

Le Petit Prince : satellisation d'une pomme

On se place à la surface d'une planète de rayon R et de champ gravitationnel g . On envoie une pomme avec une vitesse v_0 purement horizontale et on négligera les frottements de l'air.

- En supposant la planète localement plane, déterminer la hauteur dz dont est tombée la pomme après avoir parcouru une longueur dx dans le plan horizontal.
- Après une distance horizontale dx , de combien le sol de la planète est-il descendu ? On pourra utiliser les formules pour les petits angles : $\tan \theta \simeq \theta$, $\sin \theta \simeq \theta$ et $\cos \theta \simeq 1 - \theta^2/2$.
- En déduire qu'il existe une certaine vitesse v_0 pour laquelle la pomme va revenir à son point de départ.

Correction - Le Petit Prince : satellisation d'une pomme

- La planète étant supposée parfaitement plane, on peut commencer par calculer l'équation du mouvement de la pomme. Soumise à la seule force de pesanteur, on obtient :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t + x_0 \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + z_0 \end{cases}$$

En supposant que x_0 et z_0 sont les coordonnées de la position initiale. On obtient donc l'équation de la trajectoire :

$$z(x) = -\frac{g(x - x_0)^2}{2v_0^2} + z_0$$

Lorsque la pomme avance de dx par rapport à sa position initiale x_0 , elle descend de z_0 à $z_0 + dz$:

$$z(x_0 + dx) = z_0 + dz = -\frac{gdx^2}{2v_0^2} + z_0$$

Donc $dz = -\frac{gdx^2}{2v_0^2}$.

- Il faut penser à la rotondité de la Terre qui n'est donc pas parfaitement plane localement : $dh = R - R \cos(d\theta) = R(d\theta)^2/2 = (dx)^2/2R$.
- Si la vitesse initiale est suffisamment grande, la chute de la pomme est compensée par le fait que le sol "s'abaisse" en même temps à cause de la rotondité, cad $dh = -dz$, soit $v_0 = \sqrt{gR} = \sqrt{GM_T/R}$.
- Si la pomme revient à son point de départ, c'est que la trajectoire est supposée circulaire, avec R constant. On peut effectuer un PFD sur la pomme en coordonnées cylindriques, et trouver à partir de la projection sur \vec{e}_r :

$$-mR\dot{\theta}^2 = -\frac{GmM_T}{R^2}$$

Soit $v_0 = R\dot{\theta} = \sqrt{GM_T/R}$.

Projectile lancé à la verticale

On tire un petit projectile à la verticale, avec une vitesse initiale v_0 . Le problème est de calculer son altitude z en fonction du temps, en tenant compte de la gravité et de la résistance de l'air. Comme l'objet est petit, on supposera que la résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse et que la force de résistance est $m\gamma v$, m étant la masse de l'objet, v sa vitesse et γ une constante. Nous supposerons que la force de gravité est constante (on néglige sa variation en fonction de l'altitude). On adoptera comme origine la position du tir ($z = 0$) et on supposera que le mouvement ne se produit que dans la direction z .

- Soit $v(t)$ la composante en z de la vitesse du projectile. Écrivez l'équation différentielle que doit satisfaire $v(t)$ en fonction du temps, d'après la deuxième loi de Newton.
- Résoudre cette équation différentielle avec la condition initiale $v(0) = v_0$.
- Exprimer maintenant l'altitude z en fonction du temps.
- Calculer l'altitude maximale atteinte par le projectile (z_{\max}), en fonction des paramètres v_0 , g et γ .
- Exprimer le résultat de la question précédente (z_{\max}) dans les limites de très faible résistance ($\gamma \rightarrow 0$) et de très forte résistance ($\gamma \rightarrow \infty$). Quelles modifications mineures devrait-on apporter à l'équation différentielle trouvée première question pour retrouver ces résultats plus simplement ?

