四川大学期末考试试卷 A

（2015-2016 年第二学期）

科目：微积分 II　　课程号：　　　　　　考试时间：120 分钟

注：请将答案写在答题纸对应的方框内，否则记 0 分。

一、　填空（每小题 3 分，共 18 分）

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy^2}$ =_______ $\dfrac{1}{4}$ _______.

2. 设 $F(x-y,y-z,z-x)=0$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ =____ $\dfrac{F_3'-F_1'}{F_3'-F_2'},F_3'-F_2'\neq 0$ _________.

3. 若 $\int_0^{y(x)}e^{t^2}\mathrm{d}t+\int_0^{\sin x}\cos^2 t\mathrm{d}t=0$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ =________ $\dfrac{-\cos^2(\sin x)\cos x}{e^{y^2}}$ ______.

4. 函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2-2x+y$ 在 $(1,0)$ 取极 ___小___值.

5. $y''=1+(y')^2$ 的通解是_____ $y=-\ln(C_1\sin(x+C_2))$ ____.

6. 若区域 D 由 $x=0$，$y=0$，$x+y=\dfrac{1}{2}$，$x+y=1$ 围成，且 $I_1=\iint_D[\ln(x+y)]^{2n+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

   $I_2=\iint_D[x+y]^{2n+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_3=\iint_D[\sin(x+y)]^{2n+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$n\in Z^+$，依从小到大的顺序

   给 I_1,I_2,I_3 排序为_______ $I_1<I_3<I_2$ _________.

二、　计算题（每小题 8 分，共 48 分）

1. 求 $y''-y=3e^{2x}+4x\sin x$ 的通解.

解：齐次问题的特征方程为 $\lambda^2-1=0\Rightarrow\lambda=1,\lambda=-1$，

则齐次问题的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$。

特解可分解为 $y''-y=3e^{2x}$， $y''-y=4x\sin x$ 的特解之和。

$y''-y=3e^{2x}$ 的特解为 e^{2x}，

$y''-y=4x\sin x$ 的特解为 $-2(x\sin x+\cos x)$，

则所求方程的通解为 $C_1e^x+C_2e^{-x}+e^{2x}-2(x\sin x+\cos x)$。

2. 确定常数a,b,c的值，使$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c(c\neq 0)$。

解：因为$\lim\limits_{x\to 0}ax-\sin x=0$，可知$\lim\limits_{x\to 0}\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t=0$，又因为$\dfrac{\ln(1+t^3)}{t}$在$[0,b]$或$[b,0]$上保号，故$b=0$；

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^2}$$

故$a=1$；

$$c=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}。$$

3. 设z是由方程组$\begin{cases}x=(t+1)\cos z\\ y=t\sin z\end{cases}$确定的函数，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$。

解：在方程组两边对x求偏导，得

$$\begin{cases}\cos z\dfrac{\partial t}{\partial x}-(t+1)\sin z\dfrac{\partial z}{\partial x}=1\\ \sin z\dfrac{\partial t}{\partial x}+t\cos z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\end{cases}，解得$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\sin z}{(1+t)\sin^2 z+t\cos^2 z}=\frac{-\tan^2 z}{y+x\tan^3 z}。$$

4. $\int_{2/\pi}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

解：$\int_{2/\pi}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x=-\int_{2/\pi}^{+\infty}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}(\frac{1}{x})$

$$=-\lim_{b\to+\infty}\int_{2/\pi}^{b}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}(\frac{1}{x})$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\cos\frac{1}{x}\Big|_{2/\pi}^{b}=\lim_{b\to+\infty}[\cos\frac{1}{b}-\cos\frac{\pi}{2}]=1$$

5. 利用二重积分计算求曲线$r^2=2a^2\cos 2\theta$围成的图形的面积。

解：因为$r^2=2a^2\cos 2\theta>0$，故$-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\le\theta\le\frac{5\pi}{4}$，

可得面积$A=\iint_D r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}}r\mathrm{d}r=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta=2a^2$。

6. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}x(x-\pi)\cot x\mathrm{d}x$

解：因为$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(x-\frac{\pi}{2})^2\cot x\mathrm{d}x=0$，$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\pi^2}{4}\cot x\mathrm{d}x=0$，故

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}x(x-\pi)\cot x\mathrm{d}x=0$。

三、（10 分）设$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x-y}{x^2+y^2}\tan(x^2+y^2),(x,y)\neq(0,0)\\0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$，判断$f(x,y)$在$(0,0)$处的可微性，若可微则求$\mathrm{d}f(x,y)|_{(0,0)}$.

