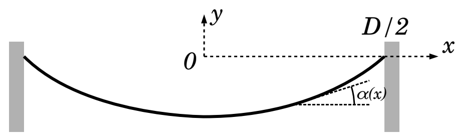
Etude d'une corde statique suspendue

On considère une corde suspendue entre deux points fixes de même hauteur $y = 0$, situés à $x = -D/2$ et $x = +D/2$. La corde a une masse volumique μ et on note $y(x)$ sa hauteur à l'abscisse x. La corde est, statique, n'est soumise qu'à la pesanteur $\vec{g}$ et à sa tension $T(x)$.

On considère le cas général, c'est-à-dire le cas où l'angle α (défini entre la tangeante de la corde et l'horizontale) n'est pas nécessairement petit. On notera respectivement T_0 et α_0 la tension de la corde et l'angle α en $x = -D/2$.



- ⋆ En appliquant une première fois le principe fondamental de la statique sur un élément de corde de longueur dl, montrer que $T(x) \cdot \cos(\alpha(x)) = T_0 \cdot \cos(\alpha_0)$.

- ⋆ En appliquant une seconde fois le principe fondamental de la statique, montrer que $y(x)$ vérfie l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{l_c}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

  On explicitera l'expression de l_c, dont on précisera la dimension.

- ⋆ Résoudre cette équation différentielle. Trouver la solution à l'aide des conditions aux limites. On donne : $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \mathrm{argsh}(x)$

- ⋆ Montrer que le poids total de la corde s'écrit :

$$P = 2\mu g l_c \times \mathrm{sh}\left(\frac{D}{2l_c}\right)$$

- ⋆ Expliciter l'expression de la tension $T(x)$ le long de la corde. A quelle endroit est-elle maximale ? Minimale ? Comparer avec le poids de la corde.

- ⋆ Exprimer la longueur L et la *flèche* h (la hauteur entre le point le plus haut et le plus bas) de la chaîne en fonction du paramètre l_c. Comment connaître alors la tension dans une chaîne suspendue simplement à partir d'une photographie de celle-ci et de sa masse linéique ?

Etude d'un instrument à corde

On considère une corde d'un instrument de musique fixée entre deux points de même hauteur $y = 0$, situés à $x = 0$ et $x = D$. On note $y(x)$ son écart par rapport à l'horizontale (l'axe Ox) à l'abscisse x. La corde a une masse linéique μ et est tendue à une tension T_0 à ses extrémités, suffisamment forte pour que la pesnateur puisse être négligée et que l'écart y reste très petit devant la longueur L de la corde. On négligera par ailleurs les frottements lorsque la corde vibre.

On s'intéresse à la dynamique de la corde, en particulier aux fréquences qui seront générées lorsqu'elle sera soumise à une excitation par le musicien.

- A l'aide des hypothèses données et en utilisant le principe fondamental de la dynamique, montrer que la tension est constante le long de la corde, puis établir une équation différentielle sur $y(x,t)$. On fera intervenir une célérité c que l'on explicitera.

- Quelles sont les solutions générales de cette équation ? Commenter.

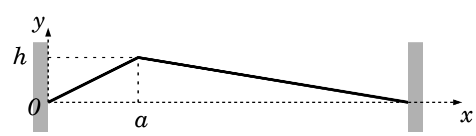
- On s'intéresse aux solution de l'équation s'écrivant sous la forme $y(x,t) = F(x)G(t)$. Comment s'appelle ce type d'onde ? Obtenir de nouvelles équations différentielles sur F et G. Combien y a t-il de constantes d'intégration ?

- On admet que la solution générale sur y s'écrit alors :

$$y(x,t) = \sum_n \left[A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)\right] \cdot \sin(k_n x)$$

  où A_n et B_n sont des constantes. Expliciter l'expression de k_n.

- On excite la corde avec une excitation à $t = 0$ dessinée ci-dessous avec une vitesse initiale nulle. En utilisant ces conditions initiales sur $yx, t = 0)$ et $\dot{y}(x, t = 0)$ et l'expressionde $y(x,t)$, calculer les coefficients A_n et B_n. En déduire les l'expression de $y(x,t)$ dans ce cas-là.



