微积分（II）-2　A 卷答案（18-19 春）

一、　（5╳6=30 分）计算题

1、$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\mathrm{d}x$.

解： $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x^2$ ………(3)

$=-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2}$. ………(2)

2、$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$.

解：令 $x=\sin^2 t, 0\le t\le \frac{\pi}{2}$,

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sin t\cos t}2\sin t\cos t\mathrm{d}t$ ………(3)

$=2\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}t=\pi$. ………(2)

3、$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \sqrt{x-t}\mathrm{d}t}{x^{3/2}}$.

解：令 $u=x-t$，

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \sqrt{x-t}\mathrm{d}t}{x^{3/2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \sqrt{u}\mathrm{d}u}{x^{3/2}}$ ………(3)

$=\frac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x^{1/2}}=\frac{2}{3}$. ………(2)

4、$\lim\limits_{n\to+\infty}\left[(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n-1}{n})(1+\frac{n}{n})\right]^{1/n}$.

解：$\ln\left[\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})\right]^{1/n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})$， ………(2)

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})=\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x=2\ln 2-1$， ………(2)

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})\right]^{1/n}=\frac{4}{e}.$$ ………(2)

5、$\int_0^1 y\mathrm{d}y\int_y^1 \sin(x^3)\mathrm{d}x$.

解：交换积分顺序

$$\int_0^1 y\mathrm{d}y\int_y^1\sin(x^3)\mathrm{d}x=\int_0^1\sin(x^3)\mathrm{d}x\int_0^x y\mathrm{d}y$$ ………(3)

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\sin(x^3)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\int_0^1\sin(x^3)\mathrm{d}x^3=-\frac{1}{6}\cos x^3\,|_0^1=\frac{1}{6}(1-\cos 1)$$.………(2)

6、求$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xe^{-y},\\ y(0)=1.\end{cases}$的解.

解：分离变量

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xe^{-y}\Rightarrow e^y\mathrm{d}y=x\mathrm{d}x$$ ………(1)

$$\int e^y\mathrm{d}y=\int x\mathrm{d}x\Rightarrow e^y=\frac{x^2}{2}+C$$ ， ………(2)

利用定解条件可知： $C=e$ ， 故解为$e^y=\dfrac{x^2}{2}+e$.………(2)

二、　（8╳4=32 分）解答题

1、$\int_{-1}^1(x+|\sin x|)\ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$.

解： $\int_{-1}^1(x+|\sin x|)\ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$ ………(2)

$$=\frac{x^2}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})\,|_{-1}^1-\frac{1}{2}\int_{-1}^1\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx$$ ………(2)

$$=\ln(\sqrt{2}+1)-\frac{1}{2}\int_{-1}^1\frac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}}dx$$ ………(1)

$$=\ln(\sqrt{2}+1)-\frac{1}{2}\int_{-1}^1\sqrt{x^2+1}dx+\frac{1}{2}\int_{-1}^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$$ ………(1)

$$=\ln(\sqrt{2}+1)-\frac{\sqrt{2}-\ln(\sqrt{2}-1)}{2}-\ln(\sqrt{2}-1)=\frac{3}{2}\ln(\sqrt{2}+1)-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$ ………(2)

2、设 $z=ye^x$，其中 $y=y(x)$ 由方程 $x+y+xy=0$ 确定的隐函数，求 $\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

解：$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=e^x y+e^x y'$，………(2)

显然，$x=0\Rightarrow y=0$，………(1)

$x+y+xy=0\Rightarrow 1+y'+y+xy'=0\Rightarrow y'=-\frac{1+y}{1+x}$，………(2)

$y'(0)=-1$，………(1)

$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}|_{x=0}=y(0)+y'(0)=-1$. ………(2)

3、设 $g(x,y)=f(\frac{x^2-y^2}{2},x+y)$，求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$，其中 f 有二阶连续偏导.

解：$\frac{\partial g}{\partial x}=xf_1'+f_2'$，

$\frac{\partial g}{\partial y}=-yf_1'+f_2'$，………(1)

$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=x^2 f_{11}''+2xf_{12}''+f_1'+f_{22}''$，………(2)

$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=y^2 f_{11}''-2yf_{12}''-f_1'+f_{22}''$，………(2)

$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=-xyf_{11}''+(x-y)f_{12}''+f_{22}''$，………(2)

$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=(x+y)^2 f_{11}''$. ………(1)

4、求微分方程 $y''-3y'+2y=xe^{2x}+\cos x$ 的通解.

解：特征方程：$r^2-3r+2=0\Rightarrow r=1,2$，

对应的齐次方程的通解为 $C_1e^x+C_2e^{2x}$. ………(2)

考虑：$y''-3y'+2y=xe^{2x}$，考虑特解：$y^*=(ax^2+bx)e^{2x}$，有

$\left[(D+2)^2-3(D+2)+2\right](ax^2+bx)=x \Rightarrow a=\frac{1}{2}, b=-1$，

$y^*=(\frac{1}{2}x^2-x)e^{2x}$. ·········(2)

考虑：$y''-3y'+2y=\cos x$，考虑特解：$y^*=a\sin x+b\cos x$，解得

$a=-\frac{3}{10}, b=\frac{1}{10}$，

$y^*=-\frac{3}{10}\sin x+\frac{1}{10}\cos x$. ·········(2)

原问题的通解为：$C_1e^x+C_2e^{2x}+(\frac{1}{2}x^2-x)e^{2x}-\frac{3}{10}\sin x+\frac{1}{10}\cos x$. ·········(2)

三、（7 分）证明不等式：$\frac{3\sqrt{2}}{8}\pi \le \int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \le \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

证明：$\max\limits_{0\le x\le\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin^2 x}=\sqrt{2}$，·········(1) 故

$\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \le \int_0^{\pi/2}\sqrt{2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$. ·········(2)

$\int_0^{\pi/2}(1+\sin^2 x)\,\mathrm{d}x \le \sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \Rightarrow$ ·········(2)

$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4} \le \sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{3\sqrt{2}\pi}{8} \le \int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$. ·········(2)

四、（7 分）已知 $D_1=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\}$，$D_2=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2, |x|+|y|\le 2\}$，若

函数 $f(x,y)=\begin{cases} x^2-y^2, & (x,y)\in D_1, \\ \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & (x,y)\in D_2, \end{cases}$，求二重积分 $\iint_{D_1\cup D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$.

