四川大学半期考试试题答案

（2015——2016 学年第 2 学期）

一、 （4×5=20 分）填空题

1、$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n})=$__$\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln 2$_。

2、设 $M=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)\mathrm{d}x$，$N=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\cos x)\mathrm{d}x$，请确定 M，N，$\mathbf{1}$ 三者间的大小关系______$M<1<N$___。

$$0<x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow x>\sin x\Rightarrow \sin x>\sin(\sin x),\cos x<\cos(\sin x),$$

$$\therefore 1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)dx=M,$$

$$1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\cos x)dx=N,$$

$$\therefore M<1<N.$$

3、$n\in Z^+$，$\int_0^{\pi}\frac{\sin 2nx}{\sin x}\mathrm{d}x=$________0________。

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin 2nx}{\sin x}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2n\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}d\left(\frac{\pi}{2}+t\right)$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pm\sin 2nt}{\cos t}dt=0(\text{被积函数为奇函数}).$$

另解：$\int_0^{\pi}\frac{\sin 2nx}{\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2nx}{\sin x}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin 2nx}{\sin x}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2nx}{\sin x}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin 2n(\pi-t)}{\sin(\pi-t)}d(\pi-t)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2nx}{\sin x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin 2nt}{\sin t}dt=0.$$

4、设 $w=u^2+uv+v^2,u=x^2,v=2x+1$，$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=$____$4x^3+6x^2+10x+4$__。

5、设 $f(x)=\int_0^x \cos(x-t)^2\,\mathrm{d}t$， $f'(x)=$__ $\cos x^2$ ____。

二、　（5×4=20 分）计算题

1、$\int_0^{2\pi}\frac{x\sin^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x$

解：$\int_0^{2\pi}\frac{x\sin^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{x\sin^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{x\sin^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x$

$=\int_0^{\pi}\frac{x\sin^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\frac{(\pi+x)\sin^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x=2\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x$

$=2\pi[\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x+\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\sin^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x]$

$=2\pi[\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x+\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x]=\pi^2$

2、$\int_3^{+\infty}\frac{1}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}\mathrm{d}x$

解：$\int_3^{+\infty}\frac{1}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}\mathrm{d}x=\int_3^{+\infty}\frac{1}{(x-1)^4\sqrt{(x-1)^2-1}}\mathrm{d}x$

$=-\int_3^{+\infty}\frac{1}{(x-1)^3\sqrt{1-(\frac{1}{x-1})^2}}\mathrm{d}\frac{1}{x-1}=\int_0^{1/2}\frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{1/4}\frac{x}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}[-\int_0^{1/4}\sqrt{1-x}\mathrm{d}x+\int_0^{1/4}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x]=\frac{2}{3}-\frac{3}{8}\sqrt{3}$

也可以使用三角函数代换。

3、$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}(1+\frac{1}{xy})^{\frac{x^2}{x+y}}\ (a\neq 0)$

解：$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}(1+\frac{1}{xy})^{\frac{x^2}{x+y}}=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left[(1+\frac{1}{xy})^{xy}\right]^{\frac{x}{y(x+y)}}$

$=e^{1/a}$ 。

4、若 $z=f(x+y,xy)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+yf_2';$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(f_1'+yf_2'\right)=\frac{\partial f_1'}{\partial y}+f_2'+y\frac{\partial f_2'}{\partial y}$$
$$=\left(f_{11}''+xf_{12}''\right)+f_2'+y\left(f_{21}''+xf_{22}''\right)$$
$$=f_{11}''+xf_{12}''+yf_{21}''+xyf_{22}''+f_2'.$$

注意：$f_1'=f_1'\left(x+y,xy\right),f_2'=f_2'\left(x+y,xy\right)$是复合函数。

三、　（12 分）计算曲线 $y=\int_0^{\frac{x}{n}} n\sqrt{\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$ 的弧长 $(0\le x\le n\pi)$。

解：$y'(x)=\sqrt{\sin\dfrac{x}{n}}$，

$$s=\int_0^{n\pi}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{n\pi}\sqrt{1+\sin\frac{x}{n}}\,\mathrm{d}x=n\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin t}\,\mathrm{d}t=n\int_0^{\pi}(\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2})\mathrm{d}t=4n。$$

四、　（12 分）证明由方程 $f(x-az,y-bz)=0$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$

满足方程 $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$，其中 a,b 为常数。

证：$f_1'(1-a\dfrac{\partial z}{\partial x})+f_2'(-b\dfrac{\partial z}{\partial x})=0\Rightarrow\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{f_1'}{af_1'+bf_2'}$，

$f_1'(-a\dfrac{\partial z}{\partial y})+f_2'(1-b\dfrac{\partial z}{\partial y})=0\Rightarrow\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{f_2'}{af_1'+bf_2'}$，

故 $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=a\dfrac{f_1'}{af_1'+bf_2'}+b\dfrac{f_2'}{af_1'+bf_2'}=1$。

五、　（12 分）设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2},(x,y)\ne(0,0)\\0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$，（1）求 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$；

（2）判断 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的可微性，若可微则求 $df|_{(0,0)}$。

解：(1)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases}\dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}-\dfrac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2},(x,y)\neq(0,0)\\ 0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$，根据对称性可知

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\begin{cases}\dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}-\dfrac{2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2},(x,y)\neq(0,0)\\ 0,(x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

(2) $|\frac{\partial f}{\partial x}|=|\frac{2xy^2}{x^2+y^2}-\frac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}|\leq 4|x|$，$|\frac{\partial f}{\partial y}|=|\frac{2x^2y}{x^2+y^2}-\frac{2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}|\leq 4|y|$，

可知一阶偏导在(0,0)处连续，从而$f(x,y)$在点$(0,0)$处的可微性。

$$df\big|_{(0,0)}=\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(0,0)}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(0,0)}\mathrm{d}y=0。$$

六、 （12 分）设$z(x,y)=x^3+y^3-3xy$，$D=\{(x,y)\,|\,0\leq x\leq 2,-2\leq y\leq 2\}$。

证明：函数$z(x,y)$在D内的极值点不是最值点。

证明：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=3y^2-3x=0\end{cases}$$，求得D中驻点$(1,1)$。

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x,\ B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-3, C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y，$$

在(1,1)处，$AC-B^2>0$，是极小值点，极小值为$z(1,1)=-1$。

注意到$z(0,\text{-}2)=\text{-}8<z(1,1)$，故(1,1)不是最值点。

七、 （12 分）设函数$f(x)$在$[0,\pi]$上连续，且满足：$\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x=0$，$\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$。证明：在$(0,\pi)$内$f(x)$至少存在两个零点。

证明：（1）若$f(x)\equiv 0$，结论显然成立。

（2）若$f(x)$在$(0,\pi)$内不恒为 0 且不变号，不妨假设存在一点x_0使得

$f(x_0)>0$。由连续性可知存在$U(x_0)\subset(0,\pi)$，使得$\forall x\in U(x_0)\subset(0,\pi)$，有$f(x)>0$。从而有：$\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x\ge\int_{U(x_0)}f(x)\sin x\mathrm{d}x>0$，矛盾。故$f(x)$必在$(0,\pi)$内变号，也即在$(0,\pi)$至少存在一个零点$c$。

（3）若$f(x)$有且仅有一个零点c，可知$f(x)\sin(x-c)$保号，不妨设为$f(x)\sin(x-c)\ge 0$从而有

$0\le\int_0^\pi f(x)\sin(x-c)\mathrm{d}x=\cos c\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x-\sin c\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$矛盾。