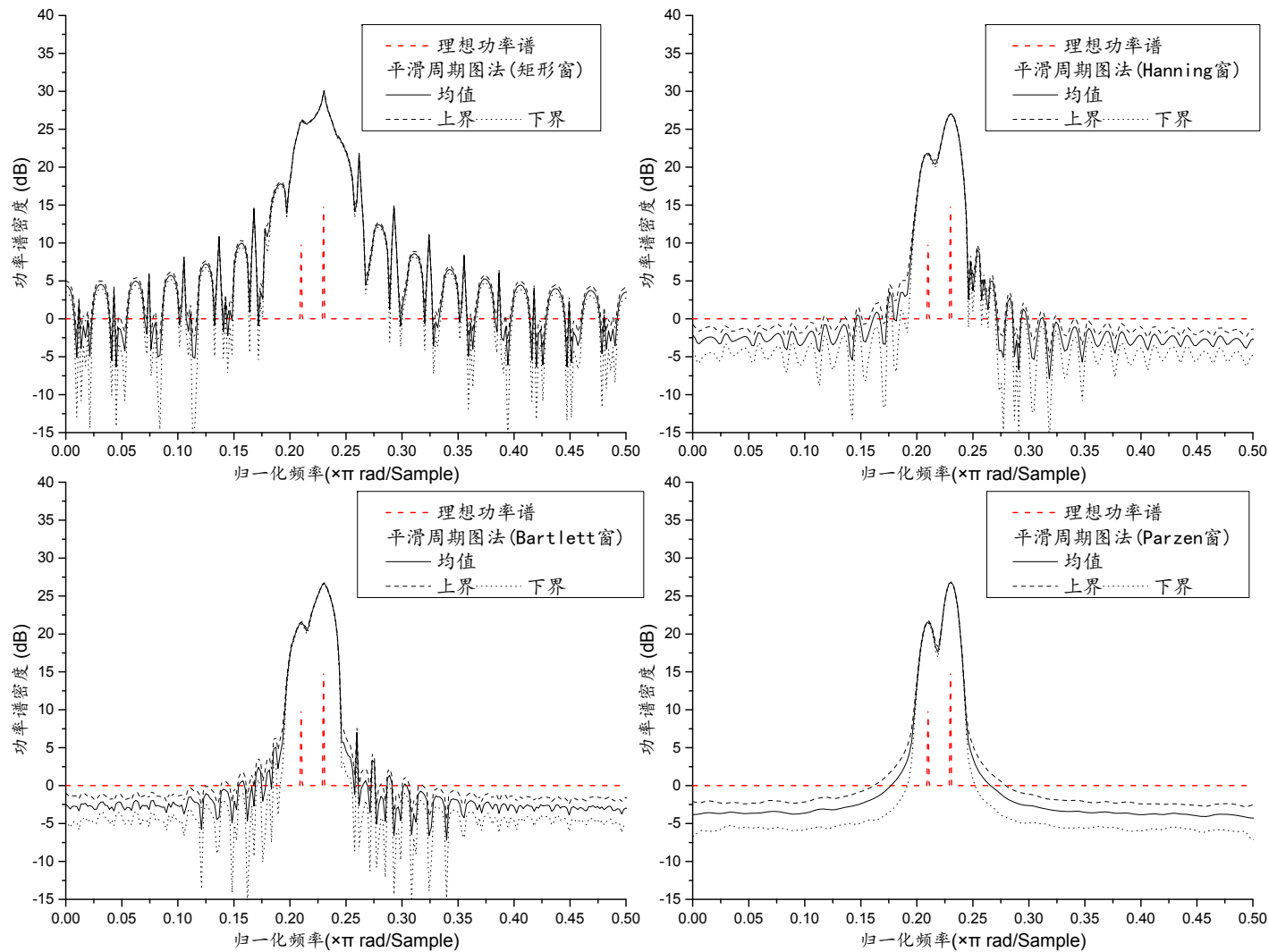
附图 A-4 使用平均周期图法对信号一进行功率谱估计均值和标准差
(窗函数分别取矩形窗、Hanning 窗、Bartlett 窗和 Parzen 窗，数据长度 N 为 512，分 3 段，50%重叠)



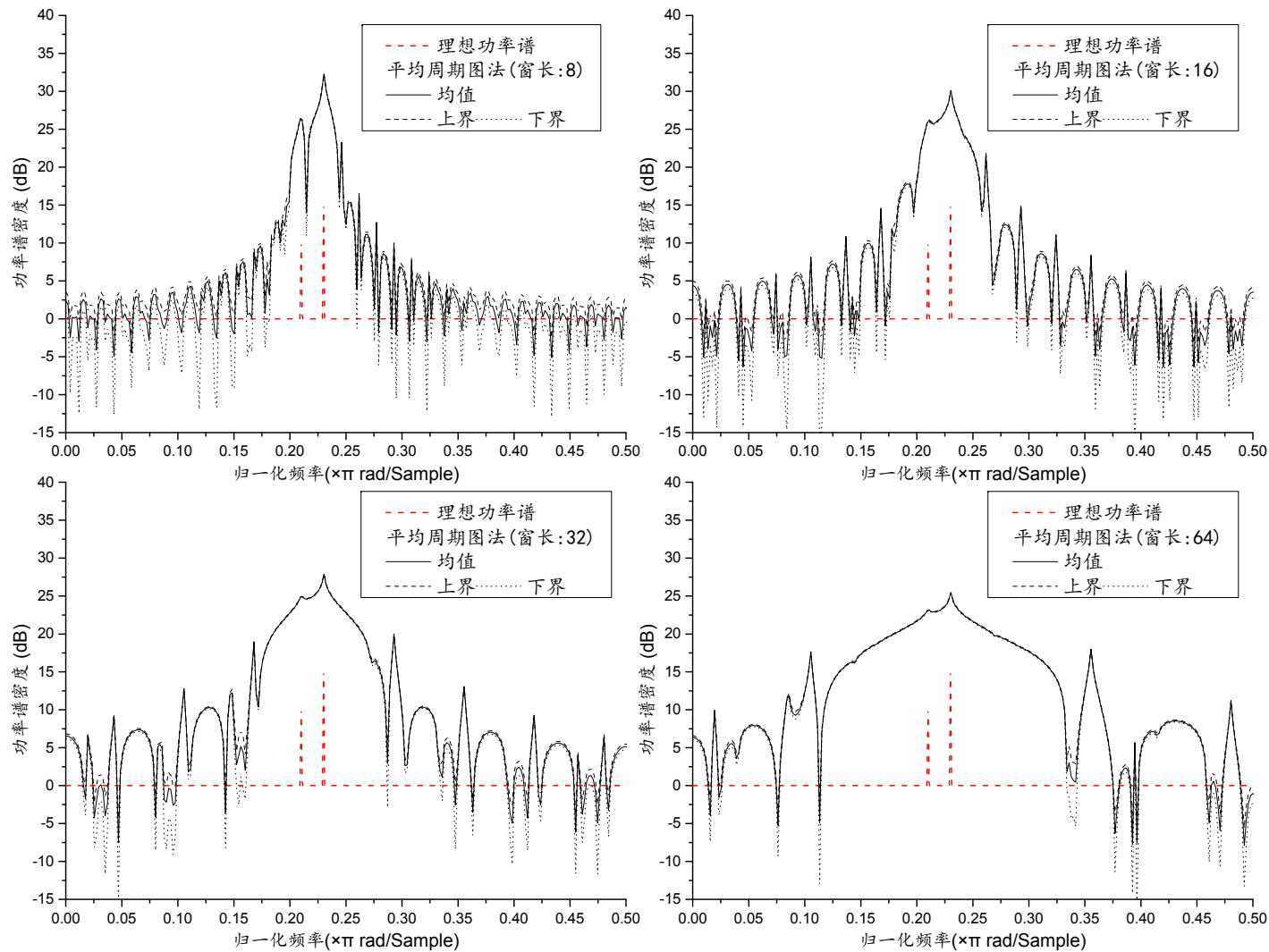
附图 A-5 使用平均周期图法对信号一进行功率谱估计均值和标准差
(段长分别取 32、64、128 和 256, 数据长度 N 为 512, 矩形窗, 50%重叠)



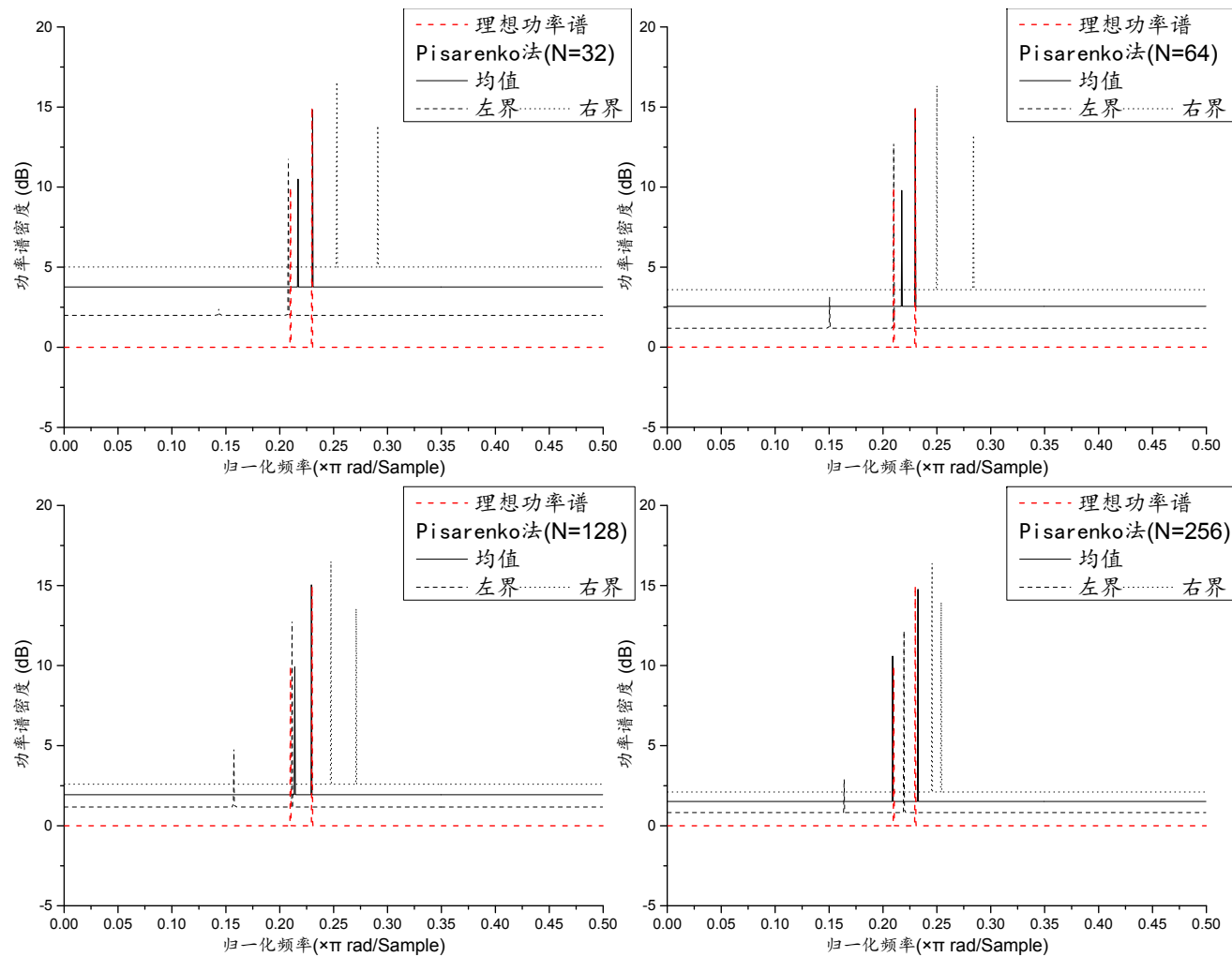
附图 A-6 使用平滑周期图法对信号一进行功率谱估计均值和标准差
(数据长度 N 分别取 64、256、512 和 2048，矩形窗，平滑长度 16)



附图 A-7 使用平滑周期图法对信号一进行功率谱估计均值和标准差
(窗函数分别取矩形窗、Hanning 窗、Bartlett 窗和 Parzen 窗，数据长度 N 为 512，平滑长度 16)

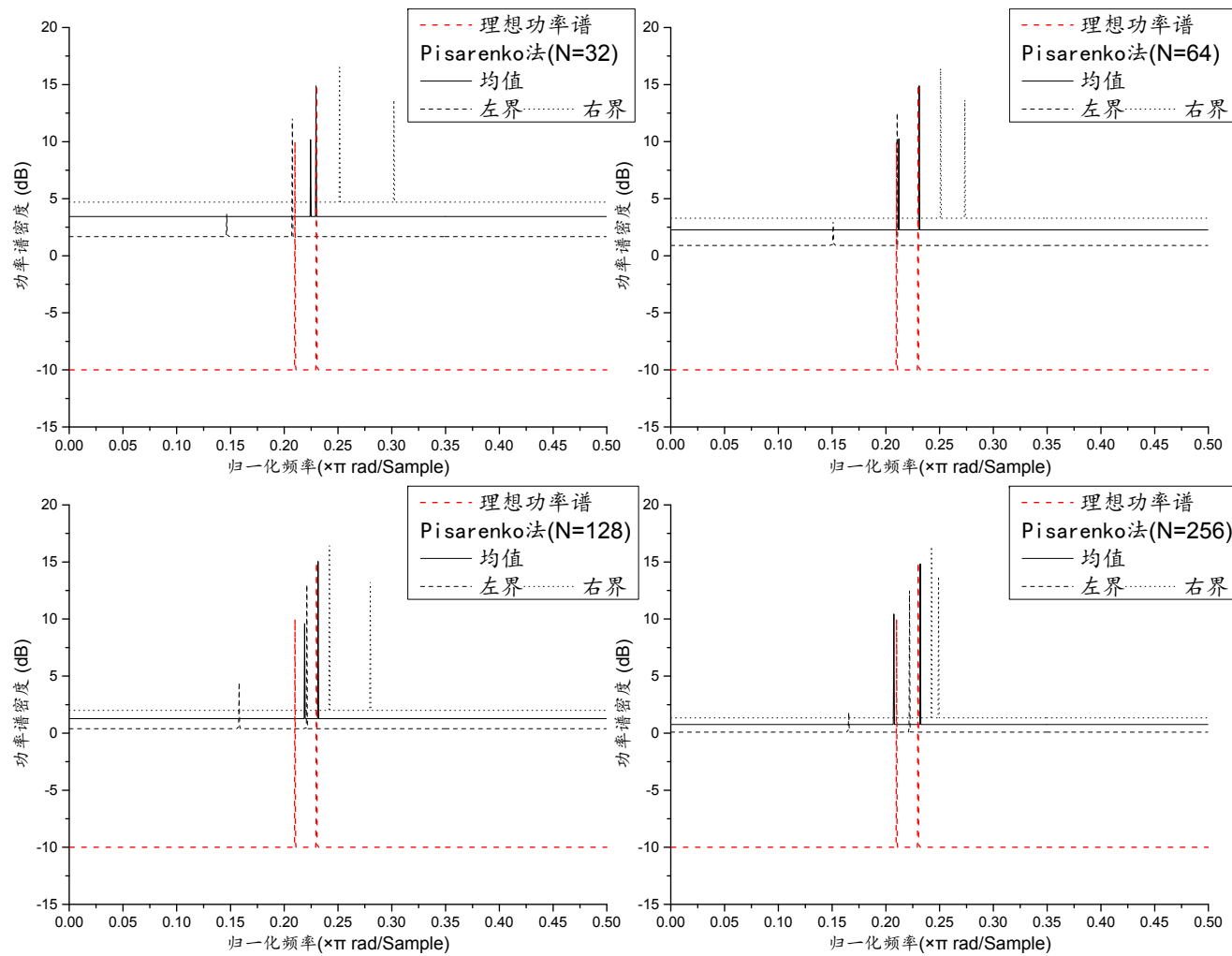


附图 A-8 使用平滑周期图法对信号一进行功率谱估计均值和标准差
(平滑长度分别取 8、16、32 和 64，数据长度 N 为 512，矩形窗)



