Questions de cours

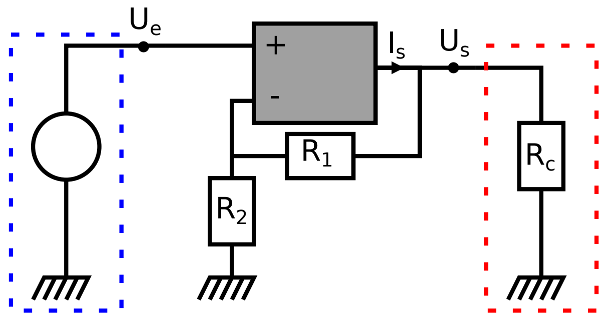
- Énoncez les formes canoniques des filtres passe-bas, passe-haut et passe bande d'ordre 2. Pour ce dernier, tracez le diagramme de Bode en fonction des différentes paramètres.
- Quelles sont les caractéristiques d'un AO idéal ?
- Donnez le schéma de montage d'un **amplificateur non inverseur** en précisant la fonction de transfert.
- Qu'est-ce qu'un circuit stable ? Quel est le critère de stabilité pour un quadripôle d'ordre 2 en régime libre (c'est-à-dire quand on branche la sortie sur l'entrée) ?

Exercices supplémentaires (difficile)

- Comment réaliser une source de courant parfaite ?
- Dans un montage amplificateur non-inverseur, comment minimiser la puissance dissipée par l'amplificateur opérationnel ?

Puissance consommée par un AO ● ○ ○

On souhaite alimenter un dispositif électrique (en rouge) modélisé par une résistance de charge R_c avec une tension nominale V_{nom}. On dispose pour cela d'une source de tension (en bleue) mais dont la tension de sortie maximale V_{max} est $V_{max} = V_{nom}/2$, insuffisante pour l'usage voulu. On introduit un montage intermédiaire pour compenser l'insuffisance de la source.



- Calculer U_s en fonction de U_e et déterminer le rôle de ce montage. Comment doit-on choisir R_1 et R_2 pour que $U_s = V_{nom} = 2V_{max}$?
- On suppose dans un premier temps que $R_c = \infty$, cad que la résistance de charge n'est pas connectée au circuit. Quelle est la puissance électrique émise par l'AO ?
- On suppose maintenant que le circuit est connecté à la charge, cad que R_c est finie. Quelle est désormais la puissance dégagée par l'AO ?
- Comment choisir R_1 et R_2 de sorte à minimiser la puissance sortie par l'AO ?

Correction Puissance consommée par un AO

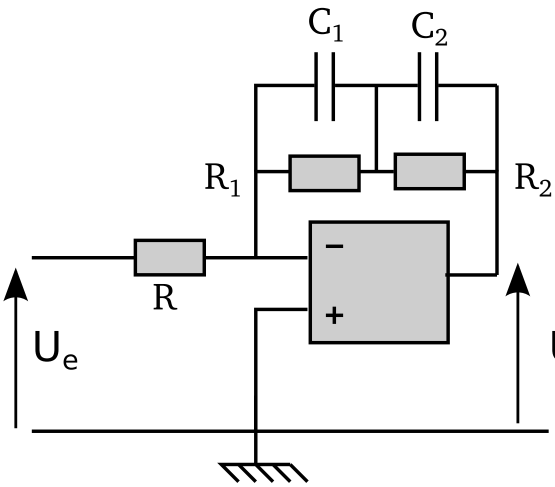
- Amplificateur non-inverseur $u_s = \frac{R_1+R_2}{R_2} u_e$. Pour que $U_s = V_{nom} = 2V_{max}$ il faut que le montage double la tension, cad $R_1 = R_2$.
- Si $R_c = \infty$, alors le courant dans la charge i_c est nul. Alors $P = u_s i_s = \frac{R_1+R_2}{R_2^2} u_e^2$. L'AO consomme de l'énergie même s'il n'y a aucune puissance délivrée à la charge !
- Soit i_1 le courant traversant R_1 et R_2. Alors la loi des nœuds donne : $i_s - i_1 - ic = 0$ (signe pris tq les puissances soient positives). On a alors :

$$P = u_s i_s = \frac{R_1 + R_2}{R_2^2} u_e^2 + \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_2^2 R_c} u_e^2 \tag{1}$$

- On prend $R_2 \gg R_c$, le premier terme de dissipation de l'AO devient négligeable devant la puissance envoyée à la charge.

