四川大学期末考试试题 A（答案）

（2017-2018 学年第 1 学期）

课程号：201074030　课序号：　课程名称：微积分（II）-1　任课教师：　成绩：
适用专业年级：　学生人数：　印题份数：　学号：　姓名：

考 生 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；

2、不带手机进入考场；

3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理.

考生签名：

一、（3×6=18 分）填空题

1. 当 $x \to 0$ 时，$\tan x - ax$ 为 x 的 3 阶无穷小，则实数 $a =$ ___1___.

2. 已知 $f'(0)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x} =$ ___2___.

3. 曲线 $y=e^{1-x}$ 在 $(1,1)$ 处的切线方程为___$y=-x+2$___.

4. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sin\dfrac{1}{n}\right)^3$ 的敛散性为___收敛___.（填收敛或发散）

5. $\dfrac{d}{dx}\left(\int xe^{\sin x}dx\right) =$ ___$xe^{\sin x}$___.

6. 若函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内二阶可导，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}=1$，则 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的极___小___值.

二、（8×6=48 分）计算题

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}$$ ………..4 分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1$$ ………..4 分

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{\ln\sec x}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{\ln\sec x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2/2}{-(\cos x-1)}$$ ………..4 分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2/2}{x^2/2}$$

$=-1$ ………..4 分

3. 设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\ln(t+1)\\ e^{yt}=y-t\end{cases}$ 确定，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}$.

解：容易知道 $x(t)|_{t=0}=0, y(t)|_{t=0}=1$， ………..2 分

$$e^{yt}=y-t\Rightarrow yt=\ln(y-t)\Rightarrow$$

$$ty'+y=\frac{y'-1}{y-t}\Rightarrow$$

$$y'(t)=-\frac{y^2-ty+1}{ty-t^2-1}=-\frac{ye^{ty}+1}{te^{ty}-1}, te^{ty}-1\neq 0$$， ………..2 分

$$x'(t)=\frac{1}{t+1}, t+1\neq 0$$， ………..2 分

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=-\frac{(t+1)(ye^{ty}+1)}{te^{ty}-1}, te^{ty}-1\neq 0.$$

容易知道 $x'(t)|_{t=0}=1, y'(t)|_{t=0}=2$，

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\left.\frac{y'(t)}{x'(t)}\right|_{t=0}=2 \text{……….2 分}$$

4. 已知可导函数$f(x)$满足$f'(\ln x)=\begin{cases}1, x\in(0,1]\\ x, x\in(1,+\infty)\end{cases}$，求$f(x)$.

解：$0<x\le 1$时，

$f_1(\ln x)=\int f'(\ln x)d(\ln x)=\int 1d(\ln x)=\int d(\ln x)=\ln x+C_1$，

$f_1(t)=t+C_1$，$t\le 0$……….2 分

$x>1$时，

$f_2(\ln x)=\int f'(\ln x)d(\ln x)=\int xd(\ln x)=\int dx=x+C_2$，

$f_2(t)=e^t+C_2$，$t>0$……….2 分

因为函数$f(t)$连续，故有$\lim\limits_{t\to 0+}f_2(t)=\lim\limits_{t\to 0-}f_1(t)$，得到

$1+C_2=C_1\Rightarrow C_2=C_1-1$，……….2 分

$$f(x)=\begin{cases}x+C_1, x\in(-\infty,0]\\ e^x+C_1-1, x\in(0,+\infty)\end{cases} \text{……….2 分}$$

5. $\int\frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx$.

解：$\int\frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx$

$=\int\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\ln x}{x}dx$……….2 分

$=2\sqrt{x}+\frac{\ln^2 x}{2}+C$……….2 分

6. $\int\sqrt{x^2+2x+2}dx$.

解 1：令$x+1=\tan t, dx=\sec^2 tdt, -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，……….2 分

$$\int \sqrt{x^2+2x+2}dx = \int \sqrt{\tan^2 t+1}\sec^2 tdt$$

$$= \int \sec^3 tdt$$ ……….2 分

$$\int \sec^3 tdt = \int \sec td\tan t = \tan t\sec t - \int \tan^2 t\sec tdt$$

$$= \int \sec td\tan t = \tan t\sec t + \int \sec tdt - \int \sec^3 tdt.$$

$$= \int \sec td\tan t = \tan t\sec t + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t} - \int \sec^3 tdt$$

$$\int \sec^3 tdt = \frac{1}{2}\tan t\sec t + \frac{1}{4}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t} + C$$ ……….2 分

$$\int \sqrt{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\tan t\sec t + \frac{1}{4}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t} + C$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{x^2+2x+2}+x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}-x-1} + C$$ ……..2 分