附图 A-9 使用 Pisarenko 谐波分解法对信号一的功率谱估计均值和标准差

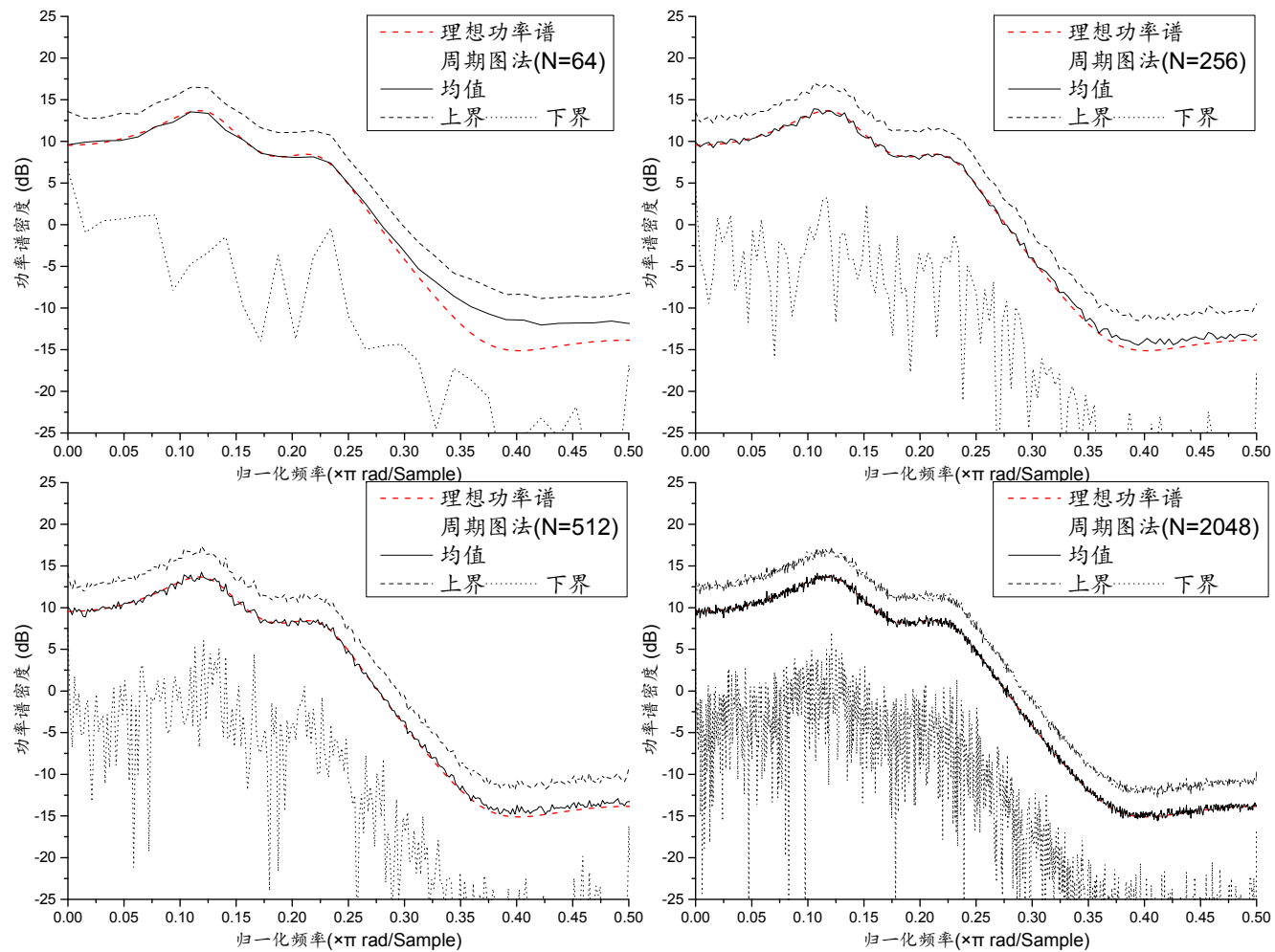
(数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256, $f_1 = 0.21$, $SNR_1 = 10$, $f_1 = 0.23$, $SNR_1 = 15$)



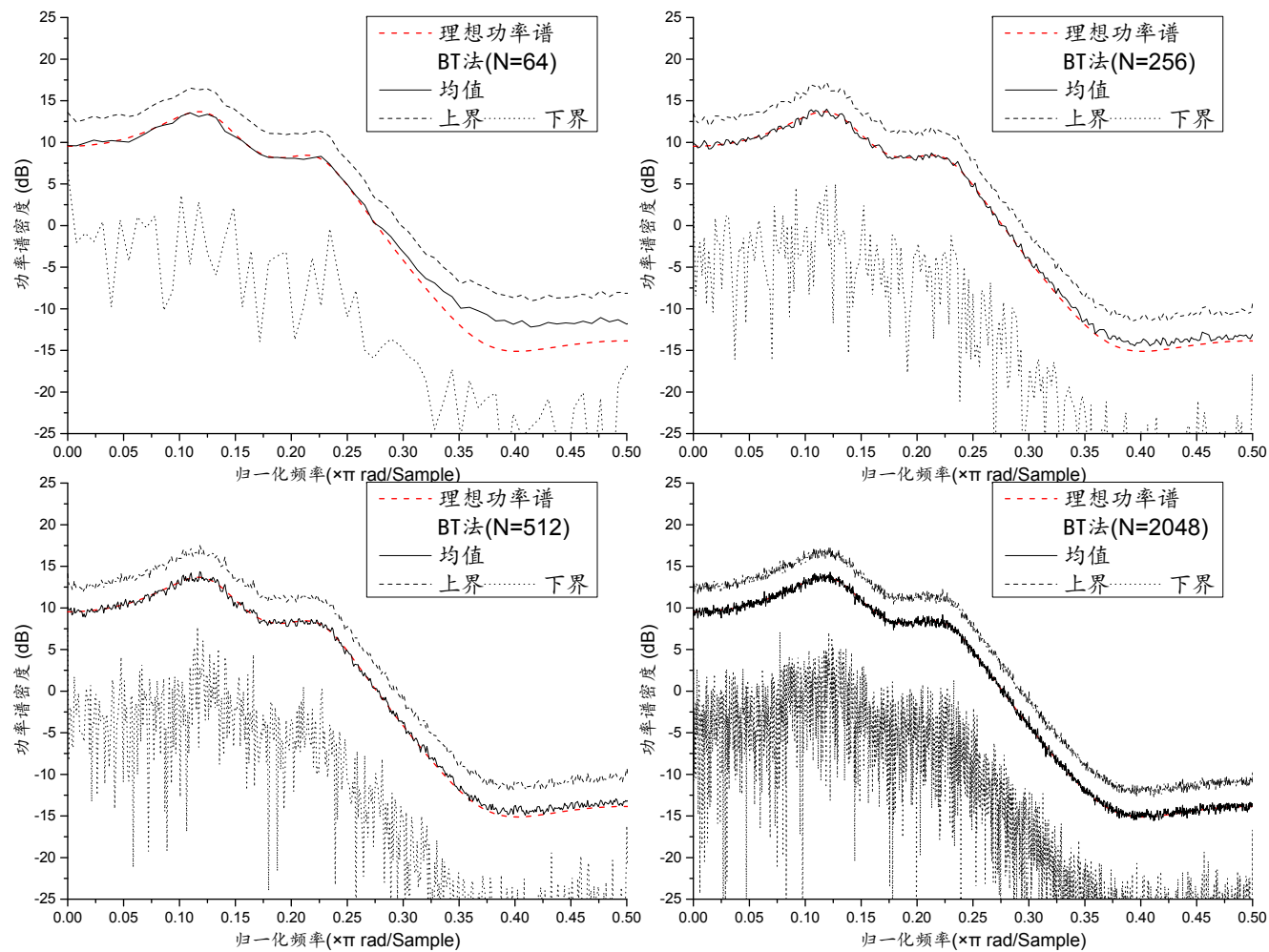
附图 A-10 使用 Pisarenko 谐波分解法对信号一的功率谱估计均值和标准差

(数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256, $f_1 = 0.21$, $SNR_1 = 20$, $f_2 = 0.23$, $SNR_2 = 25$)

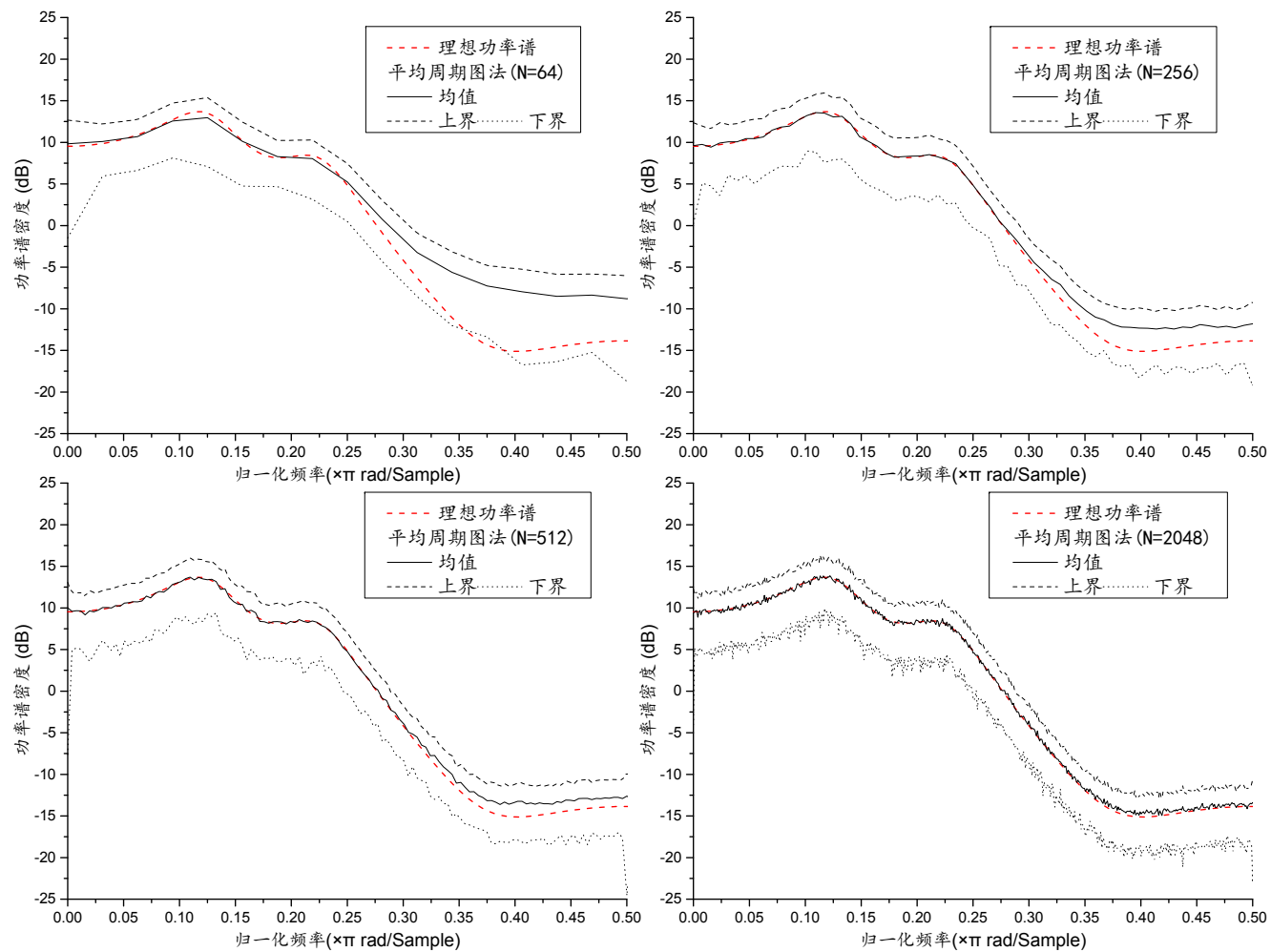
附录B 信号二的仿真结果



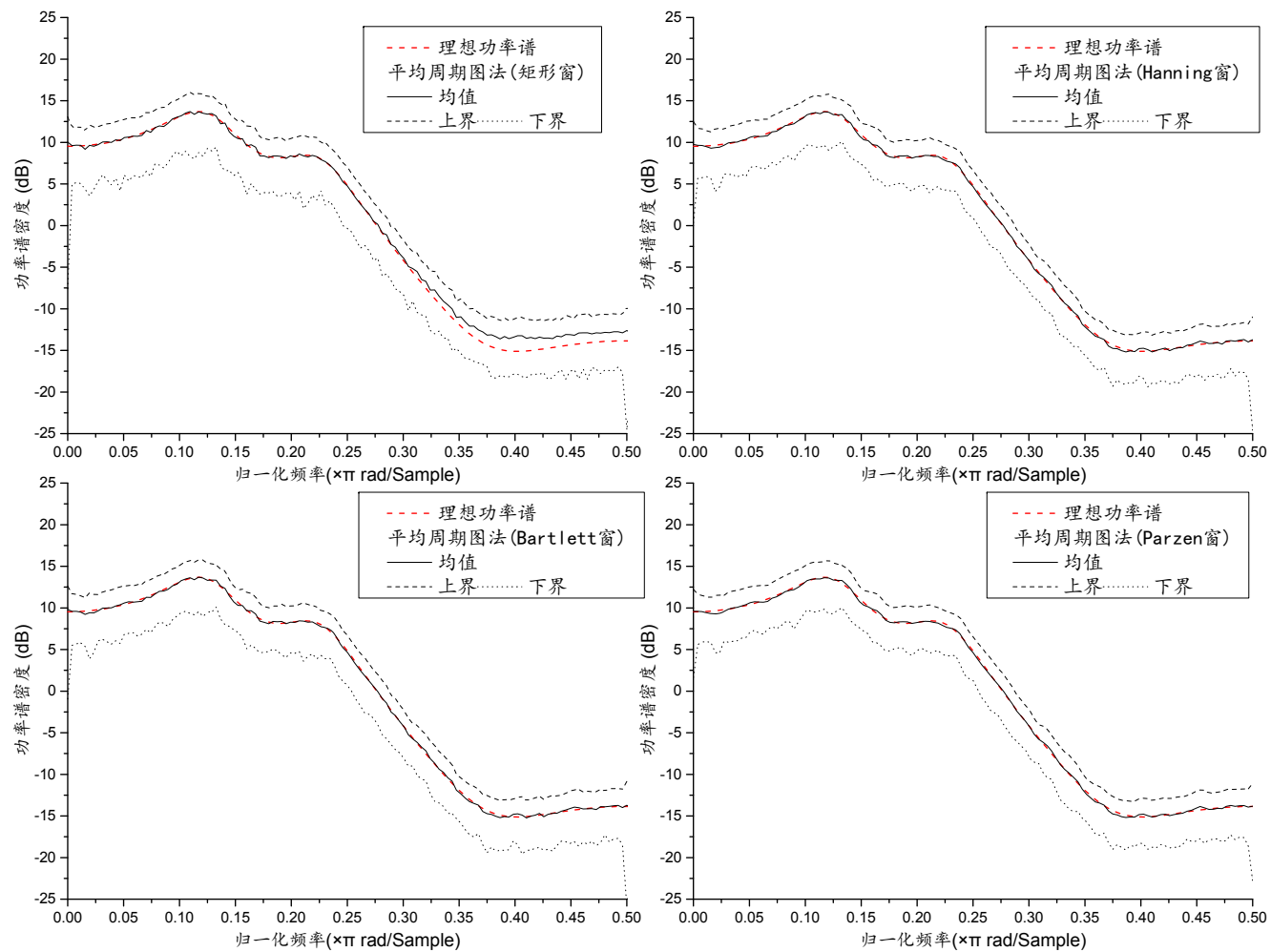
附图 B-1 使用周期图法对信号二进行功率谱估计均值和标准差
(数据长度 N 分别取 64、256、512 和 2048)



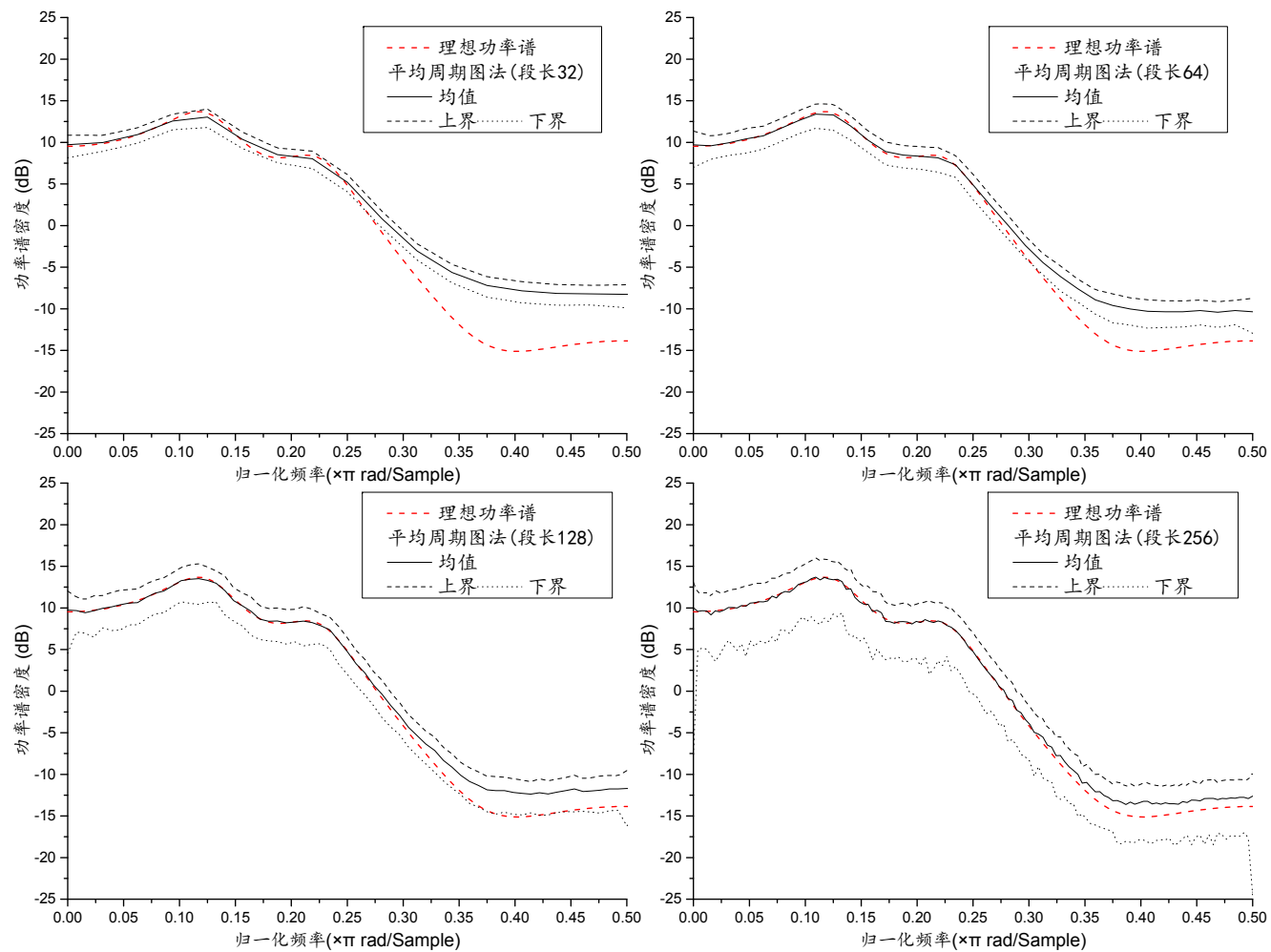
附图 B-2 使用 BT 法对信号二进行功率谱估计均值和标准差
(数据长度 N 分别取 64、256、512 和 2048)