Montage passe-bas ● ● ○

On considère le montage suivant. L'AO est supposé idéal.



∗ Montrer que la fonctiond e transfert de ce filtre s'écrit sous la forme :

$$H = H_0 \frac{1 + j\omega/\omega_0}{(1 + j\omega/\omega_1)(1 + j\omega/\omega_2)} \tag{2}$$

On donnera l'expression de ω_0, ω_1 et ω_2.

∗ Tracer le diagramme de Bode correspondant en fonction des différentes pulsations en jeu. Expliciter les cas possibles.

∗ On considère désormais que $R = R_1 = R_2$ et $C_1 = C_2 = C$. Simplifier la fonction de transfert, en introduisant $\omega_0 = 1/RC$. A quel type de filtre à t-on affaire ?

∗ On envoie en entrée le signal suivant :

$$U_e(t) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2p+1} \sin(2(p+1)\omega t) \tag{3}$$

On suppose que $\omega \gg \omega_0$. Quel est le signal de sortie U_s ? Donner son allure et commenter.

Correction Montage passe-bas

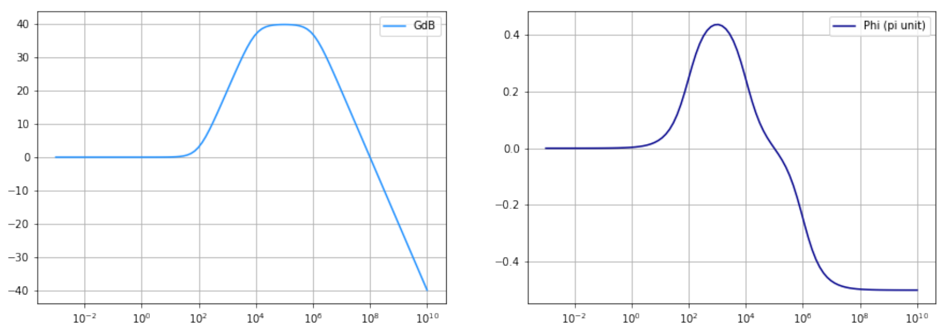
* Fonction de transfert :

$$H = \frac{u_s}{u_e} = \frac{R_1 + R_2}{R} \frac{1 + j\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}(C_1 + C_2)\omega}{(1 + jR_1C_1\omega)(1 + jR_2C_2\omega)} = H_0 \frac{1 + j\omega/\omega_0}{(1 + j\omega/\omega_1)(1 + j\omega/\omega_2)} \tag{4}$$

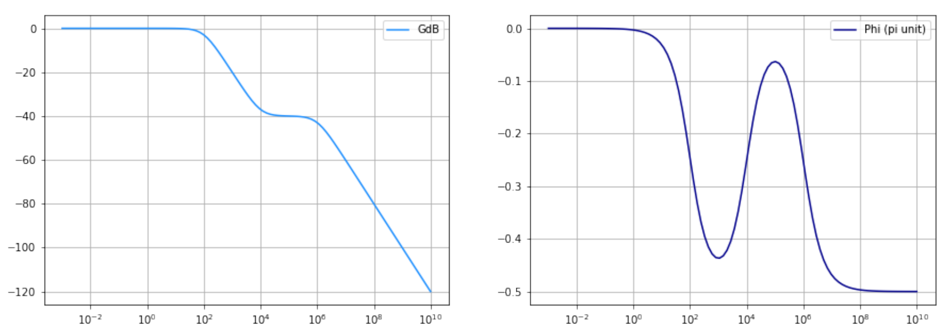
donc $H_0 = \frac{R_1+R_2}{R}$, $\omega_0 = \frac{R_1+R_2}{R_1R_2(C_1+C_2)}$, $\omega_1 = 1/R_1C_1$ et $\omega_2 = 1/R_2C_2$

* Diagramme de Bode : on décompose en somme des diagramme de Bode des différents produits.