Correction - Projectile lancé à la verticale

Projectile lancé à la verticale

- Rien de bien difficile, en notant $v = \dot{z}$:

$$m\dot{v} = -\gamma mv - mg$$

- La solution de cette équation est :

$$v(t) = \left(v_0 + \frac{g}{\gamma}\right) \exp(-\gamma t) - \frac{g}{\gamma}$$

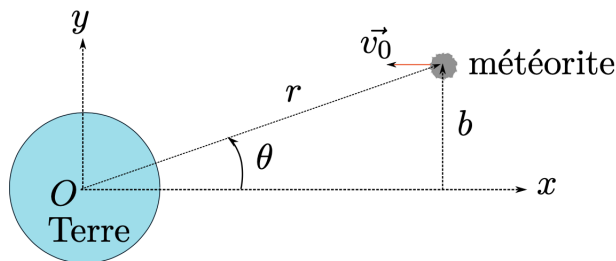
- On intègre l'expression de la vitesse précédente. On trouve :

$$z(t) = \frac{1}{\gamma} \left(v_0 + \frac{g}{\gamma}\right) (1 - \exp(-\gamma t)) - \frac{g}{\gamma} t$$

- L'altitude maximale correspond à l'instant t_0 où la vitesse s'annule : $v(t_0) = 0$, soit $t_0 = \frac{1}{\gamma} \ln\left(\frac{1+v_0\gamma}{g}\right)$. On a donc : $z_{\max} = \frac{v_0}{\gamma} - \frac{g}{\gamma^2} \ln\left(1 + \frac{\gamma v_0}{g}\right)$.
- Dans le cas où $\gamma \rightarrow 0$, $z_{\max} \rightarrow \frac{v_0}{\gamma} - \frac{g}{\gamma^2} \frac{\gamma v_0}{g} + \frac{g}{2\gamma^2} \frac{\gamma^2 v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{2g}$ en utilisant $\ln(1+x) \simeq 1+x-x^2/2$. Cela correspond à une chute libre en l'absence de frottement.
Dans le cas où $\gamma \rightarrow 0$, $z_{\max} \rightarrow \frac{v_0}{\gamma}$

Paramètre d'impact

Une météorite arrive depuis l'infini vers la Terre avec une vitesse à l'infini \vec{v}_0 . La Terre a une masse M_T et un rayon R_T . On note b le paramètre d'impact comme indiqué sur la figure ci-dessous. L'objectif de ce problème est de déterminer la valeur minimale de b pour laquelle la météorite évite la collision avec la Terre.



- La météorite n'est soumise qu'à la force gravitationnelle de la Terre. Déterminer la nature de sa trajectoire. Montrer que le mouvement est plan et déterminer une relation entre r et $\dot{\theta}$.
- On note N le point de la trajectoire où la distance qui sépare la météorite de la Terre est la plus petite. Montrer qu'en N , la vitesse est uniquement suivant \vec{u}_θ . Déterminer une relation entre v_N au point N , la distance ON , b et v_0 .
- En utilisant la conservation de l'énergie, montrer la relation :

$$0 = r_{\min}^2 v_0^2 + 2GM_T r_{\min} - v_0^2 b^2.$$

- En déduire l'expression minimale b_c du paramètre d'impact telle que pour $b < b_c$, la météorite frappe la Terre et pour $b > b_c$, la météorite évite la Terre. On pourra exprimer le résultat en fonction de la vitesse de libération v_{lib} .

Correction - Paramètre d'impact

- La météorite n'est soumise qu'à la gravitation, qui est une force centrale. On peut donc utiliser la conservation du moment cinétique (car le moment des forces est nul). Comme le moment se conserve, il est dirigé orthogonalement au plan délimité par \vec{r}_0 et \vec{v}_0 tout le long de la trajectoire. Le mouvement reste donc inscrit à ce plan.

D'autre part, on a par la conservation du moment :

$$\vec{\sigma}_O(M) = m\vec{r} \wedge \vec{v} = -mr_0v_0\sin(\theta_0) = -mbv_0$$

Et d'autre part, $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$, donc $\vec{\sigma}_O(M) = r^2\dot{\theta} = -mbv_0$.

- La distance ON entre la météorite et la terre correspond à la coordonnée r . Lorsque celle-ci est minimale, on a nécessairement $\dot{r} = 0$. La vitesse s'exprime donc $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.

