

# Réflexion d'une onde électromagnétique sur des plans métalliques en incidence oblique

On considère une onde plane progressive se propageant dans le vide, selon le vecteur d'onde  $\vec{k} = k \cos \theta \vec{u}_x + k \sin \theta \vec{u}_y$  et à la pulsation  $\omega$ . Elle arrive sur un plan métallique infiniment conducteur situé sur le demi-espace  $x > 0$ . On notera  $\vec{E}_i$  et  $\vec{B}_i$  respectivement le champ électrique et le champ magnétique incidents. Le champ électrique est polarisé rectilignement selon  $Oz$  et son amplitude est  $E_0$ .

♡ Retrouver l'équation de propagation des champs électrique et magnétique. Quelle est la relation de dispersion associée ?

♡ Expliciter les expressions des champs  $\vec{E}_i$  et  $\vec{B}_i$ .

En arrivant sur l'interface, les relations de passage du champ électromagnétique imposent l'apparition d'une onde réfléchi, dont on notera  $\vec{E}_r$  et  $\vec{B}_r$  les champ électrique et magnétique. On supposera que  $\vec{E}_r$  s'écrit sous la forme :

$$\vec{E}_r = \vec{E}'_0 \exp(i\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)$$

♡ Que valent les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  à l'intérieur de la plaque ? Justifier.

♡ En utilisant les relations de passage, écrire  $\vec{E}_r$  en fonction de  $E_0$ ,  $k$ ,  $\omega$  et  $\theta$  et démontrer la loi de Descartes sur la réflexion d'une onde électromagnétique. En déduire l'expression du champ magnétique réfléchi,  $\vec{B}_r$ .

♡ Quelle est alors l'expression du champ électrique  $\vec{E}$  résultant pour  $x < 0$  ? De quel type d'onde s'agit-il ?

♡ On place une seconde plaque métallique en  $x = -L$ . Montrer que la présence de la seconde plaque impose une discrétisation du spectre, c'est-à-dire que seules des fréquences  $\omega$  discrètes peuvent se propager pour un angle  $\theta$  donné. Tracer les valeurs prises par  $\omega$  en fonction de  $\theta$ .

♡ Quelle est la valeur minimale que peut prendre  $\omega$  ? Justifier.

♡ Démontrer que  $k_y = \vec{k} \cdot \vec{u}_y$  vérifie l'équation dite de dispersion des modes d'une onde transverse électrique :

$$k_y^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \quad (1)$$

♡ Quel est le courant surfacique à la surface de la plaque ?

♡ Calculer l'expression du champ magnétique résultant  $\vec{B}$  entre les deux plaques et en déduire l'expression du vecteur de Poyting. Commenter.

# Propagation d'une onde radio dans un plasma en présence d'un champ magnétique longitudinal

Le plasma ionosphérique est assimilé à un milieu conducteur ionisé de temps de relaxation infini, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de collisions. Le plasma est supposé neutre et sa densité électronique est  $n_0$ . On tient compte ici du champ magnétostatique terrestre désigné par  $\vec{B}_{ext} = B_{ext}\vec{u}_z$ , dirigé selon la direction de propagation  $Oz$  d'une OPPM électromagnétique de pulsation  $\omega$ , dont le champ est représenté par :

$$(\vec{E}, \vec{B}) = (\vec{E}_0, \vec{B}_0) \exp[j(\omega t - kz)]$$

On note  $\omega_p = \sqrt{n_0 e^2 / m \varepsilon_0}$  la pulsation de plasma du milieu et  $\omega_c = e B_{ext} / m$  la pulsation cyclotron.

- ♠ Montrer que le champ magnétique terrestre intervient dans la conduction électrique du milieu, qui peut être représenté par une relation linéaire :

$$\vec{j} = [\gamma] \vec{E}$$

où  $[\gamma]$  est une matrice de conductivité complexe, à exprimer en fonction de  $\omega$ ,  $\omega_c$  et  $\omega_p$ .

Une onde est polarisée circulairement lorsque les composantes transverses sont déphasées de  $\pm\pi/2$ , c'est-à-dire dans notre cas, en notation réelle :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x \pm E_0 \sin(\omega t - kz) \vec{e}_y \quad (2)$$

Un signe "+" correspond à une onde polarisée circulairement "gauche" et le signe "-" à une onde polarisée circulairement "droite". On cherche à comprendre la propagation de ces ondes dans le plasma.

- ♠ Pourquoi appelle t-on cette polarisation "circulaire" ?
- ♠ Montrer que l'étude de la propagation des OPPM électromagnétiques peut être ramenée à celle d'ondes polarisées circulairement qui satisfont des relations de dispersion à préciser.

