2018-19 第一学期期末数 2 考试题 A 参考答案

一、填空题(4 分 x 6=24 分)

1、已知 $f(x)$ 在 R 上可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)}{x}=$ ______ $2f'(0)$ ________.

2、函数 $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x(x-1)}$ 的间断点为 0 第一类，1 第二类 .（需指明间断点的类型）

3、曲线 $\begin{cases} x=t+\sin t \\ y+e^y-e^t=0 \end{cases}$ 在点 $t=0$ 对应点处的切线为_____ $y=\dfrac{1}{4}x$ _________.

4、设 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}}{1+x}$，则 $f^{(2)}(0)=$ _______ $\dfrac{11}{4}$ _______.

5、已知 $f(x)=x^3+x$，则其反函数 $f^{-1}(x)$ 在 $x=2$ 处的一阶导数值为____ $\dfrac{1}{4}$ ____.

6、$\displaystyle\int\frac{x^3}{x^2+1}\mathrm{d}x=$ ____ $\dfrac{x^2-\ln(x^2+1)}{2}+C$ ______.

二、(8 分) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}\right)^{\frac{x}{\ln(\cos x)}}$.

解：$\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}\right)^{\frac{x}{\ln(\cos x)}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\ln(\cos x)}\ln(\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}-1+1)}$ --------2 分

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\cos x-1}\cdot\frac{\sqrt{1+2x}-x-1}{x}}$ --------2 分

$=e^{-2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-x-1}{x^2}}$ --------2 分

$=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+2x}}-1}{x}}=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+2x}}{x}}=e$. --------2 分

三、(8 分)已知 $f(x)=x^3\cdot\ln x$，求 $f^{(4)}(x)$.（答案需要化简）

解：$\displaystyle f^{(4)}(x)=\sum_{k=0}^{4}C_4^k(x^3)^{(k)}(\ln x)^{(4-k)}$ --------2 分

$=C_4^0x^3(\ln x)^{(4)}+C_4^1 3x^2(\ln x)^{(3)}+C_4^2 6x(\ln x)^{(2)}+C_4^3 6(\ln x)'$ --------2 分

$=x^3(-\dfrac{6}{x^4})+12x^2(\dfrac{2}{x^3})+36x(-\dfrac{1}{x^2})+24(\dfrac{1}{x})$ --------2 分

$=\frac{6}{x}$.--------2 分

四、(8 分)若 $0<x<1$，证明不等式：$1<\frac{\ln x}{x-1}<\frac{x+1}{2x}$.

证：(1) $\ln x-\ln 1=\frac{1}{\xi}(x-1), x<\xi<1, 0<x<1\Rightarrow$ --------2 分

$\frac{\ln x}{x-1}=\frac{1}{\xi}>1, x<\xi<1, 0<x<1$.--------1 分

(2) 令 $f(x)=2x\ln x-x^2+1$，$f(1)=0$，

$f'(x)=2\ln x+2-2x$，$f'(1)=0$，

$f''(x)=\frac{2}{x}-2>0, 0<x<1$，--------2 分

故，$f'(x)<f'(1)=0, 0<x<1\Rightarrow f(x)>f(1)=0$，--------2 分

所以有 $0<x<1, 2x\ln x-x^2+1>0\Rightarrow\frac{\ln x}{x-1}<\frac{x+1}{2x}$.--------1 分

五、 (8 分)求不定积分 $\int xe^{\arcsin x}\mathrm{d}x$.

解：令 $t=\arcsin x\Rightarrow x=\sin t, t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}], dx=\cos t dt$，--------2 分

$\int xe^{\arcsin x}\mathrm{d}x=\int\sin t\cos t\cdot e^t dt$

$=\frac{1}{2}\int\sin 2t\mathrm{d}e^t$

$=\frac{1}{2}\sin 2t\cdot e^t-\int\cos 2t\cdot e^t dt$ --------2 分

$=\frac{1}{2}\sin 2t\cdot e^t-\cos 2t\cdot e^t-2\int\sin 2t\cdot e^t dt$ --------2 分

故 $\int xe^{\arcsin x}\mathrm{d}x=\frac{1}{10}(\sin 2t-2\cos 2t)e^t+C$

$=\frac{1}{10}(\sin(2\arcsin x)-2\cos(2\arcsin x))e^{\arcsin x}+C$

$=\frac{1}{5}(x\sqrt{1-x^2}+2x^2-1)e^{\arcsin x}+C$ --------2 分

六、(8 分)已知 $f(x)=\frac{x\ln(1+x^2)-2(x-\arctan x)}{x^{\alpha}}$，若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=C$，

求参数 α 的范围以及 C 的值..

解：$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{x\ln(1+x^2)-2(x-\arctan x)}{x^{\alpha}}$，

因为 $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{x\ln(1+x^2)}{x^3}=1$， $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{-2(x-\arctan x)}{x^3}=-\dfrac{2}{3}$， --------2 分

故 $0<\alpha\le3$ 时，成立. --------1 分

$0=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\ln(1+x^2)-2(x-\arctan x)}{x^\alpha}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)-2}{x^{\alpha-1}}\Rightarrow\alpha-1>0\Rightarrow\alpha>1$.--------2 分

所以，参数 α 的范围为 $1<\alpha\le3$.--------1 分

$$\lim_{x\to0+}f(x)=C=\begin{cases}0,1<\alpha<3,\\ \dfrac{1}{3},\alpha=3\end{cases}$$ --------2 分

七、 (9 分)分析函数 $f(x)=xe^{\frac{-x^2}{2}}$ 的极值、凹凸区间和拐点.