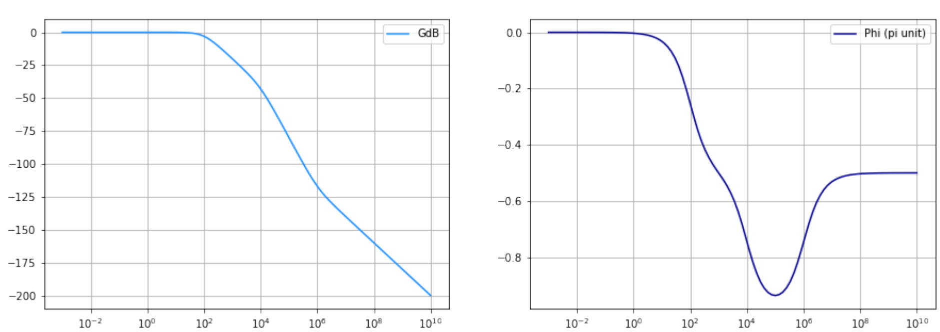
Cas $\omega_0 < \omega_1 < \omega_2$ **:**



Cas $\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$ **:**



Cas $\omega_1 < \omega_2 < \omega_0$ **:**



* Comme $\omega_0 = \omega_1 = \omega_2$ et $H_0 = 2$, la fonction de transfert se simplifie en :

$$H = \frac{2}{(1 + j\omega/\omega_0)} \tag{5}$$

C'est un filtre passe-bas d'ordre 1.

* Le signal d'entrée est un signal créneau (pair, avec les cosinus) : on reconnait la décroissance typique en $1/n$ avec les n impairs seulement. Les coefficients de Fourier sont :

$$\begin{cases} C_n &= \frac{4U_0}{\pi}\frac{1}{2(p+1)} \\ \varphi_n &= -\frac{\pi}{2} \end{cases} \tag{6}$$

On rappelle l'écriture de la décomposition de Fourier :

$$U_e(t) = \sum_{p=0}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \tag{7}$$

La fonction de transfert, dans le cas où $\omega \gg \omega_0$, peut se simplifier en $H \simeq \frac{2\omega_0}{j\omega}$. Les coefficients de Fourier du signal de sortie sont alors :

$$\begin{cases} C'_n &= \frac{4U_0}{\pi}\frac{1}{2(p+1)} \times |H(2(p+1)\omega)| \\ \varphi'_n &= -\frac{\pi}{2} + \mathbf{arg}\left(\frac{2\omega_0}{j\omega}\right) \end{cases} \tag{8}$$

On obtient donc :

$$\begin{cases} C'_n &= \frac{4U_0}{\pi}\frac{2}{(2(p+1))^2}\frac{\omega_0}{\omega} \\ \varphi'_n &= -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \end{cases} \tag{9}$$

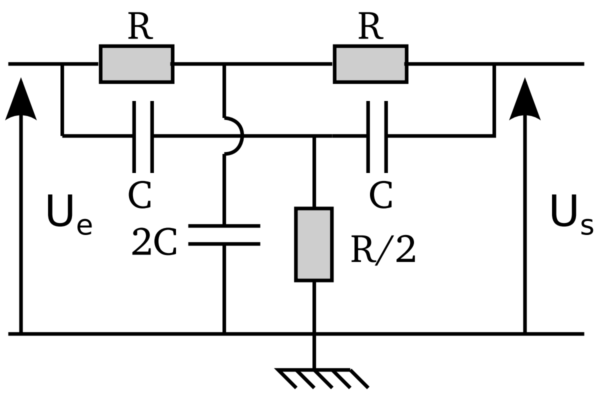
Le signal de sortie est donc :

$$U_s(t) = \frac{2U_0}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \cos(2(p+1)\omega t - \pi) \tag{10}$$

On reconnait la décroissance en $1/n^2$ typique d'un signal triangulaire. C'est normal : le filtre se comporte ici comme un intégrateur.

Exercice 3 • • •

On considère le filtre suivant :



- ♠ Quel est le comportement de ce filtre à basse et haute fréquence ?
- ♠ Montrer que la fonction de transfert peut s'écrire sous la forme :

$$H(x) = \frac{1 + (jx)^2}{1 + 4jx + (jx)^2} \tag{11}$$

  où $x = \omega/\omega_0$ avec ω_0 une pulsation que l'on déterminera. Tracer le diagramme de Bode correspondant.

