2019 年半期考试参考答案

一、 (10 分)计算$\int_{-4}^{9} x\sqrt{|x|}\mathrm{d}x$.

解：$\int_{-4}^{9} x\sqrt{|x|}\mathrm{d}x=\int_{-4}^{4} x\sqrt{|x|}\mathrm{d}x+\int_{4}^{9} x\sqrt{|x|}\mathrm{d}x$ ………(5 分)

$=0+\int_{4}^{9} x\sqrt{x}\mathrm{d}x=\int_{4}^{9} x^{3/2}\mathrm{d}x=\left.\frac{x^{5/2}}{5/2}\right|_{4}^{9}=\frac{2(3^5-2^5)}{5}=\frac{422}{5}$.………(5 分)

二、 (10 分)计算$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{1+e^x}\mathrm{d}x$.

解：$I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{1+e^x}\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$， ………(3 分)

$I=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{x\sin^3 x}{1+e^x}+\frac{x\sin^3 x}{1+e^{-x}})\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin^3 x\mathrm{d}x$ ………(3 分)

$=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}\sin^3 x\mathrm{d}x$ ………(2 分)

$=\frac{2\pi}{3}$ ………(2 分)

三、 (10 分)计算$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+2x+2x^2}}\mathrm{d}x$.

解：$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+2x+2x^2}}\mathrm{d}x=\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+2}}\mathrm{d}x$ ………(3 分)

$=-\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+2}}\mathrm{d}\frac{1}{x}=\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{t^2+2t+2}}\mathrm{d}t$ ………(4 分)

$=\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{(t+1)^2+1}}\mathrm{d}t=\ln(t+1+\sqrt{(t+1)^2+1})|_0^1=\ln\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{2}+1}$.………(3 分)

$=\ln(\sqrt{5}+2)+\ln(\sqrt{2}-1)$.

四、 (10 分)计算$\lim_{(x,y)\to(\infty,a)}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

解: $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,a)}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$

$=\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,a)}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{\frac{x}{x+y}}$ ………(3 分)

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$, ………(2 分)

$\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,a)}\frac{x}{x+y}=\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,a)}\frac{1}{1+y/x}=1$, ………(3 分)

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,a)}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=e$.………(2 分)

五、 (12 分)求 a,b 的值，使得 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{bx-\sin x}\int_{-x}^{x}\frac{(t+x)^2}{\sqrt{a+t+x}}\mathrm{d}t=4$.

解: $4=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{bx-\sin x}\int_{-x}^{x}\frac{(t+x)^2}{\sqrt{a+t+x}}\mathrm{d}t$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{bx-\sin x}\int_{0}^{2x}\frac{u^2}{\sqrt{a+u}}\mathrm{d}u$ ………(3 分)

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{8x^2}{\sqrt{a+2x}}}{b-\cos x}$ ………(3 分)

由于对任意的 a, $\frac{8x^2}{\sqrt{a+2x}}$ 皆为无穷小量，故 $b=1$.………(3 分)

从而可知 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{16}{\sqrt{a+2x}}=4\Rightarrow a=16$.………(3 分)

六、 (12 分)设 $F(x,y)=f(g(x+y),g(x-y))$，其中 g 具有二阶导数， f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial F}{\partial y}$， $\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$.

解: $\frac{\partial F}{\partial y}=f_1'\cdot g'(x+y)-f_2'\cdot g'(x-y)$, ………(3 分)

$\frac{\partial F}{\partial x}=f_1^{'}\cdot g'(x+y)+f_2^{'}\cdot g'(x-y)$………(3 分)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\left[f_{11}^{''}g'(x+y)-f_{12}^{''}g'(x-y)\right]\cdot g'(x+y)+f_1^{'}\cdot g''(x+y)$$ ，………(3 分)
$$+\left[f_{21}^{''}g'(x+y)-f_{22}^{''}g'(x-y)\right]\cdot g'(x-y)-f_2^{'}\cdot g''(x-y)$$

由于 f 具有二阶连续偏导数，故 $f_{12}^{''}=f_{21}^{''}$，从而有

$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=f_{11}^{''}\cdot[g'(x+y)]^2-f_{22}^{''}\cdot[g'(x-y)]^2+f_1^{'}\cdot g''(x+y)-f_2^{'}\cdot g''(x-y)$.………(3 分)

七、 (12 分)已知方程 $x^2+2y^2+3z+e^z=1$ ，(1)证明该方程在$(0,0)$点的邻域内能唯一确定连续函数$z=z(x,y)$满足$z(0,0)=0$；(2)在$(0,0)$点的邻域内求全微分$\mathrm{d}z$；(3)利用二阶偏导数判断$z=z(x,y)$是否在点$(0,0)$处取得极值?