解： $f'(x)=(1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$,可算出驻点为： $x=-1,1$， --------1 分

$f''(x)=(-3x+x^3)e^{-\frac{x^2}{2}}$，$f''(x)=0\Rightarrow x=0,\pm\sqrt{3}$， --------1 分

因为 $f''(-1)>0$，所以 $x=-1$ 为极小值点，极小值 $-e^{-\frac{1}{2}}$， --------1 分

因为 $f''(1)<0$，所以 $x=1$ 为极大值点，极小值 $e^{-\frac{1}{2}}$ 。--------1 分

$x<-\sqrt{3}$， $f''(x)<0$，凸--------1 分

$-\sqrt{3}<x<0$， $f''(x)>0$，凹--------1 分

$0<x<\sqrt{3}$， $f''(x)<0$，凸--------1 分

$\sqrt{3}<x$， $f''(x)>0$，凹--------1 分

$(-\sqrt{3},-\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}})$ ，$(0,0)$，$(\sqrt{3},\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}})$ 是拐点。--------1 分

八、(9 分) 设 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+e^{-x})+x\cdot\sin\dfrac{1}{x},x\ne0,\\ \beta,x=0.\end{cases}$. (1) 问当 β 为何值时，函数 $f(x)$ 是连续的？(2) 求函数 $f(x)$ 的水平渐近线和斜渐近线.

解：(1) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\ln(1+e^{-x})+\lim\limits_{x\to0}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}=\ln2+0=\ln2$. 故当 $\beta=\ln2$ 时，函数连续. --------2 分

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，故函数有水平渐近线 $y=1$， --------2 分

$k=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^{-x})}{x}+\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^{-x})}{x}=\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}=-1$，--------2 分

$b=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-kx=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1+e^{-x})+x\sin\frac{1}{x}+x=1+\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1+e^{-x})+x$

$=1+\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1+e^{x})=1$， --------2 分

故有斜渐近线 $y=-x+1$.--------1 分

九、 (9 分)设 $f(x)=ax^2-\ln x-1$，(1) 根据实参数 a 的不同取值分析函数 $f(x)$ 的零点个数；(2) 若 $f_n(x)=\frac{1}{n}x^2-\ln x-1, n$ 是正整数，证明 $f_n(x)$ 在 $(0,1)$ 内的零点 x_n 收敛，并计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.

解：(1) 显然 $x>0$. 令 $g(x)=\frac{\ln x+1}{x^2}$， $g'(x)=-\frac{2\ln x+1}{x^3}$，

$g'(x)=0\Rightarrow x=e^{\frac{-1}{2}}$ 为唯一驻点.

当 $0<x<e^{\frac{-1}{2}}, g'(x)>0\Rightarrow g(x)\uparrow$，

当 $e^{\frac{-1}{2}}<x, g'(x)<0\Rightarrow g(x)\downarrow$，

故 $x=e^{\frac{-1}{2}}$ 为最大值点，最大值为 $g(e^{\frac{-1}{2}})=\frac{1}{2}e$.--------1 分

又 $\lim\limits_{x\to0+}g(x)=\lim\limits_{x\to0+}\frac{\ln x+1}{x^2}=-\infty$， $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to\infty+}\frac{\ln x+1}{x^2}=0$，
可知:

1. 当 $a>\frac{1}{2}e$ 时， $f(x)$ 无零点；--------1 分
2. 当 $a=\frac{1}{2}e$ 时， $f(x)$ 一个二重零点；--------1 分
3. 当 $0<a<\frac{1}{2}e$ 时， $f(x)$ 两个零点；--------1 分
4. 当 $a\le0$ 时， $f(x)$ 一个零点；--------1 分

(2) 因 $0<\frac{1}{n}<\frac{1}{2}e$，此时方程有两个零点，对充分大的 n 只有一个零点 x_n 满足 $e^{-1}<x_n<e^{\frac{-1}{2}}<1$，其中 $g(e^{-1})=0$.--------1 分

又因为 $0<x<e^{\frac{-1}{2}}, g'(x)>0\Rightarrow g(x)\uparrow$，故 x_n 单调递减，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\ge e^{-1}$，----2 分

可知$0=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}x_n^2-\ln x_n-1=-\ln a-1\Rightarrow a=e^{-1}$.-------1 分

注：未证明收敛性九直接计算极限的均不给分。

十、(9 分)已知函数$f(x)\in C^2[0,1]$，$f(0)=f(1)=0$，$f'(0)=f'(1)=2$，（1）证明：存在$\eta\in(0,1)$，使得$f''(\eta)=2$.（2）证明：存在互不相同的$\xi_1,\xi_2\in(0,1)$，使得$f'(\xi_2)-f'(\xi_1)=1$.

证：（1）构造辅助$F(x)=f(x)-x(x-1)$.

显然$F'(x)=f'(x)-2x+1$，且$F(0)=F(1)=0$，$F'(0)=f'(0)+1=3$，

$F'(1)=f'(1)-2+1=1$. --------1 分

故由极限的保号性可知：

存在$r_1>0$，使得$F(r_1)>F(0)=0$，--------1 分

存在$r_1<r_2<1$，使得$F(r_2)<F(1)=0$，--------1 分

根据连续函数零点存在定理，存在$r\in(r_1,r_2)$，使得$F(r)=0$，再根据 Rolle 定理知存在

$\eta\in(0,1)$，使得$f''(\eta)=2$.--------2 分

(2)考虑 Lagrange 中值定理有

$f'(\xi_1)=\frac{f(r)-f(0)}{r-0}=\frac{r(r-1)}{r}=r-1$，--------2 分

$f'(\xi_2)=\frac{f(1)-f(r)}{1-r}=\frac{-r(r-1)}{1-r}=r$，--------2 分

故$\xi_1<\xi_2\in(0,1)$，使得$f'(\xi_2)-f'(\xi_1)=1$.--------1 分