Deep Learning Technology and Application

Ge Li

Peking University

Problems for Fully Connected Neural Networks

- Fully Connect Networks
  - With small images, it was computationally feasible to learn features on the entire image.
    - 28x28 images for the MNIST dataset
  - With larger images, learning features that span the entire image is very computationally expensive.
    - With 96x96 images, you would have about 10^4 input units, and assuming you want to learn 100 features, you would have on the order of 10^6 parameters to learn.
    - The feedforward and backpropagation computations would also be about 10^2 times slower, compared to 28x28 images.

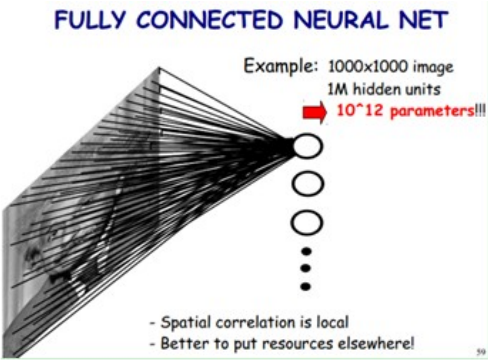
Locally Connected Networks

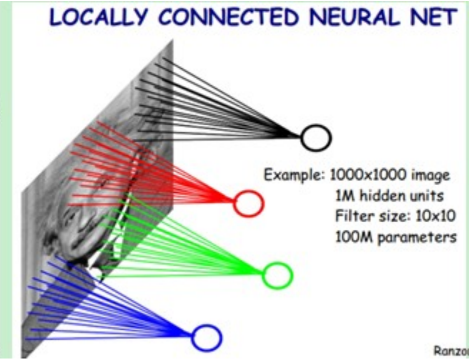
- One simple solution:
  - to restrict the connections between the hidden units and the input units, allowing each hidden unit to connect to only a small subset of the input units.
  - Specifically, **each hidden unit will connect to only a small contiguous region of pixels in the input**.
    - there is often also a natural way to select "contiguous groups" of input units to connect to a single hidden unit as well;
  - This idea of having locally connected networks also draws inspiration from how the early visual system is wired up in biology.
    - Specifically, neurons in the visual cortex have localized receptive fields (i.e., they respond only to stimuli in a certain location).

Locally Connected Networks

- Natural images have the property of being "**stationary**"
  - meaning that the statistics of one part of the image are the same as any other part.
- So, **the features that we learn at one part of the image can also be applied to other parts of the image**, and we can use the same features at all locations.
  - More precisely, having learned features over small (say 8x8) patches sampled randomly from the larger image, we can then apply this learned 8x8 feature detector anywhere in the image.
  - Specifically, we can take the learned 8x8 features and **convolve** them with the larger image, thus obtaining a different feature activation value at each location in the image.

Locally Connected Networks



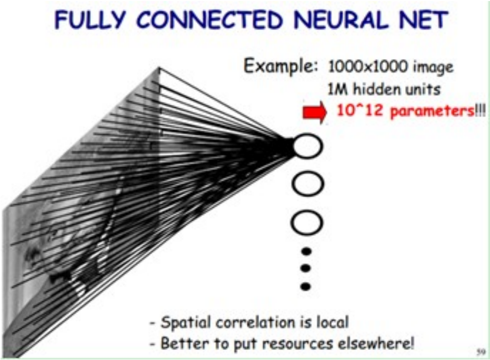


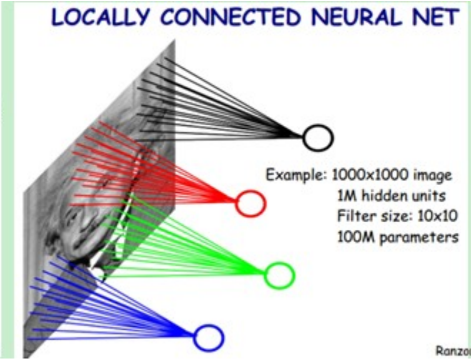
Suppose there are 1M hidden units:

Left: $1000 \times 1000 \times 1M = 10^{12}$

Right: $10 \times 10 \times 1M = 10^{8}$

Weights Sharing





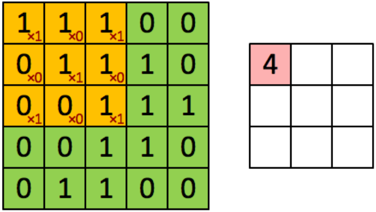
Suppose there are 1M hidden units:

Left: $1000 \times 1000 \times 1M = 10^{12}$

Right: $10 \times 10 \times 1 = 10^{2}$

Convolutions

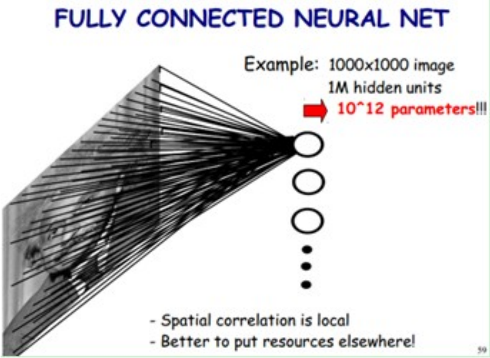
- Suppose you want to learned 9 features from a 5x5 image.
  - With Fully Connected Neural Networks:
    $$5 \times 5 \times 9 = 225$$
  - With Locally Connected Neural Networks:
    $$3 \times 3 \times 9 = 81$$
  - With Weights Sharing:
    $$3 \times 3 \times 1 = 9$$

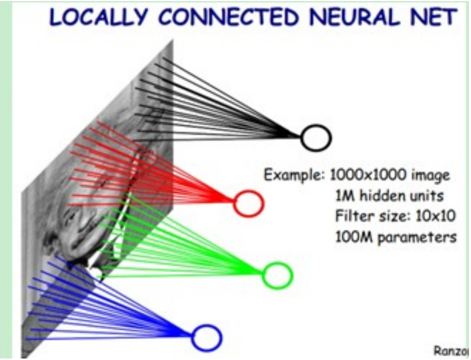


Image

Convolved Feature

Is 1 Hidden Unit Enough ? No !



