概率统计(理工)

一、填空题（1-5 题，每空 3 分，共 15 分）

1、 $\frac{3}{4}$； 2、 10； 3、 $\frac{4}{35}$； 4、 0.3413； 5、 $-\frac{2}{9}$.

二、解答题（6-11 题，共 85 分）

6 (16 分)、解： (1) $\frac{61}{90}$ ； (2) $\frac{20}{61}$.

7 (12 分)、解：由 $p=P(X>6)=\int_6^{+\infty}e^{-(x-2)}dx=e^{-4}\approx 0.0183$，得 $Y\sim B(100,0.0183)$.

由泊松定理知，近似有 $Y\sim P(1.83)$. 从而 $P(Y\le 1)\approx\sum_{k=0}^{1}\frac{1.83^k e^{-1.83}}{k!}=2.83e^{-1.83}\approx 0.454$.

8 (15 分)、解：$Y=2X^2-1$ 的值域为 $R(Y)=[-1,7)=[-1,1)\cup[1,7)$. Y 的分布函数与概率密度函数分别为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le -1\\ \frac{\sqrt{2(y+1)}}{3}, & -1<y<1\\ \frac{2+\sqrt{2(y+1)}}{6}, & 1\le y<7\\ 1, & y\ge 7\end{cases}\quad 与\quad f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{1}{3\sqrt{2(y+1)}}, & -1<y<1\\ \frac{1}{6\sqrt{2(y+1)}}, & 1\le y<7\\ 0, & 其它\end{cases}.$$

9 (12 分)、解：该商品每周的平均利润为 $1416\frac{2}{3}$ 元（或 1416.67 元）。

10 (9 分)、解：Z 的值域为 $R(Z)=(-\infty,+\infty)$，Z 的分布函数与概率密度函数分别为

$$F_Z(z)=0.4F_Y(z)+0.6F_Y(z-1),\ -\infty<z<+\infty \quad 与$$

$$f_Z(z)=0.4f_Y(z)+0.6f_Y(z-1)=0.4\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}+0.6\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-1)^2}{2}},-\infty<z<+\infty.$$

11 (21 分)、解：(1) 联合概率密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}4, & 0<x<\frac{1}{2},x<y<1-x\\ 0, & 其它\end{cases}$.

(2) 边缘密度函数 $f_Y(y)=\begin{cases}4y, & 0<y<\frac{1}{2}\\ 4(1-y), & \frac{1}{2}\le y<1\\ 0, & 其它\end{cases}$.

由条件密度函数公式得，

当$0<y<\frac{1}{2}$时，$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{1}{y}, & 0<x<y \\ 0, & 其它\end{cases}$；

当$\frac{1}{2}\le y<1$时，$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{1}{1-y}, & 0<x<1-y \\ 0, & 其它\end{cases}$.

或综合在一起写成

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{1}{y}, & 当\ 0<y<\frac{1}{2}, 0<x<y \\ \frac{1}{1-y}, & 当\ \frac{1}{2}\le y<1, 0<x<1-y \\ 0, & 其它\end{cases}.$$

(3) 由(2)知， $f_{X|Y}(x|\frac{5}{8})=\begin{cases}\frac{8}{3}, & 0<x<\frac{3}{8} \\ 0, & 其它\end{cases}$.

从而条件概率

$$P(X<\frac{1}{4}\Big|Y=\frac{5}{8})=\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{8}{3}dx=\frac{2}{3}.$$