

Question de cours

Premier principe

A tout système thermodynamique fermé, est associée une équation d'état E appelée énergie. Au cours d'une variation quelconque, la variation de E est égale à l'énergie reçue.

Pour la plupart des transformations étudiées, $\Delta E = \Delta E_{mca} + \Delta U = \Delta U$ car la variation d'énergie mécanique est faible durant la transformation (pour un gaz notamment).

Le premier principe s'exprime :

$$\Delta U = W + Q \quad (1)$$

ou :

$$dU = \delta W + \delta Q \quad (2)$$

Ce principe est extrêmement fondamental car il représente la conservation de l'énergie en physique.

Machine de Carnot

- 0 - Le cycle est moteur, il est décrit "en tournant" dans le sens des aiguilles d'une montre dans le diagramme de Clapeyron. L'intégrale $W = -\oint P dV < 0$ est négative donc le travail est bien évacué à l'extérieur.
- 1 - On trouve les expressions grâce à l'expression du travail W et au premier principe de la thermodynamique. Le point "difficile" est le calcul du travail pour une transformation adiabatique. Il faut utiliser la loi de Laplace :

$$\begin{aligned} \delta W &= - \int_B^C P dV = -cste \int_B^C \frac{dV}{V^\gamma} \\ &= -cste \frac{V_C^{1-\gamma} - V_B^{1-\gamma}}{1-\gamma} \\ &= \frac{P_C V_C - P_B V_B}{\gamma - 1} \\ &= \frac{nR}{\gamma - 1} (T_c - T_f) \end{aligned}$$

Le tableau des différentes transformations est alors :

| Transformation | ΔU | W | Q |
|-------------------|-----------------------------------|---|---|
| $A \rightarrow B$ | 0 | $nRT_f \ln \left(\frac{V_A}{V_B} \right)$ | $-nRT_f \ln \left(\frac{V_A}{V_B} \right)$ |
| $B \rightarrow C$ | $\frac{nR}{\gamma-1} (T_c - T_f)$ | $\frac{nR}{\gamma-1} (T_c - T_f)$ | 0 |
| $C \rightarrow D$ | 0 | $-nRT_c \ln \left(\frac{V_D}{V_C} \right)$ | $nRT_c \ln \left(\frac{V_D}{V_C} \right)$ |
| $D \rightarrow A$ | $\frac{nR}{\gamma-1} (T_f - T_c)$ | $\frac{nR}{\gamma-1} (T_f - T_c)$ | 0 |

- 2- Le rendement est $\eta = -W/Q_c$. La source chaude est ici :

$$\begin{aligned} Q_c &= Q_{C \rightarrow D} \\ &= nRT_c \ln \left(\frac{V_D}{V_C} \right) \end{aligned}$$

Et le travail :

$$\begin{aligned}
W &= \sum_i W_i \\
&= nRT_f \ln \left(\frac{V_A}{V_B} \right) - nRT_c \ln \left(\frac{V_D}{V_C} \right) \\
&= nR(T_f - T_c) \ln \left(\frac{V_A}{V_B} \right)
\end{aligned}$$

car on a $V_A/V_B = V_D/V_C$ avec la loi de Laplace $TV^{\gamma-1} = cste$. On trouve alors :

$$\eta = \frac{T_f - T_c}{T_c} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

C'est le rendement de Carnot : c'est normal, c'est un cycle de Carnot !

Cycle de Beau de Rochas

0 - Il faut utiliser la loi de Laplace :

$$\begin{aligned}
\delta W &= - \int_i^f P dV = -cste \int_i^f \frac{dV}{V^\gamma} \\
&= -cste \frac{V_f^{1-\gamma} - V_i^{1-\gamma}}{1-\gamma} \\
&= \frac{P_f V_f - P_i V_i}{\gamma - 1} \\
&= \frac{nR}{\gamma - 1} (T_f - T_i)
\end{aligned}$$

1 - On utilise le résultat précédent pour les transformations $A \rightarrow B$ et $D \rightarrow A$. Pour les transformations isochores, on calcule ΔU tout simplement pour l'échauffement d'un gaz.