  On rappelle la relation suivante :

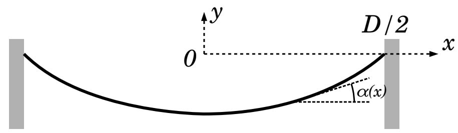
$$\int_0^1 \mathrm{d}u \times \sin(n\pi u) \times \sin(m\pi u) = \frac{\delta_{nm}}{2}$$

  où $\delta_{nm} = 1$ si $n = m$ et $\delta_{nm} = 0$ si $n \neq m$.

Étude d'une corde

On considère une corde suspendue entre deux points fixes de même hauteur $y = 0$, situés à $x = -D/2$ et $x = +D/2$. La corde a une masse volumique μ et on note $y(x)$ sa hauteur à l'abscisse x.

Cas statique La corde est supposée dans un premier temps statique. On considère le cas général, c'est-à-dire le cas où l'angle α (défini entre la tangeante de la corde et l'horizontale) n'est pas nécessairement petit. On notera respectivement T_0 et α_0 la tension de la corde et l'angle α en $x = -D/2$.



- ⋆ En appliquant une première fois le principe fondamental de la statique sur un élément de corde de longueur dl, montrer que $T(x) \cdot \cos(\alpha(x)) = T_0 \cdot \cos(\alpha_0)$.

- ⋆ En appliquant une seconde fois le principe fondamental de la statique, montrer que $y(x)$ vérfie l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{l_c}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

  On explicitera l'expression de l_c, dont on précisera la dimension.

- ⋆ Résoudre cette équation différentielle. Trouver la solution à l'aide des conditions aux limites. On donne : $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \mathrm{argsh}(x)$

- ⋆ Expliciter la tension verticale $T(x) \cdot \sin(\alpha(x))$ le long de la corde. A quelle endroit est-elle maximale ? Minimale ? Commenter.

- ⋆ Exprimer la longueur L et la *flèche* h (la hauteur entre le point le plus haut et le plus bas) de la chaîne en fonction du paramètre l_c. Comment connaître alors la tension dans une chaîne suspendue simplement à partir d'une photographie de celle-ci et de sa masse linéique ?

Cas dynamique On considère maintenant que la corde est fortement tendue ($\alpha \ll 1$, $l_c \longrightarrow \infty$) mais qu'elle n'est plus statique. On cherche à comprendre sa dynamique. On négligera les frottements.

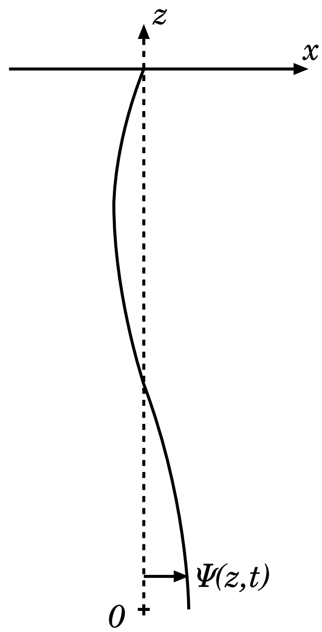
- ⋄ Déterminer l'équation régissant $y(x, t)$ le long de la corde avec $\alpha \ll 1$. Comment s'appelle cette équation ? Quelles sont ses solutions ? Commenter.

- ⋄ Sachant que la corde est ancrée en $x = 0$ et $x = L$, donner l'expression générale de $y(x, t)$ dans le cas de solutions stationnaires.

- ⋄ On excite la corde avec une excitation dessinée ci-dessous. Donner l'expression de $y(x, t)$ dans ce cas-là.

Corde pendue verticalement ★

On considère une corde de masse linéique μ attachée au plafond à un point fixe et laissée verticalement à elle-même dans le vide. On prendra pour origine $z = 0$ le bout de la corde. Elle n'est soumise qu'à la gravité. On notera $\Psi(z,t)$ l'écart de la corde à la verticale à la hauteur z à l'instant t, que l'on supposera très petit par rapport à la longueur L de la corde.



* En appliquant le principe fondamental de la dynamique une première fois sur un élément de corde de longueur dz, montrer que la tension dans la corde n'est pas constante mais s'écrit $T(z) = kz$, en précisant l'expression de k.

* En appliquant une seconde fois le principe fondamental de la dynamique, montrer que $\Psi(z,t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(z,t) = g\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial}{\partial z}\Psi(z,t)\right)$$

  Est-ce une équation d'Alembert ?