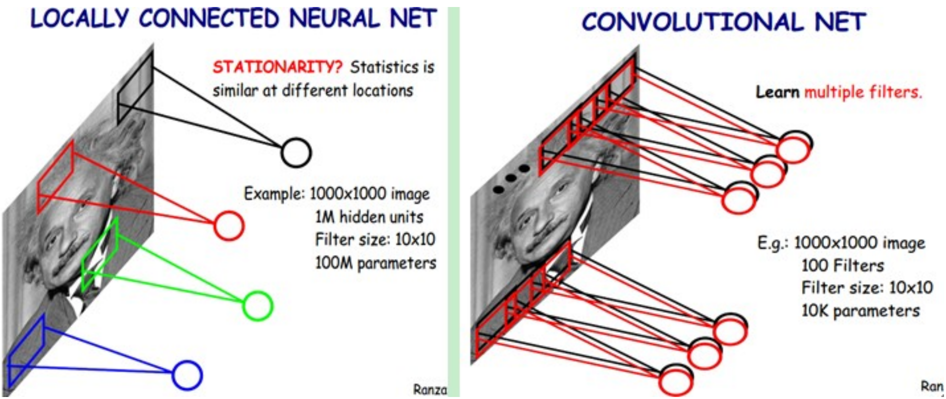


Suppose there are 1M hidden units:

Left: $1000 \times 1000 \times 1M = 10^{12}$

Right: $10 \times 10 \times 1 = 10^{2}$

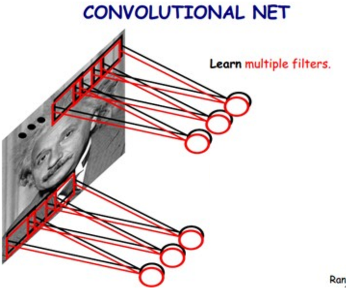
Multiple Kernels Convolution

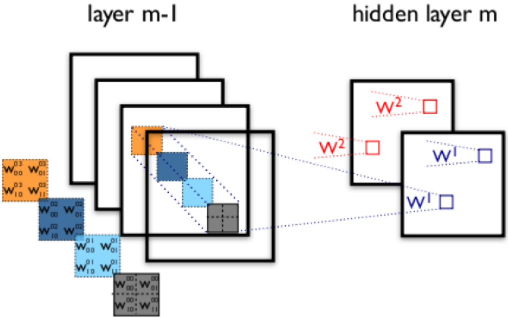


Left: $10\times10\times1M$(特征数) $=10^8$ Right: $10\times10\times100$（特征数） $=10^4$

Multiple Kernels Convolution

- 对于一张100×100的图片
  - One Kernel: $10\times10\times100 = 10^4$　　4 Kernels: $10^4\times4$
  - 2nd-Convolution: $2\times2\times4\times2 = 32$





Pooling

- If we use all the extracted features with a classifier, this can be computationally challenging.
  - images of size 96x96 pixels;
  - suppose we want to learn 400 features over 8x8 inputs;

  Then we have to compute

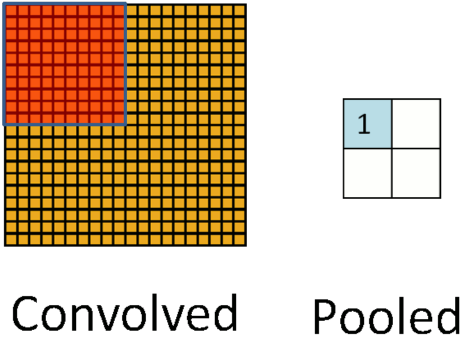
  $$(96-8+1)*(96-8+1) \ *400=3{,}168{,}400 \text{ features}$$

  Learning a classifier with inputs having 3+ million features can be unwieldy, and can also be prone to over-fitting.

- Pooling: to describe a large image, we can aggregate statistics of these features at various locations.

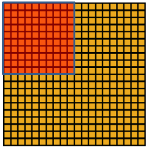
Pooling

- Subsampling: “mean pooling” or “max pooling”
  - one could compute the mean (or max) value of a particular feature over a region of the image.
  - These summary statistics are much lower in dimension and can also improve results (less over-fitting).

