四川大学期末考试试卷 A 答案

（2016-2017 年第一学期）

科目：微积分 II　　课程号：　　　　　考试时间：120 分钟

注：请将答案写在答题纸对应的方框内，否则记 0 分。

一、　填空（每小题 3 分，共 18 分）

1. 当 $x \to 0$ 时，$\sin x^2 - x^2$ 为 x 的___6___阶无穷小。

2. 已知 $f(0)=1$，$f'(0)=-1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=$___-1___。

3. 若 $(1,3)$ 为 $y=-\dfrac{3}{2}x^3+bx^2$ 的拐点，则 $b=$___$\dfrac{9}{2}$___。

4. 设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)|x|$ 在 $x=0$ 处可导，则 $f(0)=$___0___。

5. 设 $f(x)=\sqrt{x\sqrt{\sin x}}$，则 $f'(x)=$_$\sqrt{x\sqrt{\sin x}}\left(\dfrac{1}{2x}+\dfrac{\cos x}{4\sin x}\right)$__。

6. $y=e^{1/x}+1$ 的水平渐近线为___$y=2$___。

二、　计算题（每小题 8 分，共 40 分）

1. 设 $f(x)=x^2\sin x$，求 $f^{(5)}(0)$。

解：$\sin x = x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$，

$$f(x)=x^2\sin x = x^3-\frac{1}{6}x^5+o(x^5)，$$

故有 $\dfrac{f^{(5)}(0)}{5!}=-\dfrac{1}{6}\Rightarrow f^{(5)}(0)=-20$。

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x-\tan x}-1}{\ln(1+x^3)}$。

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x-\tan x}-1}{\ln(1+x^3)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^3}$$

$=-\dfrac{1}{3}$。

3．设 $y=y(x)$ 由参数 $\begin{cases} x=\ln(1+t) \\ y=t-e^{y}+1 \end{cases}$ 确定，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0},\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$ 。

解：$t=0 \Rightarrow x=0, y=0$

$dy=dt-e^{y}dy \Rightarrow \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{1+e^{y}}$,

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{1+t}$,

$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\left.\dfrac{dy/dt}{dx/dt}\right|_{t=0}=\left.\dfrac{1+t}{1+e^{y}}\right|_{t=0}=\dfrac{1}{2}$,

$\left.d(\dfrac{dy}{dx})/dt\right|_{t=0}=\left.\dfrac{(1+e^{y})-(1+t)(e^{y}\dfrac{dy}{dt})}{(1+e^{y})^2}\right|_{t=0}=\dfrac{2-\dfrac{1}{2}}{4}=\dfrac{3}{8}$,

$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=\left.\dfrac{d(\dfrac{dy}{dx})/dt}{dx/dt}\right|_{t=0}=\dfrac{3}{8}$ 。

4．$\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$ 。

解：$t=\sqrt[6]{x} \Rightarrow x=t^6, dx=6t^5dt$

$\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$

$\displaystyle=6\int\frac{t^5}{t^3+t^2}dt=6\int\frac{t^3}{t+1}dt=6\int(t^2-t+1)dt-6\int\frac{1}{t+1}dt$

$=2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|+C$

$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C$ 。

5．$\displaystyle\int\frac{\arctan x}{x^2}dx$ 。

解：$\int\frac{\arctan x}{x^2}dx$

$=-\int\arctan x d\frac{1}{x}=-\frac{\arctan x}{x}+\int\frac{1}{x(1+x^2)}dx$

$=-\frac{\arctan x}{x}+\int[\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}]dx$，

$=-\frac{\arctan x}{x}+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|1+x^2|+C$

三、（10 分）设 $f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{x},x\neq 0\\ a,x=0\end{cases}$，（1）求 a 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续（3 分）；（2）求 $f'(0)$，$f''(0)$（7 分）。

解：（1）$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1=a$；

（2）$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}$，

$x\neq 0, f'(x)=(\frac{e^x-1}{x})'=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}$，