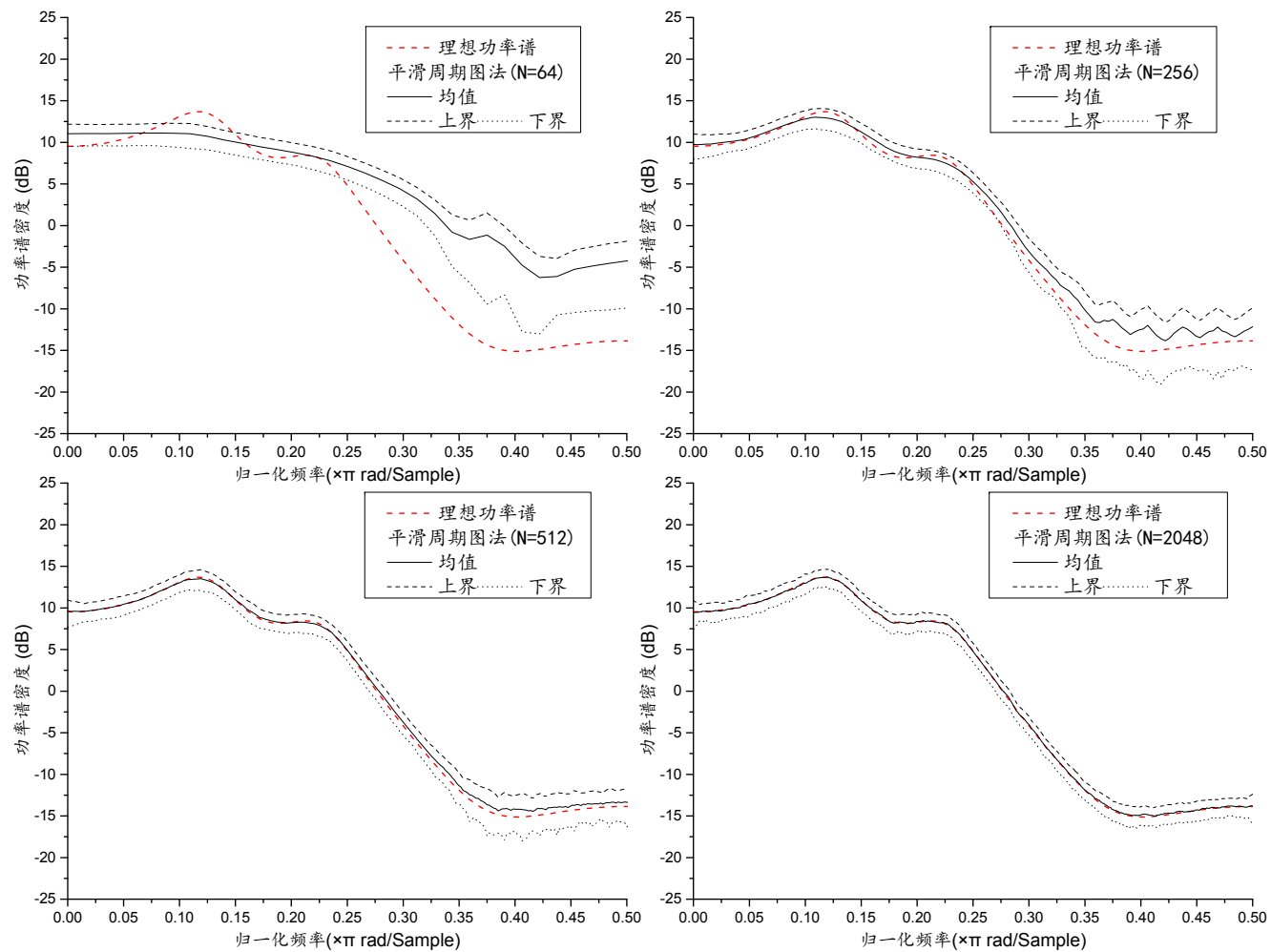
附图 B-3 使用平均周期图法对信号二进行功率谱估计均值和标准差
(数据长度 N 分别取 64、256、512 和 2048, 分 3 段, 矩形窗, 50%重叠)



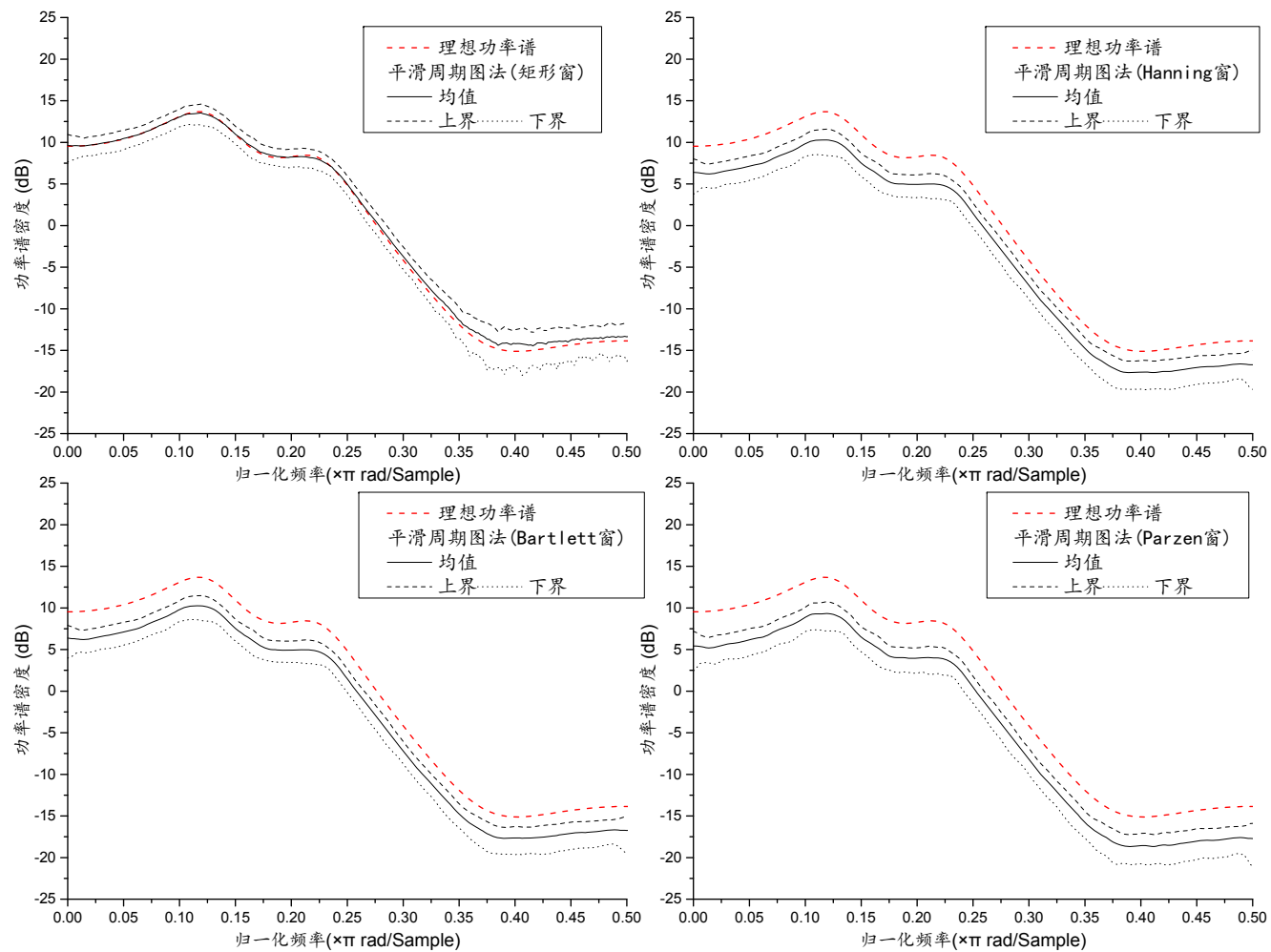
附图 B-4 使用平均周期图法对信号二进行功率谱估计均值和标准差
(窗函数分别取矩形窗、Hanning 窗、Bartlett 窗和 Parzen 窗，数据长度 N 为 512，分 3 段，50%重叠)



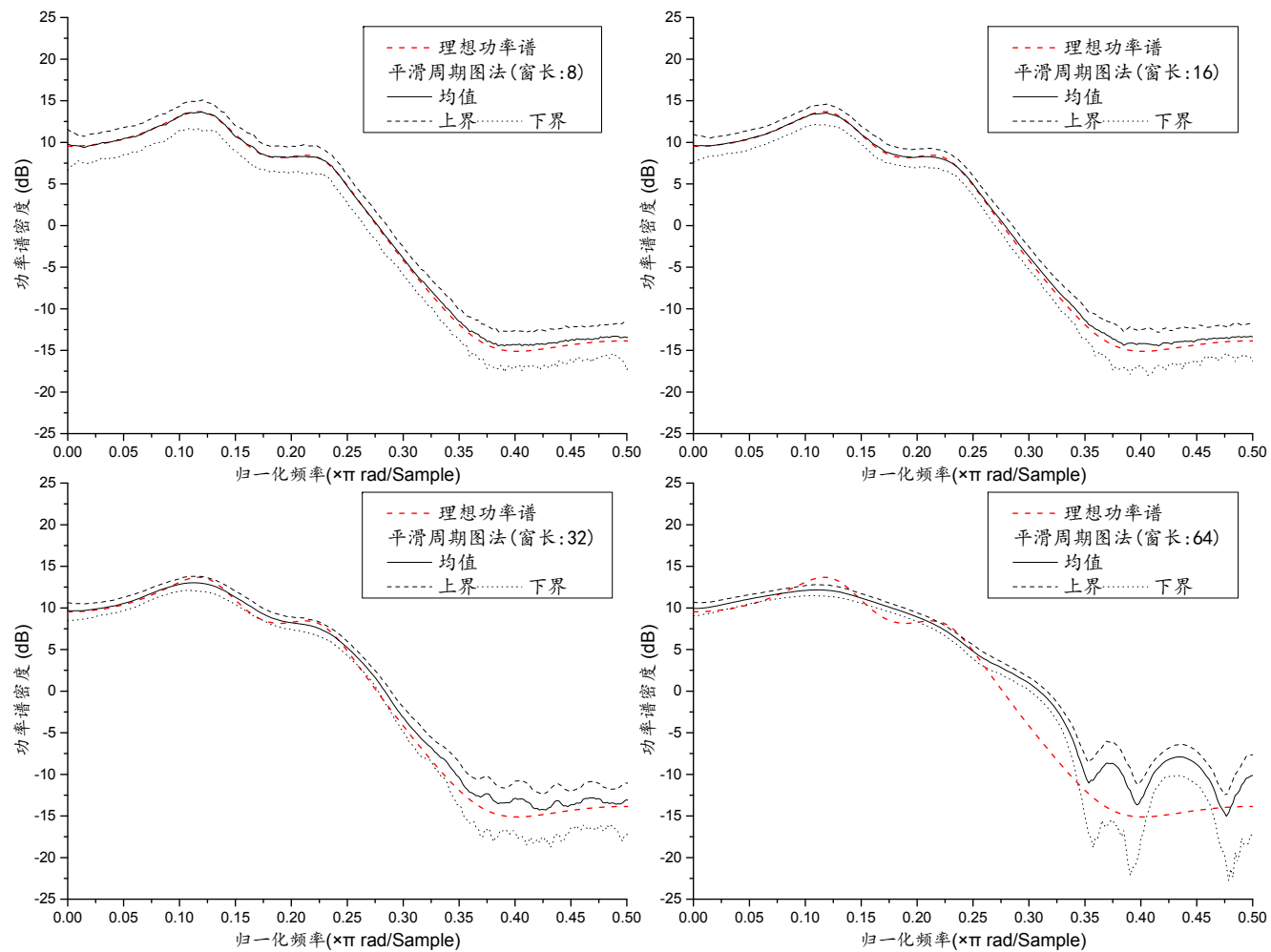
附图 B-5 使用平均周期图法对信号二进行功率谱估计均值和标准差
(段长分别取 32、64、128 和 256，数据长度 N 为 512，矩形窗，50%重叠)



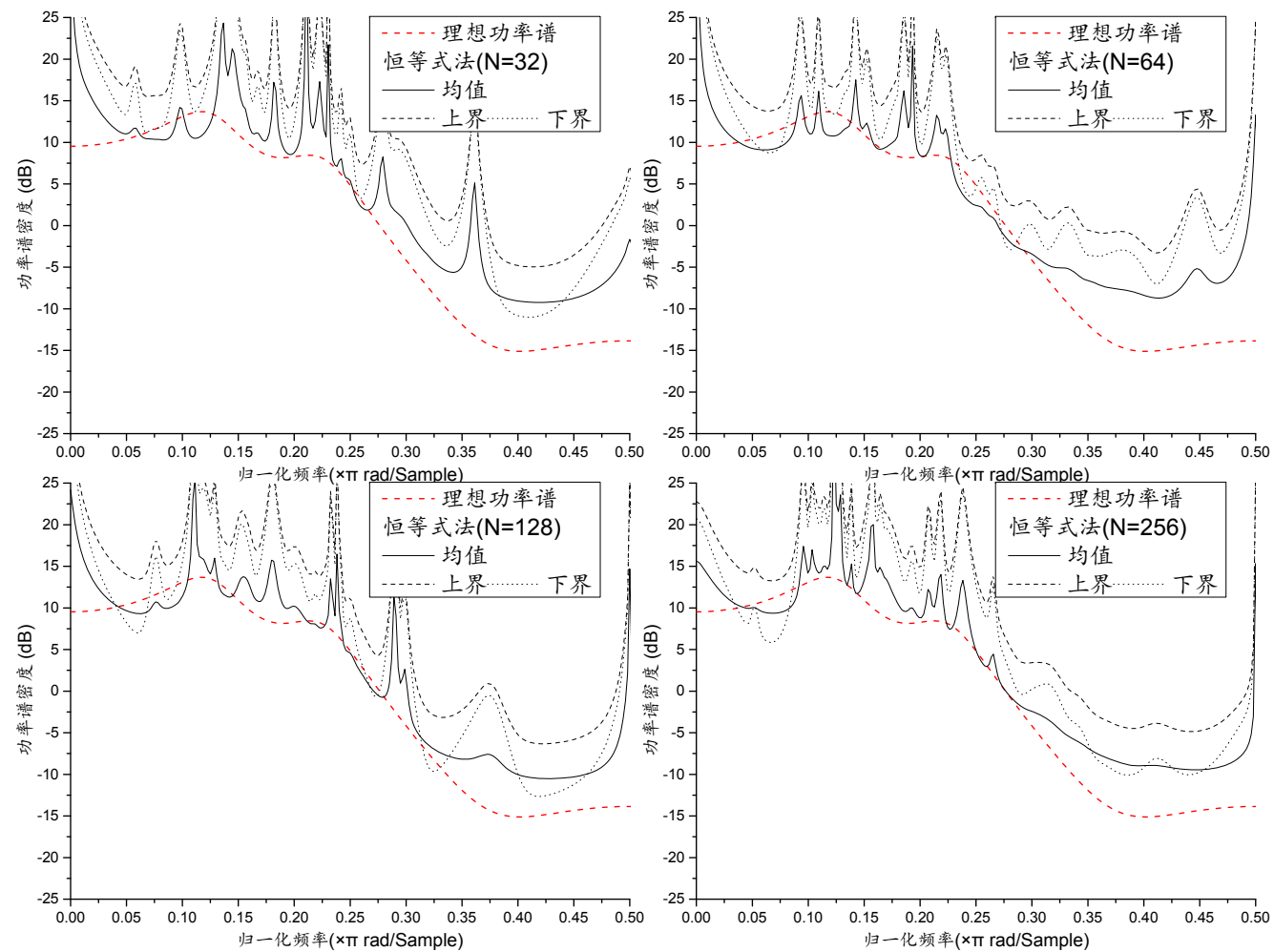
附图 B-6 使用平滑周期图法对信号二进行功率谱估计均值和标准差
(数据长度 N 分别取 64、256、512 和 2048, 矩形窗, 平滑长度 16)