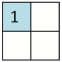


Convolutional Neural Networks

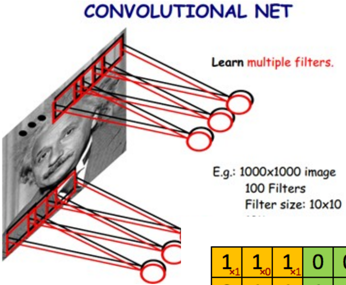
- Composed of
  - Convolution Layers
  - Pooling Layers

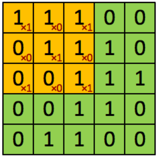


Convolved feature

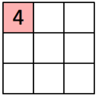


Pooled feature





Image



Convolved Feature

Table of contents

卷积神经网络

卷积函数

卷积函数，是关于两个函数的函数设存在原始函数为：$f(x)$；
设存在对原始函数的输出进行权重修正的函数：$w(t-x)$；则：

$$s(t) = \int_0^t f(x)w(t-x)dx$$

该卷积操作通常表示为：

$$s(t) = (f * w)(t)$$

其中：

- $w(t-x)$ 表示对"$f(x)$ 在 x 点的值"进行加权的权值；
- 它是 t 的函数，t 是与 x 同一维度的自变量，$t-x$ 表示当前 t 点对 x 点的距离；
- 也就是说，$w(t-x)$ 是一个随"t 点对 x 点的距离"而变化的函数；

卷积运算

一个来自知乎的例子：每隔一年存入 100 元，年利率 5%：

本金	第一年	第二年	第三年	第四年	第五年
+100	$100\times(1.05)^1$	$100\times(1.05)^2$	$100\times(1.05)^3$	$100\times(1.05)^4$	$100\times(1.05)^5$
	+100	$100\times(1.05)^1$	$100\times(1.05)^2$	$100\times(1.05)^3$	$100\times(1.05)^4$
		+100	$100\times(1.05)^1$	$100\times(1.05)^2$	$100\times(1.05)^3$
			+100	$100\times(1.05)^1$	$100\times(1.05)^2$
				+100	$100\times(1.05)^1$
					+100

设存钱函数为：$f(\tau)(0 \le \tau \le t)$

设复利计算公式为：$g(t-\tau) = (1+5\%)^{(t-\tau)}$

则最终得到的钱数，即卷积值为：

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)(1+5\%)^{t-\tau}d\tau$$

卷积函数

在离散的情况下，可以把卷积函数写成：

$$s(t) = (f * w)(t) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} f(x)w(t-x)$$

在 x 为多维数据的情况下，如对于二维数据（灰度图像），可以将上式重写为：

$$S(i,j) = (I * K)(i,j) = \sum_{m}\sum_{n} I(m,n)K(i-m,j-n)$$

其中：

- 函数 I 表示输入，$I(m,n)$ 为图像在 (m,n) 点的灰度值;
- $K(i-m,j-n)$ 表示对"图像在 (m,n) 点的灰度值 $I(m,n)$"的加权值；
- $i-m$（或 $j-n$）表示 i 点到 m 点（或 j 点到 n 点）的距离；
- 加权值 $K(i-m,j-n)$ 是"i 点到 m 点（或 j 点到 n 点）的距离"的函数；

卷积函数

对公式：

$$S(i,j) = (I * K)(i,j) = \sum_m \sum_n I(m,n)K(i-m,j-n)$$

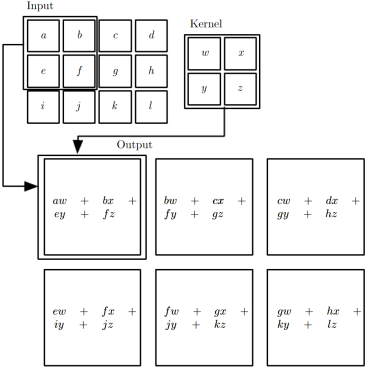
进行近似等价重写，得到 Cross-Correlation（互相关）公式：

$$S(i,j) = (I * K)(i,j) = \sum_m \sum_n I(i+m,j+n)K(m,n)$$

这就是我们常见的“卷积”公式！其中：

- $I(i+m,j+n)$ 表示以 (i,j) 为起点，以 (m,n) 为宽度和高度的输入区域的灰度值矩阵；
- $K(m,n)$ 表示宽度为 m，高度为 n 的卷积核（$m \times n$ 的矩阵）；
- $S(i,j)$ 表示“以 (i,j) 为起点，宽度为 m，高度为 n 的灰度值矩阵”经过卷积核 K 进行卷积计算的值；
- S 的大小由 (i,j) 的最大值确定，也可以说，由输入区域 I 和卷积核 K 共同决定；

卷积运算



$$S(i,j) = (I*K)(i,j) = \sum_m \sum_n I(i+m, j+n)K(m,n)$$

$$S(0,0) = (I*K)(0,0) = \sum_m \sum_n I(0+m, 0+n)K(m,n)$$

$$S(1,0) = (I*K)(1,0) = \sum_m \sum_n I(1+m, 0+n)K(m,n)$$

$$S(2,0) = (I*K)(2,0) = \sum_m \sum_n I(2+m, 0+n)K(m,n)$$

$$S(0,1) = (I*K)(0,1) = \sum_m \sum_n I(0+m, 1+n)K(m,n)$$

$$S(1,1) = (I*K)(1,1) = \sum_m \sum_n I(1+m, 1+n)K(m,n)$$

$$S(2,1) = (I*K)(2,1) = \sum_m \sum_n I(2+m, 1+n)K(m,n)$$

卷积运算

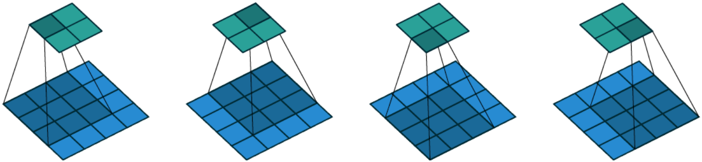


Figure 2.1: (No padding, no strides) Convolving a 3×3 kernel over a 4×4 input using unit strides (i.e., $i = 4$, $k = 3$, $s = 1$ and $p = 0$).

