

Exercice 1

Approche en mécanique classique

- ♣ Dans un volume $a\Sigma$, on a une charge $+e$ et une charge $-e$, comme celle-ci sont réparties uniformément. Les densités de charges sont donc respectivement $\rho_+ = e/(a\Sigma)$ et $\rho_- = -e/(a\Sigma)$.
- ♣ Par définition, $\vec{j} = \rho\vec{v}$. Comme seuls les électrons ont une vitesse non nulle, $\vec{j} = -v'\rho_- = -ev'/(a\Sigma)$. Et donc $I = \oint_{\Sigma} d\vec{S}\vec{j} = -ev'/a$.
- ♣ $\rho_{tot} = \rho_+ + \rho_- = 0$ donc $\vec{E} = 0$.
- ♣ Avec le théorème d'Ampère appliqué uniquement en dehors du fil, on trouve :

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

(le signe - provient du fait que le sens du courant est opposé à celui des électrons) La force qui s'exerce sur la charge q est donc :

$$\vec{F} = -\frac{qv\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_r$$

Approche en mécanique relativiste

- ♣ Ainsi, en se déplaçant à la vitesse \vec{v} , la charge $+q$ voit dans son référentiel la distance entre atomes réduite d'un facteur $\gamma_+ = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ et la distance entre électrons de conduction d'un facteur $\gamma_- = 1/\sqrt{1-(v-v')^2/c^2}$. On trouve donc que :

$$\rho_+ = \frac{e}{a\Sigma} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\rho_- = \frac{e}{a\Sigma} \frac{1}{\sqrt{1-(v-v')^2/c^2}}$$

Attention, l'hypothèse que la vitesse relative des électrons par rapport à la charge q est $v' - v$ est une approximation. En mécanique relativiste, la vitesse relative serait :

$$v_{e-/q} = \frac{v' - v}{1 - \frac{vv'}{c^2}} \quad (1)$$

- ♣ On trouve facilement avec le théorème de Gauss que :

$$\vec{E} = \frac{\Sigma(\rho_+ + \rho_-)}{2\pi r\epsilon} \vec{e}_r$$

- ♣ En développant à l'ordre 2, on trouve :

$$\rho_+ + \rho_- \approx \frac{e}{a\Sigma} \frac{vv'}{c^2}$$

On trouve alors que :

$$\vec{E} = -\frac{I\mu_0 v}{2\pi r} \vec{e}_r$$

La force de Lorentz associée est donc :

$$\vec{F} = -\frac{qI\mu_0 v}{2\pi r} \vec{e}_r$$

Cette expression est identique à celle trouvée par le calcul du champ magnétique en mécanique classique. Le champ magnétique est-il une approximation à l'ordre 2 de la force de Coulomb ?

Exercice 3

- ♠ On raisonne sur un ensemble d'électrons. On considère les événements ayant eu lieu à partir de $t = 0$. Il faut calculer d'abord le nombre d'électrons ayant subi une collision entre t et $t + dt$. Ce nombre est $N(t) - N(t + dt) = N(t)/\tau$. On a donc $N(t) = N_0 \exp(-t/\tau)$. Pour un électron donné, la probabilité de ne pas subir de collision est donc $P(t) = N(t)/N_0$.
- ♠ Soit N_0 le nombre total d'électrons. Entre t et $t + dt$, il y a eu $dt N_0/\tau$ qui ont subi une collision. La quantité de mouvement de tous ces électrons est donc perdue. D'autre part, entre t et $t + dt$ chaque électron est soumis à la force $\vec{F}(t)$, faisant changer la quantité de mouvement totale de $N_0 \vec{F}(t) dt$. Finalement, il vient :

$$\vec{P}(t + dt) = \vec{P}(t) - \frac{dt}{\tau} \vec{P}(t) + N_0 \vec{F} dt \quad (2)$$

- ♠ On en déduit la vitesse moyenne d'un électron, définie par $\vec{v}(t) = \vec{P}/(mN_0)$:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{v}}{\gamma} + \vec{F}(t)$$

où $\gamma = m/\tau$.

- ♠ La force subie par les électrons est la force de Lorentz : $\vec{F} = -eE_0 \exp(-i\omega t)$. L'équation précédente devient :

$$-i\omega \vec{v} = -\frac{e}{m} \vec{E}_0 - \frac{\vec{v}}{\tau}$$

On en déduit :

$$\vec{v} = \frac{e\tau}{m} \frac{E_0}{i\omega\tau - 1}$$

En introduisant la conductivité γ , $\vec{j} = \gamma \vec{E}$, où $\vec{j} = -ne\vec{v}$, on trouve :

$$\gamma(\omega) = \frac{ne^2\tau}{m} \frac{1}{1 - i\omega\tau}$$

- ♠ Dans un métal, qui est un réseau cristallin, il y a typiquement un électron tous les Angstrom, soit tous les 10^{-10} m. On obtient des densités typiques de 10^{30} atomes par m^3 .
- ♠ La résistivité statique correspond à une fréquence qui tend vers 0, cad :

$$\rho = \frac{1}{\gamma} = \frac{m}{ne^2\tau}$$

On trouve donc $\tau \simeq 10^{-14}$ s.