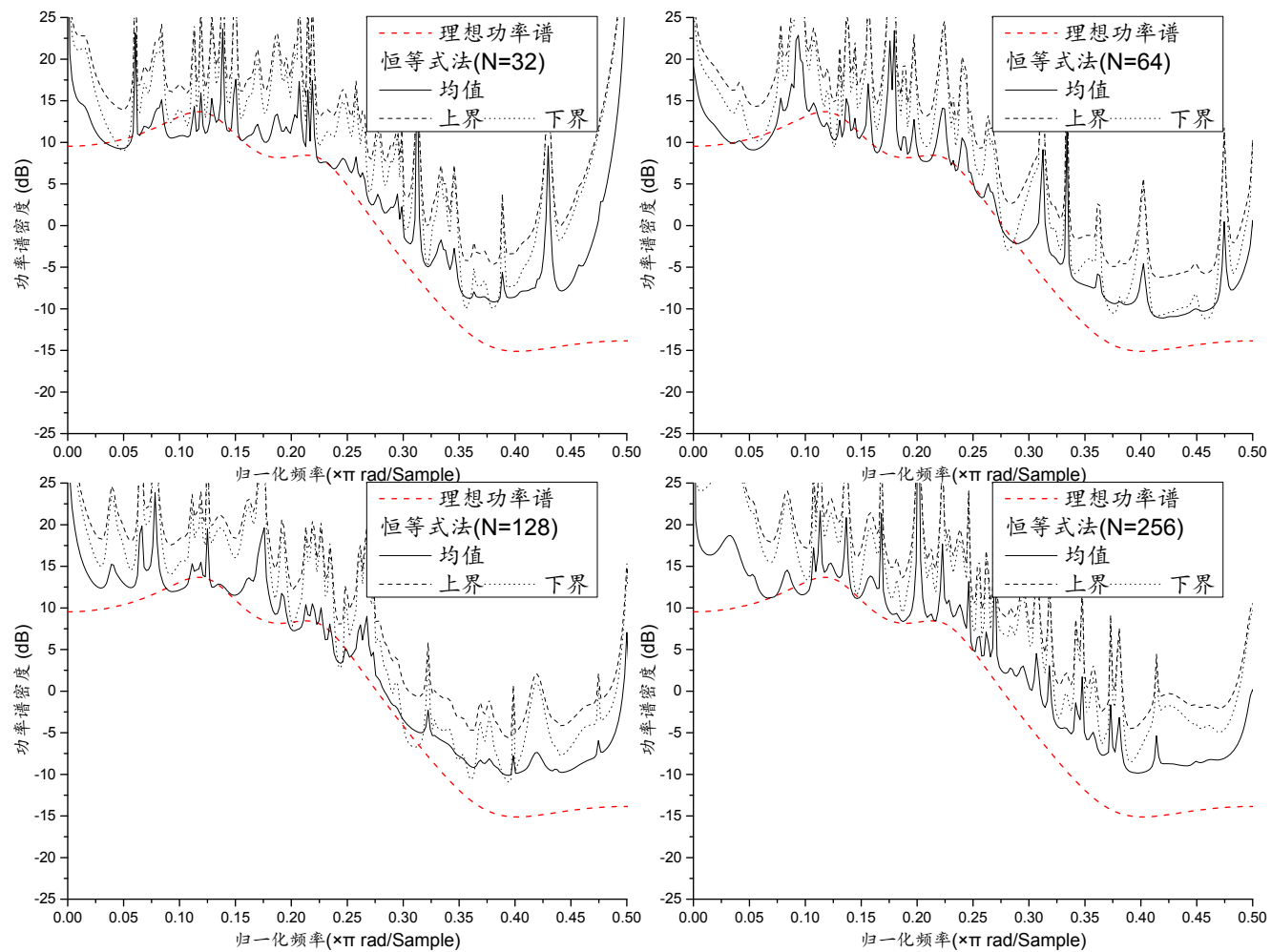
附图 B-7 使用平滑周期图法对信号二进行功率谱估计均值和标准差
(窗函数分别取矩形窗、Hanning 窗、Bartlett 窗和 Parzen 窗，数据长度 N 为 512，平滑长度 16)



附图 B-8 使用平滑周期图法对信号二进行功率谱估计均值和标准差
(平滑长度分别取 8、16、32 和 64，数据长度 N 为 512，矩形窗)

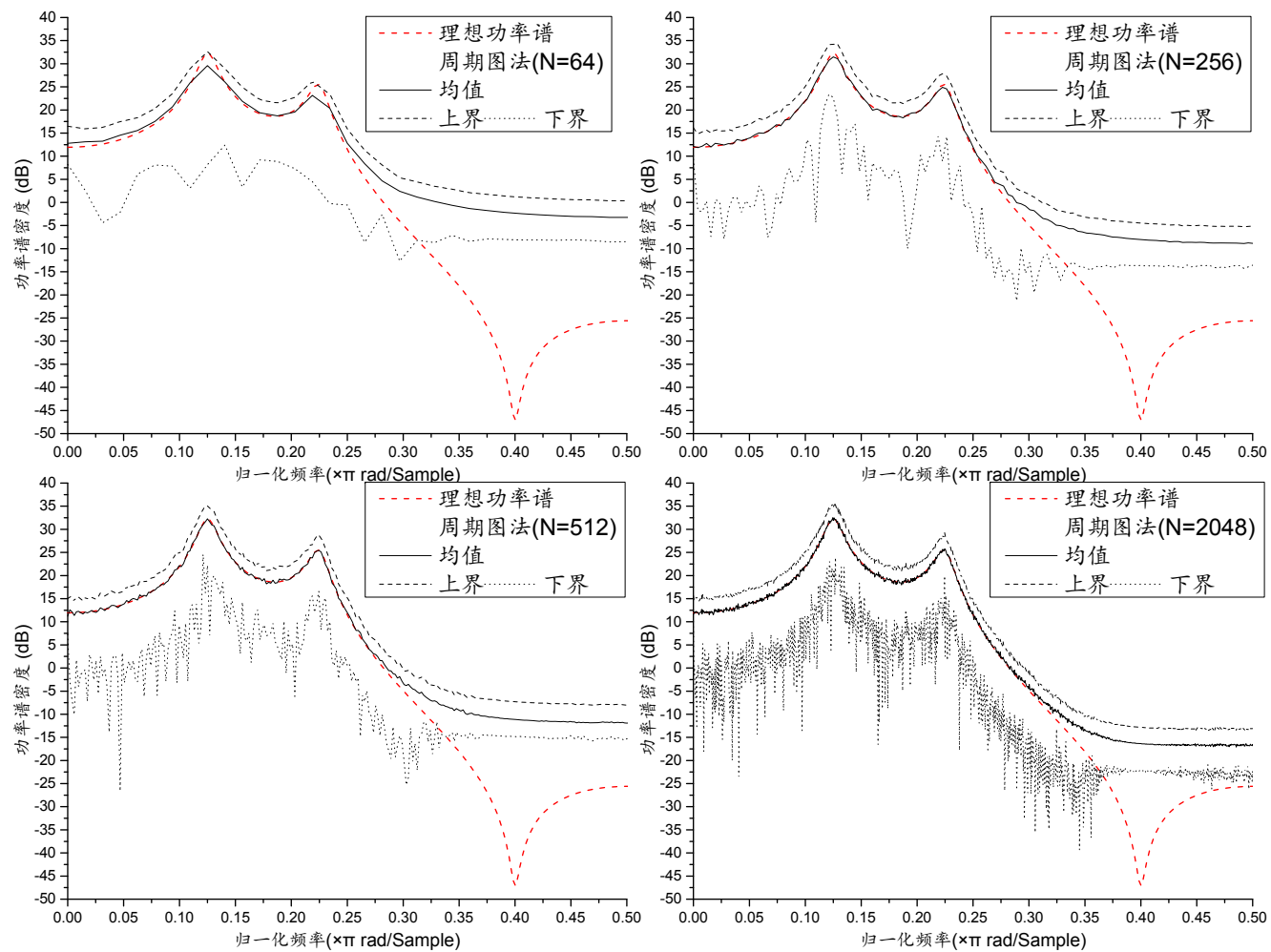


附图 B-9 使用恒等式法对信号二的功率谱估计均值和标准差
(数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256, 固定阶数均为 4)

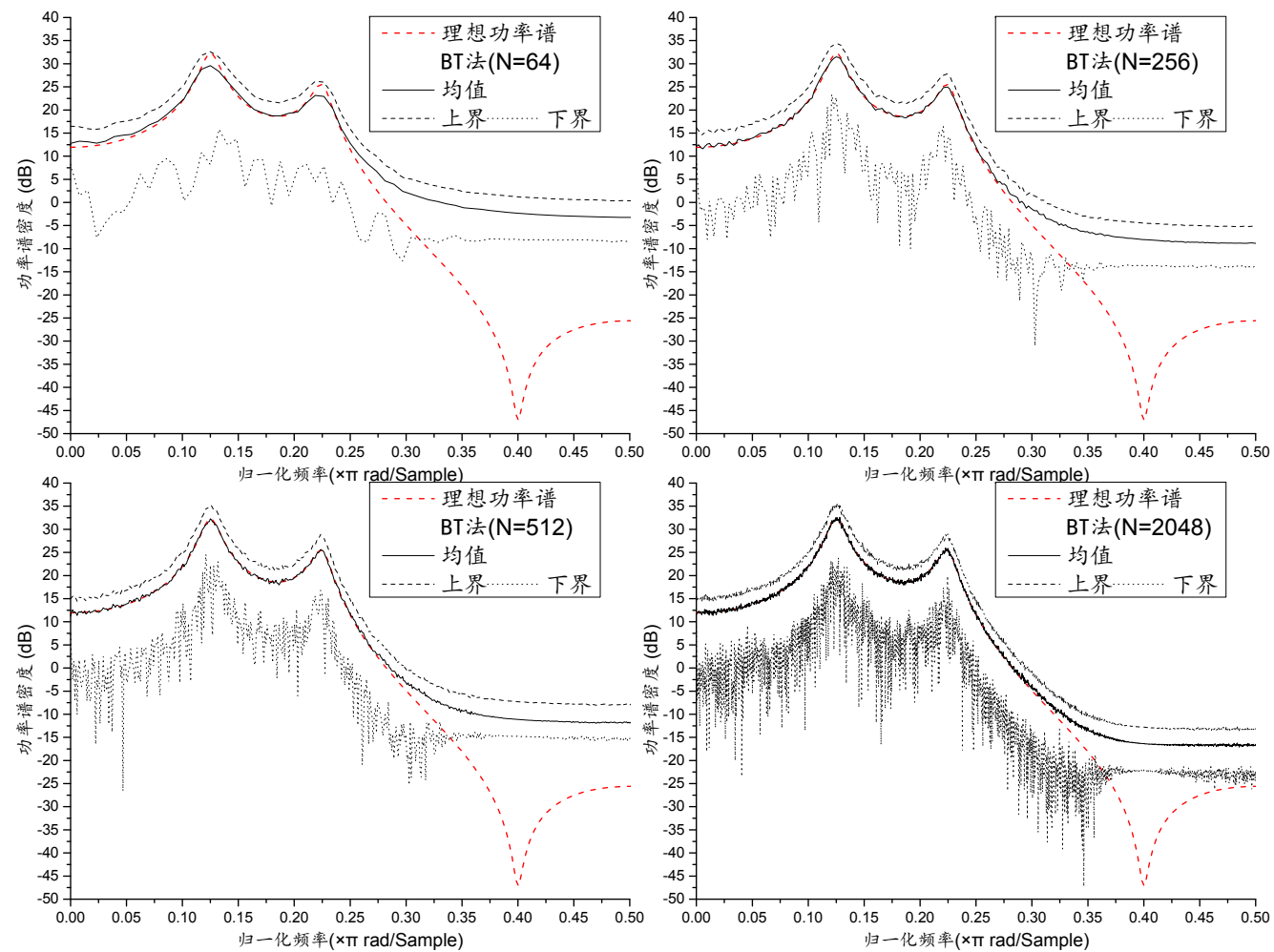


附图 B-10 使用恒等式法对信号二的功率谱估计均值和标准差
(数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256, 估计阶数, AR 门限 0.01, MA 门限 0.5)

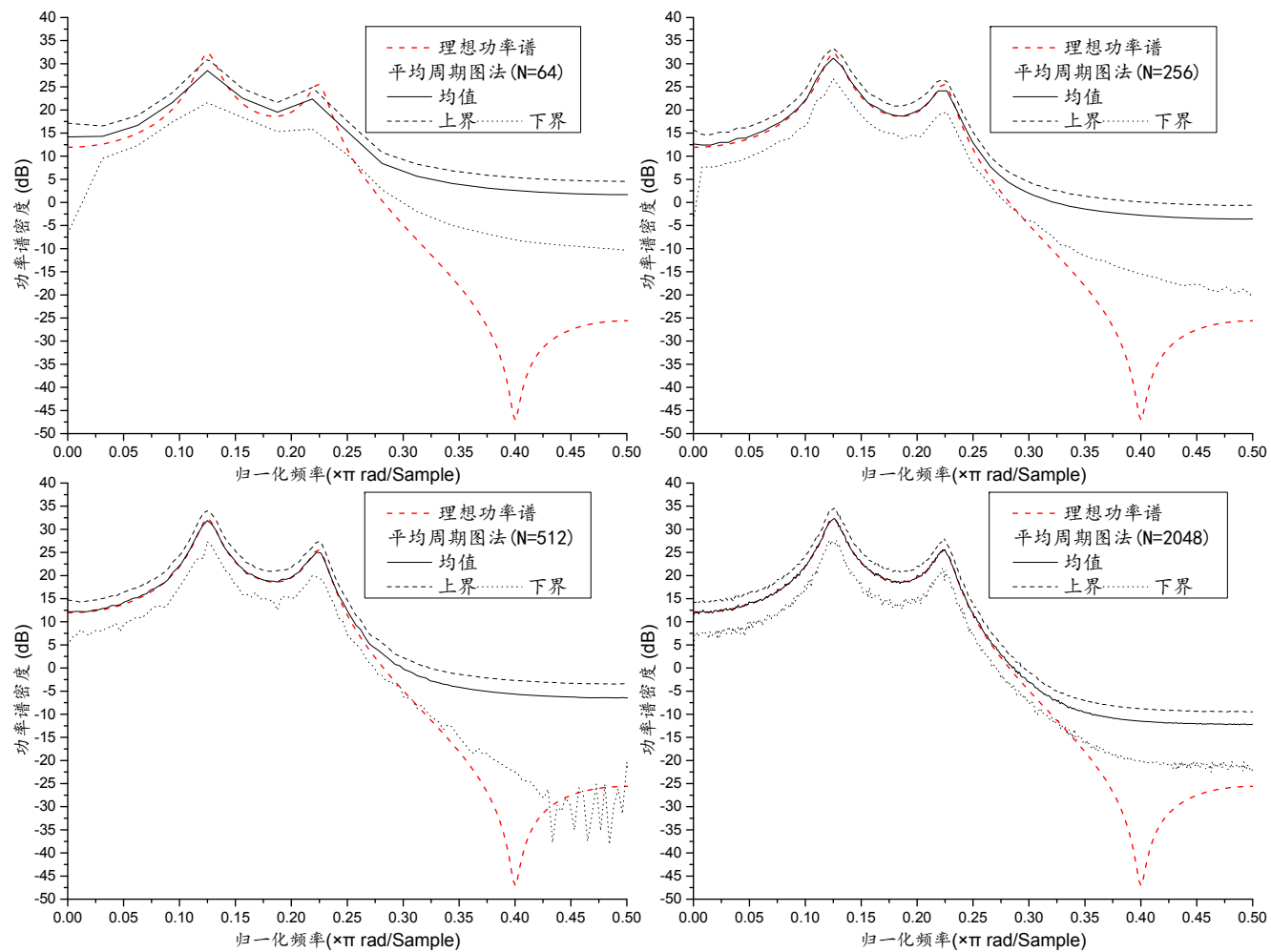
附录C 信号三的仿真结果



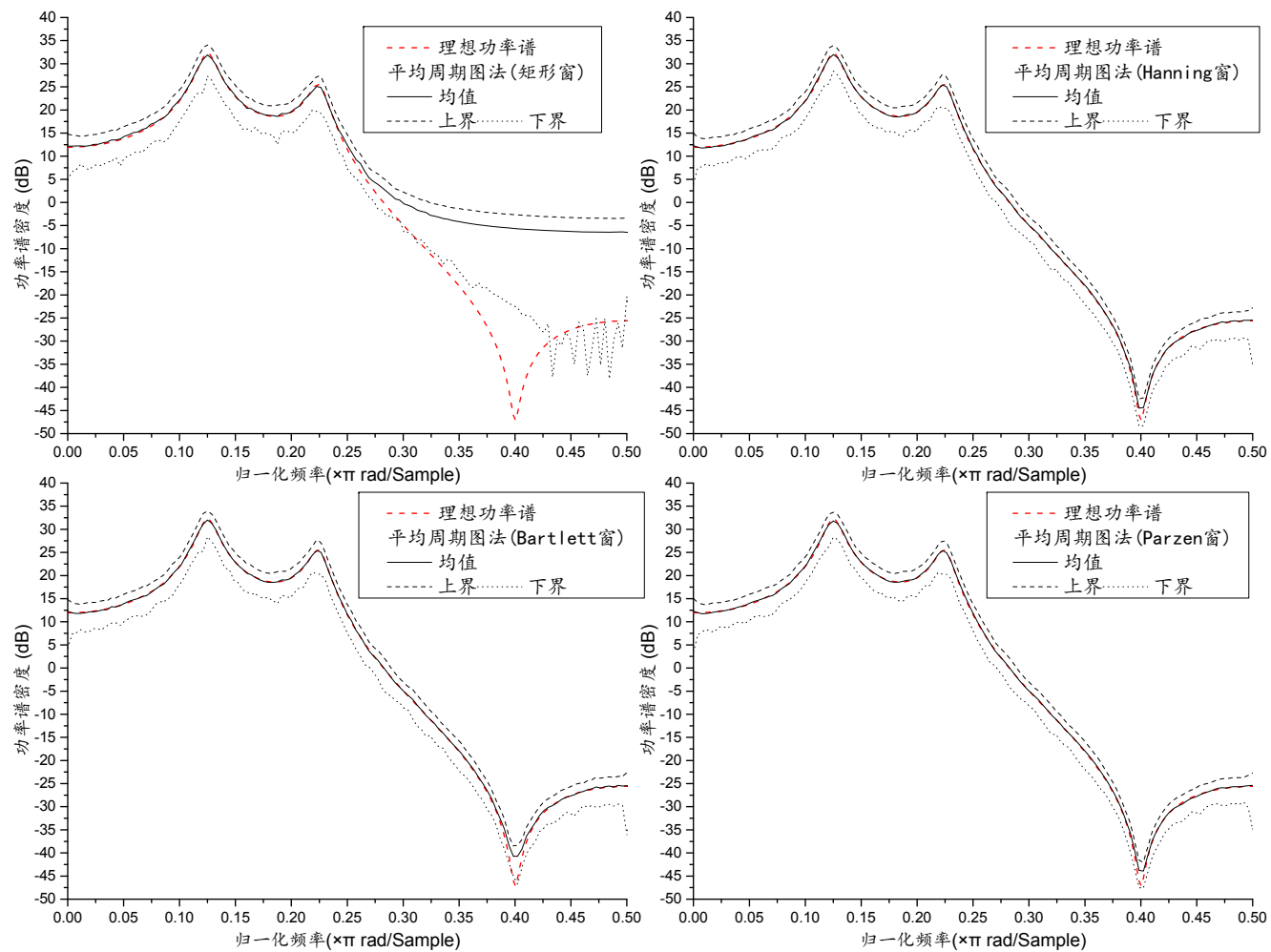
附图 C-1 使用周期图法对信号三进行功率谱估计均值和标准差
(数据长度 N 分别取 64、256、512 和 2048)