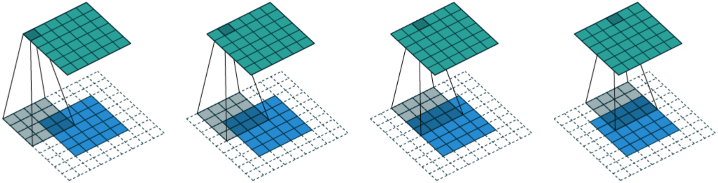


Figure 2.2: (Arbitrary padding, no strides) Convolving a 4×4 kernel over a 5×5 input padded with a 2×2 border of zeros using unit strides (i.e., $i = 5$, $k = 4$, $s = 1$ and $p = 2$).

卷积运算

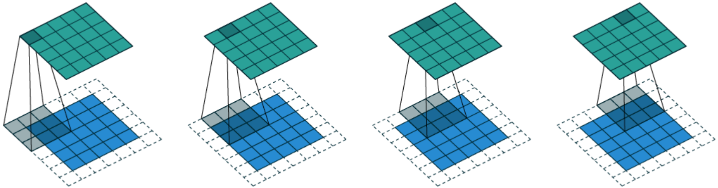


Figure 2.3: (Half padding, no strides) Convolving a 3×3 kernel over a 5×5 input using half padding and unit strides (i.e., $i = 5$, $k = 3$, $s = 1$ and $p = 1$).

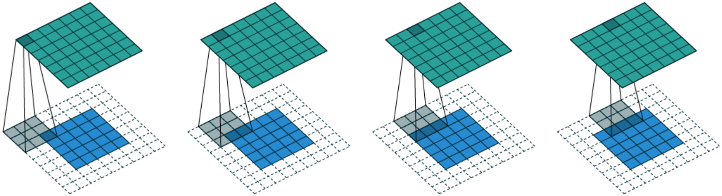
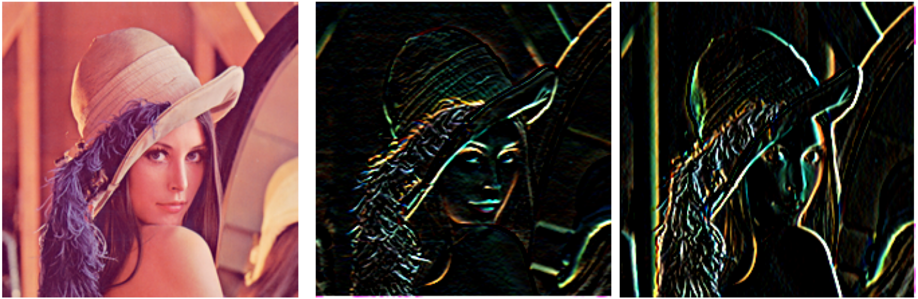


Figure 2.4: (Full padding, no strides) Convolving a 3×3 kernel over a 5×5 input using full padding and unit strides (i.e., $i = 5$, $k = 3$, $s = 1$ and $p = 2$).

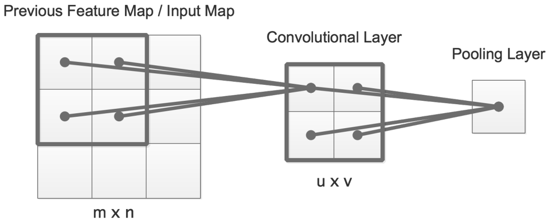
卷积运算的物理含义

$$K_{horizontal\_high\_magnitude} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$



(a) Lenna (b) Horizontal edge (c) Vertical edge

卷积层的前向计算



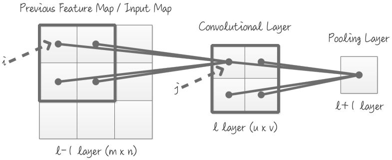
$$S(i,j) = (I * K)(i,j) = \sum_m \sum_n I(i+m, j+n) K(m,n)$$

可以写成：

$$z_{(u,v)}^{(l)} = \sum_{(m,n) \in M_{(u,v)}} a_{(m,n)}^{(l-1)} * k_{(u,v)(m,n)}^{(l)} + b_{(u,v)}^{(l)}$$

$$a_{(u,v)}^{(l)} = f(z_{(u,v)}^{(l)})$$

卷积层的前向计算



$$z^{(l)}_{(u,v)} = \sum_{(m,n)\in M_{(u,v)}} a^{(l-1)}_{(m,n)} * k^{(l)}_{(u,v)(m,n)} + b^{(l)}_{(u,v)}$$

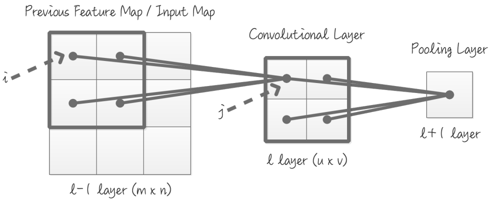
$$a^{(l)}_{(u,v)} = f(z^{(l)}_{(u,v)})$$

对上式进行简化：

$$z^{(l)}_j = \sum_{i\in M_j} a^{(l-1)}_i * k^{(l)}_{ji} + b^{(l)}_j \qquad a^{(l)}_j = f(z^{(l)}_j)$$