解：（1）设$F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z+e^z-1$，

$F(0,0,z)=3z+e^z-1=0\Rightarrow z=0$ （唯一解），………(1 分)

又$F_x=2x$，$F_y=4y$，$F_z=3+e^z$皆连续，………(2 分)

$F_z\big|_{(0,0,0)}=3+e^z\,|_{z=0}=4\neq 0$，

故方程可在$(0,0)$点的邻域内唯一确定连续隐函数$z=z(x,y)$。………(1 分)

(2) $z_x=\frac{-2x}{3+e^z},z_y=\frac{-4y}{3+e^z}$.………(2 分)

$\mathrm{d}z=-\frac{2x}{3+e^z}\mathrm{d}x-\frac{4y}{3+e^z}\mathrm{d}y$………(1 分)

（3） $z_x=\frac{-2x}{3+e^z}=0,z_y=\frac{-4y}{3+e^z}=0\Rightarrow(x,y)=(0,0)$ 为驻点. ………(1 分)

$$A=z_{xx}\big|_{(0,0)}=\left.\frac{2x\cdot e^z\cdot z_x-2(3+e^z)}{(3+e^z)^2}\right|_{(0,0)}=-\frac{1}{2}$$,………(1 分)

$$B=z_{xy}\big|_{(0,0)}=\left.\frac{2x\cdot e^z\cdot z_y}{(3+e^z)^2}\right|_{(0,0)}=0$$,………(1 分)

$$C=z_{yy}\big|_{(0,0)}=\left.\frac{4y\cdot e^z\cdot z_y-4(3+e^z)}{(3+e^z)^2}\right|_{(0,0)}=-1$$,………(1 分)

因为 $B^2-AC=-\frac{1}{2}<0, A<0$，故在 $(0,0)$ 处取得极大值. ………(1 分)

八、 (12 分)已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的邻域内连续，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}=1$，(1)求 $f_x(0,0)$ 和 $f_y(0,0)$；(2)判断函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否可微?

解: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}\cdot(x^2+y^2)=f(0,0)=0$，………(3 分)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}=1\Rightarrow\lim_{\substack{x\to0\\y=0}}\frac{f(x,0)}{x^2}=1\Rightarrow\lim_{\substack{x\to0\\y=0}}\frac{f(x,0)}{x}=0$$，………(1 分)

$$f_x(0,0)=\lim_{\substack{x\to0\\y=0}}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$$，………(2 分)

同理可知，$f_y(0,0)=\lim\limits_{\substack{y\to0\\x=0}}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$，………(3 分)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}=0$，故函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微. ………(3 分)

九、 (12 分)已知曲线 $y=\frac{\sqrt{x}}{e}$ 与曲线 $y=\ln\sqrt{x}$ 有公共切点，求：(1) 两条曲线与 x 轴围成的平面图形的面积 S；(2) 该平面图形绕 x

轴旋转而成的旋转体的体积V.

解：设切点横坐标为x_0，故切点处切线斜率分别为$y'=\frac{1}{2e\sqrt{x_0}}$，

$y'=\frac{1}{2x_0}$， 由 公 切 点 可 知 $\frac{1}{2e\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2x_0}\Rightarrow x_0=e^2$， 故 切 点 为

$(e^2,1)$.………(3 分)

(1) $S=\int_0^1(e^{2y}-e^2y^2)\mathrm{d}y=\frac{e^2-3}{6}$;………(4 分)

(2) $V=\pi\int_0^{e^2}y^2\mathrm{d}x-\pi\int_1^{e^2}y^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^{e^2}\frac{x}{e^2}\mathrm{d}x-\pi\int_1^{e^2}\frac{\ln^2 x}{4}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$.………(5 分)