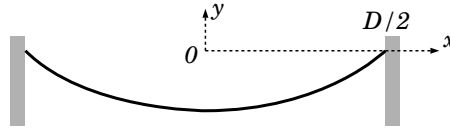


# Étude d'une corde

On considère une corde suspendue entre deux points fixes de même hauteur  $y = 0$ , situés à  $x = -D/2$  et  $x = +D/2$ . La corde a une masse volumique  $\mu$ .

## Cas statique

La corde est supposée dans un premier temps statique.

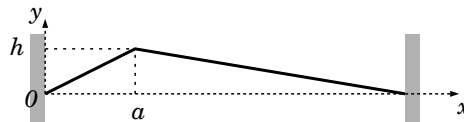


- ★ En appliquant le principe fondamental de la statique sur un élément de corde, déterminer une équation différentielle en  $y(x)$ , correspondant à la hauteur  $y$  de la corde à l'abscisse  $x$ . On fera apparaître une longueur caractéristique  $l_c$ , dont on précisera l'expression.
- ★ Résoudre cette équation différentielle (on pourra résoudre l'équation en utilisant le changement de variable  $p(x) = dy/dx$ ). Trouver la solution à l'aide des conditions aux limites.
- ★ Déterminer la tension  $T(x)$  le long de la corde. A quelle endroit est-elle maximale ? Minimale ? Commenter.
- ★ Exprimer la longueur  $L$  et la *flèche*  $h$  (la hauteur entre le point le plus haut et le plus bas) de la chaîne en fonction du paramètre  $l_c$ . Comment connaître alors la tension dans une chaîne suspendue simplement à partir d'une photographie de celle-ci et de sa masse linéique ?

## Cas dynamique

On considère maintenant que la corde est fortement tendue mais qu'elle n'est plus statique. On cherche à comprendre sa dynamique. On négligera les frottements.

- ◇ Que se passe-t-il lorsque la corde devient extrêmement tendue ? Que peut-on négliger par rapport au cas statique ?
- ◇ Déterminer l'équation régissant  $y(x, t)$  le long de la corde. Comment s'appelle cette équation ? Quelles sont ses solutions ? Commenter.
- ◇ Sachant que la corde est ancrée en  $x = -D/2$  et  $x = +D/2$ , donner l'expression générale de  $y(x, t)$  dans le cas stationnaire.
- ◇ On excite la corde avec une excitation dessinée ci-dessous. Donner l'expression de  $y(x, t)$  dans ce cas-là.



- ◇ Si la corde décrite dans l'exercice est celle d'un instrument de musique (violon, guitare, piano...), comment expliquer la différence de timbre entre ces instruments pour une note donnée ?

## Corde pendue verticalement

On considère une corde attachée au plafond à un point fixe en  $z = 0$  et laissée verticalement à elle-même dans le vide. Elle n'est soumise qu'à la gravité. On notera  $\Psi(z, t)$  l'écart de la corde à la verticale à la hauteur  $z$  à l'instant  $t$ .

- \* En appliquant le principe fondamental de la dynamique, trouver une équation différentielle en  $\Psi(z, t)$ .

On cherche des solutions sous la forme  $\Psi(z, t) = \alpha(z) \cos(\omega t) + \beta(z) \sin(\omega t)$ .

- \* Comment s'appellent ce type de solutions ? Déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $\alpha$  et  $\beta$ .

- \* En posant  $Z = \frac{z\omega^2}{g}$ , trouver un nouveau système d'équation différentielle en  $A(Z) = \alpha(z)/\alpha(0)$ .

- \* On cherche la solution sous la forme d'une série entière  $A(Z) = \sum_k A_k Z^k$ . Déterminer les coefficients  $K$ .

- \* Comment pourrait-on trouver une relation de dispersion  $\omega(k)$  ?