解：$f_x'(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x^2}{x^2}=1$，

$f_y'(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{x\to0}\frac{-\tan y^2}{y^2}=-1$，

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\frac{x-y}{x^2+y^2}\tan(x^2+y^2)-(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{(x-y)[\frac{\tan(x^2+y^2)}{x^2+y^2}-1]}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x-y)\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\frac{\tan(x^2+y^2)}{x^2+y^2}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

故函数$f(x,y)$在$(0,0)$处可微，且$\mathrm{d}f(x,y)|_{(0,0)}=\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$。

四、（10 分）设过点$(0,1)$具有连续导数的曲线C位于x轴的上方，且满足$[0,x]$上的弧长等于$[0,x]$上的以曲线C为曲边的曲边梯形的面积，求C的方程。

解：建立关系式$\int_0^x y(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\sqrt{1+y'(t)^2}\mathrm{d}t$，两边同时求导有

$y^2=1+y'^2\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2-1}}=\pm\mathrm{d}x$，

求得通解$\ln(y+\sqrt{y^2-1})+\ln C=\pm x\Rightarrow C(y+\sqrt{y^2-1})=e^{\pm x}$，由定解条件$y(0)=1$，可知

$(y+\sqrt{y^2-1})=e^{\pm x}\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$。

五、（7 分）用拉格朗日乘数法求函数$f(x,y)=x^2+\sqrt{2}xy+2y^2$在$x^2+2y^2\le 4$上的最大值与最小值。

解：当$x^2+2y^2<4$时，

$\begin{cases} f_x'=2x+\sqrt{2}y=0\\ f_y'=\sqrt{2}x+4y=0\end{cases}$，求得驻点$(0,0)$，$f(0,0)=0$。

在边界上令$F=x^2+\sqrt{2}xy+2y^2+\lambda(x^2+2y^2-4)$并求导，得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=2x+\sqrt{2}y+2\lambda x=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=\sqrt{2}x+4y+4\lambda y=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial\lambda}=x^2+2y^2-4=0\end{cases},$$

解得：$\lambda=-\dfrac{1}{2}$时，驻点为$(\sqrt{2},-1),(-\sqrt{2},1)$，$f(\sqrt{2},-1)=2, f(-\sqrt{2},1)=2$

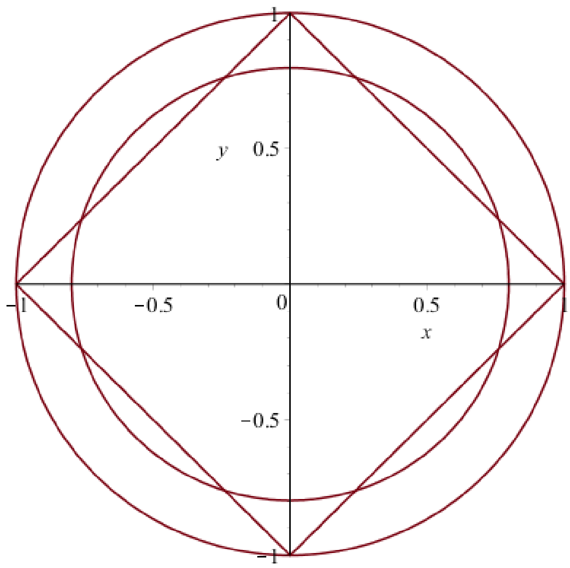
$\lambda=-\dfrac{3}{2}$时，驻点为$(\sqrt{2},1),(-\sqrt{2},-1)$，$f(\sqrt{2},1)=6, f(-\sqrt{2},-1)=6$，

故最小值为 0，最大值为 6.

六、（7 分）若区域D由直线$x=0$，$y=0$，$x+y=1$围成，证明：

$$\frac{\pi}{8}(1-\cos\frac{2}{\pi})\le\iint_D\sin(x^2)\cos(y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\le\frac{\pi}{8}(1-\cos 1)$$

证明：



$$\iint_D \sin(x^2)\cos(y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\iint_{|x|+|y|\le 1} \sin(x^2)\cos(y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{8}\iint_{|x|+|y|\le 1} [\sin(x^2)\cos(y^2)+\cos(x^2)\sin(y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{8}\iint_{|x|+|y|\le 1} \sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint_{|x|+|y|\le 1} \sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \ge \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \sin r^2\cdot r\mathrm{d}r = \pi(1-\cos\frac{2}{\pi})$$

$$\iint_{|x|+|y|\le 1} \sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{1} \sin r^2\cdot r\mathrm{d}r = \pi(1-\cos 1)$$