On cherche des solutions sous la forme $\Psi(z,t) = \alpha(z)\cos(\omega t) + \beta(z)\sin(\omega t)$.

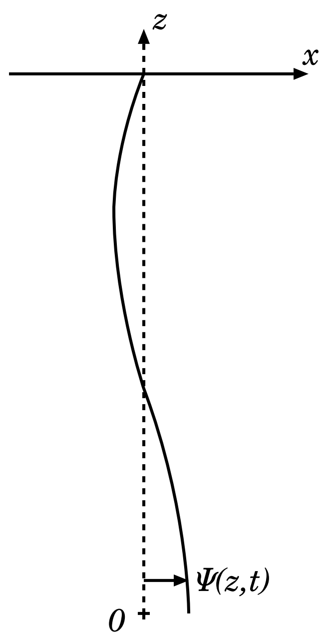
* Comment s'appellent ce type de solutions ? Déterminer l'équation différentielle vérifiée par α et β.

* En posant $Z = \frac{z\omega^2}{g}$, trouver un nouveau système d'équation différentielle en $A(Z) = \alpha(z)/\alpha(0)$.

* On cherche la solution sous la forme d'une série entière $A(Z) = \sum_k A_k Z^K$. Déterminer les coefficients K.

Corde pendue verticalement ★★

On considère une corde de masse linéique μ attachée au plafond à un point fixe et laissée verticalement à elle-même dans le vide. On prendra pour origine $z = 0$ le bout de la corde. Elle n'est soumise qu'à la gravité. On notera $\Psi(z,t)$ l'écart de la corde à la verticale à la hauteur z à l'instant t, que l'on supposera très petit par rapport à la longueur L de la corde.



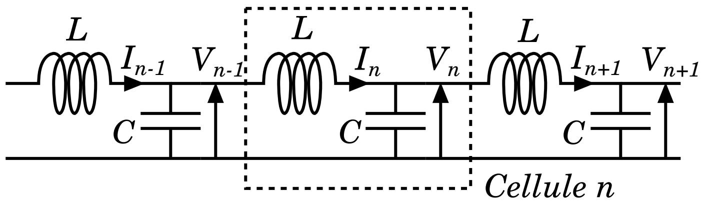
* En appliquant le principe fondamental de la dynamique, trouver une équation différentielle en $\Psi(z,t)$.

On cherche des solutions sous la forme $\Psi(z,t) = \alpha(z)\cos(\omega t) + \beta(z)\sin(\omega t)$.

* Comment s'appellent ce type de solutions ? Déterminer l'équation différentielle vérifiée par α et β.
* En posant $Z = \frac{z\omega^2}{g}$, trouver un nouveau système d'équation différentielle en $A(Z) = \alpha(z)/\alpha(0)$.
* On cherche la solution sous la forme d'une série entière $A(Z) = \sum_k A_k Z^K$. Déterminer les coefficients K.
* Comment pourrait-on trouver une relation de dispersion $\omega(k)$?

Propagation sur une ligne électrique

On considère une ligne électrique composée d'une suite de cellules identiques, constituées d'une inductance L et d'une capacité C comme indiqué sur le schéma ci-dessous. Dans la cellule n, on note V_n la tension au bornes de la capacité et I_n le courant traversant l'inductance.



♠ En établissant des relations entre les courants et les tensions des cellules $n-1$, n et $n+1$, montrer que la tension V_n vérifie la relation suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2 V_n}{\mathrm{d}t^2} = \omega_0^2 (V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n) \tag{1}$$

On précisera l'expression de ω_0.

♠ A quoi correspond la quantité $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}CV_n^2 + \frac{1}{2}LI_n^2\right)$? L'exprimer en fonction de $i_n \times V_{n-1}$ et $i_{n+1} \times V_n$. Interpréter ce résultat.

On cherche une solution sinusoïdale pour $V_n(t)$ de l'équation 4 (on prendra la notation complexe $V_n(t) = A_n \exp(j\omega t)$) de sorte à ce que l'effet après le passage dans une cellule soit un déphasage α fixé : $V_{n+1} = V_n \exp(-j\alpha)$, avec $\alpha > 0$.

♠ Quelle est la signification de la grandeur α en terme de propagation ? Exprimer A_n en fonction de A_0, n et α. En déduire une relation de "dispersion" entre ω et α.