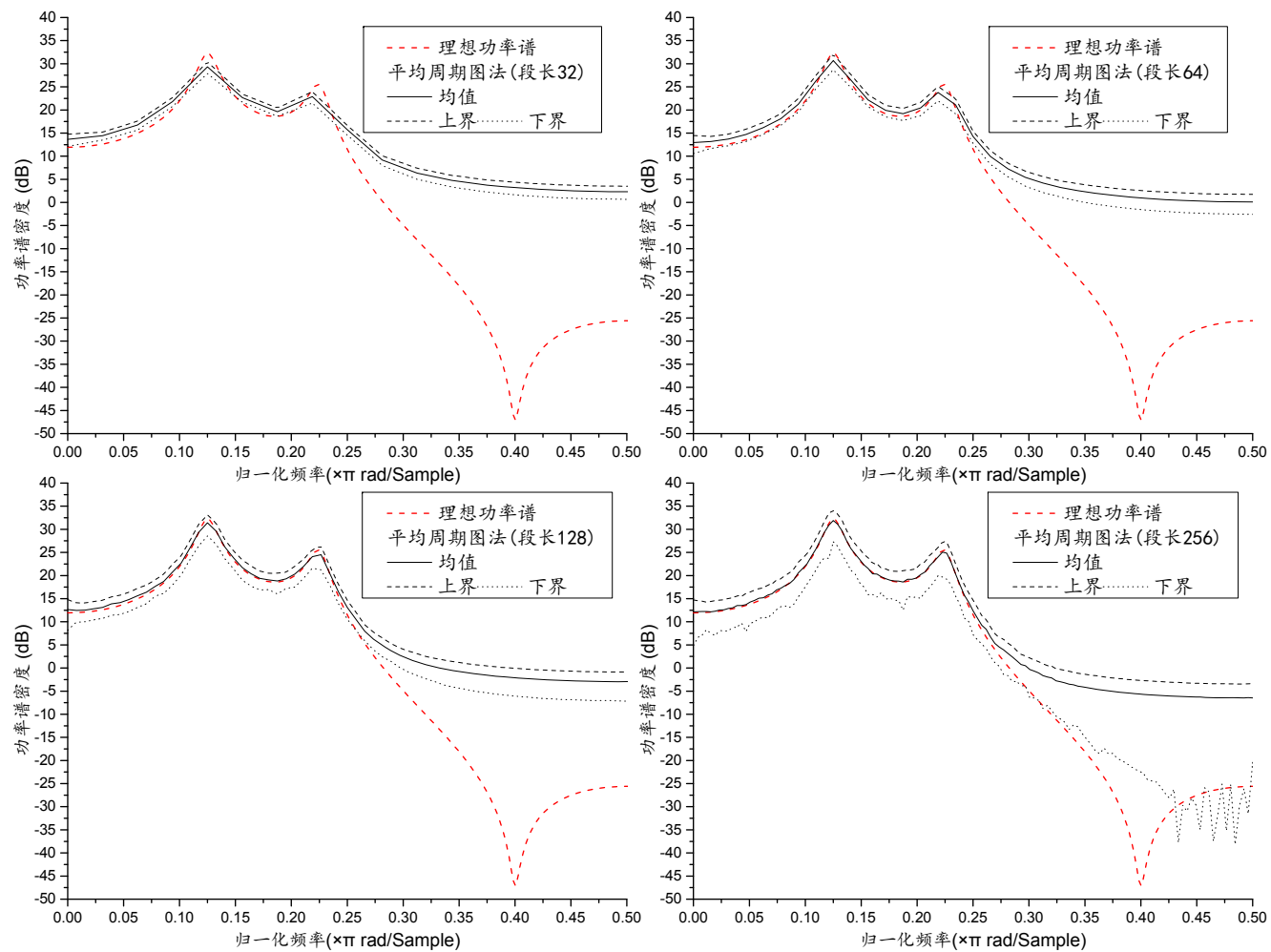
附图 C-2 使用 BT 法对信号三进行功率谱估计均值和标准差
(数据长度 N 分别取 64、256、512 和 2048)



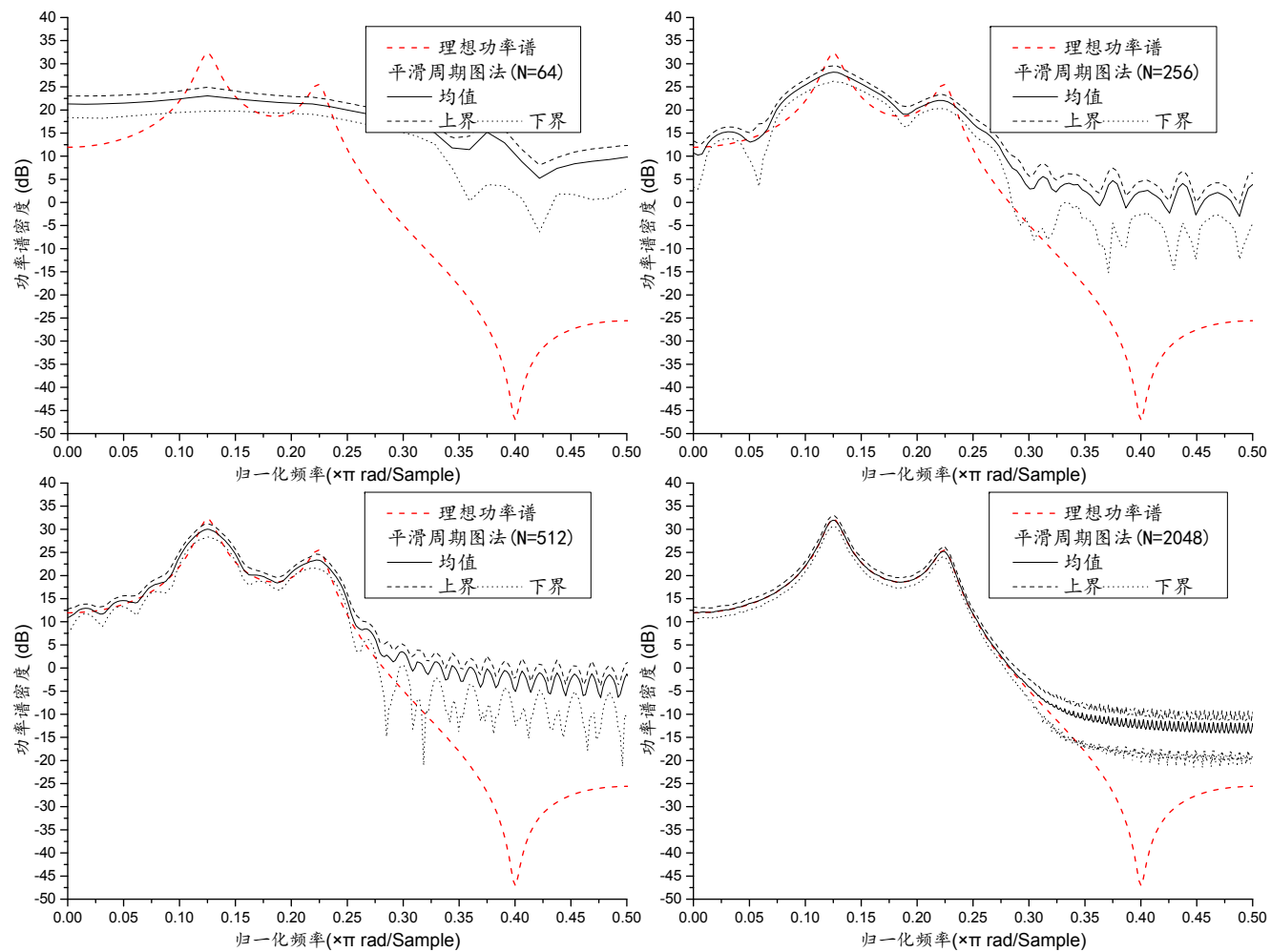
附图 C-3 使用平均周期图法对信号三进行功率谱估计均值和标准差
(数据长度 N 分别取 64、256、512 和 2048, 分 3 段, 矩形窗, 50%重叠)



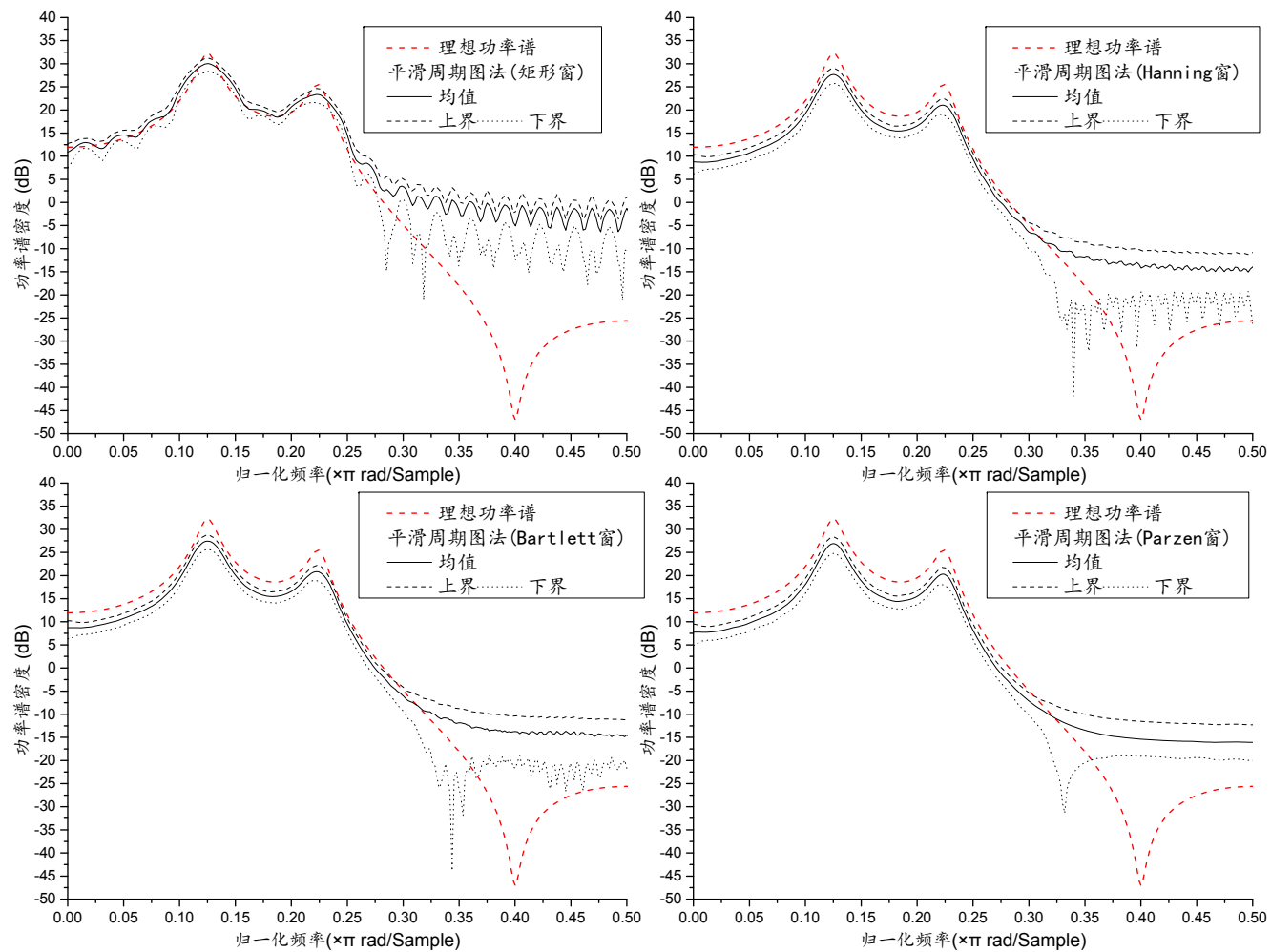
附图 C-4 使用平均周期图法对信号三进行功率谱估计均值和标准差
(窗函数分别取矩形窗、Hanning 窗、Bartlett 窗和 Parzen 窗，数据长度 N 为 512，分 3 段，50%重叠)



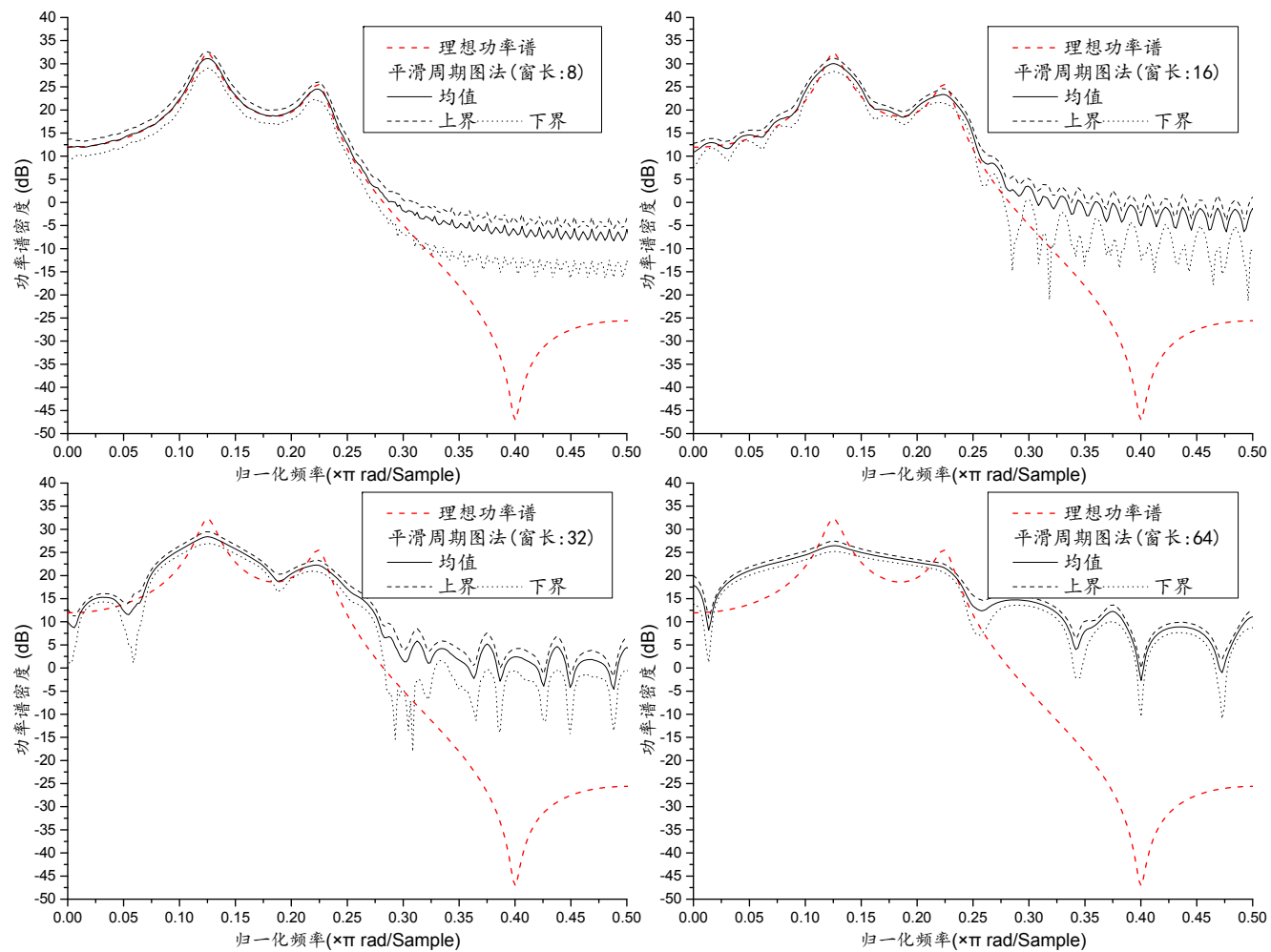
附图 C-5 使用平均周期图法对信号三进行功率谱估计均值和标准差
(段长分别取 32、64、128 和 256, 数据长度 N 为 512, 矩形窗, 50%重叠)



