四川大学期末考试答案

（2015——2016 学年第 1 学期）　A 卷

课程号：201074030　　课程名称：微积分（Ⅱ）-1

一、　（3×6=18 分）填空题

1、$\lim\limits_{t\to 0}(1-\sin t)^{1/t}=$__________ e^{-1} __________。

2、$\ln(x^2+1)$的带有皮亚诺余项的 4 阶麦克劳林展式为______ $x^2-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)$ __。

3、设 $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$,则 $f^{(n)}(x)=$______ $\dfrac{1}{2}[\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}-\dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}]$ ______。

4、$f(x)=\begin{cases}(1+\dfrac{1}{|x|})^{\frac{1}{x}}, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$ 的间断点 $x=0$ 是__第二类（无穷）__间断点（填间断点类型）。

5、若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在单侧导数，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2)-f(0)}{x^2}=$___ $f'_+(0)$ __。

6、若 $\tan y=xy+x$ 确定隐函数 $y=y(x)$，则 $y'(x)=$___ $y'=\dfrac{y+1}{\sec^2 y-x}, x\neq \sec^2 y$ _。

二、　（4×3=12 分）计算题

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{e^x-x-1}$

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{e^x-x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x}}{e^x-1}$ --------------------②

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x}{1+x}}{x}$

$=1$ --------------------②

2、$\int\dfrac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}dx$

解: $\int\dfrac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}dx$

$=2\int\dfrac{\arctan\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2}d\sqrt{x}$ --------------------②

$= 2\int \arctan\sqrt{x} d \arctan\sqrt{x}$

$= (\arctan\sqrt{x})^2 + C$ --------------------②

3、$\int \frac{2+xe^x}{\sqrt{1+e^x}} dx$

解: $\int \frac{2+xe^x}{\sqrt{1+e^x}} dx$

$= \int \frac{2}{\sqrt{1+e^x}} dx + \int \frac{x}{\sqrt{1+e^x}} d(1+e^x)$ --------------------①

$= \int \frac{2}{\sqrt{1+e^x}} dx + \int 2x d\sqrt{1+e^x}$

$= \int \frac{2}{\sqrt{1+e^x}} dx + 2x\sqrt{1+e^x} - \int 2\sqrt{1+e^x} dx$ --------------------①

$= \int \frac{2}{\sqrt{1+e^x}} dx + 2x\sqrt{1+e^x} - \int \frac{2}{\sqrt{1+e^x}} dx - \int \frac{2e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx$ --------------------①

$= 2(x-2)\sqrt{1+e^x} + C$ --------------------①

三、（10 分）已知 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2\ln x - ax + 2}{1+\cos \pi x} = b$，求 a,b。

解：$\lim\limits_{x\to 1} 2\ln x - ax + 2 = 0 \Rightarrow a = 2$ --------------------②

$b = \lim\limits_{x\to 1} \frac{2\ln x - 2x + 2}{1+\cos \pi x} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{2-2x}{-\pi x \sin \pi x}$ --------------------③

$= -\frac{1}{\pi} \lim\limits_{x\to 1} \frac{2-2x}{\sin \pi x}$ --------------------③

$= -\frac{2}{\pi^2}$ --------------------②

四、（12 分）已知 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - \cos x}{x}, x > 0 \\ x^2 + bx + c, x \le 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处一阶连续可导，求（1）b,c 的值；

（2）求 $f'(x)$；（3）问 $f(x)$ 二阶可导吗？

解：（1）$c = \lim\limits_{x\to 0^-} x^2 + bx + c = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^x - \cos x}{x} = 1$， --------------------②

$b=f_+'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\sin x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\cos x}{2}=1$， ----②

（2） $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)e^x+x\sin x+\cos x}{x^2}, x>0\\ 1, x=0\\ 2x+1, x<0\end{cases}$ --------------------③

（3） $f_+^{(2)}(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(x-1)e^x+x\sin x+\cos x-x^2}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^3}=\dfrac{1}{3}$。 --------------------②

$f_-^{(2)}(0)=(2x+1)'=2$ --------------------②

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不二阶可导。 --------------------①

五、 （12 分）分析函数 $f(x)=x\ln x-ax+1$， $a\in R$ 的零点情况。

解： $x\ln x-ax+1=0\Rightarrow a=\ln x+\dfrac{1}{x}$， --------------------②

令 $g(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$， 定义域为 $x>0$ --------------------②

$g'(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$， $x=1$ 是唯一驻点，且为最小值点，

最小值为 $g(1)=1$。 --------------------③

又 $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=+\infty$，， $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$，从而有--------------------②