Exercice 4

- ♡ Résistance classique d'un cylindre : $R = L/(\gamma\pi a^2)$.
- ♡ Isolons le câble arrivant en A . Par symétrie, le courant partira dans tous les directions. La densité de courant va s'écrire en un point M :

$$\vec{j}_A = \frac{I}{2\pi e} \frac{\vec{e}_r}{\|A\vec{M}\|}$$

On effectue le même raisonnement pour B . La densité de courant totale est alors :

$$\vec{j} = \frac{I}{2\pi e} \left[\frac{\vec{e}_r}{\|A\vec{M}\|} - \frac{\vec{e}_r}{\|B\vec{M}\|} \right]$$

- ♡ En intégrant la relation $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ le long du chemin AB , dont la coordonnée sera donnée par x , en faisant varier x de a à $d - a$ (pour éviter une divergence de la densité de courant) :

$$\int_a^{d-a} dx j(x) = \frac{I}{2\pi e} \int_a^{d-a} dx \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) = \gamma \int_a^{d-a} dx E = \gamma \int_a^{d-a} dx \frac{dV}{dx}$$

On trouve alors :

$$\Delta V = \frac{I}{\pi e \gamma} \log \left(\frac{d-a}{a} \right)$$

- ♡ En se plaçant en coordonnées sphériques, on a :

$$\vec{j} = \frac{I}{2\pi} \left[\frac{\vec{e}_r}{\|A\vec{M}\|^2} - \frac{\vec{e}_r}{\|B\vec{M}\|^2} \right]$$

Attention, il y a un facteur 2 par rapport à la surface d'une sphère car il s'agit de demi-sphères. On trouve alors :

$$\Delta V = \frac{I}{\pi \gamma} \frac{d}{a(d-a)}$$

Exercice 5

- ◇ Les lignes de champs sont radiales cad $\vec{j} = j(r)\vec{e}_r$. On a donc :

$$\vec{j}(r) = \frac{I}{2\pi r^2} \vec{e}_r$$

On en déduit :

$$dV = -E(r)dr = \frac{-I}{2\pi r^2 \gamma} dr$$

Par intégration, on trouve :

$$V(r) = \frac{I}{2\pi r \gamma}$$

- ◇ Le potentiel de l'hémisphère est donc simplement :

$$U = \frac{I}{2\pi a \gamma}$$

La résistance est donc tout simplement $R = \frac{1}{2\pi a \gamma}$. On trouve qu'elle ne dépasse pas 30Ω si $a > 53\text{cm}$.

- ◇ La tension de pas vaut, si $d = 1\text{m}$:

$$V_p(r) = V(r) - V(r+d) = \frac{I}{2\pi \gamma r(r+d)}$$

On trouve que $V_p(10\text{m}) = 7,2\text{kV}$ et $V_p(100\text{m}) = 79\text{V}$

- ◇ Le courant qui traverse la personne est $i = V_p/R$. On trouve $i(10)=2,9\text{A}$ et $i(100)=32\text{mA}$.

Câble coaxial

♡ Le courant circulant dans l'âme est $I = 2\pi a j_{s,a}$. De même, la charge totale est $Q = 2\pi a l \sigma_a$. On a forcément $I = 2\pi b j_{s,b}$. De même, la charge totale est $Q = 2\pi b l \sigma_b$ par conservation de la charge et du courant.

♡ Les symétries et les invariances donnent $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$. Avec le théorème de Gauss appliqué sur un cylindre de rayon r , on obtient :

$$\begin{cases} r < a & : & \vec{E} = \vec{0} \\ a < r < b & : & \vec{E} = \frac{\sigma_a a}{\varepsilon_0 r} \vec{e}_r \\ r > b & : & \vec{E} = \vec{0} \end{cases}$$

♡ On en déduit le potentiel entre les deux conducteurs :

$$V = \frac{\sigma_a a}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{Q}{2\pi l \varepsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

La capacité par unité de longueur est donc :

$$c = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

♡ Les symétries et les invariances donnent $\vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta$. Avec le théorème de d'Ampère appliqué sur un cercle de rayon r , on obtient :

$$\begin{cases} r < a & : & \vec{B} = \vec{0} \\ a < r < b & : & \vec{B} = \frac{\mu_0 j_{s,a} a}{r} \vec{e}_\theta \\ r > b & : & \vec{B} = \vec{0} \end{cases}$$

♡ Le flux du champ \vec{B} se calcule sur la surface rectangulaire comprises entre a et b , de longueur l avec \vec{e}_θ comme vecteur normal. On trouve alors :

$$\Phi_B = \frac{L\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

On a donc :

$$l = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

♡ On trouve que $l \times c = \varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$. Cela correspond à l'inverse du carré de la vitesse de la lumière, qui est la vitesse de propagation dans le câble coaxial.

