四川大学半期考试试题答案

（2017-2018 学年第 2 学期）

课程号：201075030　课序号：　课程名称：微积分（Ⅱ）-2　任课教师：　成绩：
适用专业年级：　学生人数：　印题份数：　学号：　姓名：

考 生 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；

2、不带手机进入考场；

3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

一、（8×6=48 分）计算题

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t-x}{\sin x-x}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x e^{-t^2}dt-x}{\sin x-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^2}-1}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\frac{x^2}{2}}=2$.

2、$\int_0^{\pi/2}\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

解：$I=\int_0^{\pi/2}\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\pi/2}\dfrac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$，

$I=\dfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\dfrac{\pi}{4}$.

3、$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{xy^2+1}-1}{xy}$.

解：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{xy^2+1}-1}{xy}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2/2}{xy}=0$.

4、求 $z=f(x^2y,\dfrac{y}{x})$ 的一阶偏导数.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=2xyf_1'-\frac{y}{x^2}f_2', \frac{\partial z}{\partial y}=x^2f_1'+\frac{1}{x}f_2'$.

5、$\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x}}\mathrm{d}x$.

解：令 $t=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$，有 $x=\frac{t^2}{t^2+1}$， $dx=\frac{2t}{(t^2+1)^2}dt$，

$I=\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx=\int_0^{+\infty}\frac{2t^2}{(t^2+1)^2}dt$，再令 $t=\tan u$，

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{2\tan^2 u}{\sec^4 u}\sec^2 u du=2\int_0^{\pi/2}\frac{\tan^2 u}{\sec^2 u}du=2\int_0^{\pi/2}\sin^2 u du=\frac{\pi}{2}.$$

6、$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n+1})$.

解：$S_n=\frac{1}{n}[\ln(1+\frac{1}{n+1})+\ln(1+\frac{2}{n+1})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n+1})]$,

$$\frac{1}{n+1}[\ln 1+\ln(1+\frac{1}{n+1})+\ln(1+\frac{2}{n+1})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n+1})]<S_n$$,
$$<\frac{1}{n}[\ln(1+\frac{1}{n})+\ln(1+\frac{2}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n})]$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_0^1\ln(1+x)dx=x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}dx=\ln 4-1.$$

二、　（14 分）设 $z=z(x,y)$ 是由 $z^5-xz^4+yz^3=1$ 确定的隐函数，求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}$.

解：由已知条件可知 $z(0,0)=1$，（2 分）

$$z^5-xz^4+yz^3=1\Rightarrow 5z^4z_x-z^4-4xz^3z_x+3yz^2z_x=0\Rightarrow$$

$$z_x(0,0)=\left.\frac{z^4}{5z^4-4xz^3+3yz^2}\right|_{(0,0)}=\frac{1}{5}.$$（4 分）

$$z^5-xz^4+yz^3=1\Rightarrow 5z^4z_y-4xz^3z_y+z^3+3yz^2z_y=0\Rightarrow$$

$z_y(0,0)=\left.\dfrac{-z^3}{5z^4-4xz^3+3yz^2}\right|_{(0,0)}=-\dfrac{1}{5}$.（4 分）

又 $20z^3z_xz_y+5z^4z_{xy}-4z^3z_y-12xz^2z_xz_y-4xz^3z_{xy}+3z^2z_x+6yzz_xz_y+3yz^2z_{xy}=0\Rightarrow$

$-\dfrac{4}{5}+5z_{xy}(0,0)+\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}=0\Rightarrow z_{xy}(0,0)=-\dfrac{3}{25}$。（4 分）

三、（14 分）设函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x-y)\sqrt{\dfrac{|xy|}{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$，（1）判断 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的连续性；（2）判断 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的可微性。

解：（1）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x-y)\sqrt{\dfrac{|xy|}{x^2+y^2}}$，

因为 $0<|(x-y)\sqrt{\dfrac{|xy|}{x^2+y^2}}|<\dfrac{1}{\sqrt{2}}|x-y|$，（2 分）

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x-y)\sqrt{\dfrac{|xy|}{x^2+y^2}}=0$，（2 分）

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的连续。

（2）$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\left.\dfrac{df(x,0)}{dx}\right|_{x=0}=0$，（2 分）$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=\left.\dfrac{df(0,y)}{dy}\right|_{y=0}=0$，（2 分）

$\Delta f|_{(0,0)}=(\Delta x-\Delta y)\sqrt{\dfrac{|\Delta x\Delta y|}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$，

$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta f|_{(0,0)}-\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}\Delta x-\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}(\Delta x-\Delta y)\dfrac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，（2 分）

令 $\Delta y=k\Delta x,k>0,\Delta x>0$，有

$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=k\Delta x\to 0}}\dfrac{\Delta f|_{(0,0)}-\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}\Delta x-\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(1-k)\sqrt{k}}{(1+k^2)}$，极限不存在，不可微。（4 分）

四、（14 分）求心脏线 $\rho=1-\cos\theta,(0\le\theta\le\pi)$ 的长度 L，及其与 x 轴所围封闭

图形的面积 S .

解： $L=\int_0^{\pi}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\theta=\int_0^{\pi}\sqrt{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}d\theta$（4 分）

$=\int_0^{\pi}\sqrt{2-2\cos\theta}d\theta=2\int_0^{\pi}\sin\frac{\theta}{2}d\theta=4.$（3 分）

$S=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\rho^2 d\theta=2\int_0^{\pi}\sin^4\frac{\theta}{2}d\theta$（4 分）

$=4\int_0^{\pi/2}\sin^4 t dt=4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4}\pi.$（3 分）

五、（10 分）设 $f(x)\in C[0,1]$.证明：（1）若 $F(x)=(x-1)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,则存在 $\xi\in(0,1)$ ，使得 $F'(\xi)=0$ ；（2）若 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$ ，则存在 $\eta\in(0,1)$ ，使得 $\int_0^{\eta} f(x)\mathrm{d}x=\frac{f(\eta)}{\eta}$.

证:（1）显然， $F(0)=F(1)=0$,（2 分）

使用 Rolle 中值定理（1）的结论成立。（2 分）

（2）令 $F(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}\int_0^x f(t)dt$ ，

显然， $F(0)=F(1)=0.$（2 分）

且 $F'(x)=-xe^{-\frac{x^2}{2}}\int_0^x f(t)dt+e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot f(x)$ 。（2 分）

利用 Rolle 中值定理有：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0.$ 即

$F'(\xi)=-\xi e^{-\frac{\xi^2}{2}}\int_0^{\xi} f(t)dt+e^{-\frac{\xi^2}{2}}\cdot f(\xi)=0$ 。（2 分）