

四川大学期末考试试题A（闭卷）

(2020—2021学年第 I 学期)

课程号: 201074030
适用专业年级: 2020级

课序号:
学生人数:

课程名称: 微积分(II)-1
印题份数:

任课教师:
学号:

成绩:
姓名:

考生承诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

- 1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；
- 2、不带手机进入考场；
- 3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

一、填空题(每题4分，共24分)

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1) \times (2n+1)} \right] = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 若方程 $y = e^{x+y} - 1$ 确定隐函数 $y = y(x)$ ，则 $y'(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{2x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

5. 已知 $y = g(x)$ 和 $y = f(x)$ 互为反函数，满足 $f(0) = 1, g'(1) = 2, f''(0) = 8$ ，则 $g''(1) = \underline{\hspace{2cm}}.$

6. 已知 $f(x) = x^2 \cos x$ ，则 $f^{(2020)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、(8分) 计算不定积分 $\int \frac{x \ln x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$

三、(9分) 求曲线 $f(x) = \frac{(x^2 + x + 1) \ln x}{x \ln(x-1)}$ 的斜渐近线.

四、(9分) 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{\sin(\tan x) - \tan x}$.

五、(9分) 证明 $f(x) = x \ln(1+x) - (1+x) \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一零点.

六、(9分) 求曲线 $\begin{cases} x = t^3 + 3t \\ y = t^2 + 2t \end{cases}$ 的极值点和拐点.

七、(9分) 已知函数 $f(x)$ 的导函数 $\frac{df(x)}{dx} = x^2 |\sin x|$.

(1) 求使得 $f^{(n)}(0)$ 存在的 n 的最大值.

(2) 若 $x \in [-\pi, \pi]$, 且 $f(\pi) = 0$, 求 $f(x)$.

八、(9分) 设 $f(x) \neq 0$ 在 $[a, b]$ 上连续, (a, b) 内可导. 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$,

$$\text{使得 } \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{1}{b-\xi} - \frac{2}{\xi-a}.$$

九、(7分) 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有定义, 满足 $y^2 f\left(\frac{x}{y}\right) = yf(x) - xf(y)$,

且 $f'(1)$ 存在. 证明: $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导, 且 $f'(x) = \frac{f(x)}{x} + f'(1)$.

十、(7分) $\forall x_0 \in (1, \sqrt[4]{e})$, $x_{n+1} = x_n^2 \ln x_n - x_n + 2, n = 0, 1, 2, \dots$. 证明:

(1) 数列 $\{x_n\}$ 是收敛的, 并计算 $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 的值.

(2) $(x_n - a)^2 < \frac{2}{3}(x_{n+1} - a)$.

注: $1.28 < \sqrt[4]{e} < 1.29$.