| Transformation | ΔU | W | Q |
|-------------------|----------------------------------|----------------------------------|--|
| $A \rightarrow B$ | $\frac{nR}{\gamma-1}(T_B - T_A)$ | $\frac{nR}{\gamma-1}(T_B - T_A)$ | 0 |
| $B \rightarrow C$ | $\frac{nR}{\gamma-1}(T_C - T_B)$ | 0 | $Q_c = \frac{nR}{\gamma-1}(T_C - T_B)$ |
| $C \rightarrow D$ | $\frac{nR}{\gamma-1}(T_D - T_C)$ | $\frac{nR}{\gamma-1}(T_D - T_C)$ | 0 |
| $D \rightarrow A$ | $\frac{nR}{\gamma-1}(T_A - T_D)$ | 0 | $Q_f = \frac{nR}{\gamma-1}(T_A - T_D)$ |

2 - Pour calculer le rendement, il faut expliciter la quantité de chaleur issue de la source chaude : il s'agit de Q_{AB} , car on augmente la pression à volume constant, c'est-à-dire qu'on apporte de la chaleur. Ici, elle est apportée par l'explosion de l'essence. Le travail, quant à lui, s'écrit :

$$\begin{aligned}
W &= -\frac{nR}{\gamma-1}(T_B - T_A + T_D - T_C) \\
&= -\frac{nR}{\gamma-1}(T_D - T_A) + Q_c
\end{aligned}$$

Il reste à déterminer T_D par rapport à T_A . Pour cela, on détermine la température à chaque transformation :

$A \rightarrow B$: $T_B = a^{\gamma-1}T_A$ car compression adabatique en utilisant $TV^{\gamma-1} = cste$.

$B \rightarrow C$: $T_C = \frac{nR}{\gamma-1}Q_c + T_B$, d'après le premier principe : on chauffe le gaz en lui apportant Q_c .

$C \rightarrow D$: $T_D = T_C/a^{\gamma-1}$ car compression adiabatique.

On a donc :

$$T_D = \frac{\gamma-1}{a^{\gamma-1}nR}Q_c + T_f$$

Donc $W = Q_c \left(1 - \frac{1}{a^{\gamma-1}}\right)$ et alors :

$$\eta = 1 - \frac{1}{a^{\gamma-1}}$$

3 - Pour comparer avec le rendement de Carnot $\eta_C = 1 - T_f/T_c$, il faut expliciter les températures de la source chaude T_c et froide T_f . La température de la source chaude est à priori T_C car le gaz est au maximum de sa température en C . En effet, comme la transformation $C \rightarrow D$ est réversible, elle est supposée très lente, donc on peut supposer que le gaz s'est thermalisé à la température de la source chaude en C .

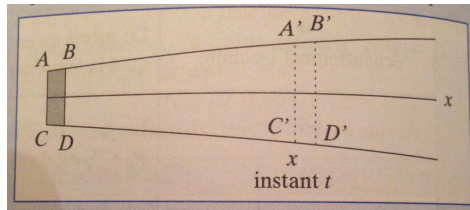
A ce moment là :

$$\begin{aligned}\eta_C &= 1 - \frac{T_A}{T_C} \\ &= 1 - \frac{T_A}{\frac{\gamma-1}{nR}Q_c + a^{\gamma-1}T_A} \\ &= 1 - \frac{1}{\frac{\gamma-1}{nRT_A}Q_c + a^{\gamma-1}} \\ &> 1 - \frac{1}{a^{\gamma-1}} = \eta\end{aligned}$$

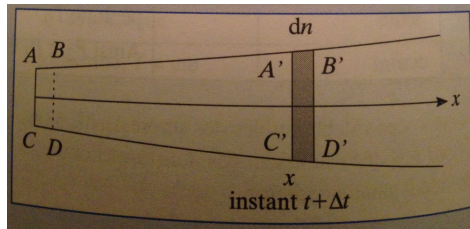
On retrouve bien le fait que le rendement de Carnot est supérieur.

Exercice 2

- Démonstration de la détente de Joule Thomson. On considère une tranche de dn moles entrant en $x = x_1$ à l'instant t . Elle est caractérisée par U_1 , T_1 , P_1 , H_1 et v_1 .



A l'instant $t + \Delta t$, elle est à l'abscisse x . Elle est caractérisée par $U(x)$, $T(x)$, $P(x)$, $H(x)$ et $v(x)$.