上式中 $i \in M_j$ 表示：i 在与卷积层节点 j 所对应的输入窗口 M_j 中；

Pooling 层的前向计算



$$z_k^{(l+1)} = \beta_k^{(l+1)} down_{j \in M_k}(a_j^{(l)}) + b_k^{(l+1)} \qquad a_k^{(l+1)} = f_{pooling}(z_k^{(l+1)})$$

其中：

- $down(\cdot)$ 为下采样函数，$j \in M_k$ 表示：j 在与 Pooling 层节点 k 所对应的卷积层的窗口 M_k 中；
- 常见的下采样函数如：取平均（Mean Pooling）或取最大值（Max Pooling）;
- 常数参数 $\beta_k^{(l+1)}$ 可以取 1；偏置参数 $b_k^{(l+1)}$ 可以取 0；

卷积网络的权重计算

$$
\begin{aligned}
w_{ji}^{(l)} &= w_{ji}^{(l)} - \alpha \frac{\partial J(W,b)}{\partial w_{ji}^{(l)}} = w_{ji}^{(l)} - \alpha \delta_j^{(l)} a_i^{(l-1)} \\
&= w_{ji}^{(l)} - \alpha \left(\sum_{k=1}^{n_{l+1}} \delta_k^{(l+1)} w_{kj}^{(l+1)} f'(z_j^{(l)}) \right) a_i^{(l-1)}
\end{aligned}
$$

对照上式，对 $k_{ji}^{(l)}$ 进行求解：首先，在不考虑权值共享的前提下：

$$
\begin{aligned}
k_{ji}^{(l)} &= k_{ji}^{(l)} - \alpha \frac{\partial J(W,b)}{\partial k_{ji}^{(l)}} = k_{ji}^{(l)} - \alpha \frac{\partial J(W,b)}{\partial z_j^{(l)}} \frac{\partial z_j^{(l)}}{\partial k_{ji}^{(l)}} \\
&= k_{ji}^{(l)} - \alpha \frac{\partial J(W,b)}{\partial z_j^{(l)}} a_i^{(l-1)} = k_{ji}^{(l)} - \alpha \delta_j^{(l)} a_i^{(l-1)}
\end{aligned}
$$

接下来，关键看 $\delta_j^{(l)}$ 怎么计算；

情况一：当前层之后为 Pooling 层

对照以前的推导方法：因为 $z_k^{(l+1)} = \sum_{j=1}^{n_{l+1}} w_{kj}^{(l+1)} a_j^{(l)} + b^{(l+1)}$ 所以可以选择从 $z_k^{(l+1)}$ 开始进行对 $z_j^{(l)}$ 进行求导。但此处$z_k^{(l+1)}$为何物呢？

情况一：假设，当前层之后为 Pooling 层；

则 $z_k^{(l+1)}$ 为 Pooling 层的激活函数的输入值：

$$\delta_j^{(l)} = \frac{\partial J(W,b)}{\partial z_j^{(l)}} = \frac{\partial J(W,b)}{\partial z_k^{(l+1)}} \frac{\partial z_k^{(l+1)}}{\partial a_j^{(l)}} \frac{\partial a_j^{(l)}}{\partial z_j^{(l)}} = \delta_k^{(l+1)} \frac{\partial z_k^{(l+1)}}{\partial a_j^{(l)}} f'(z_j^{(l)})$$

注意，其中：

$$z_k^{(l+1)} = \beta_k^{(l+1)} down_{j \in M_k}(a_j^{(l)}) + b_k^{(l+1)}$$

情况一：当前层之后为 Pooling 层

对上文的公式进行分析：

- $\frac{\partial z_k^{(l+1)}}{\partial a_j^{(l)}}$ 表达了在计算 $z_k^{(l+1)}$ 的过程中 $a_j^{(l)}$（其中 j 为：与 Pooling 层节点 k 所对应的卷积层的窗口 M_k 中的元素）的“贡献程度”;
- 因此，算式 $\frac{\partial z_k^{(l+1)}}{\partial a_j^{(l)}}$ 的计算中，$\beta_k^{(l+1)}$ 可以保留，即：

$$\delta_j^{(l)} = \left(\beta_k^{(l+1)} \delta_k^{(l+1)} f'(z_j^{(l)})\right) \frac{\partial z_k^{(l+1)}}{\partial a_j^{(l)}}$$

- 为保证可计算性和计算效率，可以用一个上采样函数 $up(\cdot)$ 来替代 $\frac{\partial z_k^{(l+1)}}{\partial a_j^{(l)}}$ 实现：根据“与 Pooling 层节点 k 所对应的卷积层的窗口 M_k 中的不同神经元输出的贡献程度”，对如上等式中的已知部分 $\left(\delta_k^{(l+1)} \beta_k^{(l+1)} f'(z_j^{(l)})\right)$ 进行分配；

情况一：当前层之后为 Pooling 层

上采样函数 $up(\cdot)$ 的选取：

- 若 Pooling 层的下采样函数采用 Mean Pooling，则该上采样函数可以取：

$$up(x) \equiv \frac{x \otimes 1_{n \times n}}{n \times n}$$

  其中，$\otimes$ 为 Kronecker 乘积。

- 若 Pooling 层的下采样函数采用 Max Pooling，则该上采样函数可以通过记录 Max 值的来源位置，来实现；
- 在计算过程中，要保持"分配后的各个 $\delta_j^{(l)}$ 的和"与"Pooling 层已算得的 $\delta_k^{(l+1)}$"相等。

