Exercice 1

On s'intéresse à l'écoulement stationnaire, incompressible d'un fluide de masse volumique ρ et de viscosité η autour d'une sphère de rayon R. La vitesse de l'écoulement loin de la sphère est $v_\infty \vec{e_z}$. On adoptera les coordonnées sphériques d'axe Oz, O étant le centre le centre de la sphère.

- On suppose que l'écoulement permet de négliger le terme convectif de l'équation de Navier-Stokes devant le terme diffusif. Comment s'écrit alors cette équation ?
- On suppose que la vitesse est telle que : $\vec{rot}(\vec{rot}(\vec{v})) = \frac{3v_\infty R}{r^3}\left(\cos\theta \vec{e_r} + \frac{1}{2}\sin\theta \vec{e_\theta}\right)$. Quelle est la résultante des forces de pression sur la sphère ?
- Quelle est la résultante des actions de cisaillement sur la sphère ? On donne $\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)_{r=R} = \frac{3v_\infty}{2R}\sin\theta$.
- Trouver la force de trainée s'exerçant sur la sphère.

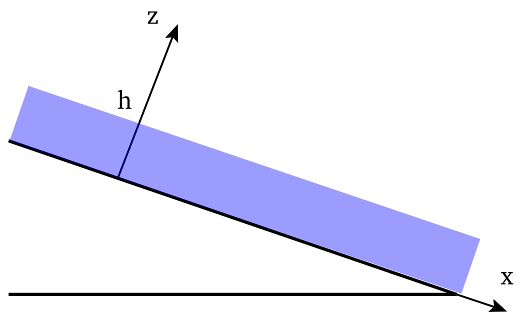
On donne :

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} \tag{1}$$

$$\vec{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\vec{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\vec{e_\varphi} \tag{2}$$

Exercice 2

On considère un fluide d'épaisseur h s'écoulant lentement sur un plan infini incliné d'un angle α par rapport à la verticale. Le fluide a une forte viscosité η et une masse volumique ρ, et il est soumis à la gravité. On est en régime permanent.



1 - Quel est le profil de vitesse dans le fluide ?

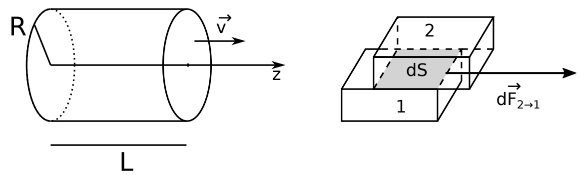
2 - En déduire le débit.

3 - On observe avec des images satellite que la vitesse d'écoulement d'un glacier à sa surface est d'environ 100m/an. En déduire la viscosité d'un glacier de 100m d'épaisseur, d'un kilomètre de large. Quelle quantité de glace est charriée en une année ?

5 - On place désormais une plaque au dessus du liquide, au niveau de $z = h$. Que deviennent les conditions aux limites ? Trouver le nouveau profil de vitesse. Comment s'appelle se type d'écoulement ?

Exercice 3

On étudie un écoulement permanent d'un fluide incompressible de masse volumique μ, dans un tuyau cylindrique horizontal d'axe Oz, de rayon R, et de longueur L (schéma de gauche). Le champ de pression appliqué le long du tube est noté $P(r, z)$. Par invariance, le champ de vitesse est supposé ne dépendre que de r et z, et est dirigé selon $\vec{e_z}$. Il est noté $\vec{u} = u(r, z)\vec{e_z}$. On définit la vitesse de cisaillement par la quantité $\dot{\gamma} = -\frac{du}{dr}$.



On définit la force surfacique de viscosité $\vec{\tau}$, ou contrainte de cisaillement, entre deux couches adjacentes de fluide, la quantité : $\vec{\tau} = \frac{d\vec{F}}{dS}$. où $d\vec{F}$ est la force qui s'exerce mutuellement entre les couches adjacentes, et dS la surface élémentaire de contact entre ces deux surfaces (schéma de droite).