A ce point, le moment cinétique est $\vec{\sigma}_O = ON \cdot v_N$. Par conservation du moment on a alors :

$$ON \cdot v_N = bv_0$$

- L'énergie potentielle de gravitation s'écrit $E_p = -GM_Tm/r^2$. L'énergie mécanique totale du système est égale au point N et à l'infini (lorsque la météorite arrive à la vitesse v_0), alors :

$$\frac{1}{2}mv_N^2 - \frac{GM_Tm}{r_N}$$

$$0 = r_{\min}^2 v_0^2 + 2GM_T r_{\min} - v_0^2 b^2.$$

- En déduire l'expression minimale b_c du paramètre d'impact telle que pour $b < b_c$, la météorite frappe la Terre et pour $b > b_c$, la météorite évite la Terre. On pourra exprimer le résultat en fonction de la vitesse de libération v_{lib} .

Piège de Penning

A l'aide d'un dispositif approprié, on crée dans une région de l'espace au voisinage d'un point O un champ électrique défini en coordonnées cartésiennes par :

$$\vec{E} = \frac{U_0}{2R^2} (-x\vec{e}_x - y\vec{e}_y + 2z\vec{e}_z)$$

Un électron de masse m et de charge e se meut dans la région située autour du point O .

- ⊖ Montrer que le point O est une position d'équilibre pour l'électron. Discuter de la stabilité selon les directions. On introduira $\omega_z^2 = eU_0/mR^2$.

Pour stabiliser la trajectoire de l'électron, on superpose au champ électrique un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$. On définit $\omega_c = eB_0/m$.

- ⊖ Montrer que le mouvement suivant \vec{e}_z est inchangé.
- ⊖ Pour le mouvement dans le plan (xOy) , montrer que l'électron n'est piégé que si B_0 est supérieur à une certaine valeur B_c , à déterminer en fonction des données de l'exercice. On utilisera le changement de variable : $\rho = x + iy$.
- ⊖ Résoudre l'équation en ρ pour le cas $B_0 \gg B_c$, sans chercher à mettre en évidence les constante d'intégration, mais en mettant en évidence deux pulsations, l'une voisine de ω_c , notée ω'_c , et une autre notée ω_m , appelée pulsation magnétique.

Correction - Piège de Penning

⊖ On applique le principe fondamental de la dynamique à l'électron :

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= e\frac{U_0}{2B^2}x \\ m\ddot{y} &= e\frac{U_0}{2B^2}y \\ m\ddot{z} &= -e\frac{U_0}{R^2}z \end{cases}$$

La position est bien une position de stabilité : les forces appliquées en ce point sont nulles. Néanmoins, ce n'est pas une position stable en x ou en y car la solution est exponentielle. Le mouvement est stable uniquement sur z , avec une pulsation $\omega_z = eU_0/mR^2$.

⊖ LE PFD devient :

$$\begin{cases} \ddot{x} &= \frac{\omega_z^2}{2}x - \omega_c\dot{y} \\ \ddot{y} &= \frac{\omega_z^2}{2}y + \omega_c\dot{x} \\ \ddot{z} &= -\omega_z^2z \end{cases}$$

Le mouvement selon z est bien inchangé.

⊖ En multipliant la seconde première ligne par i , puis en sommant ces deux lignes, on obtient :

$$\ddot{\rho} - \frac{\omega_z^2}{2}\rho - i\omega_c\dot{\rho} = 0$$

Le déterminant de l'équation caractéristique est $\Delta = 2\omega_z^2 - \omega_c^2$. Le mouvement est stable uniquement si $\Delta > 0$, c'est-à-dire si $B_0 > B_c = \sqrt{2mU_0/eR^2}$.

⊖ Les solutions de l'équation caractéristique sont :

$$r = i\frac{\omega_c}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2\omega_z^2}{\omega_c^2}} \right)$$

Les pulsations caractéristiques sont donc $\omega_{\pm} = \frac{\omega_c}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2\omega_z^2}{\omega_c^2}} \right)$. Dans le cas où $B_0 \gg B_c$, $\omega_c \gg \omega_z$ et on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \omega_+ &= \frac{\omega_c}{2} \left(1 + \frac{\omega_z^2}{2\omega_c^2} \right) = \omega'_c \\ \omega_- &= \frac{\omega_z^2}{2\omega_c} = \omega_m \end{aligned}$$

La solution est donc :

$$\rho(t) = Ae^{i\omega'_c t} + Be^{i\omega_m t}$$

L'équation de la trajectoire est donnée par $x(t) = \text{Re}(\rho(t))$ et $y(t) = \text{Im}(\rho(t))$.