- ♠ Déterminer la bande "coupante" $\Delta\omega$, cad la plage de pulsations $\Delta\omega$ pour lesquelles $G^{dB}(\omega) \leq G^{dB}_{max} - 3$. On rappelle que $20 \log\left(\sqrt{2}\right) \simeq 3$.
- ♠ On envoie le signal $U_e(t) = U_0 \cos^3(\omega t)$ en entrée, avec $\omega = \omega_0/3$. Déterminer le signal de sortie $U_s(t)$. Tracer schématiquement les signaux.

Correction exercice 3

Le courant de sortie est supposé nul.

- ♠ Comportement : BF, $u_e = u_s$ et HF, $u_e = u_s$, c'est un filtre coupe-bande (l'inverse d'un passe-bande, qui ne laisse rien passer à BF et HF). En BF, le circuit est "flottant", cad il n'es tplus connecté à la masse. Comme l'intensité de sortie est considérée comme nulle, la chute de tension aux bornes des résistances est nulle.

- ♠ Pour la fonction de transfert, on fait une loi des nœuds en A (entre les 2 résistances du haut), en B (entre les 2 capa du milieu) et à la sortie :

$$\begin{cases} \frac{u_e - u_A}{R} + \frac{u_s - u_A}{R} - 2jC\omega u_A = 0 \\ jC\omega(u_e - u_B) + jC\omega(u_s - u_B) - \frac{2}{R}u_B = 0 \\ \frac{u_A - u_s}{R} + jC\omega(u_B - u_s) = 0 \end{cases} \tag{12}$$

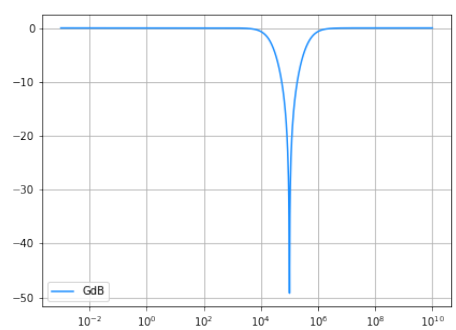
Avec les deux premières lignes, on trouve :

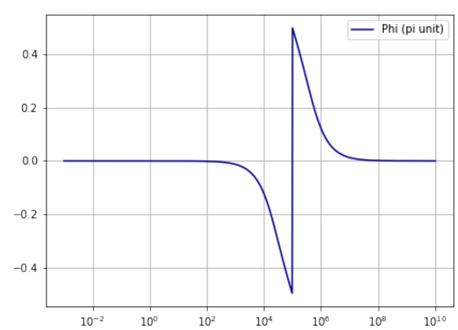
$$\begin{cases} u_A = \frac{u_e + u_s}{2(1 + jRC\omega)} \\ u_B = \frac{u_e + u_s}{2(1 + 1/jRC\omega)} \end{cases} \tag{13}$$

On trouve alors en réinjectant dans la dernière équation :

$$H = \frac{1 + (jRC\omega)^2}{1 + 4jRC\omega + (jRC\omega)^2} \tag{14}$$

Diagramme de Bode : Diagramme assymptotique : $\forall \omega, H = 0$ et pour $\omega = \omega_0 = 1/RC$, dirac à "l'envers" avec $H = -\infty$. C'est bien un coupe-bande.





- ♠ Pour la bande-coupante, on cherche les ω de telle sorte que :

$$G_{DB} = -20\log\left(\frac{|1 - x^2|}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + 16x^2}}\right) = -20\log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \simeq 3 \tag{15}$$

en posant $x = RC\omega$. On tombe alors sur l'équation $(1 - x^2)^2 = 16x^2$, et en enlevant le carré :

$$x^2 \pm 4x - 1 = 0 \tag{16}$$

Avec le signe $\pm$, il y a 4 solutions possibles (2 par équations, qui ont 2 solutions chacunes). Les seules solutions positives sont $\omega_\pm = \frac{\pm 2 + \sqrt{5}}{RC}$.

