四川大学期末考试试题 A（答案）

（2017-2018 学年第 2 学期）

课程号： 201075030　课序号：　课程名称：微积分（II）-2　任课教师：　成绩：
适用专业年级：　学生人数：　印题份数：　学号：　姓名：

考 生 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；

2、不带手机进入考场；

3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

一、（5×6=30 分）计算题

1、$\int_0^1 xe^{-x}\mathrm{d}x$.

解：$\int_0^1 xe^{-x}\mathrm{d}x = -xe^{-x}\big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x$ ………………③

$= -e^{-1} - e^{-x}\big|_0^1 = 1-2e^{-1}$ ……………②

2、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (e^t-1)\mathrm{d}t}{x^2}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (e^t-1)\mathrm{d}t}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}$ ………………③

$=\dfrac{1}{2}$ ……………②

3、$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}$.

解：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\frac{x^2+y^2}{2}}{x^2+y^2}$ ………………③

$=\dfrac{1}{2}$ ……………②

4、$\iint_D e^{x+y}\mathrm{d}\sigma$，$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

解：$\iint_D e^{x+y}\mathrm{d}\sigma=\iint_D e^y e^x \mathrm{d}\sigma=\int_0^1 e^x dx\int_0^1 e^y dy$ ……………………③

$=(\int_0^1 e^x dx)^2=(e-1)^2$ ………………②

5、设 $w=u^2+uv+v^2$，$u=x^2$，$v=x+1$，求 $\left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

解：$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=(2u+v)2x+(u+2v)=4x^3+3x^2+4x+2.$ …………………③

$\left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=2$ ………………②

6、计算 $\int_1^{+\infty}\frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x$.

解：$\int_1^{+\infty}\frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+(x^2)^2}\mathrm{d}x^2$ …………………③

$=\frac{1}{2}\arctan x^2\,|_1^{+\infty}=\frac{\pi}{8}$ ………………②

二、　（8×5=40 分）解答题

1、$\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)\cos x\mathrm{d}x$.

解：$\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)\cos x\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\mathrm{d}x$ ………………④

$=2\int_0^{\pi}\cos x\mathrm{d}x=-2\sin x\,|_0^{\pi}=0$ ………………④

2、求 $\begin{cases} y'-\frac{y}{x}=1, x>0 \\ y(1)=1 \end{cases}$ 的解.

解：$p(x)=-\frac{1}{x}, q(x)=1$，………………①

$y=e^{-\int -\frac{1}{x}dx}[\int e^{\int \frac{1}{x}dx}dx+c]=x(\ln x+c)$ ………………④

利用定解条件可知 $y=x(\ln x+1)$ ………………③

3、已知方程 $z^3+xz^2+yz=1$ 确定隐函数 $z=z(x,y)$，求 $\mathrm{d}z|_{(0,0)}$.

解：$d(z^3+xz^2+yz)=0\Rightarrow 3z^2dz+z^2dx+2xzdz+zdy+ydz=0\Rightarrow dz=-\frac{z^2dx+zdy}{3z^2+2xz+y}$ …③

又 $x=0, y=0 \Rightarrow z=1$， ………………③

故 $dz|_{(0,0)}=-\dfrac{z^2dx+zdy}{3z^2+2xz+y}|_{(0,0)}=-\dfrac{dx+dy}{3}$ ………………②

4、$\iint_D (x^2-2x+3y)\mathrm{d}\sigma$， 其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$.

解：根据积分区域的对称性可知：

$\iint_D (x^2-2x+3y)\mathrm{d}\sigma=\iint_D x^2\mathrm{d}\sigma$， ………………②

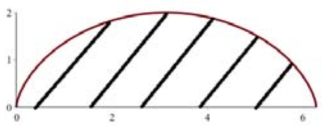
再利用轮换对称性可知：

$\iint_D (x^2-2x+3y)\mathrm{d}\sigma=\dfrac{1}{2}\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$， ………………③

利用极坐标可知：

$\iint_D (x^2-2x+3y)\mathrm{d}\sigma=\dfrac{1}{2}\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=\dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2\cdot rdr=\dfrac{\pi}{4}$ ………………③

5、如下图所示阴影部分为摆线 $\begin{cases} x=\theta-\sin\theta \\ y=1-\cos\theta \end{cases}$ ($0\le\theta\le 2\pi$)与 x 轴所围成.求阴影部分绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.