1 - Quelle est la relation entre la force de viscosité $\vec{\tau}$ et le champ de vitesse u dans le cas d'un fluide classique (vu en cours), dit newtonien ? On pourra dans cette question se placer en coordonnées cartésiennes.

Fluide de Bingham

Un fluide est dit de Bingham si les contraintes de cisaillements entre les couches obéissent à une loi de seuil :

$$\begin{cases} \tau > \tau_s & : \quad \tau = \tau_s + \eta\dot{\gamma} \\ \tau < \tau_s & : \quad \dot{\gamma} = 0 \end{cases}$$

On supposera que le fluide que l'on étudie obéit à une telle loi.

2 - Quel est la différence entre un fluide classique et un fluide de Bingham ?

3 - Montrer que $\vec{u}$ ne dépend que de r. En négligeant les actions de la pesanteur, déterminer la relation suivante :

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial(r\tau)}{\partial r} = 0$$

4 - Établir la relation :

$$\tau(r) = \tau_s \frac{r}{R_s}$$

où R_s est le rayon de seuil, défini par $R_s = 2\tau_s L/\Delta P$, en notant $\Delta P = P(0) - P(L)$ la chute de pression entre l'entrée et la sortie du tuyau. Quel est le signe de ΔP ?

5 - Pour quelle pression minimale ΔP_{min} commence t-on à voir un écoulement à travers le tube ?

6 - On suppose que $\Delta P > \Delta P_{min}$. Déterminer le champs de vitesse dans le tube. Tracer son allure et expliquer pourquoi l'écoulement présente une zone dite *bouchon*.

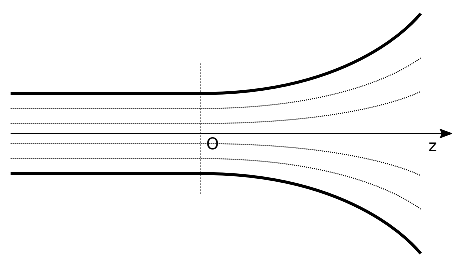
Exercice 4

Tuyau parabolique

Un fluide est en écoulement permanent dans une portion de tube à section parabolique, avec Oz en axe de symétrie. Les lignes de courant s'écoulant dans le tube ont pour équation :

$$\begin{cases} z < 0 & : \quad r = \lambda a \\ z > 0 & : \quad r = \lambda \left(a + \frac{z^2}{b} \right) \end{cases}$$

où λ est un nombre sans dimension, a et b des constantes.



Le fluide est incompressible et la composante axiale de v_z de la vitesse est supposée uniforme sur une section perpendiculaire, cad v_z ne dépend pas de r. On note v_0 la vitesse en O.

1 - Déterminez la vitesse $\vec{v}$ en tout point.

2 - Comment évolue un élément de fluide qui traverse le tuyau ?

3 - L'écoulement est-il potentiel ?

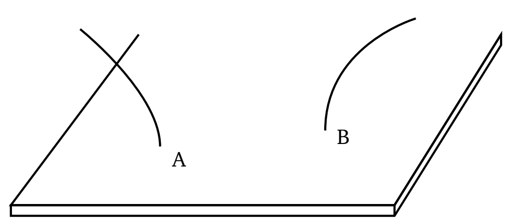
Écoulement entre deux lames

On considère deux plaques infinies de verres séparées d'une épaisseur e où circule un fluide incompressible. Du fluide est injecté à un débit D_e par le tuyau A, et il peut ressortir à travers le tuyau B identique.

On suppose que l'écoulement dérive du potentiel :

$$\phi(M) = av_0 \ln \frac{r_A}{r_B}$$

où r_A (resp. r_B) est la distance d'un point M du champ à la source A (resp. B).

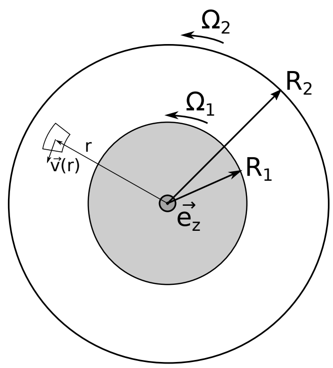


1 - Déterminer le champ des vitesses. Comment relier a et v_0 au débit des sources ?