情况一：当前层之后为 Pooling 层

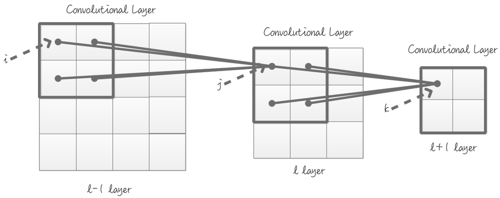
1	3
2	4

1	1	3	3
1	1	3	3
2	2	4	4
2	2	4	4

0.25	0.25	0.75	0.75
0.25	0.25	0.75	0.75
0.5	0.5	1	1
0.5	0.5	1	1

0	0	0	3
0	1	0	0
0	0	0	0
0	2	0	4

情况二：当前层之后为卷积层



情况二：假设当前层之后为卷积层；

则，$z_k^{(l+1)}$ 为下一卷积层激活函数的输入值：

$$\delta_j^{(l)} = \frac{\partial J(W,b)}{\partial z_j^{(l)}} = \sum_K \sum_{k \in C_k \in K} \frac{\partial J(W,b)}{\partial z_k^{(l+1)}} \frac{\partial z_k^{(l+1)}}{\partial a_j^{(l)}} \frac{\partial a_j^{(l)}}{\partial z_j^{(l)}}$$

$$= \sum_K \sum_{k \in C_k \in K} \delta_k^{(l+1)} k_{kj}^{(l+1)} f'(z_j^{(l)})$$

其中：C_k 为卷积运算中包含 $z_j^{(l)}$ 的 $l+1$ 层中的神经元的集合；K 为卷积核的数量；

卷积网络的权重计算

1	3
2	2

0	0	0	0
0	1	3	0
0	2	2	0
0	0	0	0

0.1	0.2
0.2	0.4

0.1	0.2	0.3	0.6
0.2	0.4	0.6	1.2
0.2	0.4	0.2	0.4
0.4	0.8	0.4	0.8

0.1	0.5	0.6
0.4	1.6	1.6
0.4	1.2	0.8

-0.5	0.4	0.7
0.3	1.9	1.9
0.5	1.5	1.0

2	1
1	1

0	0	0	0
0	2	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

-0.3	0.1
0.1	0.2

-0.6	0.2	-0.3	0.1
0.2	0.4	0.1	0.2
-0.3	0.1	-0.3	0.1
0.1	0.2	0.1	0.2

-0.6	-0.1	0.1
-0.1	0.3	0.3
0.1	0.3	0.2

CNN示例：LeNet-5

CNN前向传播

■ Forward Propagation

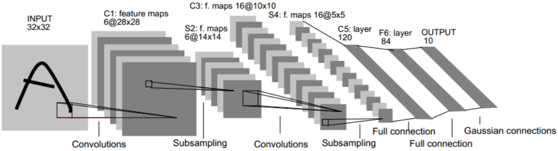
- ◆ ℓ 表示当前层，x^{ℓ}表示当前层输出， b^{ℓ}当前层偏置

$$\mathbf{x}^{\ell} = f(\mathbf{u}^{\ell}), \quad \text{with} \quad \mathbf{u}^{\ell} = \mathbf{W}^{\ell}\mathbf{x}^{\ell-1} + \mathbf{b}^{\ell}$$

$$f(x) = (1 + e^{-\beta x})^{-1}$$

或

$$f(x) = a\tanh(bx)$$



CNN前向传播

- 代价函数E
  - 以 平方误差 代价函数 为例

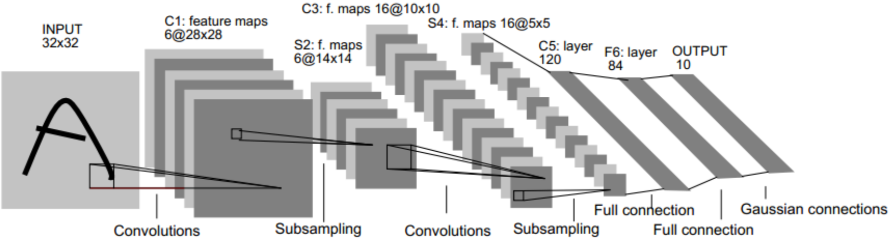
$$E^N = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{c}(t_k^n - y_k^n)^2$$

  - t_k^n 第n个训练样本 对应的 输出层第K个神经元上的样本标签
  - y_k^n 第n个训练样本 对应的 输出层第K个神经元上的实际输出
- 单个样本的代价函数：

$$E^n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{c}(t_k^n - y_k^n)^2 = \frac{1}{2}\|\mathbf{t}^n - \mathbf{y}^n\|_2^2.$$

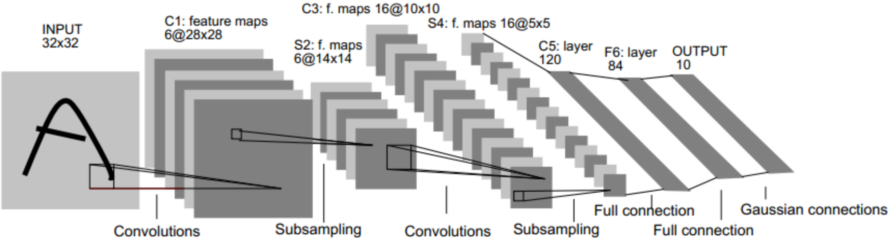
LeNet-5

- C1层是一个卷积层
  - 6个特征图，每个特征图中的每个神经元与输入中5*5的邻域相连，特征图大小为28*28，
  - 每个卷积神经元的参数数目：5*5=25个unit参数和一个bias参数，
  - 连接数目：(5*5+1)*6*(28*28)=122,304个连接
  - 参数共享：每个特征图内共享参数，因此参数总数：共(5*5+1)*6=156个参数