On considère la tranche de gaz $ACA'C'$ à l'instant t . A l'instant $t' > t$, elle correspond à la tranche $BDB'D'$, comme le système est en régime permanent.

On applique le premier principe à la tranche $ACA'C'$. $Q = 0$ comme les parois sont adiabatiques. Il reçoit en $x = x_1$ un travail $V_{ABCD}P_1$ et en x un travail $V_{A'B'C'D'}P(x)$.

Le premier principe s'écrit alors :

$$E_{c,BDB'D'} + U_{BDB'D'} - E_{c,ACA'C'} - U_{ACA'C'} = -V_{A'B'C'D'}P(x) + V_{ABCD}P_1 \quad (3)$$

Comme la partie centrale $BDA'C'$ reste complètement inchangée entre t et t' , on a (on peut utiliser l'additivité de E_c et U) :

$$E_{c,A'B'C'D'} + U_{A'B'C'D'} - E_{c,ABCD} - U_{ABCD} = -V_{A'B'C'D'}P(x) + V_{ABCD}P_1 \quad (4)$$

Sa variation d'énergie cinétique est : $\Delta E_c = E_{c,A'B'C'D'} - E_{c,ABCD} = \frac{1}{2}Mdn(v(x)^2 - v_1^2)$ Et la variation d'énergie interne $U_{A'B'C'D'} - U_{ABCD} = (U_m(x) - U_m(x_1))dn$ Donc :

$$\frac{1}{2}Mdn(v(x)^2 - v_1^2) + U_m(x)dn - U_m(x_1)dn = -V_{A'B'C'D'}P(x) + V_{ABCD}P_1 \quad (5)$$

Comme $H_m(x) = U_m(x) + P(x)V_m(x)$:

$$\frac{1}{2}Mv(x)^2 + H_m(x) = \frac{1}{2}Mv^2(x_1) + H_m(x_1) = cst \quad (6)$$

- Le gaz est parfait donc $H_m(x_1) - H_m(x_2) = \frac{R\gamma}{\gamma-1}(T_1 - T_2)$. Cad :

$$v_2 = \sqrt{\frac{2}{M} \frac{R\gamma}{\gamma-1}(T_1 - T_2)} \quad (7)$$

On trouve $v_2 = 301,5 \text{ m.s}^{-1}$.

Etude d'une tuyère

Si on suppose que l'énergie cinétique du gaz est transmise en amont de la turbine lui est intégralement transmise :

$$\frac{1}{2}Mv_1^2 = W_{turbine} = \frac{R\gamma}{\gamma-1}(T_1 - T_2) \quad (8)$$

Etude d'une fusée

Il faut calculer la force de poussée due à l'éjection de gaz. Dans le repère inertiel de la fusée à la vitesse V à l'instant t , le système gaz + fusée de masse M_f a une vitesse nulle. Dans le même repère, à $t + dt$, une masse dm de gaz a été éjectée avec une vitesse v_2 (qu'on relie à la température T_2 avec les résultats précédents) et la fusée a acquis un supplément de vitesse dV .

Comme on suppose le système isolé, la conservation de la quantité de mouvement donne : $(M_f(t) - dm)dV = dm v_2$, cad la quantité de mouvement due à l'éjection des gaz $dm v_2$ est égale à l'accroissement quantité de mouvement de la fusée $(M_f(t) - dm)dV$.

$$-2\text{Donc à l'ordre 1 : } M_f(t)dV = v_2 dm$$

(Classique de la poussée d'une fusée : $M_f(t) \frac{d}{dt} V(t) = v_2 \frac{dm}{dt}$)

La vitesse v_2 est donnée par $v_2 = \sqrt{\frac{2}{M} \frac{R\gamma}{\gamma-1}(T_1 - T_2)}$

On a donc : $dV = \frac{dm}{M_f} \sqrt{\frac{2}{M} \frac{R\gamma}{\gamma-1}(T_1 - T_2)}$

La vitesse acquise par la fusée tout au long de l'éjection du gaz est : A chaque fois qu'une masse dm de gaz est éjectée, la fusée acquiert une vitesse dV . Initialement, la vitesse de la fusée est nulle et

sa masse est $M_0 + m_0$. Lorsque tout le réservoir est vidé, sa masse est M_0 et sa vitesse est l'intégrale des dV . Donc :

$$V = v_2 \int_0^{m_0} \frac{dm}{(M_0 + m_0) - m} = v_2 \ln \left(\frac{M_0 + m_0}{M_0} \right) \quad (9)$$

Alors :

$$-2 \quad V = \sqrt{\frac{2}{M} \frac{R\gamma}{\gamma-1} (T_1 - T_2)} \ln \left(\frac{M_0 + m_0}{M_0} \right) \quad (10)$$

Exercice 3

Premier principe

Il faut considérer comme système Vide + air qui va rentrer dans l'ampoule. On note V_0 le volume de l'air qui va rentrer dans l'ampoule.

