概率统计(理工)半期考试 参考答案

1. (15 分) 解: 甲、乙击中靶分别用 A 与 B 表示, 则 A 与 B 独立, 且 $P(A)=0.7$, $P(B)=0.8$.

(1) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=0.7+0.8-0.7\times0.8=0.94$. 8分

(2) $P(A\overline{B}\,|\,(A\cup B))=\dfrac{P(A\overline{B})}{P(A\cup B)}=\dfrac{0.7\times0.2}{0.94}=\dfrac{7}{47}=0.1489$. 7分

2. (15 分) 解: 用 A_k 表示"两个部件中恰有 k 个部件不是优质品" ($k=0,1,2$), 用 B 表示"组装后的仪器为不合格品", 则 A_0, A_1, A_2 为一个完备事件组. 而且

$P(A_0)=0.2\times0.1=0.02$, $P(A_1)=0.2\times0.9+0.8\times0.1=0.26$, $P(A_2)=0.2\times0.1=0.02$.

$P(B\,|\,A_0)=0$, $P(B\,|\,A_1)=0.3$, $P(B\,|\,A_2)=0.9$.

(1) $P(B)=\sum\limits_{k=0}^{2}P(A_k)P(B\,|\,A_k)=0.72\times0+0.26\times0.3+0.02\times0.9=0.096$. 9分

(2) $P(A_1\,|\,B)=\dfrac{P(A_1)P(A_1\,|\,B)}{P(B)}=\dfrac{0.26\times0.3}{0.096}=\dfrac{13}{16}=0.8125$. 6分

3. (15 分) 解: (1) 用 A_k 表示"直到第 k 次摸得黑球" ($k=1,2,3$), X 的分布律为

$P(X=1)=P(A_1)=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$,

$P(X=2)=P(\overline{A}_1A_2)=\dfrac{2\times8}{10\times9}=\dfrac{8}{45}$,

$P(X=3)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=\dfrac{2\times8}{10\times9}=\dfrac{8}{45}$.

X	1	2	3
p_k	4/5	8/45	1/45

9分

(2) X 的分布函数为

$$F(x)=P(X\le x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 4/5, & 1\le x<2\\ 44/45, & 2\le x<3\\ 1, & x\ge 3\end{cases}.$$

6分

4. (13 分) 解: Y 的值域 $R(Y)=(0,+\infty)$，当 $y>0$ 时，Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X\le y/2)=\int_0^{y/2} xe^{-x}dx=1-\left(1+\frac{y}{2}\right)e^{-y/2},$$ 8分

因此 Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{y}{4}e^{-y/2}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}.$$ 5分

5. (12 分) 解: (1) $X\sim f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$ $Y\sim f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$

Z 的值域 $R(Z)=(0,+\infty)$.

法 1: 卷积公式 $f_Z(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,z-x)dx$，被积函数 $f(x,z-x)=\begin{cases}2e^{-2(z-x)}, & 0<x<1, z-x>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$ 5分

$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_0^z 2e^{-2(z-x)}dx=1-e^{-2z}, & 0<z\le 1\\ \int_0^1 2e^{-2(z-x)}dx=(e^2-1)e^{-2z}, & z>1\\ 0, & z\le 0\end{cases},\quad 即,$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & Z\le 0\\ 1-e^{-2z}, & 0<Z\le 1.\\ (e^2-1)e^{-2z}, & Z>1\end{cases}$$ 7分

法 2: Z 的值域 $R(Z)=(0,+\infty)$，先求值域之内 Z 的分布函数.

当 $Z>0$ 时，$F_Z(z)=P(Z\le z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$. 值域之内分两种情况讨论如下.

当 $0<Z\le 1$ 时，$F_Z(z)=\int_0^z dx\int_0^{z-x} 2e^{-2y}dy=z+\frac{1}{2}e^{-2z}-\frac{1}{2}$;

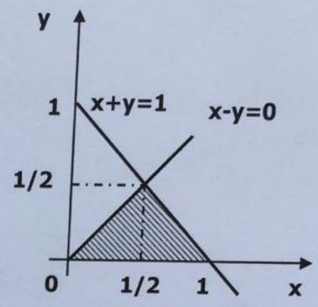
当 $Z>1$ 时，$F_Z(z)=\int_0^1 dx\int_0^{z-x} 2e^{-2y}dy=1-\frac{1}{2}e^{-2z}(e^2-1)$; 6分

故 Z 的密度函数为 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}0, & Z\le 0\\ 1-e^{-2z}, & 0<Z\le 1.\\ (e^2-1)e^{-2z}, & Z>1\end{cases}$ 6分

6. (20 分) 解: (1) 区域G的面积为$m(G)=\dfrac{1}{4}$，于是(X,Y)的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}4, & y<x<1-y, 0<y<\dfrac{1}{2}.\\ 0, & 其它\end{cases}$$

5分



(2) $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x 4dy=4x, & 0<x\le 1/2,\\ \int_0^{1-x} 4dy=4(1-x), & 1/2<x<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^{1-y} 4dx=4(1-2y), & 0<y<1/2,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

5分

(3) 当$0<y<1/2$时, $f_Y(y)=4(1-2y)>0$, 此时有

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-2y}, & y<x<1-y,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

5分

(4) 由 $f_{X|Y}\left(x\middle|\dfrac{1}{4}\right)=\begin{cases}2, & \dfrac{1}{4}<x<\dfrac{3}{4},\\ 0, & 其它.\end{cases}$ 得 $P\left(X<\dfrac{1}{3}\middle|Y=\dfrac{1}{4}\right)=\int_{1/4}^{1/3}2dx=\dfrac{1}{6}.$

5分

7. (10 分) 解: 由题设知，X 的分布律为

$$P(X=k)=\frac{0.25^k e^{-0.25}}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots$$

4分

设每一天未发生严重刑事案件的概率为p，则 $p=P(X=0)=e^{-0.25}$. 于是

$Y\sim B(365,e^{-0.25})$，因此， $E(Y)=365\,e^{-0.25}=284.26\approx 284$ (天).

6分