♠ On peut montrer facilement que le signal d'entrée peut s'écrire sous la forme :

$$U_e(t) = \frac{1}{4}\left(3\cos(\omega t) + \cos(3\omega t)\right) \tag{17}$$

On a donc deux harmoniques, à ω et 3ω, soit :

$$\left\{\begin{array}{llr} C_1 & = \frac{3}{4}, & \varphi_1 = 0 \\ C_3 & = \frac{1}{4}, & \varphi_3 = 0 \end{array}\right. \tag{18}$$

Ces harmoniques deviennent après sortie du filtre :

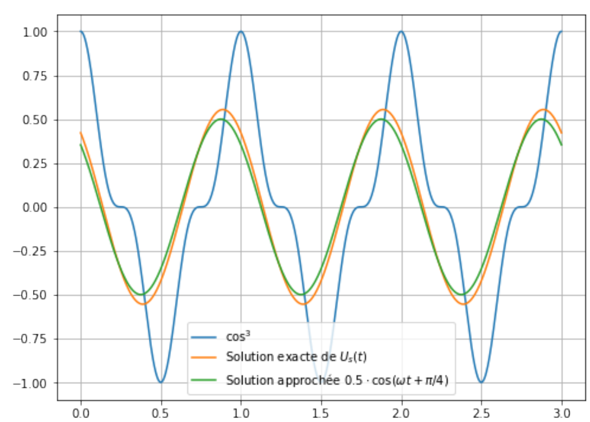
$$\left\{\begin{array}{lll} C_1 & = \frac{3}{4} \times |H(\omega)|, & \varphi_1 = 0 + \mathbf{arg}\left(H(\omega)\right) \\ C_3 & = \frac{1}{4} \times |H(3\omega)|, & \varphi_3 = 0 + \mathbf{arg}\left(H(3\omega)\right) \end{array}\right. \tag{19}$$

Comme $|H(3\omega)| = |H(\omega_0)| = 0$, l'harmonique 3 n'a aucune contribution. Dès lors, pur la première harmonique $x = \omega/\omega_0 = 1/3$:

$$\left\{\begin{array}{ll} C_1 & = \frac{3}{4} \times \left|\frac{1-\frac{1}{9}}{1+j\frac{4}{3}-\frac{1}{9}}\right| = \frac{4}{\sqrt{52}} \simeq \frac{1}{2} \\ \varphi_1 & = -\mathbf{arg}\left(1 + j\frac{4}{3} - \frac{1}{9}\right) = \arctan\left(\frac{27}{32}\right) \simeq \frac{\pi}{4} \end{array}\right. \tag{20}$$

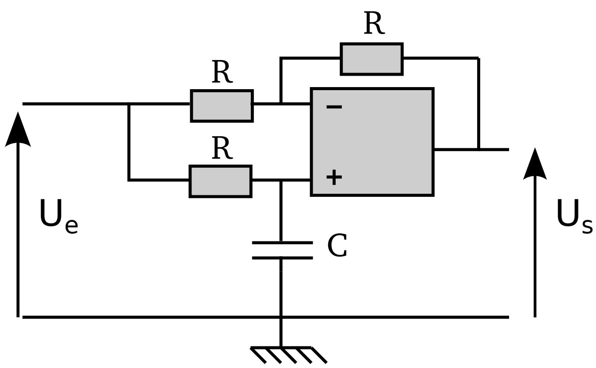
En très grosse approximation, on peut donc dire que :

$$U_s(t) \simeq \frac{1}{2}\cos(\omega t + \pi/4) \tag{21}$$



Exercice 4 ● ● ○

⋆ Explicitez la fonction de transfert de ce filtre, puis calculez son gain et sa phase. On notera ω_0 sa pulsation caractéristique. Quel est son rôle ?



⋆ Pour quelles conditions sur le circuit et le signal d'entrée trouve t-on que le circuit retarde un signal périodique sans le déformer, c'est-à-dire que $U_s(t) = U_e(t-\tau)$? Exprimez alors ce retard τ en fonction de R et C.

On pourra utiliser la décomposition en série de Fourier du signal d'entrée :

$$U_e(t) = \sum_n C_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \tag{22}$$

⋆ On envoie en entrée le signal suivant :

$$U_e(t) = U_0 \cos^3(\omega t) \tag{23}$$

Décrire l'effet du filtre sur ce signal pour $\omega = \frac{\omega_0}{3}$ et $\omega = 10^{-2}\omega_0$, et donner l'allure du signal de sortie. On donne $\arctan(1/3) \simeq \pi/10$.

