概率统计(理工)2021-2022 学年第 1 学期半期考试答案

一、　填空题

1. 0.12 (或$\frac{3}{25}$)　　2. 0.891　　3. $\frac{1}{4}$

4. $\frac{27}{64}$　　5. $\frac{1}{16}$　　6. 14

二、　解答题

1. X 的概率分布律:

X	1	2	3
P	0.6	0.24	0.16

$$X\text{的分布函数 } F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 0.6, & 1\le x<2\\ 0.84, & 2\le x<3\\ 1, & x\ge 3\end{cases}$$

2. 记 A_k 为该生来自第 k 个学院, $k=1, 2, 3$. 记 B 为该生的得分在区间[85, 95].
$P(A_1)=0.5, P(A_2)=0.3, P(A_3)=0.2$
$P(B|A_1)=P(85\le X_1\le 95)=0.5, P(B|A_2)=P(85\le X_2\le 95)=1,$
$P(B|A_3)=P(85\le X_3\le 95)=0.5.$

(1) $P(B)=\sum_{k=1}^{3}P(A_k)P(B\mid A_k)=0.5\times0.5+0.3\times1+0.2\times0.5=0.65$

(2) $P(A_3\mid B)=\dfrac{P(A_3B)}{P(B)}=\dfrac{P(B\mid A_3)P(A_3)}{P(B)}=\dfrac{0.2\times0.5}{0.65}=\dfrac{2}{13}$

(3) 设 X_k 的分布函数为 $F_k(x)$, 密度函数为 $f_k(x)$, $k=1, 2, 3$. 则 X 的分布函数为:

$$F(x)=P(X\le x)=\sum_{k=1}^{3}P(A_k)P(X\le x\mid A_k)=\sum_{k=1}^{3}P(A_k)P(X_k\le x)$$

$$=\sum_{k=1}^{3}P(A_k)F_k(x)=0.5F_1(x)+0.3F_2(x)+0.2F_3(x)$$

故 X 的密度函数

$$f(x)=F'(x)=0.5f_1(x)+0.3f_2(x)+0.2f_3(x)=\begin{cases}0.02, & 80\le x<85\\ 0.05, & 85\le x<90\\ 0.08, & 90\le x<95\\ 0.05, & 95\le x\le 100\\ 0, & x<80\text{或}x>100\end{cases}$$

3. (1) $F(x)=\int_{-\infty}^{0} f(u)\mathrm{d}u=\begin{cases}0, & x<0\\ x^2, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$

(2) Y 的分布函数 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(F(X)\le y)$

由于 $0\le F(X)\le 1$, 故当 $y<0$ 时, $F_Y(y)=0$; 当 $y\ge 1$ 时, $F_Y(y)=1$.

当 $0\le y<1$ 时:

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(F(X)\le y)=P(X\le\sqrt{y})=\int_{-\infty}^{\sqrt{y}} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\sqrt{y}} 2x\mathrm{d}x=y$$

所以 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

4. (1) $P(X<Y)=\iint_{x<y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1-\iint_{x\ge y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=1-\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x \frac{6}{7}\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)\mathrm{d}y=1-\frac{15}{56}=\frac{41}{56}$$

或 $P(X<Y)=\iint_{x<y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^2 \frac{6}{7}\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)\mathrm{d}y=\frac{41}{56}$

(2) Y 的边缘密度 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$

当 $y\le 0$ 或 $y\ge 2$ 时, $f(x,y)=0$, 故 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=0$;

当 $0<y<2$ 时,

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{6}{7}\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{3}{14}y+\frac{2}{7}$$

故 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{14}y+\frac{2}{7}, & 0<y<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

(3) 当 $0<y<2$ 时, 条件密度

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{\frac{6}{7}\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)}{\frac{3}{14}y+\frac{2}{7}}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{12x^2+6xy}{3y+4}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(4) 条件密度 $f_{X|Y=1}(x\mid y=1)=\begin{cases}\frac{6}{7}(2x^2+x), & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$$P(X<0.5 \mid Y=1)=\int_{-\infty}^{0.5} f_{X|Y=1}(x \mid y=1)\mathrm{d}x=\int_{0}^{0.5} \frac{6}{7}(2x^{2}+x)\mathrm{d}x=\frac{5}{28}$$

(5) $$P(X<0.5,\ Y<1)=\iint_{x<0.5, y<1} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{0}^{0.5}\mathrm{d}x\int_{0}^{1}\frac{6}{7}\left(x^{2}+\frac{xy}{2}\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{16}$$

$$P(Y<1)=\int_{-\infty}^{1} f_{Y}(y)\mathrm{d}y=\int_{0}^{1}\left(\frac{3}{14}y+\frac{2}{7}\right)\mathrm{d}y=\frac{11}{28}$$

$$P(X<0.5 \mid Y<1)=\frac{P(X<0.5, Y<1)}{P(Y<1)}=\frac{7}{44}$$

5. 当 $z<0$ 时，$F_{Z}(z)=P(Z \leq z)=0$;

当 $z \geq 0$ 时:

$$F_{Z}(z)=P(Z \leq z)=P(XY \leq z)=\sum_{k=0}^{2} P(X=k, XY \leq z)$$

$$=P(X=0,\ 0 \leq z)+P(X=1,\ Y \leq z)+P(X=2,\ 2Y \leq z)$$

$$=P(X=0)+P(X=1)P(Y \leq z)+P(X=2)\,P\left(Y \leq \frac{z}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-z})+\frac{1}{4}(1-\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}})$$

$$=1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-z}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}$$

所以 $$F_{Z}(z)=\begin{cases} 0, & z<0 \\ 1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-z}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}, & z \geq 0 \end{cases}$$

6. $$E(\sin X)=\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \cdot f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \frac{2}{\pi}\cos^{2} x\mathrm{d}x=0$$

$$D(\sin X)=E(\sin^2 X)-[E(\sin X)]^2=E(\sin^2 X)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} \sin^{2} x \cdot f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2} x \cdot \frac{2}{\pi}\cos^{2} x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$$