解：$\iint_{D_1\cup D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ ·········(2)

$=\iint_{D_1}(x^2-y^2)\,\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2}\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_2}\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}\sigma$ ·········(2)

$=4\int_0^{\pi/2}d\theta\int_1^{\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}}\frac{1}{r^2}dr=4\int_0^{\pi/2}(1-\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2})d\theta$ ·········(2)

$= 2\pi - 4$. ·········(1)

五、（7 分）计算 $f(x,y)=\sqrt{2x^2+2y^2-3xy}$ 满足约束条件 $x^2+y^2-xy-12=0$ 的最大值和最大值点.

解：令 $g=f^2(x,y)=2x^2+2y^2-3xy=2(x^2+y^2-xy)-xy=24-xy$ ，则有

$\max\limits_{(x,y)}(24-xy)\ s.t.\ x^2+y^2-xy-12=0$. ·········(2)

令 $F(x,y)=24-xy+\lambda(x^2+y^2-xy-12)$ ， ·········(1)

$$\begin{cases} F_x=-y+\lambda(2x-y)=0 \\ F_y=-x+\lambda(2y-x)=0 \\ F_\lambda=x^2+y^2-xy-12=0 \end{cases} \Rightarrow x+y=0 \text{ or } x-y=0$$ ，·········(2)

解得 $(x,y)=(\pm2\sqrt{3},\pm2\sqrt{3})$ 或 $(x,y)=(\pm2,\mp2)$， ·········(1)

$f(\pm2\sqrt{3},\pm2\sqrt{3})=\sqrt{24-12}=2\sqrt{3}$ ，

$f(\pm2,\mp2)=\sqrt{24+4}=2\sqrt{7}$ ，

所以最大值为 $f(\pm2,\mp2)=2\sqrt{7}$，最大值点 $(x,y)=(\pm2,\mp2)$. ·········(1)

六、（9 分）已知 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq0, \\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$ ，(1) 判断 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的连续性；(2) 判断 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的可微性；(3) 判断 $f''_{yx}(0,0)$ 是否存在？

解：（1）因为 $0\le\dfrac{|\sin(xy)|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\to0$， ·········(1)

有 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0)$， ·········(1)

故函数在 $(0,0)$ 点处连续.

（2） $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$， ·········(1)

$f_y(0,0)=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$ ， ·········(1)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\left[f_x(0,0)x-f_y(0,0)y\right]}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{x^2+y^2},\ \cdots\cdots\cdots(1)$$

令 $y=kx,k\neq 0$，则有 $\lim\limits_{(x,kx)\to(0,0)}\dfrac{\sin(kx^2)}{(k^2+1)x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx^2}{(k^2+1)x^2}=\dfrac{k}{k^2+1}$

故函数在(0,0)不可微. ·········(1)

（2） $f_y^{'}(x,y)=\begin{cases}-\dfrac{y\sin(xy)}{(x^2+y^2)^{3/2}}+\dfrac{x\cos(xy)}{(x^2+y^2)^{1/2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$,·········(1)

$f_{yx}^{''}(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f_y(x,0)-f_y(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{|x|}=+\infty$. ·········(1)，

故 $f_{yx}^{''}(0,0)$不存在. ·········(1)

七、 （8 分）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可微，满足 $x=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t$，（1）求 $f(x)$ 的表达式；（2）计算由曲线 $y=f(x)$，$x=-\dfrac{\pi}{4}$，$x=\dfrac{3\pi}{4}$，以及 x 轴所围封闭区域绕 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 旋转所得的旋转体的体积.

解：在方程两边同时对 x 求导，有

$$1=f(x)+\frac{d}{dx}\int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t\Rightarrow\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$1=f(x)+\frac{d}{dx}\int_{-x}^0(u+x)f(u)\mathrm{d}u=f(x)+\int_{-x}^0 f(u)\mathrm{d}u\Rightarrow\ \cdots\cdots\cdots(1)$$

$0=f'(x)+f(-x)$，两边再求导有

$0=f''(x)-f'(-x)$，又 $0=f'(-x)+f(x)$，·········(1)

故有定解问题

$$\begin{cases}f''(x)+f(x)=0\\ f(0)=1,f'(0)=-1\end{cases}\cdots\cdots\cdots(1)$$

解得：$f(x)=\cos x-\sin x$. ………(1)

(2) 法 1：

$$V=2\cdot 2\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(x-\frac{\pi}{4})[0-(\cos x-\sin x)]dx=2\cdot 2\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\frac{\pi}{4}-x)(\cos x-\sin x)dx$$. ………(2)

$=4\sqrt{2}\pi$. ………(1)

法 2：

$$V=\pi\cdot(\frac{\pi}{2})^2\cdot\sqrt{2}-\pi\int_0^{\sqrt{2}}(\arcsin\frac{y}{\sqrt{2}})^2 dy=4\sqrt{2}\pi .$$