Comme la transformation se fait à pression constante P_0 , et que le volume balayé est la totalité de celui du gaz qui va rentrer dans l'ampoule, le travail subit par le gaz est $W = -P_0 V_0$.

On applique le premier principe : $\Delta U = W + Q$ Comme il n'y a pas d'apport de chaleur, $Q = 0$.

Alors : $\Delta U = nc_V(T_1 - T_0) = \frac{nR}{\gamma-1}(T_1 - T_0) = -P_0 V_0$

Comme on a un gaz parfait : $P_0 V_0 = nrT_0$.

Alors : $\frac{P_0 V_0}{(\gamma-1)T_0}(T_1 - T_0) = P_0 V_0$

Et finalement :

$$T_1 = \gamma T_0 \quad (11)$$

On trouve $T_1 = 410$ K.

Second principe

• $U = n_1 E_1 + n_2 U_2$. Donc $dU = E_1 dn_1 + E_2 dn_2 = -\Delta E dn_1$, car $dn_1 = -dn_2$.

• Pour réaliser le macroétat (n_1, E_1) ; (n_2, E_2) , il y a $\binom{N}{n_1}$ possibilités, soit $\Omega = \binom{N}{n_1}$.

Alors : $S = k_B \log d\text{binom} N n_1 = k_B \log \frac{N!}{(N-n_1)!n_1!}$. Avec la relation de Stirling :

$$S = k_B [N \ln N - n_1 \ln n_1 - (N - n_1) \ln (N - n_1)] \quad (12)$$

En différenciant :

$$dS = k_B dn_1 \ln \frac{N - n_1}{n_1} \quad (13)$$

Or $\frac{N-n_1}{n_1} = \exp(\frac{-\Delta E}{k_B T})$, donc $dS = -\frac{\Delta E}{T} dn_1$.

• En identifiant les résultats des 2 questions précédentes, on trouve bien $dU = T dS$

Exercice 4

• La pression est constante durant la transformation donc le premier principe industriel peut s'écrire, pour une masse dm de gaz (ou dm_0 d'eau) traversant l'échangeur : $dH = \delta Q$.

Du point de vue du gaz, on a : $dH_{gaz} = dm c_P (T_3 - T_1)$. Du point de vue de l'eau : $dH_{eau} = dm_0 c_0 (t_1 - t_0)$.

Comme l'ensemble est calorifugé : $dm c_P (T_3 - T_1) + dm_0 c_0 (t_1 - t_0) = 0$.

Comme $dm = d \times dt$ et $dm_0 = D dt$, on a donc :

$$D = d \frac{c_P (T_3 - T_1)}{c (t_0 - t_1)} \quad (14)$$

- Lorsqu'une masse dm passe de T_4 à T_5 dans la première canalisation, la même masse passe de T_9 à T_{10} dans la seconde (car débit dans l'autre).

Comme les échanges avec l'extérieur sont nuls, le premier principe impose :

$$dm c_P (T_5 - T_4) + dm c_P (T_{10} - T_9) = 0 \quad (15)$$

cad $T_{10} + T_5 = T_4 + T_9$.

Le second principe appliqué sur cette même masse de gaz s'écrit : $\Delta S = dm c_P \ln(T_5/T_4) + dm c_P \ln(T_{10}/T_9) = \delta S_e + \delta S_c$ et $\Delta S = 0$ car il n'y a pas d'échanges avec l'extérieur et la transformation est réversible. Donc :

$$T_5 T_{10} = T_4 T_9 \quad (16)$$

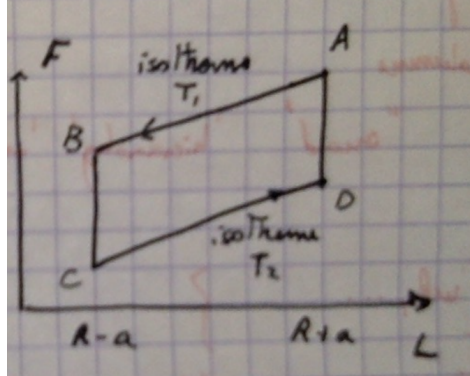
La résolution conduit à $T_9 = T_5$ et $T_{10} = T_4$ ou $T_{10} = T_5$ et $T_9 = T_4$. Seule la première est acceptable car sinon les gaz sortent à la même température.