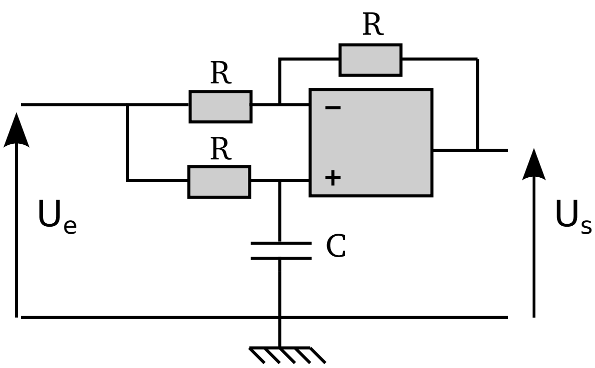
⋆ On suppose le condensateur déchargé à $t = 0$. On envoie un échelon de tension E en entrée. Quelle est la sortie ? Commenter.

Exercice 4 (MP) $\bullet\bullet\circ$

On considère le filtre ci-dessous, où l'amplificateur opérationnel (AO) est supposé fonctionner en régime linéaire. On rappelle qu'en régime linéaire, l'AO idéal suit les propriétés suivantes :

- les tensions d'entrées sont égales $u_+ = u_-$;
- les courants d'entrées sont nuls $i_+ = i_- = 0$;

L'AO ajuste à tout instant la tension u_s et l'intensité i_s de sortie pour que ces deux conditions soient en permanence vérifiées.



- $\star$ Explicitez la fonction de transfert de ce filtre, puis calculez son gain et sa phase. On notera ω_0 sa pulsation caractéristique. Quel est son rôle ?
- $\star$ Pour quelles conditions sur le circuit et le signal d'entrée trouve t-on que le circuit retarde un signal périodique sans le déformer, c'est-à-dire que $U_s(t) = U_e(t-\tau)$? Exprimez alors ce retard τ en fonction de R et C.

  On pourra utiliser la décomposition en série de Fourier du signal d'entrée :

$$U_e(t) = \sum_n C_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \tag{24}$$

- $\star$ On envoie en entrée le signal suivant :

$$U_e(t) = U_0 \cos^3(\omega t) \tag{25}$$

  Décrire l'effet du filtre sur ce signal pour $\omega = \frac{\omega_0}{3}$ et $\omega = 10^{-2}\omega_0$, et donner l'allure du signal de sortie. On donne $\arctan(1/3) \simeq \pi/10$.
- $\star$ On suppose le condensateur déchargé à $t = 0$. On envoie un échelon de tension E en entrée. Quelle est la sortie ? Commenter.

Correction exercice 4

- $\star$ $H = \frac{1-jRC\omega}{1+jRC\omega}$. On remarque que $\mid H \mid = 1$, mais que $\varphi = -2\arctan(RC\omega) = -2\arctan(\omega/\omega_0)$, avec $\omega_0 = 1/RC$. On peut écrire alors H sous la forme :

$$H = e^{-2j\arctan(RC\omega)} \tag{26}$$

C'est un filtre déphaseur.

- $\star$ On part de la décomposition de Fourier d'un signal (quelconque) d'entrée :

$$U_e(t) = \sum_n C_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \tag{27}$$

Après le passage dans le filtre, le signal de sortie :

$$\begin{aligned} U_s(t) &= \textstyle\sum_n C_n |H(n\omega)| \cos(n\omega t + \varphi_n + \mathbf{arg}(H(n\omega)) \\ &= \textstyle\sum_n C_n \cos(n\omega t + \varphi_n - 2\arctan(RCn\omega)) \end{aligned} \tag{28}$$

Or, pour obtenir une forme retardée comme proposée dans l'énoncé, il faut factoriser par le $n\omega$ compris dans le arctan. On le linéarise dans le cas où $RCn\omega \ll 1$, cad $\omega \ll \omega_0$ avec $1/\tau = 1/2RC$.