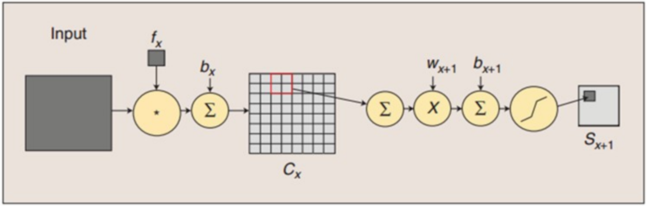
LeNet-5

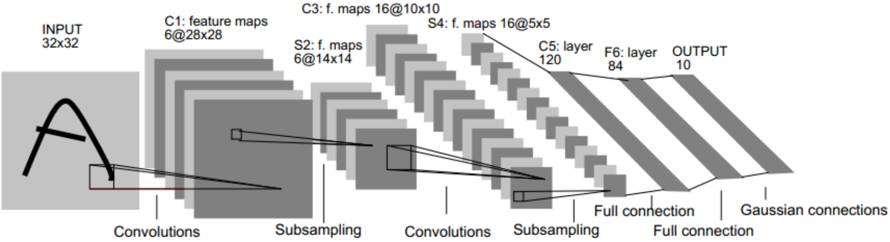
- S2层是一个下采样层
  - 6个14*14的特征图，每个图中的每个单元与C1特征图中的一个2*2邻域相连接，不重叠。因此，S2中每个特征图的大小是C1中特征图大小的1/4.
  - S2层每个单元的4个输入相加，乘以一个可训练参数w，再加上一个可训练偏置b，结果通过sigmoid函数计算。
  - 连接数：（2*2+1）*1*14*14*6 = 5880个
  - 参数共享：每个特征图内共享参数，因此有(2*2+1)*6=30个可训练参数



LeNet-5

- LeCun的表示法

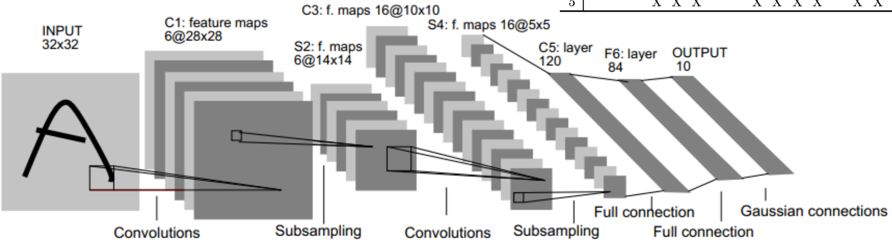




LeNet-5

- C3层是一个卷积层
  - 16个卷积核，得到16张特征图，特征图大小为10*10；
  - 每个特征图中的每个神经元与S2中某几层的多个5*5的邻域相连；

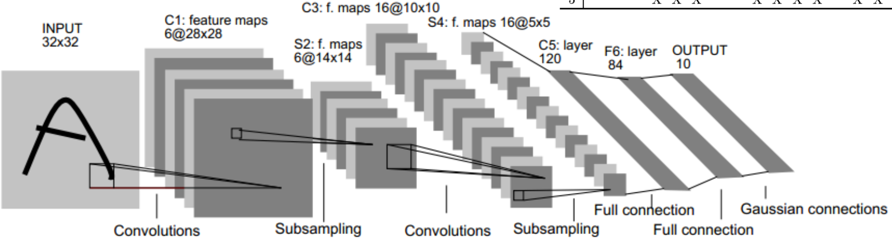
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	X				X	X	X			X	X	X	X		X	X
1	X	X				X	X	X			X	X	X	X		X
2	X	X	X				X	X	X			X		X	X	X
3		X	X	X			X	X	X	X			X		X	X
4			X	X	X			X	X	X	X		X	X		X
5				X	X	X			X	X	X	X		X	X	X



LeNet-5

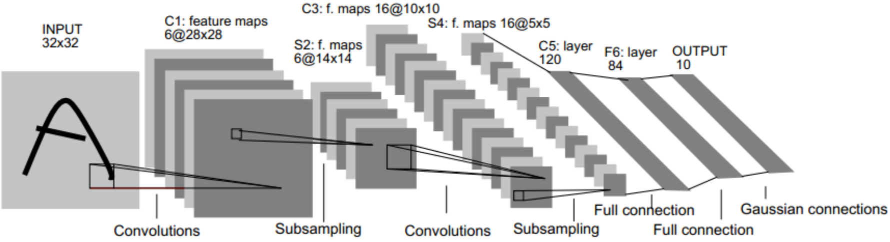
- C3层是一个卷积层
  - 16个卷积核，得到16张特征图，特征图大小为10*10；
  - 每个特征图中的每个神经元与S2中某几层的多个5*5的邻域相连；
    - 例如，对于C3层第0张特征图，其每一个节点与S2层的第0张特征图，第1张特征图，第2张特征图，总共3个5x5个节点相连接。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	X				X	X	X			X	X	X	X		X	X
1	X	X				X	X	X			X	X	X	X		X
2	X	X	X				X	X	X			X		X	X	X
3		X	X	X			X	X	X	X			X		X	X
4			X	X	X			X	X	X	X		X	X		X
5				X	X	X			X	X	X	X		X	X	X