♠ Montrer que ces solutions n'existent que si ω est inférieur à une certaine fréquence ω_c, que l'on exprimera. Si cette condition est vérifiée, pourquoi peut-on parler de propagation de la phase ? Préciser la "vitesse" de propagation v_φ correspondante.

♠ On suppose maintenant que $\omega \ll \omega_c$. En explicitant α en fonction de ω, exprimer v_φ. Que constate t-on ? En déduire l'effet d'une cellule sur un signal électrique, composé de fréquence suffisamment basses, se traduit par un retard temporel τ que l'on exprimera en fonction de ω_0. Application numérique : $C = 10$nF et $L = 25\mu$H, calculer ω_0 et τ. Combien de cellules doit-on mettre pour obtenir un retard de 0.1ms ?

♠ On se place dans le cas où $\omega < \omega_c$ et $\alpha > 0$. Rappeler la définition et l'interprétation de la vitesse de groupe. En donner l'expression en fonction de ω_0 et α et donner son allure de son graphe en fonction de α. Que se passe t-il pour $\alpha = \pi$?

♠ En notation complexe, l'intensité I_n est de la forme $I_n(t) = B_n \exp(j\omega t)$. Exprimer B_n en fonction de A_n, L, ω_0 et α. Calculer la moyenne temporelle de l'énergie de la cellule n $E = \left\langle \frac{1}{2}CV_n^2 + \frac{1}{2}LI_n^2 \right\rangle$, ainsi que celle de la puissance P reçue de la cellule $n-1$. En déduire le rapport P/E. Commenter.

Question supplémentaire

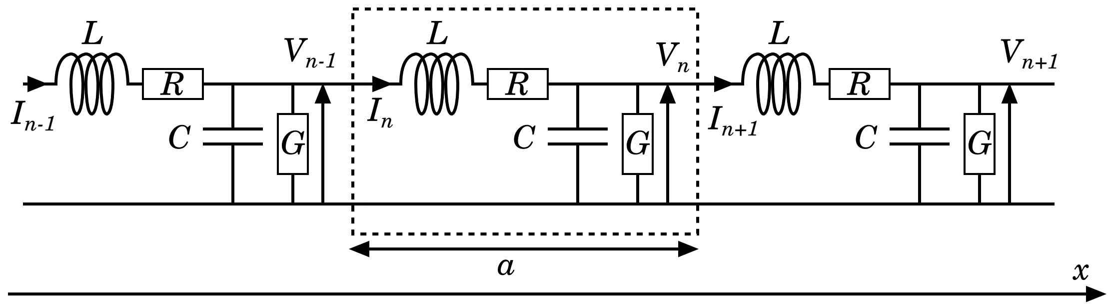
On suppose que l'inductance L et la capacité C sont remplacées respectivement par une inductance linéique Λ et une capacité linéique Γ.

♡ En substituant judicieusement l'indice n par la dimension spatiale x le long du câble coaxial, montrer que l'équation 4 devient une équation d'Alembert.

♡ Dans ce cas-là, par quelle quantité substituer α ? Sur quel type de solutions sur V retombe t-on ? Que devient l'équation de dispersion ? Justifier.

Propagation dans une ligne coaxiale dissipative

On considère une ligne électrique composée d'une suite de cellules identiques, chacunes constituées d'une inductance L, d'une capacité C, d'une résistance R et d'une conductance G, comme indiqué sur le schéma ci-dessous. Dans la cellule n, on note V_n la tension au bornes de la capacité et I_n le courant traversant l'inductance. Le câble s'étend sur l'axe x et on suppose que chaque cellule est de longueur a. On souhaite comprendre la propagation des ondes électromagnétique dans cette ligne.



♠ En établissant judiscieusement des relations entre les courants et les tensions des cellules $n-1$, n et $n+1$, montrer que les tensions V_{n-1}, V_n et V_{n+1} vérifient la relation suivante :

$$\omega_0^2(V_{n+1}+V_{n-1}-2V_n) = \frac{\mathrm{d}^2 V_n}{\mathrm{d}t^2} + \alpha\frac{\mathrm{d}V_n}{\mathrm{d}t} + \beta V_n \tag{2}$$

On précisera l'expression de ω_0, α et β.

♠ Calculer la quantité $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}CV_n^2 + \frac{1}{2}LI_n^2\right)$ en fonction de i_n, i_{n+1}, V_n, V_{n-1} et de R et G. Interpréter physiquement l'ensemble des termes, puis la signification physique de l'équation obtenue.