（1） $a>1$，有两个互异的零点； --------------------①

（2） $a<1$，无零点； --------------------①

（3） $a=1$，一个零点； --------------------①

六、 （10 分）若 m,n 为大于 1 的正整数，分析 $f(x)=(x-a)^m(b-x)^n$， $(a<b)$ 的极大值点的个数、极小值点的个数。

解： $f(x)=(x-a)^m(b-x)^n=(-1)^n(x-a)^m(x-b)^n$

根据 Rolle 中值定理知，存在 $a<\xi<b$， 使得 $f'(\xi)=0$， 故

$f'(x)=(-1)^n(m+n)(x-a)^{m-1}(x-\xi)(x-b)^{n-1}$，---------------------②

（1）若 m,n 为偶数，则 $x=a,b$ 为 2 个极小值点，$x=\xi$ 为 1 个极大值点。

---------------------②

（2）若 m,n 为奇数，则 $x=\xi$ 为唯一的极大值点。-----------------②

（3）若 m 为偶数，n 为奇数，则 $x=a$ 为 1 个极小值点，$x=\xi$ 为 1 个极大值点。

---------------------②

（4）若 m 为奇数，n 为偶数，则 $x=b$ 为 1 个极小值点，$x=\xi$ 为 1 个极大值点。

---------------------②

七、（10 分）已知 $t>0,m>0$，$\frac{1}{t}+\frac{1}{m}=1$，求证：$1<t^{\frac{1}{t}}\bullet m^{\frac{1}{m}}\le 2$。

证：等价于：$1>\frac{1}{t}^{\frac{1}{t}}\bullet\frac{1}{m}^{\frac{1}{m}}\ge\frac{1}{2}$---------------------①

令 $f(x)=x^x(1-x)^{1-x}>0,0<x<1$。---------------------①

$g(x)=\ln f(x)=x\ln x+(1-x)\ln(1-x),0<x<1$，---------------------②

$g'(x)=\ln\frac{x}{1-x},g''(x)=\frac{1}{x(1-x)}>0,0<x<1\Rightarrow x=\frac{1}{2}$ 为唯一驻点，且为最小值点，故

$f(x)=x^x(1-x)^{1-x}>f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2},0<x<1$，--------------③

又 $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}g(x)=0$，故 $f(x)<1$---------------------②

令 $x=\frac{1}{t}$，结论得证。---------------------①

八、（8 分）已知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$ab\ge 0$，证明：存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $\frac{b^2f(a)-a^2f(b)}{b^2-a^2}=f(\xi)-\frac{\xi}{2}f'(\xi)$。

解：（1）若 $ab\ne 0$，

则构造函数 $g_1(x)=\frac{f(x)}{x^2}$，$g_1(x)=\frac{1}{x^2}$---------------------③

$$\frac{\frac{f(b)}{b^2}-\frac{f(a)}{a^2}}{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}=\frac{\frac{\xi^2 f'(\xi)-2\xi f(\xi)}{\xi^4}}{-2\frac{1}{\xi^3}}=f(\xi)-\frac{\xi}{2}f'(\xi)\Rightarrow$$

$\dfrac{b^2 f(a)-a^2 f(b)}{b^2-a^2}=f(\xi)-\dfrac{\xi}{2}f'(\xi)$。--------------------③

（2）当$a=0$或$b=0$，取$\xi=a$或$\xi=b$，则结论显然成立。-------②

九、（8 分）已知函数列$f_n(x)=n^3x+\ln x$，（1）求证，对任意的$n\in N^+$，存在唯一的$\xi_n\in(0,\frac{1}{n^2})$，使$f_n(\xi_n)=0$；（2）证明：级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-\ln\xi_n}{n^3}$收敛；（3）证明：数列$\{\xi_n\}$单调递减。

解:（1）$\lim\limits_{x\to 0^+}f_n(x)=-\infty$，$f_n(\frac{1}{n^2})=n-2\ln n>0$，故在存在唯一的$\xi_n\in(0,\frac{1}{n^2})$，使$f_n(\xi_n)=0$。

--------------------③

（2）$\xi_n\in(0,\frac{1}{n^2})$，由比较判别法知$\sum_{n=1}^{+\infty}\xi_n$收敛，也即级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-\ln\xi_n}{n^3}$收敛。--------------------

②

（3）$f_n(\xi_n)=n^3\xi_n+\ln\xi_n=0$，$f_{n+1}(\xi_{n+1})=(n+1)^3\xi_{n+1}+\ln\xi_{n+1}=0$可以推出

$\dfrac{\ln\xi_{n+1}}{\ln\xi_n}=\dfrac{(n+1)^3}{n^3}\dfrac{\xi_{n+1}}{\xi_n}\Rightarrow\dfrac{\ln\xi_{n+1}}{\xi_{n+1}}=\dfrac{(n+1)^3}{n^3}\dfrac{\ln\xi_n}{\xi_n}$，-------------①

因为$\ln\xi_n<0$，有$\dfrac{\ln\xi_{n+1}}{\xi_{n+1}}<\dfrac{\ln\xi_n}{\xi_n}$，--------------------①

由于函数$y=\dfrac{\ln x}{x}$在$(0,1]$上单调递增，可知$0<\xi_{n+1}<\xi_n<\dfrac{1}{n^2}$，$\{\xi_n\}$单调递减。

--------------------①