Étude d'un colloïde

♡ Le milieu est composé de cations et d'anions à la même densité :

$$\rho = eN_+ - eN_- = -2eN_0 \sinh\left(\frac{eV}{k_B T}\right)$$

Lorsque $eV \ll k_B T$, on a alors :

$$\rho \simeq -2N_0 \frac{eV}{k_B T}$$

♡ Avec les rotations et les symétries, on montre facilement que $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$. On applique le théorème de Gauss sur un volume compris entre r et $r + dr$:

$$-4\pi r^2 E(r) - 4\pi(r + dr)^2 E(r + dr) = \frac{4\pi r^2 dr \rho}{\varepsilon}$$

On trouve donc :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) + \frac{\rho}{\varepsilon} = 0$$

Cette équation correspond à l'équation de Maxwell-Gauss : $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$ (qui correspond à l'équation de Poisson avec le potentiel).

♡ On remplace ρ par l'expression trouvée plus haut. On obtient :

$$\frac{d^2 U}{dr^2} - \frac{2N_0 e^2}{k_B T \varepsilon} U = 0$$

On pose $\lambda^2 = \frac{k_B T \varepsilon}{2N_0 e^2}$. C'est une longueur caractéristique de la décroissance du potentiel. Dans de l'eau pure, le pH est égal à 7 donc $N_0 = 10^{-7} \text{mol/L} = 10^{19} \text{part.m}^{-3}$, soit $\lambda = 1 \mu\text{m}$.

En résolvant l'équation, on trouve $U(r) = A \exp(-r/\lambda) + B \exp(r/\lambda)$. La condition aux limites $V(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ impose $B = 0$. On a alors :

$$V(r) = \frac{A}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right)$$

♡ L'expression du champ est :

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r = A \frac{\exp(-r/\lambda)}{r^2} \left(1 + \frac{r}{\lambda}\right) \vec{e}_r$$

S'il n'y avait pas d'ions, on devrait retrouver l'expression du champ d'une particule ponctuelle de charge Q . Or l'absence d'ions correspond à $\lambda = \infty$, c'est-à-dire qu'il n'y a plus d'écrantage. On doit nécessairement retrouver $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \vec{e}_r$.

D'autre part, pour $r = r_0$, l'expression du champ *avec* ou *sans* ions autour est la même (car on est collé à la surface de la particule). Donc :

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} = A \frac{\exp(-r_0/\lambda)}{r^2} \left(1 + \frac{r_0}{\lambda}\right)$$

On a alors :

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \frac{1}{1 + \frac{r_0}{\lambda}} \exp\left(-\frac{r - r_0}{\lambda}\right)$$

La densité de charge est proportionnelle à l'opposé du potentiel :

$$\rho(r) = -\frac{2N_0 e Q}{4\pi k_B T \epsilon r^2} \frac{1}{1 + \frac{r_0}{\lambda}} \exp\left(-\frac{r - r_0}{\lambda}\right)$$

Condensateur Terre-ionosphère

♣ Les symétries et les invariances donnent $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$. Avec le théorème de Gauss appliqué sur une sphère de rayon r , on obtient :

$$\begin{cases} r < R & : & \vec{E} = \vec{0} \\ R < r < R + z_0 & : & \vec{E} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \\ r > R + z_0 & : & \vec{E} = \vec{0} \end{cases}$$

♣ Le potentiel se retrouve grâce à l'équation $\frac{dV}{dr} = -E(r)$. On a donc :

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + A$$

Comme le potentiel est nul en $z = 0$ (cad en $r = R$) :

$$V = V(R + z_0) - V(0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R + z_0} \right)$$

On trouve une capacité équivalente de :

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R(R + z_0)}{z_0} \simeq \frac{4\pi\epsilon_0 R^2}{z_0}$$

L'approximation est la formule d'un condensateur plan. de surface $4\pi R^2$. L'énergie électrostatique est $W_{el} = \frac{1}{2}CV^2$. Enfin on peut dire dans cette approximation que $\vec{E} \simeq \frac{V}{z_0}\vec{e}_r$. On trouve $C = 6,7 \cdot 10^{-2}\text{F}$, $W_{el} = 4,3 \cdot 10^9\text{J}$ et $E = 6\text{V/m}$.

♣ Toujours dans l'analogie avec le condensateur plan, $\vec{E} = \sigma/\epsilon\vec{e}_r$. On trouve donc $\sigma = 5,3 \cdot 10^{-11}\text{C.m}^{-2}$ et $Q = 4\pi R^2\sigma = 24 \cdot 10^3\text{C}$.

♣ On peut dire que $E \simeq V/z_1$, où z_1 est l'altitude des nuages. En ordre de grandeur, on a $Z_1 = 1\text{km}$, donc $V_1 \simeq 10^8\text{V}$.