- Si la transformation est irréversible : $\Delta S = dm c_P \ln(T_5/T_4) + dm c_P \ln(T_{10}/T_9) = \delta S_c > 0$, donc $T_5 T_{10} > T_4 T_9$.

En supposant que $T_9 > T_4$, on a alors : $T_9 > T_5$ et $T_{10} > T_4$, cad une perte d'efficacité du dispositif.

Exercice 5

- Comme la relation liant F et L est affine, les transformations sont des lignes droites dans le diagramme de Clapeyron :



Les transformations AB et CD sont des isothermes et BC et DA sont des iso-longueur.

- Pour trouver les expressions du travail (échange mécanique) et de la quantité chaleur reçue (échange thermique) sur une transformation, il faut appliquer le premier principe au 4 étapes du cycle, par exemple pour la transformation AB : $\Delta U_A^B = W_A^B + Q_A^B$.

Le travail se calcule grâce à $W_A^B = \int_{R+a}^{R-a} dLF$, puis la chaleur Q_A^B se déduit de l'expression de ΔU_A^B avec l'équation de premier principe.

Transformation AB

Pour le travail, on oublie pas de faire un dl à l'ordre 1 en a .

$$W_A^B = \int_{R+a}^{R-a} dLF = \int_{R+a}^{R-a} dL = -2a(F_0 - \sigma(T_1 - T_0)) - 2a\rho(R - L_0) \quad (17)$$

Énergie interne, toujours avec un dl en a : $\Delta U_A^B = -2a(F_0 - \sigma T_0) - 2a\rho(R - L_0)$

Donc la chaleur est $Q_A^B = \Delta U_A^B - W_A^B = -2a\sigma T_1$

Transformation BC

Il n'y a pas de travail car pas de variation de longueur.

L'énergie interne est : $\Delta U_B^C = C_L(T_2 - T_1)$

La quantité de chaleur est donc : $Q_B^C = \Delta U_B^C = C_L(T_2 - T_1)$

Transformation CD

Il suffit de remplacer $a \leftarrow -a$ et $T_1 \leftarrow T_2$ pour les différents calculs de la transformation AB.

Travail :

$$W_C^D = \int_{R-a}^{R+a} dLF = \int_{R+a}^{R-a} dL = 2a(F_0 - \sigma(T_2 - T_0)) + 2a\rho(R - L_0) \quad (18)$$

Énergie interne : $\Delta U_C^D = 2a(F_0 - \sigma T_0) + 2a\rho(R - L_0)$

Quantité de chaleur : $Q_C^D = 2a\sigma T_2$

Transformation DA

Il n'y a pas de travail car pas de variation de longueur.

L'énergie interne est : $\Delta U_D^A = C_L(T_1 - T_2)$

La quantité de chaleur est donc : $Q_D^A = \Delta U_D^A = C_L(T_1 - T_2)$

Bilan

Au final, sur le cycle : $W = 2a\sigma(T_2 - T_1)$, $Q = 2a\sigma(T_2 - T_1)$ et $\Delta U = 0$.

- Le travail est moteur car $W < 0$. Il faut bien noter que le sens est inversé par rapport à un diagramme "classique" car ici $\delta W = +FdL$ et non $\delta W = -pdV$.
- Le rendement peut être alors défini comme : $\eta = \frac{-W}{Q_A^B + Q_D^A}$, car le fil reçoit de la chaleur par la source chaude pendant les transformations AB et DA.