Dans ce cas-là :

$$\begin{aligned} U_s(t) &= \textstyle\sum_n C_n \cos(n\omega t + \varphi_n - 2RCn\omega) \\ &= \textstyle\sum_n C_n \cos(n\omega(t-\tau) + \varphi_n) \\ &= U_e(t-\tau) \end{aligned} \tag{29}$$

Il faut donc que $\omega \ll 1/RC$, avec toutes les harmoniques qui valident cette condition (ex : signal triangulaire, avec une décroissance rapide de l'amplitude des harmoniques).

- $\star$ On décompose le signal en une série de cosinus : $\cos^3(\omega t) = \frac{1}{4}(3\cos(\omega t) + \cos(3\omega t))$. Le signal de sortie sera donc :

$$U_s(t) = \frac{1}{4}\left[3\cos(\omega t - 2\arctan(\omega/\omega_0)) + \cos(3\omega t - 2\arctan(3\omega/\omega_0))\right] \tag{30}$$

Pour $\omega = \frac{\omega_0}{3}$, on a :

$$\begin{aligned} U_s(t) &= \tfrac{3}{4}\cos(\omega t - 2\arctan(1/3)) + \tfrac{1}{3}\cos(3\omega t - 2\arctan(1) \\ &\simeq \tfrac{3}{4}\cos(\omega t - \pi/5) + \tfrac{1}{3}\cos(3\omega t - \pi/2) \end{aligned} \tag{31}$$

Pour $\omega = 10^{-2}\omega_0$, on a la condition $\omega \ll \omega_0$, avec un retard de phase $\varphi = 2 \cdot 10^{-2}$.

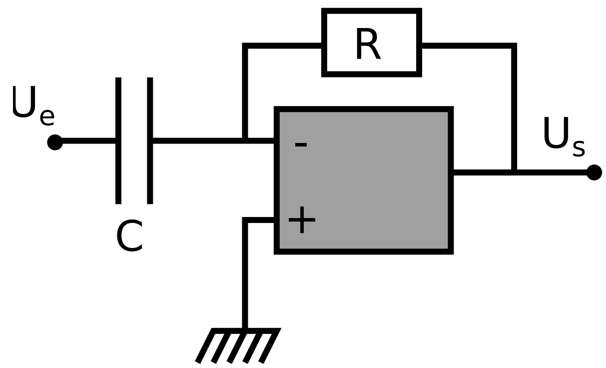
- $\star$ Pour $t < 0$, le condensateur est déchargé donc $u_e(t) = u_s(t) = 0$. Pour $t \geq 0$, le condensateur se charge donc $u_-(t) = E(1 - e^{-t/RC})$, et alors :

$$u_s(t) = 2E(1 - e^{-t/RC}) - E \tag{32}$$

Le signal finit bien par "redevenir" celui d'entrée (car $H = 1$) mais un retard. Attention, ici c'est une transformation de Fourier et non une série de Fourier qu'il faut opérer.

Exercice 5 ● ○ ○

On considère le montage ci-dessous :



- On suppose dans un premier temps que l'AO est idéal. Qu'est-ce que cela signifie ? Calculez la fonction de transfert de ce montage. Quel est son rôle ?
- On suppose désormais que l'AO est réel. On suppose alors que la sortie u_s est reliée à $\varepsilon = u_+ - u_-$ par la relation :
$$\tau \frac{du_s}{dt} + u_s = \mu_0 \varepsilon \tag{33}$$
avec $\mu_0 = 10^5$ et $\frac{\mu_0}{2\pi\tau}$ =1MHz.

  Quel est la nouvelle fonction de transfert ?

  Le montage est il stable ?
- Que se passe t-il si l'on intervertit les bornes + et - de l'AO ?
- A quel type de montage ce circuit s'apparente t-il ? Calculez ses caractéristiques pour $R = 10\text{k}\Omega$ et C =100nF. Pour quelle fréquences agit-il comme un dérivateur ?

Correction exercice 5

- $H = -jRC\omega$ cad $u_s(t) = -RC\frac{du_e}{dt}$. C'est un dérivateur.
- En TF : $u_s = \varepsilon\frac{\mu_0}{1+j\tau\omega}$. Puis loi des nœuds, avec $\varepsilon = u_-$:

$$H(j\omega) = \frac{-\mu_0 jRC\omega}{1+\mu_0+j\omega(\tau+RC)-RC\tau\omega^2} \tag{34}$$

  L'équation différentielle associée à tous ses coefficients du même signe, les solutions sont sinusoïdales donc bornées.