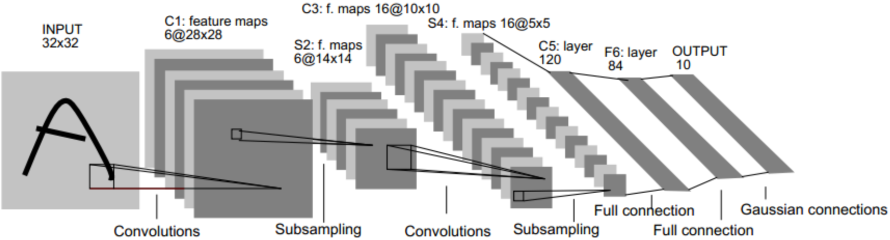
LeNet-5

- S4层是一个下采样层
  - 由16个5*5大小的特征图构成，特征图中的每个单元与C3中相应特征图的2*2邻域相连接；
  - 连接数：（2*2+1）*5*5*16=2000个
  - 参数共享：特征图内共享参数，每张特征图中的每个神经元需要1个因子和一个偏置，因此有 2*16个可训练参数



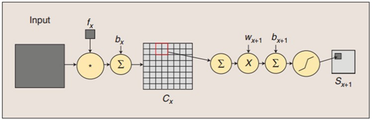
LeNet-5

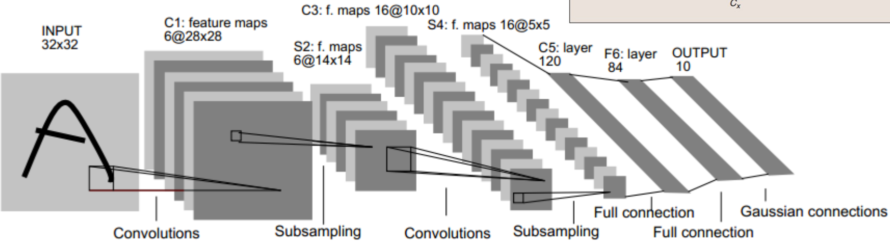
- C5层
  - 120个神经元，可以看作120个特征图，每张特征图的大小为1*1
  - 每个单元与S4层的全部16个单元的5*5邻域相连（S4和C5之间的全连接）
  - 连接数=可训练参数：（5*5*16+1）*120=48120个



LeNet-5

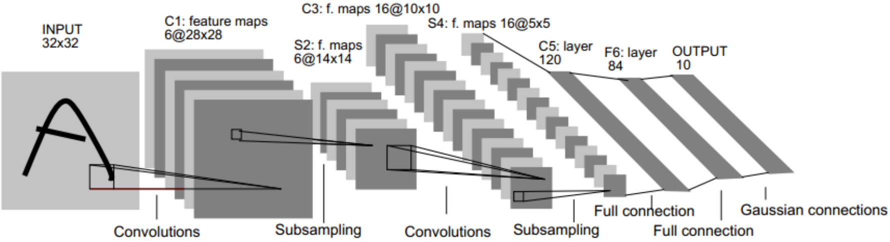
- F6层
  - 有84个单元（之所以选这个数字的原因来自于输出层的设计），与C5层全相连。
  - F6层计算输入向量和权重向量之间的点积，再加上一个偏置。
  - 连接数=可训练参数：（120+1）*84=10164
  - 84：stylized image：7*12





LeNet-5

- 输出层采用欧式径向基函数（Euclidean Radial Basis Function）单元
  - 给定一个输入模式，损失函数应能使得F6的配置与RBF参数向量（即模式的期望分类）足够接近。
  - 每类一个单元，每个单元连接84个输入；每个输出RBF单元计算输入向量和参数向量之间的欧式距离。
  - RBF输出可以被理解为F6层配置空间的高斯分布的【-log-likelihood】



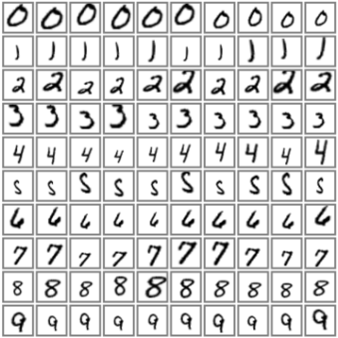
Results

- 人眼辨识的错误率约为：5.1%
- 2010年Alex Krizhevsky的CNN，错误率为15.3%
- 2012年微软研究团队，错误率已降低至4.94%
- 2015年Google团队，错误率降至：4.82%
- 2016年微软团队，图像分类错误率降低至3.57%；

LeNet-5 on MNIST

60,000 original datasets

Test error: 0.95%



540,000 artificial distortions

+ 60,000 original

Test error: 0.8%

错误识别分析


4->6 3->5 8->2 2->1 5->3 4->8 2->8 3->5 6->5 7->3
9->4 8->0 7->8 5->3 8->7 0->6 3->7 2->7 8->3 9->4
8->2 5->3 4->8 3->9 6->0 9->8 4->9 6->1 9->4 9->1
9->4 2->0 6->1 3->5 3->2 9->5 6->0 6->0 6->0 6->8
4->6 7->3 9->4 4->6 2->7 9->7 4->3 9->4 9->4 9->4
8->7 4->2 8->4 3->5 8->4 6->5 8->5 3->8 3->8 9->8
1->5 9->8 6->3 0->2 6->5 9->5 0->7 1->6 4->9 2->1
2->8 8->5 4->9 7->2 7->2 6->5 9->7 6->1 5->6 5->0
4->9 2->8

Thanks.