Tir à grande distance • • •

Dans le jeu *Call of Duty 4 : Modern Warfare*, le joueur prend le rôle d'un tireur d'élite devant abattre une cible située à une distance $d = 897\text{m}$ à l'aide d'un fusil de précision, qui tire un projectile à une vitesse $v_0 = 850\text{m.s}^{-1}$. Le tir s'effectue depuis le dernier étage d'un immeuble d'une hauteur $H = 30\text{m}$, la cible se trouvant plein nord par rapport au tireur. La scène se situe en Russie, à une latitude $\lambda = 45^\circ$. Le coéquipier du joueur précise, avant le tir, qu'il faut tenir compte de l'effet de Coriolis et l'on souhaite vérifier cette affirmation.

On définit $R = (O, x, y, z)$ le repère situé au pied de l'immeuble où se trouve le joueur, avec l'axe \vec{e}_x dirigé vers l'est et l'axe \vec{e}_y se dirigeant vers le nord. On notera $\vec{\Omega}_T$ le vecteur rotation de la terre. On supposera que les frottements de l'air sont négligés.

† Montrer que les équations du mouvement dans le référentiel R de la balle une fois que le tireur fait feu s'écrivent :

$$\ddot{x} = 2\Omega_T(\sin \lambda \dot{y} - \cos \lambda \dot{z})$$

$$\ddot{y} = -2\Omega_T \sin \lambda \dot{x}$$

$$\ddot{z} = -g + 2\Omega_T \cos \lambda \dot{x}$$

† Déterminer la solution sur $x(t)$ sans préciser les variables d'intégration.

† Donner une estimation du temps de vol avant impact t_{impact} puis simplifier les équations du mouvement, les résoudre.

† Que pensez-vous de l'affirmation du coéquipier ? Quel est l'écart $\vec{\varepsilon}$ de la balle par rapport à si celle-ci avait une trajectoire parfaitement rectiligne ?

Tir à grande distance • • •

Dans le jeu *Call of Duty 4 : Modern Warfare*, le joueur prend le rôle d'un tireur d'élite devant abattre une cible située à une distance $d = 897\text{m}$ à l'aide d'un fusil de précision, qui tire un projectile à une vitesse $v_0 = 850\text{m.s}^{-1}$. Le tir s'effectue depuis le dernier étage d'un immeuble d'une hauteur $H = 30\text{m}$, la cible se trouvant plein nord par rapport au tireur. La scène se situe en Russie, à une latitude $\lambda = 45^\circ$. Le coéquipier du joueur précise, avant le tir, qu'il faut tenir compte de l'effet de Coriolis et l'on souhaite vérifier cette affirmation.

On définit $R = (O, x, y, z)$ le repère situé au pied de l'immeuble où se trouve le joueur, avec l'axe \vec{e}_x dirigé vers l'est et l'axe \vec{e}_y se dirigeant vers le nord. On notera $\vec{\Omega}_T$ le vecteur rotation de la terre. On supposera que les frottements de l'air sont négligés.

† Que pensez-vous de l'affirmation du coéquipier ? Quel est l'écart $\vec{\varepsilon}$ de la balle par rapport à si celle-ci avait une trajectoire parfaitement rectiligne ? On pourra donner une estimation du temps de vol avant impact t_{impact} pour simplifier les équations du mouvement.

Correction - Tir à grande distance

† On note R' le référentiel du tireur, sur la terre en rotation, et R le référentiel galiléen, ne tournant pas avec la terre. Le vecteur rotation de R'/R s'écrit $\vec{\Omega} = \Omega_T \cdot (\cos \lambda \vec{e}_y + \sin \lambda \vec{e}_z)$ et on note le vecteur vitesse dans R' : $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$. Une fois sortie du canon, la balle est uniquement soumise à la gravité et à la force de Coriolis (la force d'inertie d'entraînement est comprise dans g). Cette dernière s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{F}_c &= -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v} \\ &= 2m\Omega_T \begin{vmatrix} \sin \lambda \dot{y} - \cos \lambda \dot{z} \\ -\sin \lambda \dot{x} \\ \cos \lambda \dot{x} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Le PFD donne donc :