解：$V=\int_0^{2\pi}\pi y^2dx=\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2d(\theta-\sin\theta)$ ………………③

$=\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^3d\theta=8\pi\int_0^{2\pi}\sin^6\dfrac{\theta}{2}d\theta$ ………………③

$=16\pi\int_0^{\pi}\sin^6\theta d\theta=32\pi\int_0^{\pi/2}\sin^6\theta d\theta=32\pi\dfrac{5}{6}\dfrac{3}{4}\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{2}=5\pi^2$ ………………②

三、 （7 分）已知 $f(x,y)=x^2+y^2-6x+6y$.(1)求 $f(x,y)$ 的极值和极值点，并判断是极大值还是极小值，请给出理由.(2)求 $f(x,y)$ 在 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 32\}$ 上最值和最值点，并给出理由.

解：(1) $f_x = 2x-6=0$， $f_y = 2y+6=0$

解得驻点为 $x=3, y=-3$ ………………②

又 $A=f_{xx}=2>0$， $B=f_{xy}=0$， $C=f_{yy}=2>0$， $B^2-AC=-4<0$，

故 $x=3, y=-3$ 是极小值点. ………………②

(2)考虑 $L(x,y,\lambda)=32-6x+6y+\lambda(x^2+y^2-32)$，

$$\begin{cases} L_x = -6+2\lambda x=0 \\ L_y = 6+2\lambda y=0 \\ L_\lambda = x^2+y^2-32=0 \end{cases}$$

解得 $x=\pm 4, y=\mp 4$ ………………②

算得 $f(4,-4)=-16$， $f(-4,4)=80$， $f(3,-3)=-18$，

故最大值为 80，最小值 -18。………………①

四、 （8 分）已知函数 $f(x)$ 满足 $f'(x)=\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t+2e^x-1$，且 $f(0)=1$.（1）求函数 $f(x)$；（2）求 $y=f(x)-xe^x$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 之间的弧长.

解：(1)在方程两边同时求导得 $f''(x)-f(x)=2e^x$，且有 $f(0)=1, f'(0)=1$，

求解常微分方程：

特征方程为 $r^2-1=0 \Rightarrow r=-1, r=1$，

齐次问题得通解为 $C_1e^{-x}+C_2e^x$， ………………②

非齐次问题的特解设为 $f^*(x)=axe^x$，代入解得 $f^*(x)=xe^x$， ………………②

故非齐次问题的通解为 $f(x)=C_1e^{-x}+C_2e^x+xe^x$，由定解条件可知，

解为 $f(x)=\dfrac{e^{-x}+e^x}{2}+xe^x$ ………………②

(2) $y=f(x)-xe^x=\dfrac{e^{-x}+e^x}{2}$，由弧长公式得

$L=\int_0^1\sqrt{1+y'^2}dx=\int_0^1\sqrt{\frac{e^{-2x}+e^{2x}+2}{4}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1(e^{-x}+e^{x})dx$

$=\frac{e-e^{-1}}{2}$ ……………………②

五、 （7 分）已知 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\cdot\tan y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，(1)求 $f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$；(2)判断 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的可微性.

解： $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$， ……………………①

$f_y(0,0)=\lim\limits_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$， ……………………①

$\lim\limits_{\rho\to0}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim\limits_{\rho\to0}\frac{f(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$

$=\lim\limits_{\rho\to0}\frac{\Delta x\tan\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$， ……………………②

令 $\Delta y=k\Delta x(k\neq0)$，有 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta x\tan(k\Delta x)}{(\Delta x)^2+(k\Delta x)^2}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{k(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2+(k\Delta x)^2}=\frac{k}{1+k^2}$，极限不收敛，

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的不可微. ……………………③

六、 （8 分）（1）计算 $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{t}\cdot\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t$；（2）证明：$\int_0^1\frac{4^t}{\sqrt{t}\cdot\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t>2\pi$.

解：（1）令 $t=\cos^2x$， $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{t}\cdot\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\frac{2\sin x\cdot\cos x}{\cos x\cdot\sin x}\mathrm{d}x=\pi$ ……………………②

（2）

$I=\int_0^1\frac{4^t}{\sqrt{t}\cdot\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t=2\int_0^{\pi/2}4^{\cos^2x}\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi/2}4^{\cos^2y}\mathrm{d}y=2\int_0^{\pi/2}4^{\sin^2x}\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi/2}4^{\sin^2y}\mathrm{d}y$,……….②

$I^2=4\int_0^{\pi/2}4^{\cos^2x}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\pi/2}4^{\sin^2y}\mathrm{d}y=4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}4^{\sin^2y+\cos^2x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ……………………②

$$=2\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}[4^{\sin^2 y+\cos^2 x}+4^{\sin^2 x+\cos^2 y}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y>4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}4^{\frac{\sin^2 y+\cos^2 x+\sin^2 x+\cos^2 y}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}4\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\pi^2,$$ ………………②

故 $\int_0^1\frac{4^t}{\sqrt{t}\cdot\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t>2\pi$.