Alors on trouve :

$$\eta = \frac{2a\sigma(T_1 - T_2)}{2a\sigma T_1 + C_L(T_1 - T_2)} \quad (19)$$

Exercice 6

- Le système à définir est l'ensemble de la masse M , du piston et du gaz parfait contenu dans le cylindre. Son énergie totale E s'écrit alors : $E = E_c + E_{pot} + U$. On s'intéresse à la situation 1 (avant le lâcher de la masse) et à la situation 2 (après le lâcher de la masse, à l'équilibre).

L'énergie cinétique est nulle pour ces situations car on est à l'équilibre.

Le premier principe s'écrit alors : $\Delta E_{pot} + \Delta U = W + Q$

Comme la paroi est adiabatique, Q est forcément nul. La pression extérieure étant constante et égale à P_0 , il s'écrit : $W = -P_0(V_2 - V_1) = -P_0S(x - a)$, si x est la hauteur finale du piston.

Comme le gaz est parfait, $\Delta U = c_V(T_2 - T_1)$.

On a donc :

$$c_V(T_2 - T_1) + mg(x - a) + Mg(x - a - H) = -P_0S(x - a) \quad (20)$$

On a supposé que la variation d'énergie potentiel du gaz était négligeable.

Comme le gaz est parfait,

$$c_V T_1 = \frac{nRT_1}{\gamma - 1} = \frac{P_1 S a}{\gamma - 1} = \frac{P_0 S a + m g a}{\gamma - 1} \quad (21)$$

En utilisant la relation des pressions à l'équilibre : $P_1 = P_0 + m g / S$.

De même : $c_V T_2 = \frac{P_0 S a + (m+M) g x}{\gamma - 1}$. On obtient donc à la fin :

$$(P_0 S + (m + M) g) x = \frac{\gamma - 1}{\gamma} M g (a + H) + (P_0 S + m g) S a \quad (22)$$

- Pour retrouver $x = a$, il suffit juste résoudre l'équation en H précédente si $x = a$. On trouve :

$$H_C = \frac{a}{\gamma - 1} \quad (23)$$

Exercice 7

- Le gaz fuit dans A . Le piston avance jusqu'à être en équilibre de pression ($V_A < V_C$) ou s'écrase contre la paroi ($V_A > V_C$).

- On commence par calculer le travail reçu par le gaz dans le volume B . Comme la pression est constante :

$$W = -P_0 \int_1^2 dV_{balay} = P_0 (V_A + V_B - V_1), \text{ où } V_1 \text{ est le volume final du gaz.}$$

L'état final sera totalement décrit par les variables d'état T_1 et P_1 . En appliquant le premier principe sur le système $A + B$ (y compris le vide initial dans A), on obtient : $\Delta U = n c_V (T_1 - T_0) = W$ car il n'y a pas d'échange de chaleur avec l'extérieur. Alors :

$$\frac{R}{\gamma - 1} (T_1 - T_0) = P_0 (V_A + V_B - V_1) \quad (24)$$

cad :

$$\frac{R}{\gamma - 1} (P_0 V_1 - P_0 V_A) = P_0 (V_A + V_B - V_1) \quad (25)$$

-2 On trouve alors : $V_1 = V_A + \frac{\gamma - 1}{\gamma} V_B$ et $T_1 = \frac{P_0 V_1}{R} = \frac{P_0}{R} \left(V_A + \frac{\gamma - 1}{\gamma} V_B \right)$

Dans le cas décrit, $V_1 > V_B$. Le cas limite est lorsque $V_1 = V_B = V_C$ cad $V_C = \gamma V_A$

- La variation d'entropie s'écrit $\Delta S = S_e + S_c$. Or $\Delta S = n c_p \ln \frac{T_1}{T_0} - n R \ln \frac{P_1}{P_0}$. Comme $P_0 = P_1$:

-2
$$\Delta S = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_1}{T_0} \right) = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \ln \left(1 + \frac{(\gamma - 1) V_B}{\gamma V_A} \right) \quad (26)$$

On a bien $\Delta S = S_c > 0$ ($S_e = 0$ car il n'y a pas d'échanges avec l'extérieur).

- Si $V_A > V_C$, à l'état final on a $V_A = V_1$. L'état final est donc déterminé par la pression P_1 .

Le premier principe donne : $\frac{R}{\gamma - 1} (T_1 - T_0) = P_0 V_A$ Avec la loi des gaz parfaits, on trouve :

-2
$$P_1 = \frac{\gamma P_0 V_A}{V_B} \quad (27)$$