2 - Est-ce un écoulement compressible ?

Exercice 5

On considère un fluide incompressible, de viscosité η contenu entre deux cylindres orientés verticalement, de même axe O_z, et de rayons respectifs R_1 et R_2 (avec $R_1 < R_2$). La hauteur des cylindres L est très grande devant les rayons : $L \gg R_1, R_2$. Les deux cylindres peuvent tourner autour de l'axe Oz.



Tout élément de ce fluide subit une force surfacique visqueuse (ou contrainte visqueuse) que l'on notera $\vec{\sigma}$. L'expression en coordonnées cylindrique de sa composante selon $\vec{e_\theta}$ s'écrit :

$$\sigma_\theta(r, \theta, z) = \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right)$$

Il est possible de démontrer que, dans le cadre de ce problème, les autres composantes de $\vec{\sigma}$ sont nulles. Nous l'admettrons pour la suite du problème.

L'écoulement est supposé permanent, lent et laminaire : on suppose alors que $v_z = 0$.

1 - A partir des invariances du problèmes, montrer que v ne dépend que de r.

2 - En s'appuyant sur un bilan de matière, retrouver l'expression de l'équation de conservation. En déduire que le champ de vitesse s'écrit $\vec{v} = v_\theta(r)\vec{e_\theta}$. L'écoulement est-il rotationnel ?

3 - En faisant un bilan des moments selon $\vec{e_z}$, montrer que la vitesse vérifie la relation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial}{\partial r} \frac{v_\theta}{r} \right) = 0$$

4 - Le cylindre de rayon R_1 (resp. R_2) tourne à la vitesse angulaire Ω_1 (resp. Ω_2). En déduire l'expression du champs de vitesse.

5 - On suppose que le cylindre intérieur (de rayon R_1) est maintenu fixe (cad $\Omega_1 = 0$) à l'aide d'un ressort de torsion qui exerce un moment $\vec{M} = k\theta\vec{e_z}$. Le cylindre intérieur tourne toujours à la vitesse Ω_2. De quel angle θ tourne le ressort ? A quel quantité physique a t-on alors accès ?

6 - En étant toujours dans la situation $\Omega_2 = 0$, calculer la puissance mécanique dissipée dans le fluide.

NB

$$\vec{rot}(\vec{v}) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{\partial z} \right) \vec{e_r} + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \vec{e_\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \vec{e_z}$$

Exercice 6

Une tornade assimilée à un écoulement parfait, permanent, incompressible de l'air, de masse volumique $\mu = 1.3\text{kg.m}^{-3}$, est caractérisé par un vecteur tourbillon $\vec{\Omega} = \Omega\vec{u_z}$, supposé uniforme à l'intérieur de la tornade ($r \leq a$) et nul à l'extérieur de la tornade. Cette dernière est modélisée par un cylindre d'axe (Oz) et de rayon $a = 50\text{m}$. On se place en coordonnées cylindriques.

1 - Donnez une expression intégrale de la vitesse $\vec{v}$ (on ne cherche pas à calculer cette intégrale à ce stage de l'exercice). A quel problème électrostatique la tornade est-elle assimilable ?

2 - On se limite à des mouvements de l'air définis par $\vec{v} = v(r)\vec{u_\theta}$. Donner l'allure de $v(r)$.

3 - Calculer le champ de pression. On rappelle que :

$$(\vec{v}.\vec{grad})\vec{v} = \vec{grad}(v^2/2) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$$

4 - Quelle est la vitesse maximale théorique que peut avoir une tornade ? Est-ce physiquement possible ?

4 - Un toit de masse surfacique de 100kg.m^{-2}, simplement posé et horizontal, peut être soulevé au passage de la tornade ? On suppose que la vitesse maximale de la tornade est $v_{max} = 180\text{km.h}^{-1}$.

On donne :

$$div\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{grad}U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e_z}$$