四川大学半期考试试卷答案

（2014—2015年第二学期）

科目：微积分（II）-2　课程号：201075030　考试时间：90分钟

注：请将答案写在答题纸规定的方框内，否则记0分。

一 、计算下列多元函数的极限。若极限不存在，请给出理由（每题5分，共15分）

1、 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^4+y^4)}{x^2+y^2}$

解： $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^4+y^4)}{x^2+y^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

$0<\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}<x^2+y^2$，故

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^4+y^4)}{x^2+y^2}=0$。

2、 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3+y^5}{x^2+y^2}$

解： $|\dfrac{x^3+y^5}{x^2+y^2}|<|\dfrac{x^2}{x^2+y^2}||x|+|\dfrac{y^2}{x^2+y^2}||y^3|<|x|+|y^3|\to 0$，故

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3+y^5}{x^2+y^2}=0$。

3、 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3\sin y}{x^6+y^2}$

解：令 $y=kx^3$，

$\lim\limits_{(x,y=kx^3)\to(0,0)}\dfrac{x^3\sin y}{x^6+y^2}=\lim\limits_{(x,y=kx^3)\to(0,0)}\dfrac{kx^6}{x^6+k^2x^6}=\dfrac{k}{1+k^2}$，极限不存在。

二．计算题。（每小题5分，共25分）

1、 $\int_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{(2+x)^2}dx$。

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2+x)^2}dx = \int_0^1 \ln(1+x)d(-\frac{1}{x+2})$$

解：$$= -\frac{\ln 2}{3} + \int_0^1 (\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2})dx$$

$$= \frac{5}{3}\ln 2 - \ln 3$$

2、$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x(1+x^2)^2}dx$ 。

解：$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x(1+x^2)^2}dx \underline{\underline{x=\tan t}} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sec^2 t}{\tan t \sec^4 t}dt = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos^2 t}{\tan t}dt$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} (\frac{1}{\sin t} - \sin t)d\sin t = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{8}$$

3、设 $f(x) + x\sin x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(2x)dx$，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ 。

解：设 $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$，$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(2x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \frac{1}{2}A$

$$f(x) + x\sin x = \frac{1}{2}A \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}A dx \Rightarrow$$

$$A + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = \frac{\pi}{4}A \Rightarrow A + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{4}A \Rightarrow A = \frac{4}{\pi - 4}.$$

4、$u = (xy)^z$，求 $du|_{(1,2,1)}$ 。

$$du|_{(1,2,1)} = \frac{\partial u}{\partial x}|_{(1,2,1)} dx + \frac{\partial u}{\partial y}|_{(1,2,1)} dy + \frac{\partial u}{\partial z}|_{(1,2,1)} dz$$

解：$$= \frac{du(x,2,1)}{dx}|_{x=1} dx + \frac{du(1,y,1)}{dy}|_{y=2} dy + \frac{du(1,2,z)}{dz}|_{z=1} dz$$

$$= 2dx + dy + 2\ln 2 dz.$$

5、 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x\sqrt{x-1}},x>1\\ x,0\le x\le 1\\ 0,x<0\end{cases}$，求$\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$。

解：$\int\dfrac{dt}{t\sqrt{t-1}}\overset{u=\sqrt{t-1}}{=\!=\!=}\int\dfrac{2udu}{u(u^2+1)}=2\arctan\sqrt{t-1}+C$。

$$\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0,x\le 0\\ \dfrac{x^2}{2},0<x\le 1\\ \dfrac{1}{2}+2\arctan\sqrt{x-1},x>1\end{cases}$$

三.（10分）设$f(x)$在$x=1$处可导，且$f(1)=0$，$f'(1)=1$，求极限$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\int_1^x(t\int_t^1 f(u)du)dt}{(1-x)^3}$。

解：洛必达法则 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\int_1^x(t\int_t^1 f(u)du)dt}{(1-x)^3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\int_x^1 f(u)du}{-3(1-x)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\int_1^x f(u)du}{3(1-x)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{-6(1-x)}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{6(x-1)}=\frac{1}{6}f'(1).$$

四.（10分）设函数$f(x)$连续，且$f(0)\ne 0$，求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}$。

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt}{x\int_0^x f(u)du}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x f(u)du+xf(x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(\xi)}{x[f(\xi)+f(x)]}=\dfrac{1}{2},0<\xi<x$。最后一步不能使用洛必达法则，利用积分中值定理。

五.（10分）证明函数$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$在点$(0,0)$连续、偏导数存在，但不可微。

解：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{|xy|}=0=f(0,0)$，连续。

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0,$$偏导存在，

令$\alpha=\Delta f\,|_{(0,0)}-[f_x(0,0)dx+f_y(0,0)dy]=\sqrt{|xy|}$，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\alpha}{\sqrt{x^2+y^2y}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$极限不存在，不可微.

六.（10 分）求曲线$\begin{cases}x=1+t^2\\ y=\ln t\end{cases}(1\le t\le 2)$与直线$y=0$，$x=5$所围成的平面图形的面积以及该图形绕直线$x=6$旋转一周所得旋转体的体积。

解：
$$V=\int_0^{\ln 2}\pi(6-x)^2dy$$
$$=\pi\int_1^2(5-t^2)^2d\ln t=(25\ln 2-\frac{45}{4})\pi$$

七、（10 分）设$z=z(x,y)$由方程$F(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x})=0$确定，其中$F$可微，求$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$。

解：$F_1'(dx+\frac{ydz-zdy}{y^2})+F_2'(dy+\frac{xdz-zdx}{x^2})=0\Rightarrow$

$$dz=\frac{\frac{z}{x^2}F_2'-F_1'}{\frac{F_1'}{y}+\frac{F_2'}{x}}dx+\frac{\frac{z}{y^2}F_1'-F_2'}{\frac{F_1'}{y}+\frac{F_2'}{x}}dy$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xy}{xF_1'+yF_2'}(\frac{z}{x}F_2'-xF_1'+\frac{y}{z}F_1'-yF_2')=z-xy$$

八.（10 分）求函数$f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$的极值，并判断是极大值还是极小值？

解：
$$f_x=e^{2x}(2x+2y^2+4y+1),\ f_y=e^{2x}(2y+2)$$
$$f_{xx}=4e^{2x}(x+y^2+2y+1),\ f_{xy}=4e^{2x}(y+1),\ f_{yy}=2e^{2x}$$

驻点：$x = \frac{1}{2}, y = -1$

$A = 2e, B = 0, C = 2e. \Rightarrow B^2 - AC < 0, A > 0$ 为极小值点，极小值-e/2。