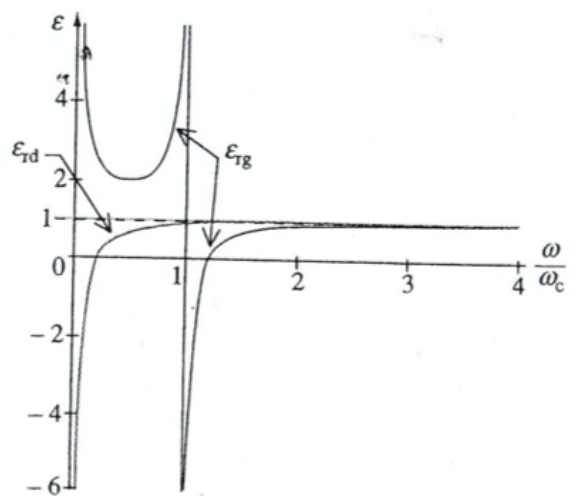
On appelle permittivité relative d'un milieu la quantité complexe  $\varepsilon_r$  que l'on peut définir ici à travers la relation  $k^2 = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 = \varepsilon_r \omega^2 / c^2$ .

- ♠ On note  $\varepsilon_{rg}$  et  $\varepsilon_{rd}$  les permittivités relatives équivalentes associées respectivement à la propagation des ondes circulaires gauche et des ondes circulaires droites, dont les graphes sont donnés ci-dessous. Donner leur expression. Préciser les domaines du spectre électromagnétique pour lesquels les ondes étudiées se propagent effectivement dans le plasma.

Une onde métrique traverse une épaisseur  $L$  de plasma dans les conditions de l'étude effectuée. A l'entrée de la couche de plasma, l'onde est polarisée rectilignement.

- ♠ Montrer, dans le cas général, qu'une onde polarisée rectilignement peut s'écrire comme la superposition d'une onde polarisée circulaire droite et circulaire gauche.
- ♠ Justifier alors que l'effet du plasma consiste, aux hautes fréquences, en une rotation de la direction de polarisation de l'onde. Préciser la valeur de cet angle si  $L = 1\text{km}$  et  $\lambda_0 = 30\text{cm}$ .

*Données :*  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{C}$ ,  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}\text{kg}$ ,  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\text{F/m}$ ,  $n_0 = 10^{12}\text{m}^{-3}$ ,  $B_{ext} = 5 \cdot 10^{-5}\text{T}$ .



# Ondes électromagnétiques dans un métal conducteur

On s'intéresse à la propagation des ondes électromagnétiques dans un conducteur métallique, en fonction de leur fréquence et des caractéristiques du métal. Plus particulièrement, on souhaite savoir pourquoi un métal peut être transparent à très basse fréquence, réfléchissant sur une certaine bande de fréquences, puis de nouveau transparent à très haute fréquence.

On considère donc que le demi-espace  $z > 0$  est rempli d'un métal, sur lequel arrive une onde plane progressive monochromatique à la fréquence  $\omega$  et polarisée suivant  $\vec{e}_x$ .

- ◇ Retrouver l'équation de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide. À l'aide des données de l'énoncé, donner l'expression du champ  $\vec{E}$  et du champ  $\vec{B}$ .

Pour décrire le métal, on adopte un modèle d'électrons libres, de masse  $m$ , de charge  $-e$  et de densité particulière  $N_0$ , soumis au champ électromagnétique, et subissant des collisions en moyenne au bout d'un temps  $\tau = 1/\omega_c$ . On modélise alors le comportement des électrons par l'équation de mouvement (aussi appelé modèle de Drude) :

$$m\vec{a} = -e\vec{E} - m\frac{\vec{v}}{\tau} \quad (3)$$

Pour un métal très conducteur, on a  $N_0 \simeq 10^{29} \text{m}^{-3}$  et  $\tau \simeq 10^{14}$ .

- ◇ En utilisant l'équation 3, définir une conductivité  $\gamma$  complexe qui dépend de la pulsation  $\omega$ . Commenter.
- ◇ En utilisant les équations de Maxwell, trouver une équation vérifiée par le champ  $\vec{B}$ . En déduire une relation de dispersion des OPPM dans le métal. On fera apparaître la pulsation plasma  $\omega_p = \sqrt{N_0 e^2 / m \epsilon_0}$ .
- ◇ Comparer  $\omega_c = 1/\tau$  et  $\omega_p$ . Justifier de l'existence de 3 régimes de propagation dans le métal que nous allons étudier par la suite.

**On se place dans le cas où  $\omega \ll \omega_c$ .**

- ◇ Que devient la relation de dispersion dans ce cas-là ? Trouver les solutions possibles pour  $k$ .
- ◇ Écrire l'expression du champ  $\vec{E}$  dans le métal, puis celle du champ  $\vec{B}$ . Comment appelle-t-on ce régime et le phénomène associé ?

**On se place dans le cas où  $\omega \gg \omega_c$ .**

- ◇ Que devient la relation de dispersion dans ce cas-là ? Trouver les solutions possibles pour  $k$ .
- ◇ Écrire l'expression du champ  $\vec{E}$  dans le métal, puis celle du champ  $\vec{B}$ . On distinguera les cas  $\omega < \omega_p$  et  $\omega > \omega_p$ . Décrire alors le comportement de l'onde dans ces 2 situations.

## Bilan

- ◇ Finalement, résumer les 3 situations rencontrées et justifier les observations décrites dans l'énoncé.
- ◇ Quelle est la différence fondamentale entre un plasma vu en cours et un métal comme décrit ici ?