

# 四川大学期末考试试题 A (闭卷)

## (2018-2019 学年第 1 学期)

课程号: 201074030    课序号:    课程名称: 微积分 (II) -1    任课教师:    成绩:  
适用专业年级:    学生人数:    印题份数:    学号:    姓名:

### 考生承诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定 (修订)》，郑重承诺：

- 1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；
- 2、不带手机进入考场；
- 3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

### 一、 填空题(每小题 4 分，共 24 分)

- 1、已知  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上可导，且  $f(0)=0$ ，则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)}{x} =$ \_\_\_\_\_.
- 2、函数  $f(x) = \frac{e^x - 1}{x(x-1)}$  的间断点为\_\_\_\_\_. (需指明间断点的类型)
- 3、曲线  $\begin{cases} x = t + \sin t \\ y + e^y - e^t = 0 \end{cases}$  在  $t=0$  对应点处的切线为\_\_\_\_\_.
- 4、设  $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{1+x}$ ，则  $f^{(2)}(0) =$ \_\_\_\_\_.
- 5、已知  $f(x) = x^3 + x$ ，则其反函数  $f^{-1}(x)$  在  $x=2$  处的一阶导数值为\_\_\_\_\_.
- 6、 $\int \frac{x^3}{x^2+1} dx =$ \_\_\_\_\_.

二、 (8 分)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x} \right)^{\frac{x}{\ln(\cos x)}}$ .

三、 (8 分) 已知  $f(x) = x^3 \cdot \ln x$ ，求  $f^{(4)}(x)$ . (答案需要化简)

四、 (8 分) 若  $0 < x < 1$ ，证明不等式：  $1 < \frac{\ln x}{x-1} < \frac{x+1}{2x}$ .

五、 (8 分) 求不定积分  $\int x e^{\arcsin x} dx$ .

六、 (8 分) 已知  $f(x) = \frac{x \ln(1+x^2) - 2(x - \arctan x)}{x^\alpha}$  , 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  ,

$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = C$  , 求参数  $\alpha$  的范围以及  $C$  的值.

七、 (9 分) 分析函数  $f(x) = x \cdot e^{\frac{-x^2}{2}}$  的极值、凹凸区间和拐点.

八、 (9 分) 设  $f(x) = \begin{cases} \ln(1+e^{-x}) + x \cdot \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ \beta, & x = 0. \end{cases}$

(1) 问当  $\beta$  为何值时, 函数  $f(x)$  是连续的?

(2) 求函数  $f(x)$  的水平渐近线和斜渐近线.

九、 (9 分) 已知  $f(x) = ax^2 - \ln x - 1$ .

(1) 根据实参数  $a$  的不同取值分析函数  $f(x)$  的零点个数;

(2) 若  $f_n(x) = \frac{1}{n}x^2 - \ln x - 1$ ,  $n$  是正整数, 证明  $f_n(x)$  在  $(0,1)$  内的零点  $x_n$  收敛, 并计算  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ .

十、 (9 分) 已知函数  $f(x) \in C^2[0,1]$ ,  $f(0) = f(1) = 0$ ,  $f'(0) = f'(1) = 2$ .

(1) 证明: 存在  $\eta \in (0,1)$ , 使得  $f''(\eta) = 2$ .

(2) 证明: 存在互不相同的  $\xi_1, \xi_2 \in (0,1)$ , 使得  $f'(\xi_2) - f'(\xi_1) = 1$ .