解 2：令 $x+1 = sh(t), dx = ch(t)dt$,

$$\int \sqrt{x^2+2x+2}dx = \int \sqrt{sh^2 t+1}\cdot ch(t)dt = \int ch^2(t)dt$$

$$= \frac{1}{4}\int (e^{2t}+e^{-2t}+2)dt$$

$$= \frac{1}{4}(\frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} + 2t) + C = \frac{sht \bullet cht}{2} + \frac{t}{2} + C$$

$$= \frac{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}{2} + \frac{arsh(x+1)}{2} + C$$

三、 （8 分）设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin ax}{bx}, x \neq 0 \\ a, x = 0 \end{cases}$，（1）问实数 a,b 满足什么条件值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处是连续的，并且是可导的？（2）问 $f''(0)$ 是否存在？

解：

（1）若 $a=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=a=0$ 成立，此时 $b\neq 0$ 为任意值，并且可导. ……...2 分

若 $a\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}\frac{a}{b}=\frac{a}{b}=a\Rightarrow b=1$， ……...2 分

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin ax}{x}-a}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax-ax}{x^2}=0$$，在 $x=0$ 处可导.

（2）若 $a=0$， $f''(0)=0$；

若 $a\neq 0,b=1$，此时 $f'(x)=\begin{cases}\frac{ax\cos ax-\sin ax}{x^2},x\neq 0\\ 0,x=0\end{cases}$， ……...2 分

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{ax\cos ax-\sin ax}{x^3}=-\frac{a^3}{3}$$ ……...2 分

四、 （10 分）根据实数 a 的不同取值情况，讨论曲线 $y=\ln x$ 与曲线 $y=ax$ 的交点个数.

解：求解域为 $x>0$.

考虑方程 $\ln x=ax$，令 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，

$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}=0\Rightarrow x=e$ ……...2 分

（1） $0<x<e$，函数单增；

（2） $x>e$，函数单减； ……...2 分

（3） $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x}=-\infty$；

（4） $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=0$； ……...2 分

（5）函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 在 $x=e$ 处取得最大值 $M=\dfrac{1}{e}$……...2 分

结论：

1、$a\le 0$，曲线有一个交点；

2、$0<a<\dfrac{1}{e}$，曲线有两个交点；

3、$a=\dfrac{1}{e}$，曲线有一个交点；

4、$a>\dfrac{1}{e}$，曲线无交点. ……...2 分

五、 （8 分）当 $x<1$ 时，$\ln\dfrac{1}{1-x}\ge x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$.

解：考虑函数 $f(x)=\ln(1-x)+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$，……...2 分

不等式等价于证明：

$f(x)=\ln(1-x)+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\le 0=f(0)$……...2 分

1、若 $0<x<1$，$f'(x)=-\dfrac{1}{1-x}+1+x+x^2=\dfrac{x^3}{x-1}<0$，故函数单调递减，从而

$f(x)<f(0)$……...2 分

2、若 $x<0$，$f'(x)=-\dfrac{1}{1-x}+1+x+x^2=\dfrac{x^3}{x-1}>0$，故函数单调递增，从而

$f(x)<f(0)$……...2 分

六、 （8 分）已知函数 $f(x)=2x-\sin x-1$.证明：（1）存在唯一的实数 α，

使得 $f(\alpha)=0$.（2）对任意的实数 x_0，由 $x_{n+1}=\dfrac{\sin x_n+1}{2}$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 产生的

数列$\{x_n\}$满足$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\alpha$.

证：（1）因为$f(0)=-1<0$，$f(\frac{\pi}{2})=\pi-2>0$，根据连续函数零点存在定理可知：存在零点$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得$f(\alpha)=0$.........2 分

又因为$f'(x)=2-\cos x>0,\forall x\in R$，故零点唯一. ....2 分

（2）$\forall x_0\in R$，都有$x_1=\frac{\sin x_0+1}{2}$满足$0\le x_1\le 1$，故可知$0<x_n<1,n>1$.

利用 lagrange 中值定理有：

$x_n-x_{n-1}=\frac{\sin x_{n-1}-\sin x_{n-2}}{2}=\frac{\cos\xi_{n-1}}{2}(x_{n-1}-x_{n-2}),0<\xi_{n-1}<1$，$0<\cos\xi_{n-1}<1$....1 分

由归纳法可知：

1、 若$x_1<x_2$，则当$n>0$时，$\{x_n\}$单增；

2、 若$x_1>x_2$，则当$n>0$时，$\{x_n\}$单减；.........1 分

根据单调有界数列可知$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\beta$，从而有$\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1}=\frac{\sin(\lim\limits_{n\to+\infty} x_n)+1}{2}$，也即$\beta$是函数$f(x)$的唯一零点$\alpha$.........2 分