On souhaite décrire la ligne non plus par le paramètre discret n mais avec le paramètre spatial x, qui est continu. La longueur des cellules étant a, la cellule n se situe à l'absisse $x = na$, la tension aux bornes du condensateur est $V_n(t) \leftarrow V(x,t)$ et l'intensité à travers la bobine est $I_n(t) \leftarrow I(x,t)$. On suppose de plus que les variations de I et V d'une cellule à l'autre sont très faibles de sorte qu'on peut écrire $a \simeq dx$.

♠ Dans cette nouvelle modélisation continue, les caractéristiques du circuit C, L, G et R sont désormais remplacées par respectivement les capacités, inductances, conductances et résistances *linéiques* notées respectivement c, l, g et r. Donner l'expression de c, l, g et r à partir de a et C, L, G et R.

♠ Montrer que $V_{n\pm 1}(t) = V(x \pm dx, t)$. A partir de l'équation trouvée dans la première question, en déduire une équation différentielle sur $V(x,t)$.

♠ En supposant que le milieu n'est pas dissipatif, quelles seraient les solutions de cette équation différentielle ? On donnera la vitesse de propagation correspondante, notée c_0.

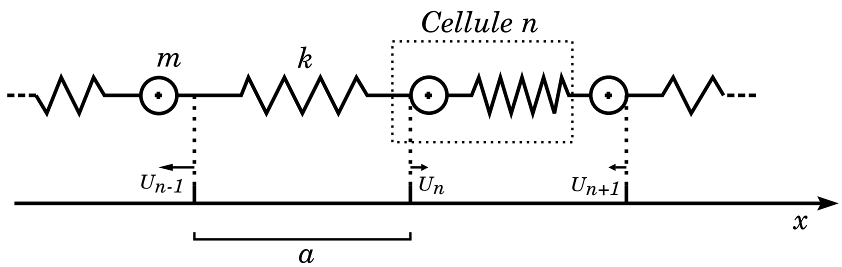
♠ On cherche des solutions propagative du type $V(x,t) = V_0 \exp\left[j(\omega t - kx)\right]$. Montrer que la relation dite de dispersion reliant k et ω s'écrit :

$$k^2 = lc\omega^2 - j(lg + rc)\omega - rg \tag{3}$$

♠ On suppose que la dissipation est faible, c'est-à-dire que $r \ll l\omega$ et $g \ll c\omega$. En faisant un développement limité à l'ordre 2, écrire k sous la forme $k = k' + jk''$, en précisant les expression de k' et k''. Donner alors l'expression de $V(x,t)$ et expliciter une longueur caractéristique δ sur laquelle l'onde se propage. Sous quelle condition la propagation n'est pas dispersive ?

Propagation des ondes sonores dans un solide

Dans un solide, on modélise les atomes du cristal comme une succession de masses m espacées d'une distance a selon l'axe x, et reliées entre elles par un ressort de raideur k. Ce ressort modélise l'intéraction électromagnétique entre deux atomes successifs du réseau cristallin. Lorsque le solide est soumis à un choc extérieur, chaque atome s'écarte de sa position d'équilibre. L'écart à la position d'équilibre du *nième* atome est noté u_n et F_n la force qu'exerce sur lui l'atome $n+1$ suivant. On cherche à décrire la propagation de l'onde sonore qui résulte de ce choc.



- ♠ Montrer que la position u_n de l'atome n vérifie la relation suivante :

$$\ddot{u}_n = \omega_0^2(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) \tag{4}$$

  On précisera l'expression de ω_0.

- ♠ Calculer, en fonction de u_n, u_{n-1}, F_n et F_{n-1}, la quantité :

$$\dot{\varepsilon}_n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}k(u_n - u_{n+1})^2 + \frac{1}{2}m\dot{u}_n^2\right]$$

  Interpréter physiquement l'ensemble des termes.

On cherche une solution sinusoïdale pour $u_n(t)$ de l'équation 4 (on prendra la notation complexe $u_n(t) = A_n \exp(j\omega t)$) de sorte à ce que l'effet après le passage sur un atome soit un déphasage α fixé : $u_{n+1} = u_n \exp(-j\alpha)$, avec $\alpha > 0$.

