四川大学半期考试试题答案（闭卷）

（2016-2017 学年第 2 学期）

课程号： 201075030　课序号：　　课程名称：微积分（Ⅱ）-2　任课教师：　　成绩：

适用专业年级：　　学生人数：　　印题份数：　　学号：　　姓名：

考 生 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；

2、不带手机进入考场；

3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

一、　（4×5=20 分）填空题

1、若 $p>0$,则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=$_____ $\dfrac{1}{p+1}$ _____。

2、$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(\arctan x)^2dx}{x}=$_____ $\dfrac{\pi^2}{4}$ _____。

3、$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}=$_____ 0 _____。

4、设 $z=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$_____ $\dfrac{1}{2}$ _____。

5、若方程 $x^2+y^2+z^2=yz$ 确定 $z=z(x,y)$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ =_____ $\dfrac{2y-z}{y-2z},y\neq 2z$ _____。

二、　（10 分）$\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

解：

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\pi/6}\frac{\sin^2 t}{\cos t}\cos tdt=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/6}(1-\cos 2t)dt=\frac{1}{2}(t-\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\pi/6}=\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

三、　（10 分）$\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}dx$

解：$\int_0^{+\infty}\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx=\int_0^{+\infty}\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{e^{2x}+1}de^x=\arctan e^x\,|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4}$。

四、（10 分）求函数 $z=\arctan\frac{x+y}{x-y}$ 的全微分。

解：$z_x=-\frac{y}{x^2+y^2}$，$z_y=\frac{x}{x^2+y^2}$，则 $dz=-\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy$。

五、（10 分）设 $f''(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，$f(\pi)=2$，$\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin xdx=5$，求 $f(0)$。

解：$5=\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin xdx=\int_0^{\pi}f(x)\sin xdx+\int_0^{\pi}f''(x)\sin xdx$

$=\int_0^{\pi}f(x)\sin xdx+f'(x)\sin x\,|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}f'(x)\cos xdx=\int_0^{\pi}f(x)\sin xdx-\int_0^{\pi}f'(x)\cos xdx$

$=\int_0^{\pi}f(x)\sin xdx-f(x)\cos x\,|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}f(x)\sin xdx=-[-f(\pi)-f(0)]=f(0)+2\Rightarrow$

$f(0)=3$。

六、（10 分）设函数 $f(x,y)=|x-y|\,g(x,y)$，其中 $g(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内连续，问 $g(0,0)$ 为何值时，偏导数 $f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$ 存在？此时，$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否可微？

解：（1）$f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{|x|}{x}g(x,0)$，

由于 $g(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内连续，可知若偏导数 $f_x(0,0)$ 存在必有

$\lim\limits_{x\to0+}\frac{|x|}{x}g(x,0)=\lim\limits_{x\to0-}\frac{|x|}{x}g(x,0)\Rightarrow\lim\limits_{x\to0+}g(x,0)=\lim\limits_{x\to0-}-g(x,0)\Rightarrow g(0,0)=-g(0,0)$

可知 $g(0,0)=0$，此时也有 $f_y(0,0)$ 存在，且 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$。

（2）考虑

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x-y|\,g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

因$0 \le \frac{|x-y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le 2$为有界量，且$g(0,0)=0$，知

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，也即可微。

七、（10 分）求曲线$f(x)=x^3$与$g(x)=x$所围成的封闭图形面积以及该图形绕y轴旋转得到的旋转体的体积。

解：曲线$f(x)=x^3$与$g(x)=x$的交点为$(-1,-1),(0,0),(1,1)$，因为图形具有旋转对称性，则面积为

$A=2\int_0^1 [x-x^3]dx=\frac{1}{2}$。

旋转体的体积为

$V=2\int_0^1 \pi[(\sqrt[3]{y})^2-y^2]dy=\frac{8}{15}\pi$。

八、（10 分）当$|\lambda|<1$时，试证函数$f(x,y)=\lambda(e^y-1)\sin x-\cos x\cos y$在原点一定有极小值。

证：由$\begin{cases} f_x=\lambda(e^y-1)\cos x+\sin x\cos y=0 \\ f_y=\lambda e^y\sin x+\cos x\sin y=0 \end{cases}$可知$(0,0)$是驻点，又

$A=f_{xx}|_{(0,0)}=-\lambda(e^y-1)\sin x+\cos x\cos y|_{(0,0)}=1>0$；

$C=f_{yy}|_{(0,0)}=\lambda e^y\sin x+\cos x\cos y|_{(0,0)}=1$；

$B=f_{xy}|_{(0,0)}=\lambda e^y\cos x-\sin x\sin y|_{(0,0)}=\lambda$，

故当$|\lambda|<1$时，有$B^2-AC=\lambda^2-1<0$，可知在原点一定有极小值。

九、（10 分）设$f(x)\ge 0$在$[a,b]$上连续。（1）证明$F(x)=\int_a^x f(t)dt$在$[a,b]$上单调上升；（2）又若$F(b)=0$，证明：在$[a,b]$上$F(x)\equiv 0$，$f(x)\equiv 0$。

证：（1）$F'(x)=f(x)\ge 0$，故$F(x)$在$[a,b]$上单调上升，也有

$0 = F(a) \le f(x) \le F(b) = 0, x \in [a,b] \Rightarrow F(x) \equiv 0$。

（2）设在$[a,b]$上$f(x)$不恒为 0，则存在一点$c \in [a,b]$，使得$f(c) > 0$，由函数的连续性可极限的保号性知，存在c的邻域$a \le u_1 < y < u_2 \le b$，使得$f(y) > 0$。

$0 = F(b) = \int_a^b f(y)dy = \int_a^{u_1} f(y)dy + \int_{u_2}^b f(y)dy + \int_{u_1}^{u_2} f(y)dy > 0$矛盾。