$f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2xe^x-2e^x-x^2+2}{2x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{xe^x-x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+xe^x-1}{6x}=\frac{1}{3}$。

四、（10 分）讨论 $x>0$ 时方程 $ax+\frac{1}{x^2}=1$ 的解的情况，其中 a 是实数。

解：$ax+\frac{1}{x^2}=1\Leftrightarrow a=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}$，

令 $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}$，

$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^4}=0\Rightarrow x=\sqrt{3}, f(\sqrt{3})=\frac{2\sqrt{3}}{9}$，

$0<x<\sqrt{3}, f'(x)>0$，函数单增；$x>\sqrt{3}, f'(x)<0$，函数单减；

又 $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{x}(1-\frac{1}{x^2})=-\infty$，$\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x}(1-\frac{1}{x^2})=0$， （1）$a > \frac{2\sqrt{3}}{9}$，无解；

（2）$a = \frac{2\sqrt{3}}{9}, a \le 0$，一个解；

（3）$0 < a < \frac{2\sqrt{3}}{9}$，两个解。

五、 （8 分）证明：。

解：$\frac{x}{1+2x} < \ln\sqrt{1+2x} < x, x > 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{1+2x} < \ln(1+2x) < 2x$。

（1）令 $f(x) = \ln(1+2x) - 2x$， $f'(x) = \frac{2}{1+2x} - 2 = \frac{-4x}{1+2x} < 0$，故 $f(x)$ 单减，

即 $f(x) < f(0) = 0, x > 0 \Rightarrow \ln(1+2x) < 2x$。

（2）$\ln(1+2x) - \ln(1) = \frac{1}{\xi}\cdot 2x > \frac{2x}{1+2x}, 1 < \xi < 1+2x, x > 0.$

六、 （7 分）设 $f(x)$ 为可导函数，证明：存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $f'(\xi)f(1-\xi^2) = 2\xi f(\xi)f'(1-\xi^2)$。

证明：构造辅助函数 $G(x) = f(x)f(1-x^2)$，显然有 $G(0) = G(1)$，根据罗尔中值定理有，存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $G'(\xi) = 0$，也即

$0 = G'(\xi) = f'(\xi)f(1-\xi^2) - 2\xi f(\xi)f'(1-\xi^2)$。

七、 （7 分）（1）证明：函数 $f_n(x) = x^n + nx - 2$（n 为正整数）在 $(\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}, \frac{2}{n})$ 内有根 a_n，且 a_n 是 $(0,+\infty)$ 上的唯一正根（2 分）；（2）计算 $\lim_{n\to+\infty}(1+a_n)^n$（3 分）；（3）判断 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 的敛散性（2 分）。

解：（1） $f_n(\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}) = (\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2})^n - \frac{2}{n} < 0$， $f_n(\frac{2}{n}) = (\frac{2}{n})^n > 0$，根据连续函数的零点存

在定理知在$(\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2},\frac{2}{n})$内有根$a_n$。

又$f_n'(x)=nx^{n-1}+n>0, x\in(0,+\infty)$，故零点唯一。

（2）因为$(1+\frac{1}{x})^x$在$(0,+\infty)$上单增，故$(1+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2})^n<(1+a_n)^n<(1+\frac{2}{n})^n$。

又$\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{2}{n})^n=e^2$，$\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2})^n=e^2$，可知$\lim\limits_{n\to+\infty}(1+a_n)^n=e^2$。

（3）（反证法）由于$0<\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}<a_n$，若$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛，则根据正项级数的比较判别法知$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2})$收敛，在根据收敛级数的运算法则和$p$级数的敛散性知$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n}$收敛，矛盾，故$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$发散。

或直接使用比较判别法：$a_n>\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}>\frac{1}{n}+\frac{1}{n}(1-\frac{2}{n})\geq\frac{1}{n}, n>1$。