- ♠ Quelle est la signification de la grandeur α en terme de propagation ? Exprimer A_n en fonction de A_0, n et α. En déduire une relation de "dispersion" entre ω et α.

- ♠ Montrer que ces solutions n'existent que si ω est inférieur à une certaine fréquence ω_c, que l'on exprimera. Si cette condition est vérifiée, pourquoi peut-on parler de propagation de la phase ? Préciser la "vitesse" de propagation v_φ correspondante.

- ♠ On suppose maintenant que $\omega \ll \omega_c$. En explicitant α en fonction de ω, exprimer v_φ. Que constate t-on ? En déduire l'effet d'un atome sur un signal sonore, composé de fréquence suffisamment basses, se traduit par un retard temporel τ que l'on exprimera en fonction de ω_0.

- ♠ On se place dans le cas où $\omega < \omega_c$ et $\alpha > 0$. Rappeler la définition et l'interprétation de la vitesse de groupe. En donner l'expression en fonction de ω_0 et α et donner son allure de son graphe en fonction de α.

- ♠ Que se passe t-il pour $\alpha = \pi$? Commenter. Donner la solution générale de $x_n(t)$ $\forall n$ sachant que $x_0(t) = A_0 \cos(\omega t)$. Calculer la quantité ε_n, puis sa dérivée temporelle $\dot{\varepsilon}_n$. Commenter.

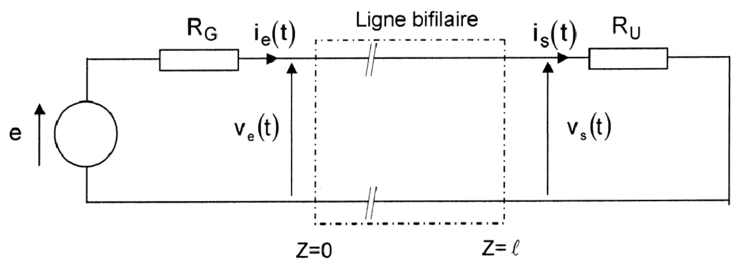
Impédance d'un câble coaxial

On considère une ligne électrique coaxiale de longueur l s'étendant le long de l'axe z, modélisée comme une suite de cellules LC de longueur dz constituées d'une inductance linéique l et d'une capacité linéique c. On notera l'intensité et la tension à l'entrée de la cellule respectivement $i(z,t)$ et $v(z,t)$

- ⋆ Etablir deux équations différentielles entre les dérivées partielles spatiales et temporelles de l'intensité $i(z,t)$ et la tension $v(z,t)$. En déduire que ces deux quantités vérifient une équation de propagation en explicitant la célérité c_0.
- ⋆ On admet que les solutions sont sous la forme $v(z,t) = v_1(t - z/c_0) + v_2(t + z/c_0)$ et $i(z,t) = i_1(t - z/c_0) + i_2(t + z/c_0)$. Commenter la signification physique des indices 1 et 2. Montrer que :

$$v_1(t - z/c_0) = R_c i_1(t - z/c_0)$$
$$v_2(t + z/c_0) = -R_c i_2(t + z/c_0)$$

On branche la ligne coaxiale à une source de tension $e(t)$ idéale en série avec une resistance R_G, qui envoie une impulsion : $e(t < 0) = 0$ et $e(\geq 0) = E$. La ligne est fermée avec une résistance R_u. On note $v_e(t)$ et $v_s(t)$ les tensions à l'entrée et à la sortie de la ligne.



- ⋆ En écrivant les relations électriques adéquates en $z = l$, montrer que $v_2(t+l/c) = \alpha \times v_1(t-l/c_0)$, avec $\alpha = \frac{R_u - R_c}{R_u + R_c}$.
- ⋆ En déduire que $v_2(t) = \alpha \times v_1(t - 2l/c_0)$. Que signifie cette relation phyisquement ? Quelle est la signification de α ? Le calculer pour $R_u = 0$, $R_u = R_c$ et $R_u = \infty$.
- ⋆ En supposant $R_G = R_c$, et en écrivant les relations électriques adéquates en $z = 0$, montrer que $v_1(t) = E/2$ pour $t \geq 0$.
- ⋆ Tracer les graphes des tensions $v_e(t)$, $v_s(t)$ pour $R_u = 0$, $R_u = R_c$ et $R_u = \infty$.