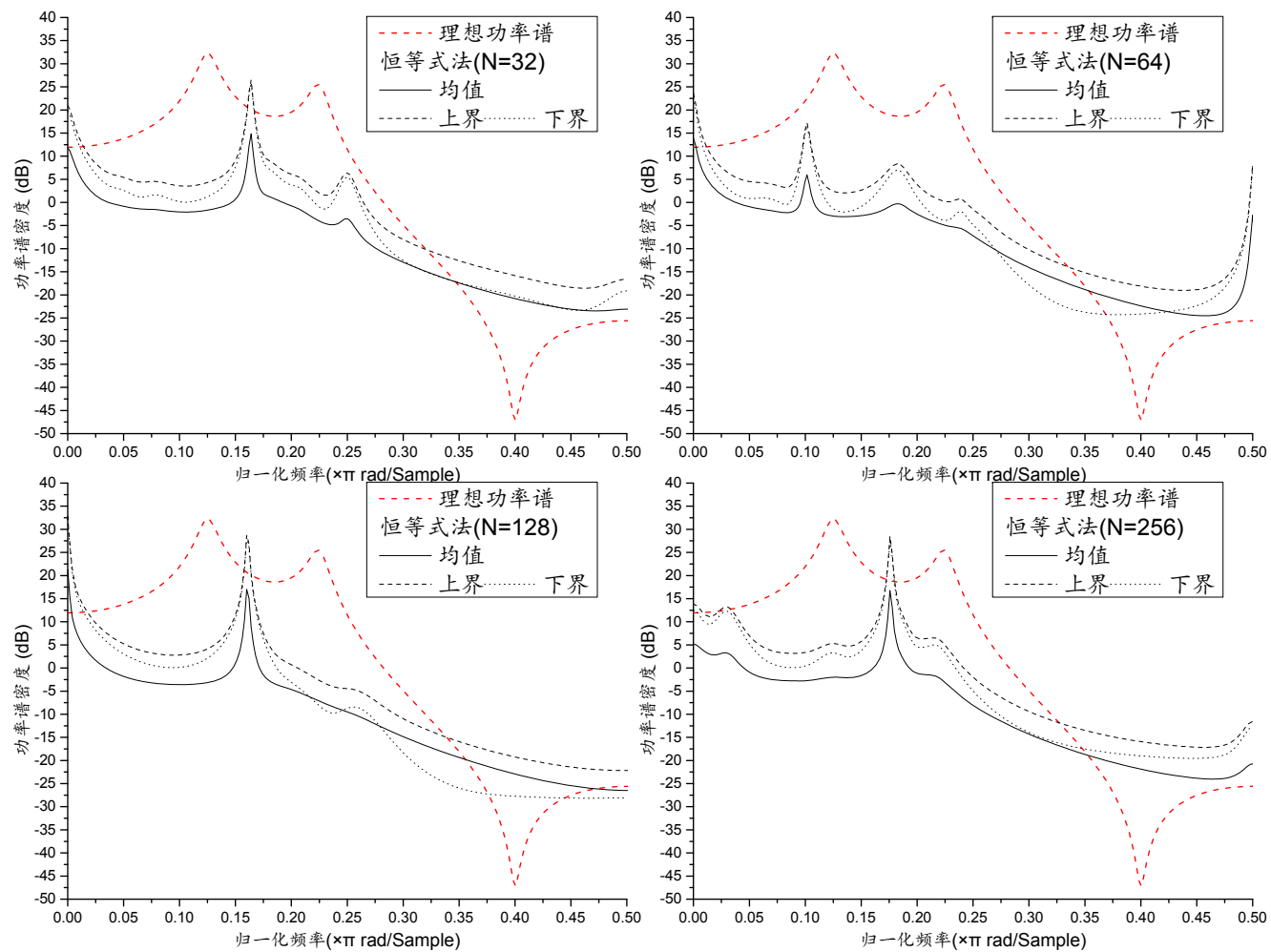
附图 C-6 使用平滑周期图法对信号三进行功率谱估计均值和标准差
(数据长度 N 分别取 64、256、512 和 2048, 矩形窗, 平滑长度 16)



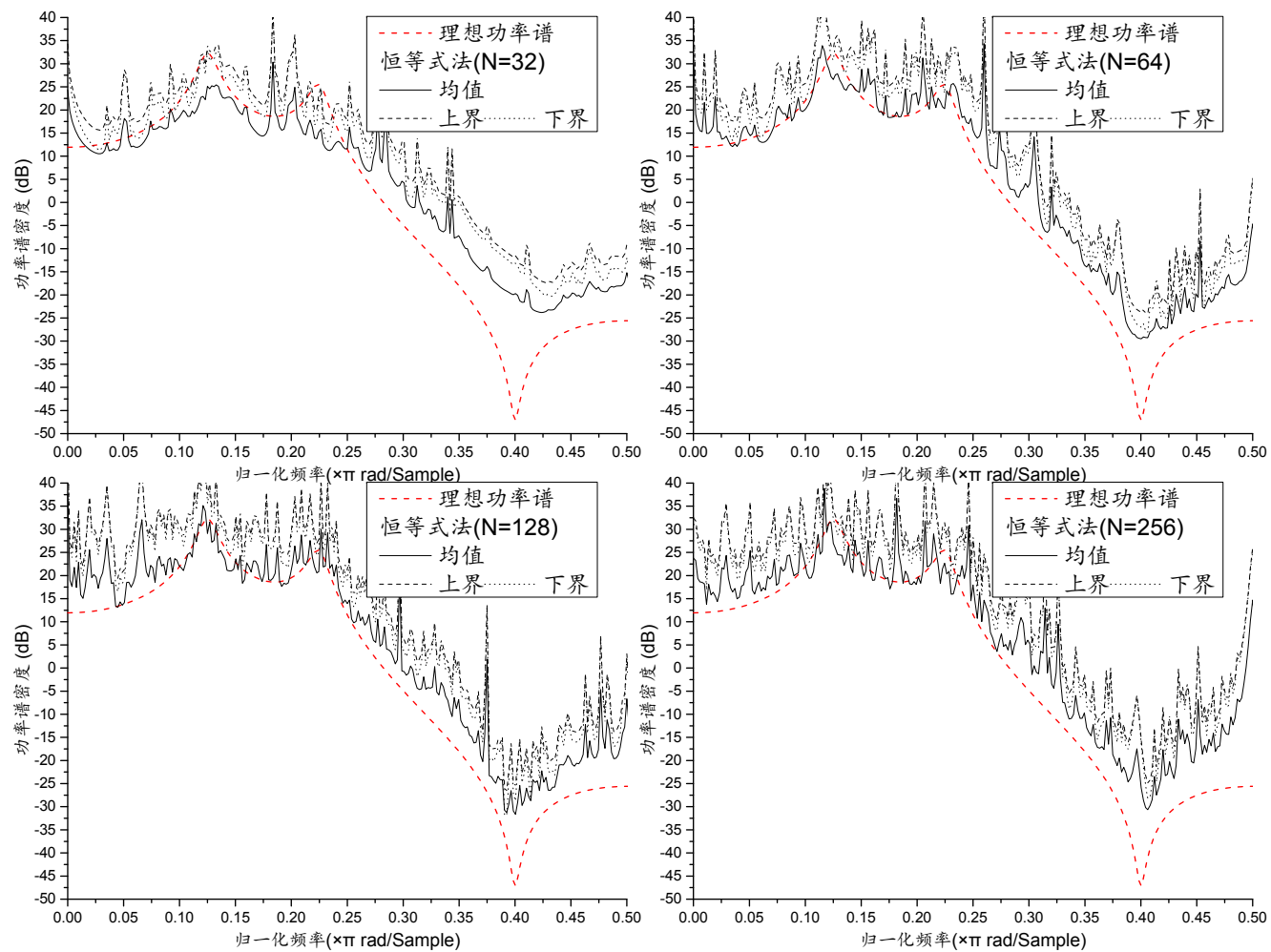
附图 C-7 使用平滑周期图法对信号三进行功率谱估计均值和标准差
(窗函数分别取矩形窗、Hanning 窗、Bartlett 窗和 Parzen 窗，数据长度 N 为 512，平滑长度 16)



附图 C-8 使用平滑周期图法对信号三进行功率谱估计均值和标准差
(平滑长度分别取 8、16、32 和 64，数据长度 N 为 512，矩形窗)

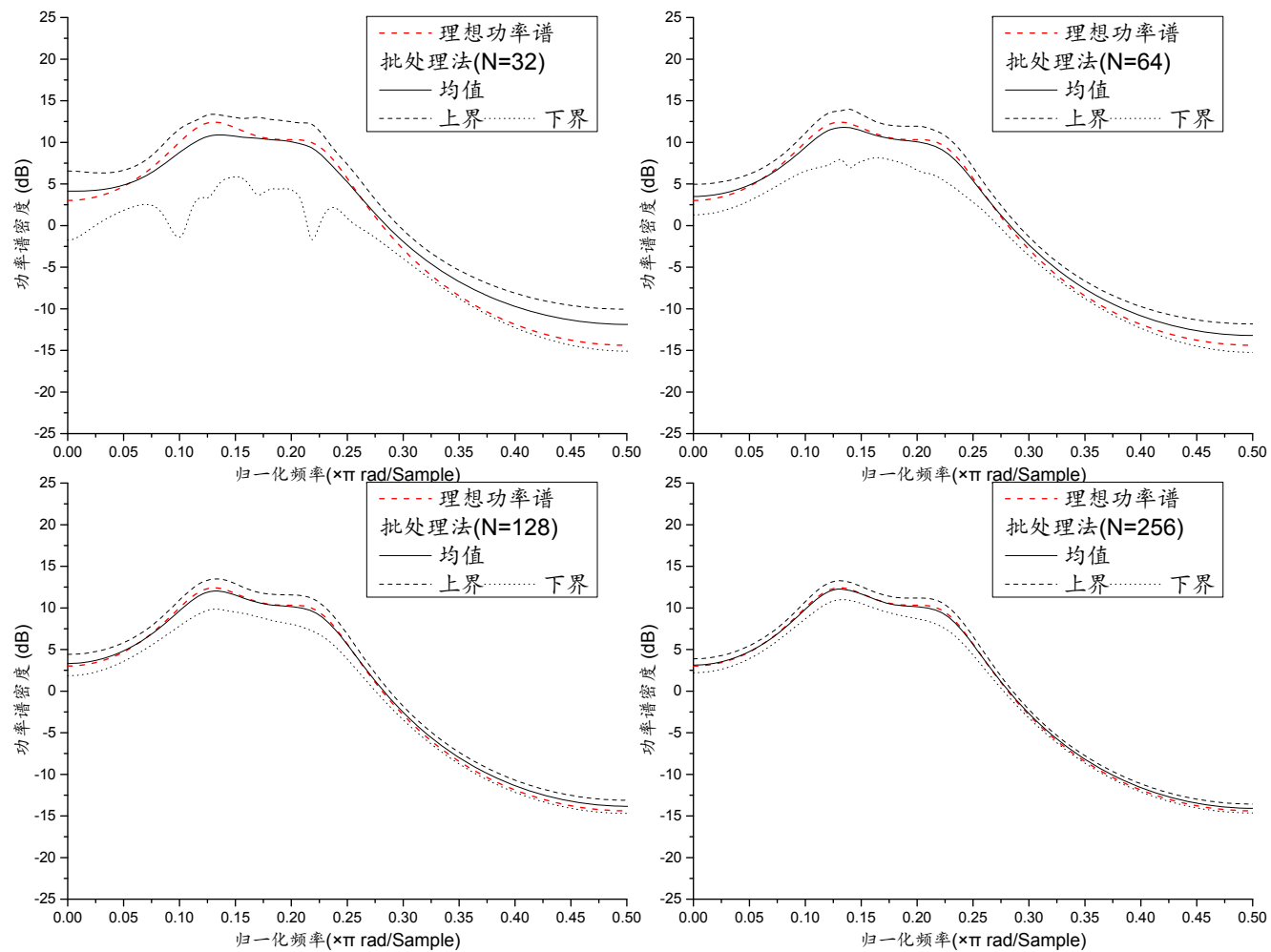


附图 C-9 使用恒等式法对信号三功率谱估计均值和标准差
(数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256, 固定阶数均为 4)

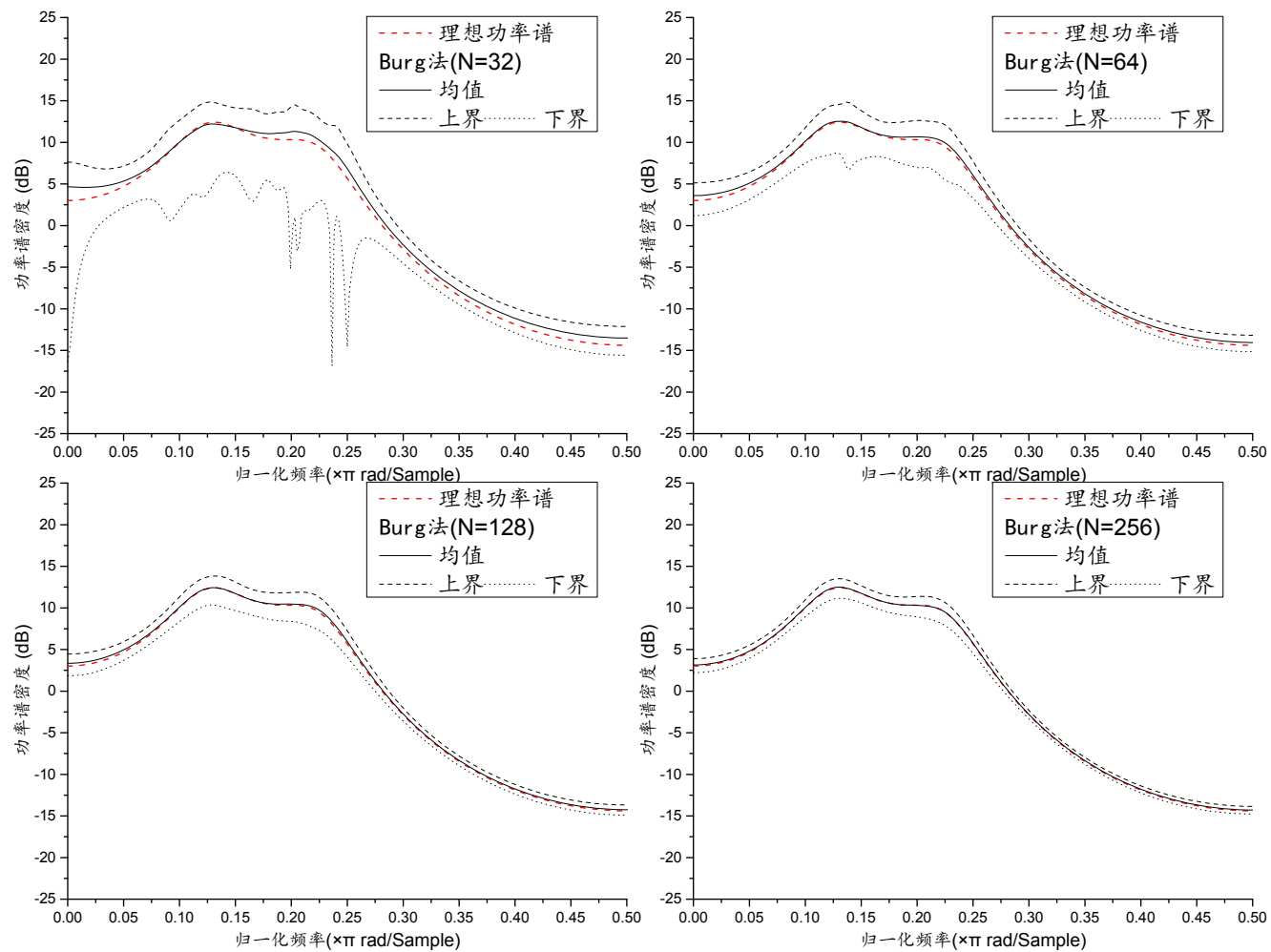


附图 C-10 使用恒等式法对信号三功率谱估计均值和标准差
(数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256, 估计阶数, AR 门限 0.01, MA 门限 0.5)