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 2\Omega_T(\sin \lambda \dot{y} - \cos \lambda \dot{z}) \\ \ddot{y} &= -2\Omega_T \sin \lambda \dot{x} \\ \ddot{z} &= -g + 2\Omega_T \cos \lambda \dot{x}\end{aligned}$$

Ces équations sont toutes intégrables. On intègre la deuxième et la troisième :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2\Omega_T(\sin \lambda y - \cos \lambda z) \\ \dot{y} &= -2\Omega_T \sin \lambda x + \dot{y}_0 \\ \dot{z} &= -gt + 2\Omega_T \cos \lambda x + \dot{z}_0\end{aligned}$$

Et on injecte dans la première équation sur x , et en simplifiant les $\cos^2 + \sin^2$:

$$\ddot{x} + 4\Omega_T^2 x = 2\Omega_T(\sin \lambda \dot{y}_0 - \cos \lambda \dot{z}_0) + 2\Omega_T \cos \lambda gt$$

Cette équation est soluble : elle du genre $\ddot{x} + \omega_0^2 x = a + bt$. Néanmoins, la solution homogène en \cos et \sin n'est pas très intéressante : la période est celle de la journée terrestre, elle correspond en fait à ce que la balle fasse le tour de la Terre et revienne à sa position... Et en effet, comme $\Omega_T \simeq 7,2 \times 10^{-7} \text{ rad/s}$, on peut commencer à garder uniquement les termes en Ω_T^2 d'ordre 1 devant les autres termes. On a donc, après simplification :

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{3}\Omega_T \cos \lambda t^3 + \Omega_T(\sin \lambda \dot{y}_0 - \cos \lambda \dot{z}_0)t^2 + \dot{x}_0 t \\ y(t) &= -\Omega_T \sin \lambda \dot{x}_0 t^2 + \dot{y}_0 t \\ z(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + \Omega_T \cos \lambda \dot{x}_0 t^2 + \dot{z}_0 t + z_0\end{aligned}$$

On a donc les équations du mouvement. Néanmoins, cela reste encore un peu dur de conclure. On peut encore essayer de simplifier certains termes, en utilisant l'estimation du temps de vol et la vitesse initiale. Le temps de vol, estimé à 1s environ, permet de comparer le premier et le deuxième terme dans l'équation sur $x(t)$: $\frac{1}{3}gt^3 \ll \dot{y}_0 t^2$, durant tout le temps de vol, comme $\dot{y}_0 \simeq 850$. D'autre part, comme le tir est dirigé plein nord, on a $\dot{x}_0 = 0$. On a alors :

$$\begin{aligned}x(t) &= \Omega_T(\sin \lambda \dot{y}_0 - \cos \lambda \dot{z}_0)t^2 \\ y(t) &= \dot{y}_0 t \\ z(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + \dot{z}_0 t + z_0\end{aligned}$$

Et en notant α l'angle que fait le tireur entre l'horizontale et la direction du canon (comme il est situé sur un immeuble, il y a un léger dénivelé entre lui et sa cible), on a :

$$\begin{aligned}x(t) &= v_0 \Omega_T \sin(\lambda + \alpha)t^2 \\ y(t) &= v_0 \cos(\alpha)t \\ z(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 - v_0 \sin(\alpha)t + z_0\end{aligned}$$

Finalement, on se retrouve avec globalement une chute libre classique, si ce n'est un terme de déviation uniquement sur x , vers l'est. Si la balle partait de manière parfaitement rectiligne, sa trajectoire serait (soumise à aucune force) :

$$\begin{aligned}x'(t) &= 0 \\y'(t) &= v_0 \cos(\alpha)t \\z'(t) &= -v_0 \sin(\alpha)t + z_0\end{aligned}$$

La déviation est donc $\vec{\varepsilon} = v_0 \Omega_T \sin(\lambda + \alpha) t^2 \vec{e}_x - \frac{1}{2} g t^2 \vec{e}_z$. Pour un temps de vol d'environ 1 seconde, on trouve que :

$$\vec{\varepsilon} = -0,5 \vec{e}_z + 0,04 \vec{e}_x$$

La balle est déviée de seulement 4cm vers l'est : Coriolis est donc négligeable. Par contre, il faut tenir compte du poids dont l'effet est bien plus marqué.