- En inversant les pôles, $\varepsilon = +u_-$. Cela revient à remplacer $\mu_0 \leftarrow -\mu_0$. Le terme de dérivée 0 devient alors $1-\mu_0$ et est négatif donc la solution contient une partie exponentielle et diverge jusqu'à saturation.
- C'est un filtre passe bande d'ordre 2 de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{1+\mu_0}{RC\tau}}$ Sous forme canonique, on a :

$$H(j\omega) = \frac{H_0}{1+jQ(x-\frac{1}{x})} \tag{35}$$

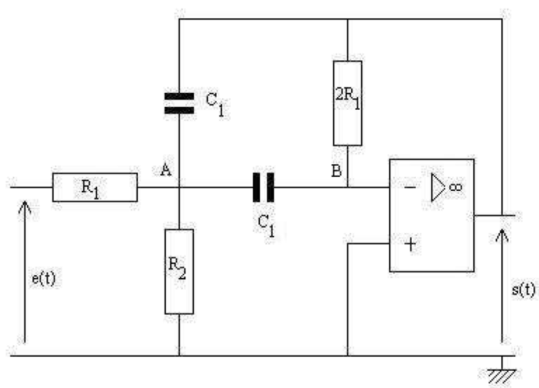
  avec $H_0 = \frac{\mu_0 RC}{\tau+RC} = -5,9\cdot 10^3$ et $Q = \frac{\sqrt{(1+\mu_0)RC\tau}}{\tau+RC} = 74$ Ce filtre est dérivateur pour x petit, cad $H \approx \frac{j\omega}{Q\omega_0}$. Cette condition est vérifiée jusqu'à $x \approx 0,9$ cad $f = 2\pi\omega \approx 11$kHz.

Exercice 6

On étudie le montage ci-dessous dans lequel l'amplificateur opérationnel est supposé idéal et fonctionner en régime linéaire. On rappelle qu'en régime linéaire, l'AO idéal suit les propriétés suivantes :

- les tensions d'entrées sont égales $u_+ = u_-$;
- les courants d'entrées sont nuls $i_+ = i_- = 0$;

L'AO ajuste à tout instant la tension u_s et l'intensité i_s de sortie pour que ces deux conditions soient en permanence vérifiées.



⋆ Montrer que la fonction de transfert peut se mettre sous la forme canonique :

$$H = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

Préciser l'expression de ω_0 et de Q.

⋆ Etudier les variations du gain (diagramme de Bode) en fonction de la fréquence. Quel est le rôle de ce filtre ?

⋆ On met en entrée de ce cricuit une fonction créneau $e(t)$ positive de fréquence $f = 3$kHz et de valeur maximale $E = 10$V. Tracer l'allure du signal de sortie si le circuit est réglé pour $f_0 = 3$kHz et $Q = 20$.

Correction Exercice 6

- ⋆ On applique le théorème de Millman (ou loi des noeuds officiellement...) aux points A et B :

$$\frac{e-V_A}{R_1}-\frac{V_A}{R_2}+jC_1\omega(s-V_A)+jC_1\omega(V_B-V_A)=0$$
$$\frac{s-V_B}{2R_1}+jC_1\omega(V_A-V_B)=0$$

Il faut une troisième équation : on a la condition $V_B=0$. On obtient donc :

$$H=\frac{-1}{1+jR_1C_1\omega+\frac{1}{jR_eC_1\omega}}$$

avec $R_e=\frac{2R_1R_2}{R_1+R_2}$. On trouve donc $Q+\sqrt{R_1/R_e}$ et $\omega=\sqrt{R_1R_e}C_1$.

- ⋆ C'est un passe bande d'ordre 2 de bande passante $\Delta\omega=\omega_0/Q$.

- ⋆ Le signal d'entrée a pour coefficients de Fourier : $c_{p+1}=\frac{2E}{(2p+1)\pi}$ avec p entier. Le fondamental vaut $c_0=E/2$. Le circuit étant accordé sur une fréquence de 3kHz avec une bande passante de 0,15kHz, il ne reste que la première harmonique. Le signal en sortie en donc purement sinusoïdal :

$$s(t)=\frac{2E}{\pi}\sin(\omega t)$$