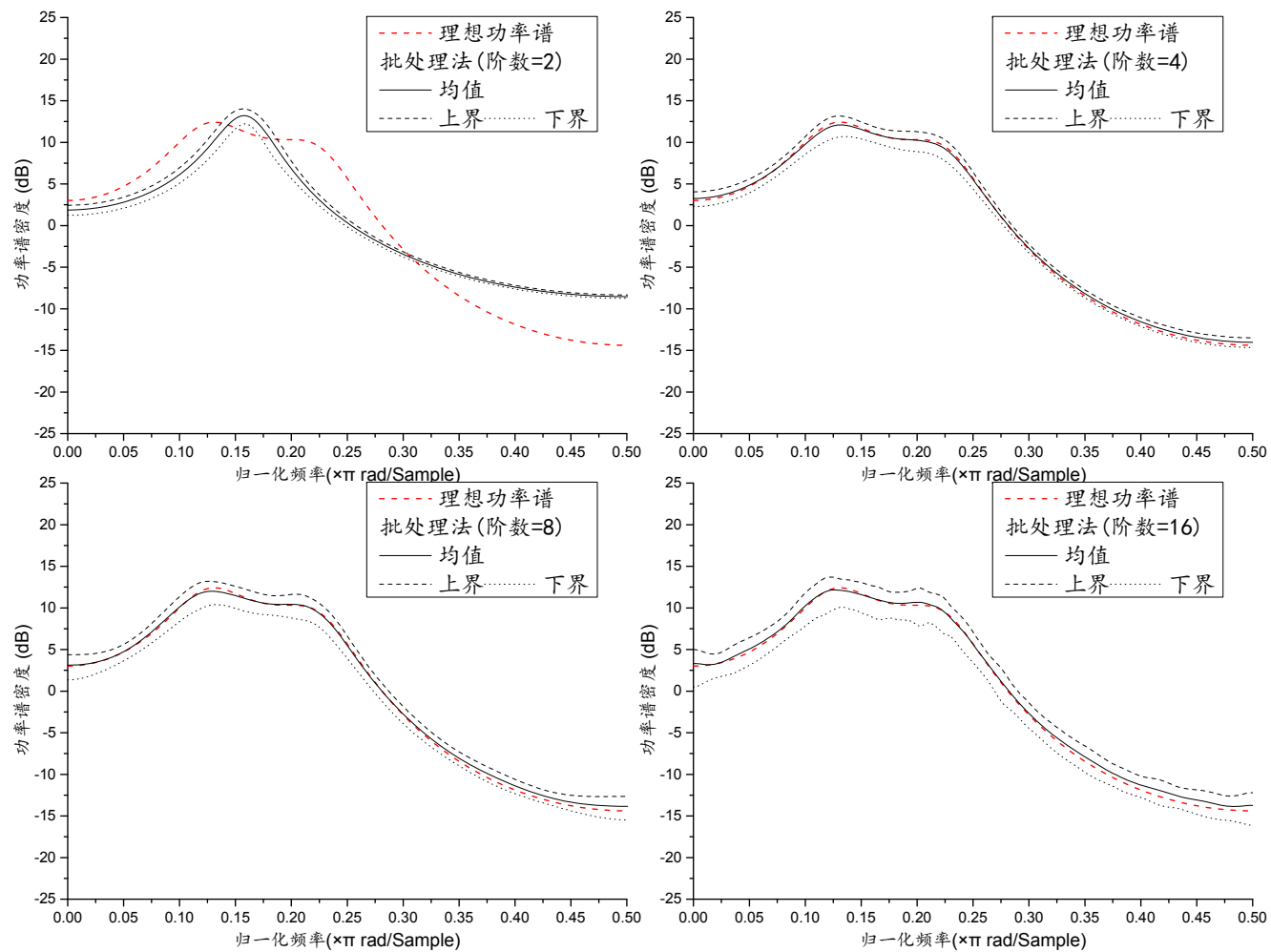
附录D 信号四的仿真结果



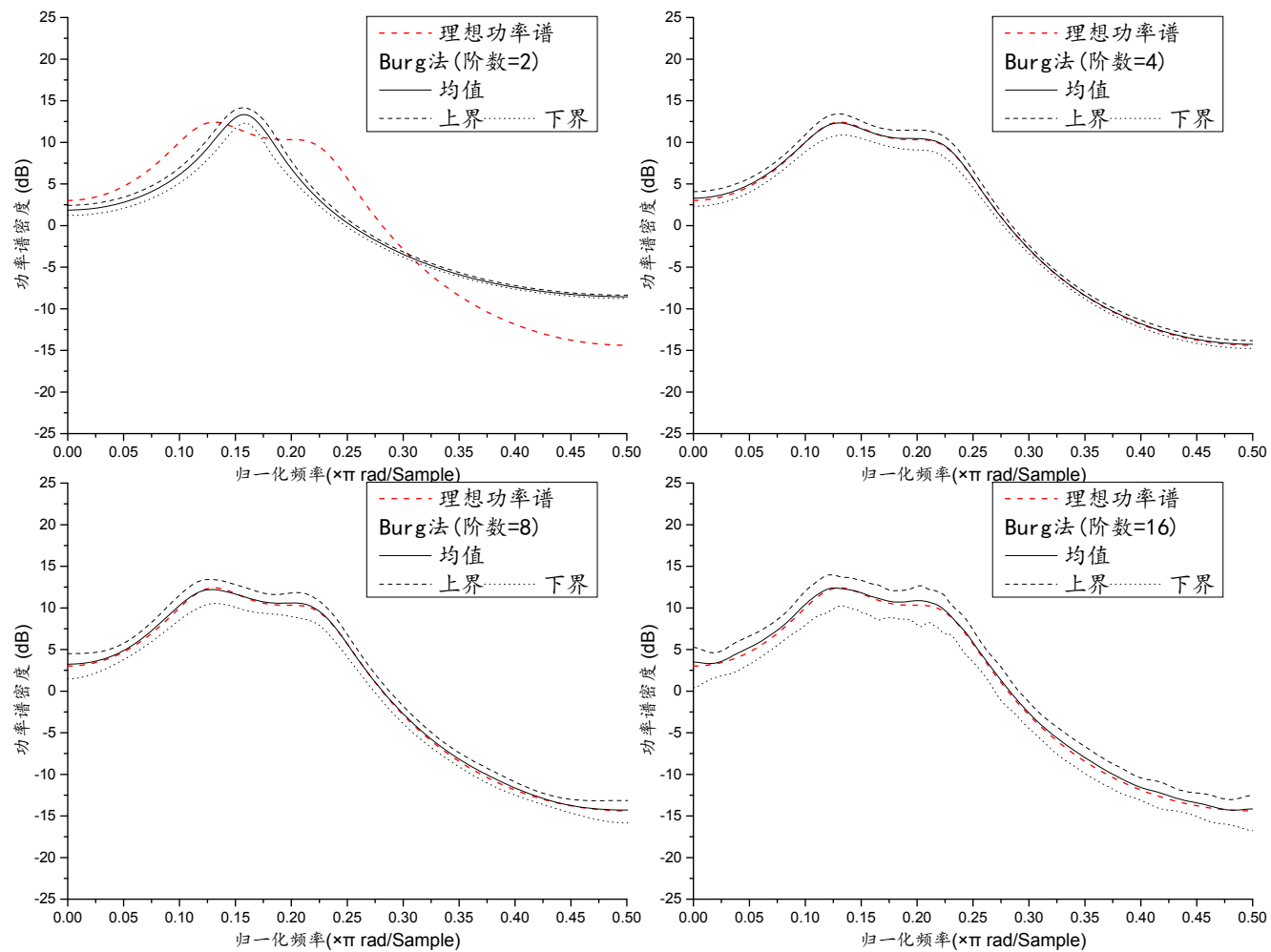
附图 D-1 使用批处理法对信号四的功率谱估计均值和标准差
(数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256, 固定阶数为 4)



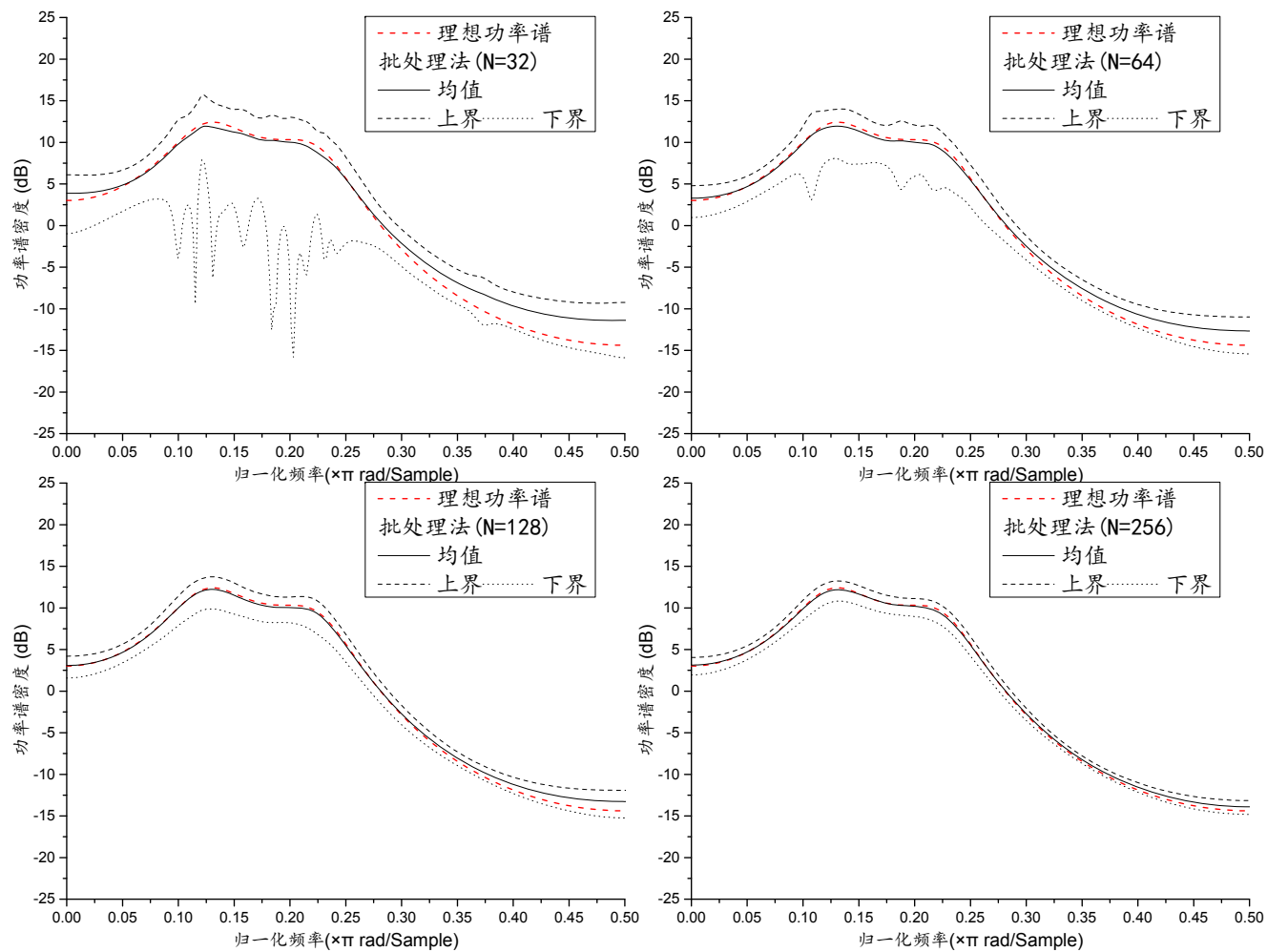
附图 D-2 使用 Burg 法对信号四的功率谱估计均值和标准差
(数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256, 固定阶数为 4)



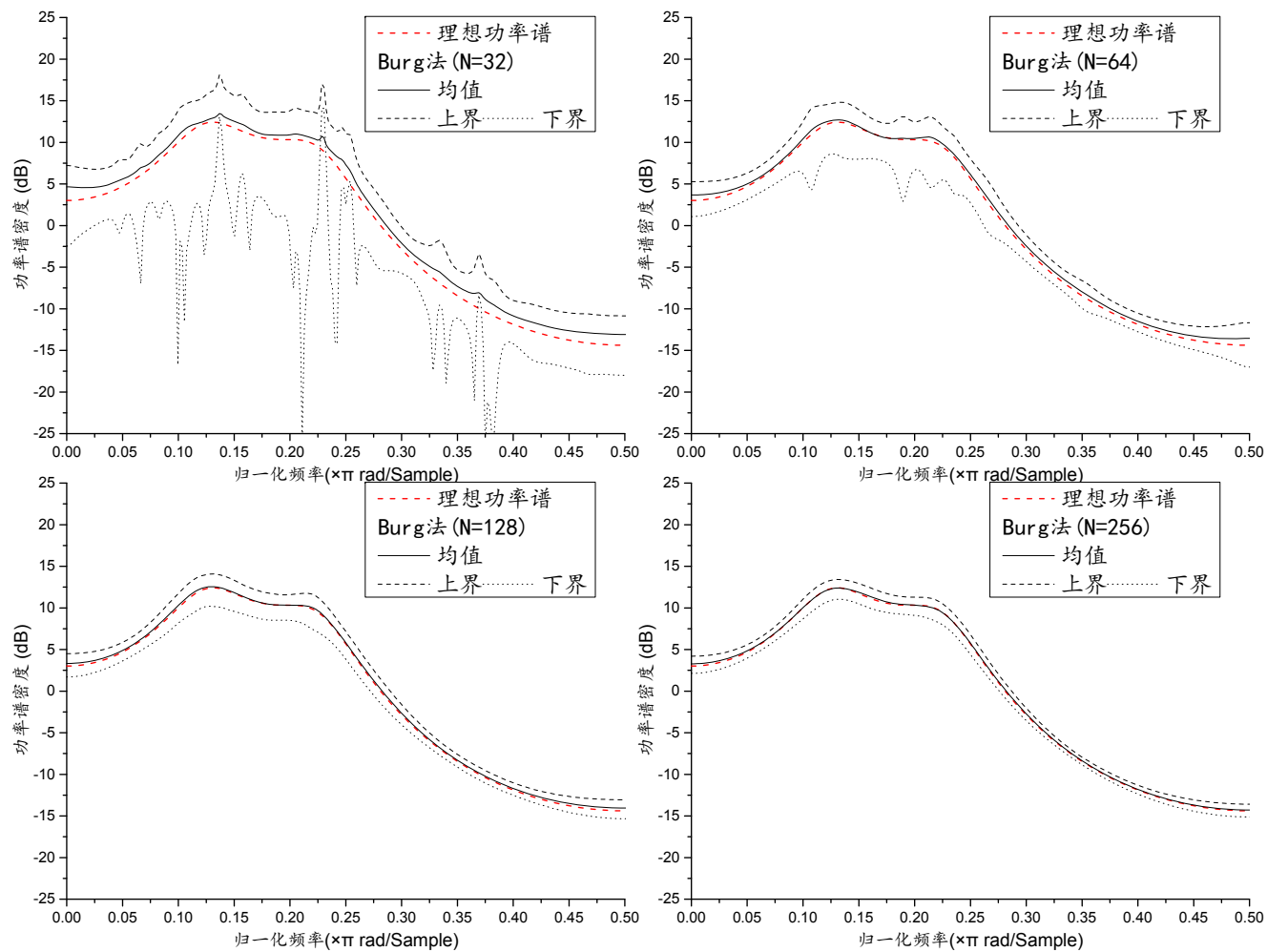
附图 D-3 使用批处理法对信号四的功率谱估计均值和标准差
(阶数分别取 2、4、8 和 16，固定数据长度 N 为 256)



附图 D-4 使用 Burg 法对信号四的功率谱估计均值和标准差
(阶数分别取 2、4、8 和 16, 固定数据长度 N 为 256)

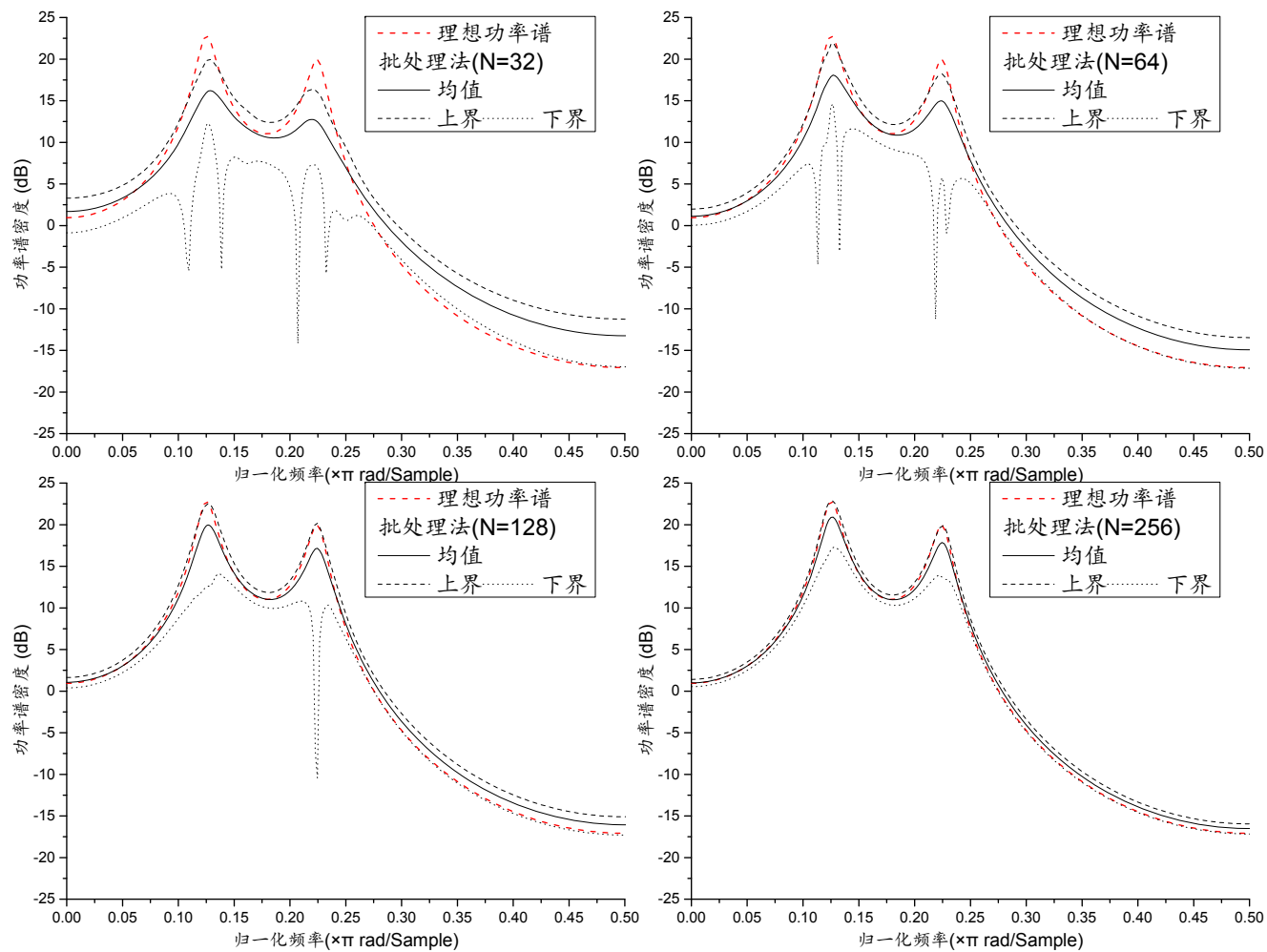


附图 D-5 使用批处理法对信号四的功率谱估计均值和标准差
(数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256, 估计阶数, 门限为 0.01)

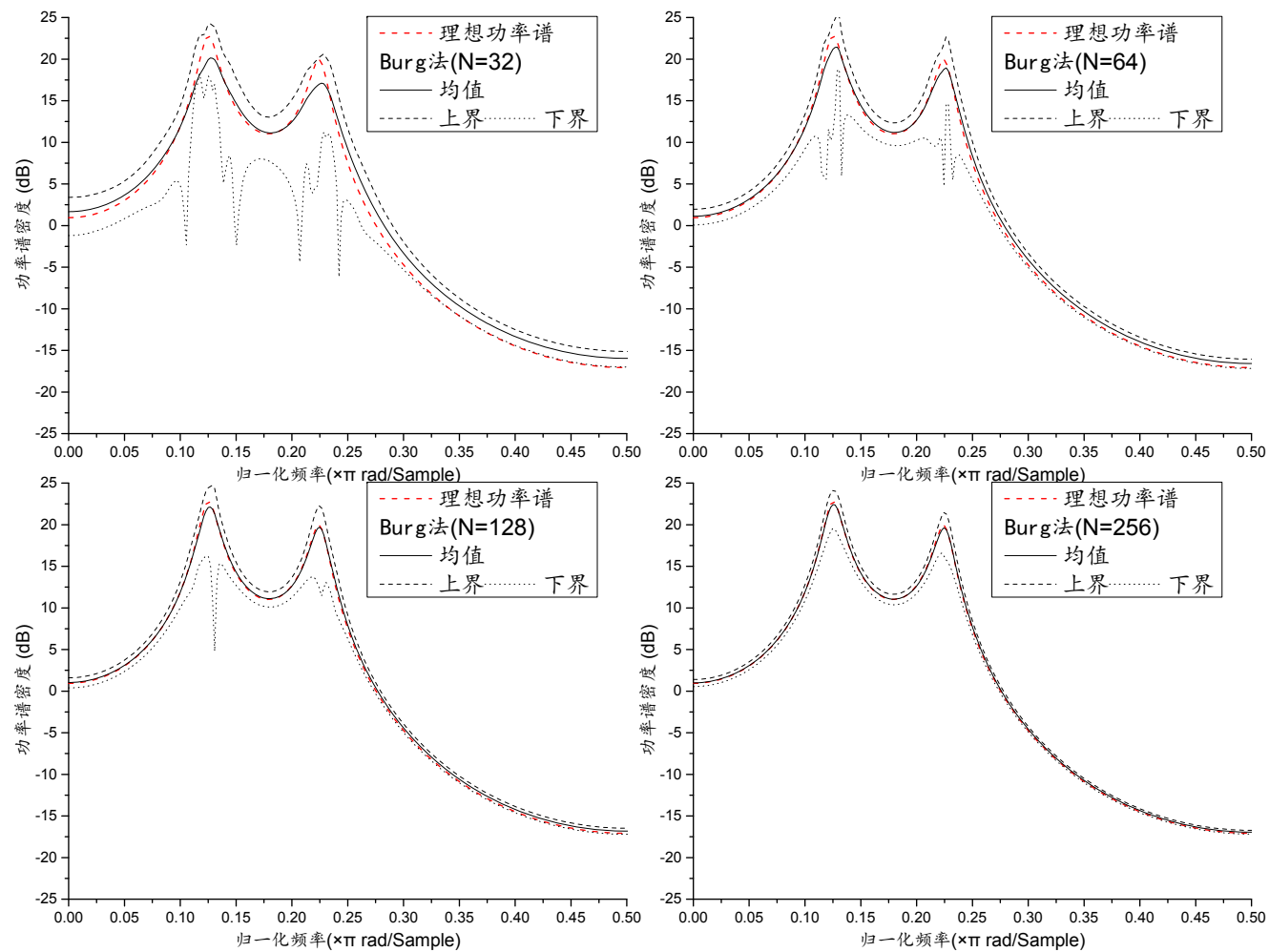


附图 D-6 使用 Burg 法对信号四的功率谱估计均值和标准差
(数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256, 估计阶数, 门限为 0.01)

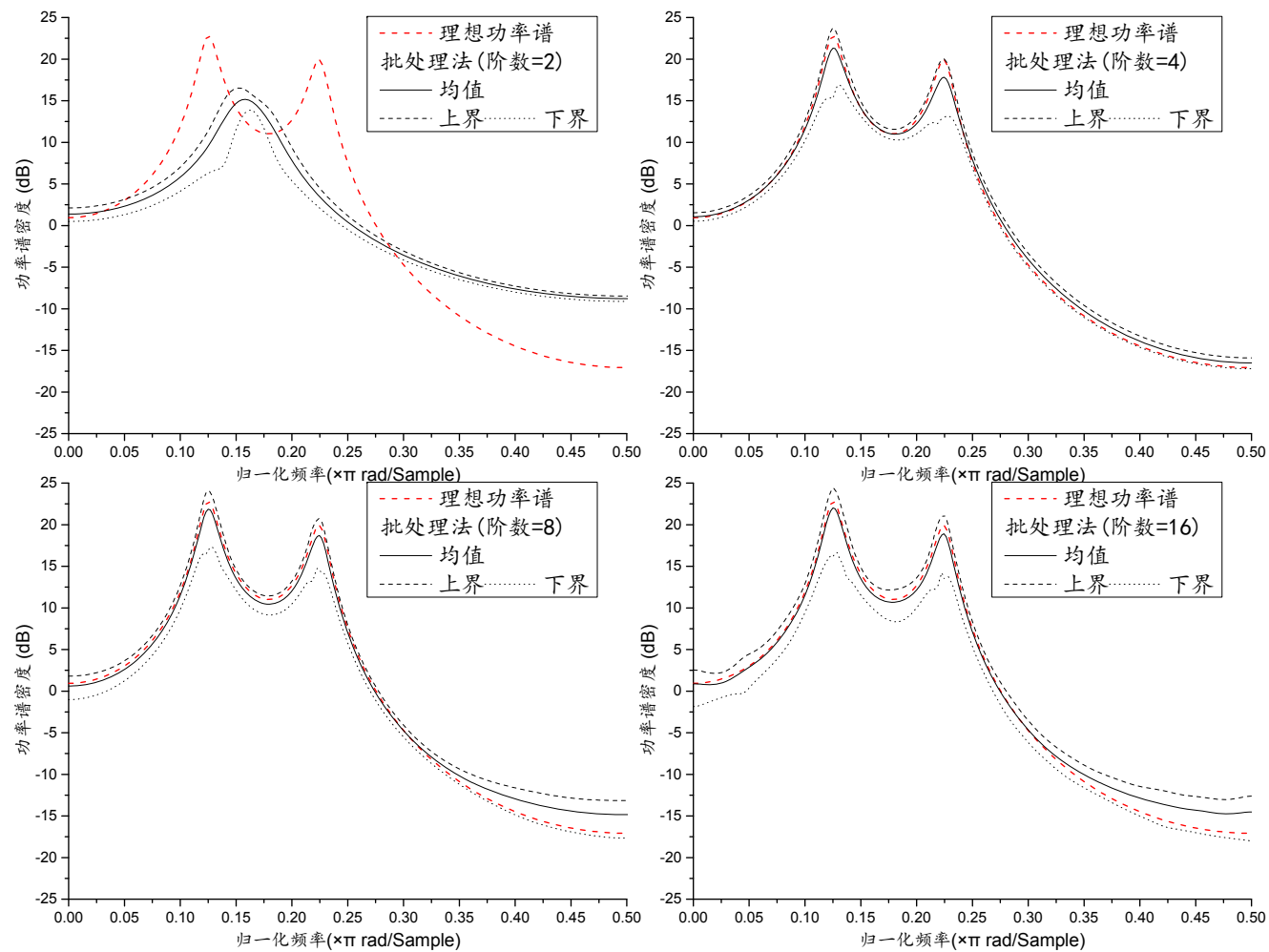
附录E 信号五的仿真结果



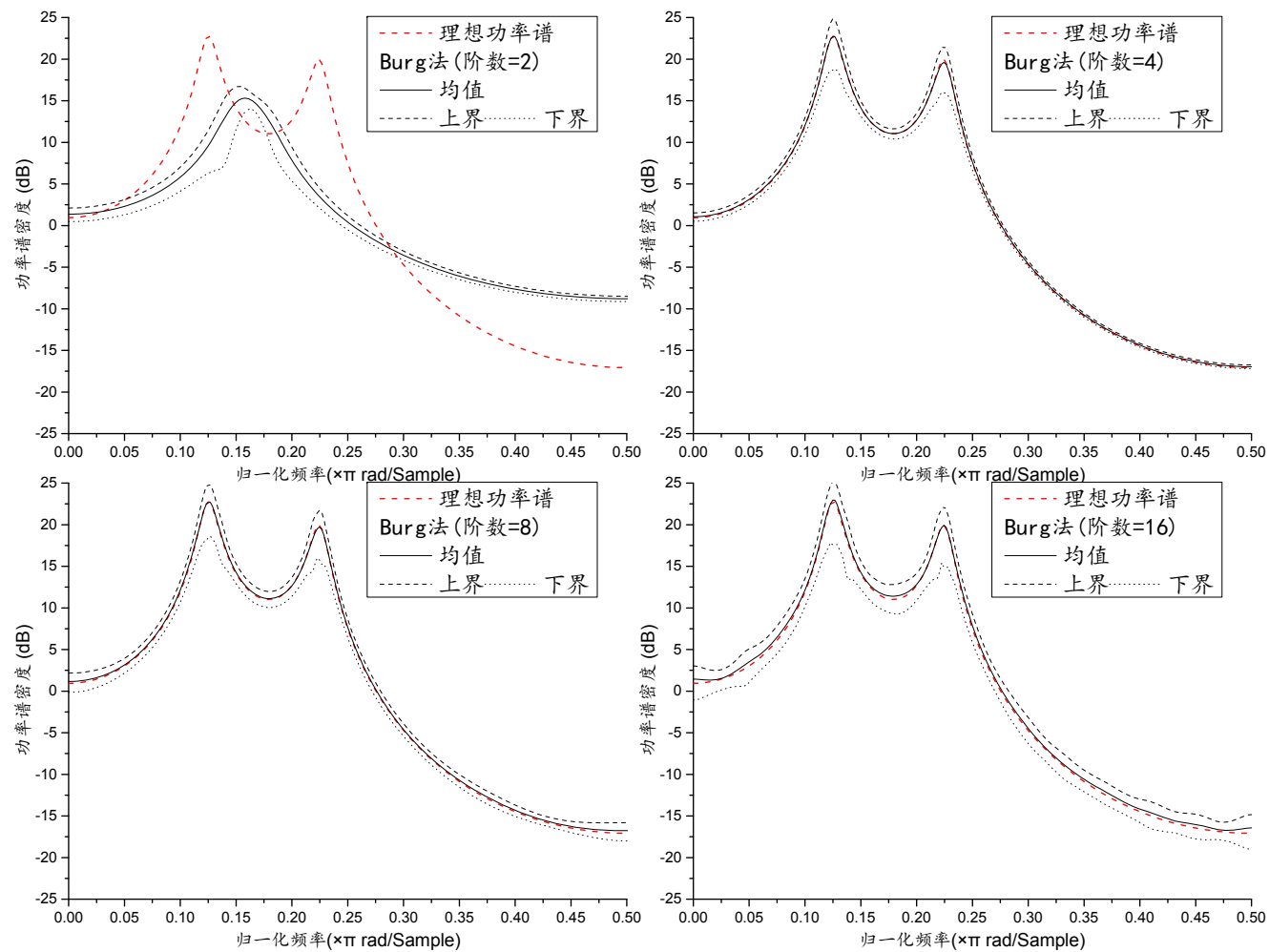
附图 E-1 使用批处理法对信号五的功率谱估计均值和标准差
(数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256, 固定阶数为 4)



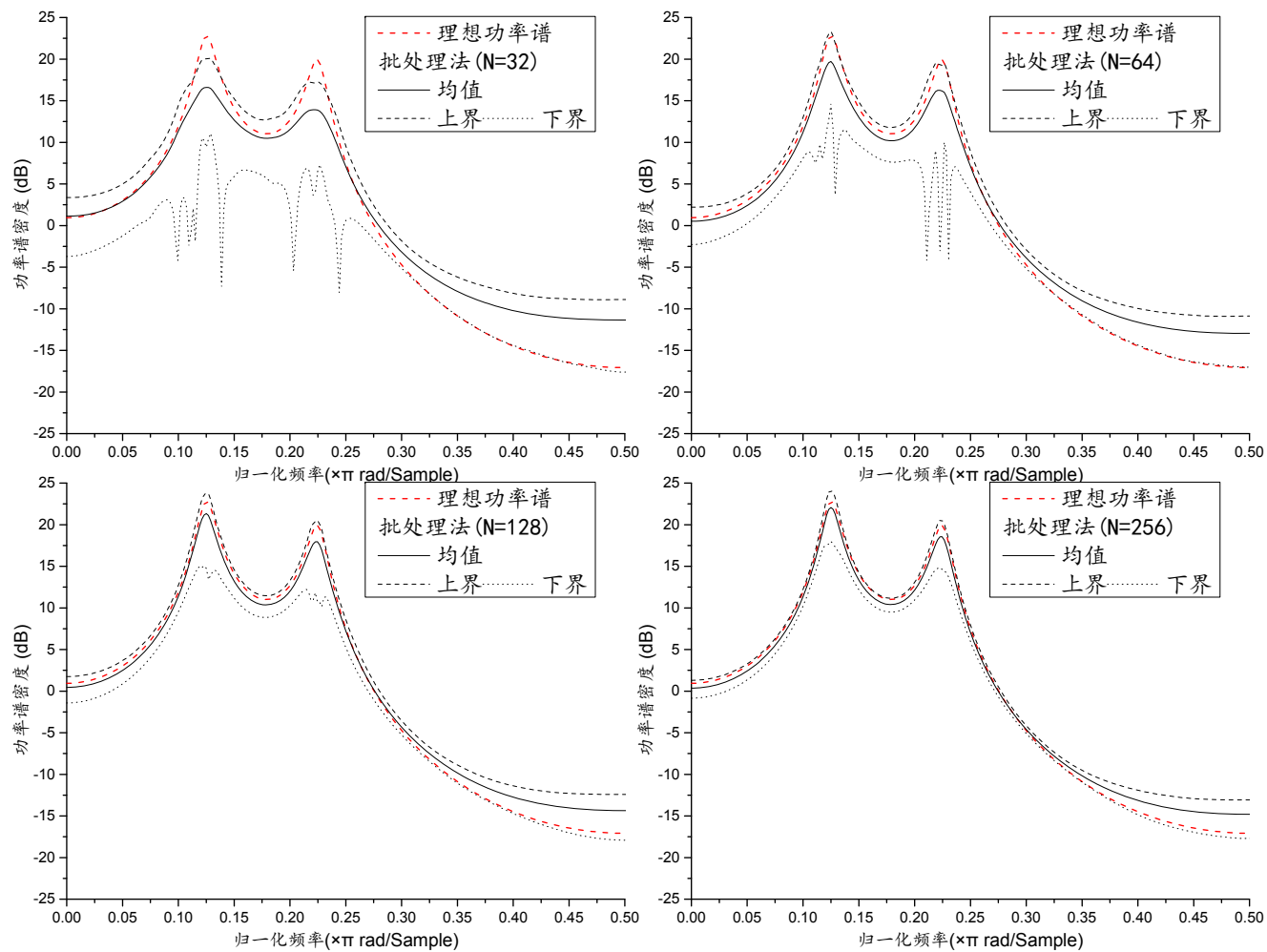
附图 E-2 使用 Burg 法对信号五的功率谱估计均值和标准差
(数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256, 固定阶数为 4)



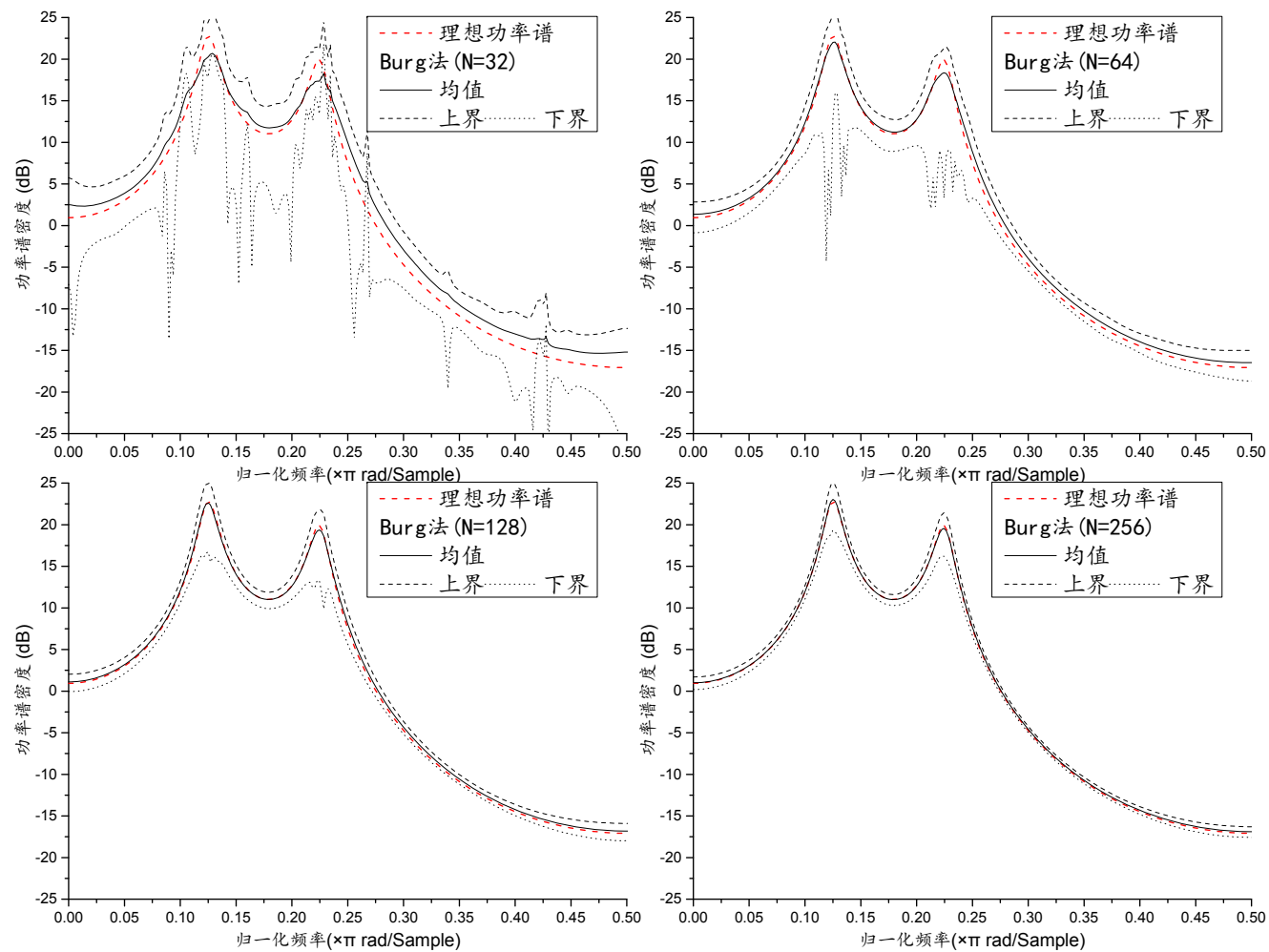
附图 E-3 使用批处理法对信号五的功率谱估计均值和标准差
(阶数分别取 2、4、8 和 16, 固定数据长度 N 为 256)



附图 E-4 使用 Burg 法对信号五的功率谱估计均值和标准差
(阶数分别取 2、4、8 和 16, 固定数据长度 N 为 256)



附图 E-5 使用批处理法对信号五的功率谱估计均值和标准差
(数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256, 估计阶数, 门限为 0.01)



附图 E-6 使用 Burg 法对信号五的功率谱估计均值和标准差
(数据长度 N 分别取 32、64、128 和 256, 估计阶数, 门限为 0.01)