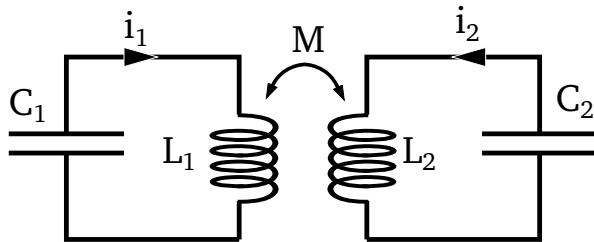


Induction mutuelle entre deux circuits

3° On considère les deux circuits LC suivants, composés de capacités C_1 et C_2 et de bobines d'inductance propre L_1 et L_2 et d'inductance mutuelle M .



♣ Qu'est-ce que l'inductance propre ? Leur induction mutuelle ? Quelle condition a-t-on nécessairement entre L_1 , L_2 et M ?

♣ Déterminer les équations différentielles satisfaites par i_1 et i_2 .

On supposera dans la suite que $L_1 = L_2 = L$ et $C_1 = C_2 = C$.

♣ En proposant un changement de fonction bien choisi avec i_1 et i_2 , trouver la solution générale pour i_1 et i_2 . Pourquoi parle-t-on de modes propres ?

♣ Quelle est l'allure du spectre de i_1 ? Dans le cas d'un faible couplage M , montrer que le spectre se scinde en deux harmoniques centrées autour de ω_0 , séparées en fréquence de $\delta\omega$, que l'on déterminera.

♣ On suppose qu'à $t = 0$, les deux condensateurs sont déchargés. Pour quelles valeurs de $i_1(t = 0)$ et $i_2(t = 0)$ y a-t-il qu'une fréquence dans le spectre de i_1 et i_2 ?

♣ Réaliser un bilan de puissance électrique et commenter.

On retourne au cas général : on suppose que $L_1 \neq L_2$ et $C_1 \neq C_2$.

♣ Montrer que l'on peut écrire le système d'équation différentielle vérifiée par i_1 et i_2 sous la forme :

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{I}}{dt^2} + \mathbf{I} = 0$$

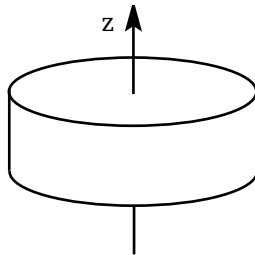
où \mathbf{M} est une matrice 2×2 dont on précisera les coefficients et \mathbf{I} est le vecteur :

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

♣ Montrer que les vecteurs propres \hat{i}_1 et \hat{i}_2 de cette équation matricielle sont solutions d'une équation différentielle que l'on précisera ; expliciter des pulsations propres ω_1 et ω_2 et donner les expressions de \hat{i}_1 et \hat{i}_2

Courants de Foucault dans un cylindre en rotation

Un cylindre conducteur plein et de conductivité γ est en rotation de vitesse angulaire constante ω autour de son axe Oz. L'axe est en matière isolante.



Champ axial

Un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ est appliqué.

- ◇ En considérant la force de Lorentz qui s'exerce sur les électrons de conduction, analyser les effets de la rotation du cylindre pour justifier l'établissement d'un régime permanent. Existe-t-il des courants de Foucault lorsque ce régime est établi ?
- ◇ En régime permanent, montrer à l'aide de la force de Laplace que l'effet du champ magnétique est équivalent à un champ électrique \vec{E}_m dont on précisera l'expression. Quelle est alors la répartition des charges dans le cylindre ?

Champ transverse

On applique désormais un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0 \vec{e}_x$ transverse à l'axe de rotation.

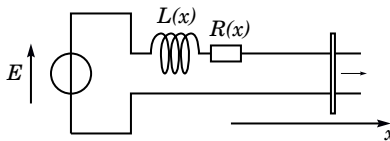
- Justifier l'existence de courants de Foucault dans ce cas en prévoyant leur allure (on pourra s'appuyer sur la force de Lorentz). Quel est leur effet mécanique ?

Si le cylindre est très long, la densité de courant est de la forme $\vec{j} = j(r, \theta) \vec{e}_z$. On suppose de plus que les phénomènes électromagnétiques proches des extrémités supérieures et inférieures (les disques) sont négligeables par rapport à ceux ayant lieu le long du cylindre.

- Quelle est la relation entre $\vec{j}(r, \theta)$ et $\vec{j}(r, \theta + \pi)$?
- A l'aide d'un contour soigneusement choisi, utiliser l'équation de Maxwell Faraday pour déterminer le champ électrique $\vec{E}(r, t)$ à l'intérieur du cylindre.
- Exprimer alors l'expression de $\vec{j}(r, \theta)$
- Quelle est la puissance dissipée dans le cylindre ?
- Déterminer le moment des efforts de Laplace par rapport à l'axe de rotation.

Canon électromagnétique

On considère un circuit électrique équipé d'un générateur et de deux rails parallèles sur lesquels se trouve un barreau mobile, se déplaçant suivant x . L'inductance $L(x)$ et la résistance $R(x)$ dépendent alors de x . Le générateur impose un courant $I(t)$ à travers le circuit.



Cas statique

On suppose dans un premier temps que le mobile est fixé à $x = x_0$ et ne peut pas se mouvoir.

- ♡ Exprimer le flux magnétique à travers le circuit et en déduire la force électromotrice d'auto-induction.
- ♡ Lors de l'établissement du courant de 0 à $I(t)$, le générateur doit fournir une énergie magnétique E_m en plus de l'énergie dissipée par effet Joule. Quelle est l'expression de E_m ?

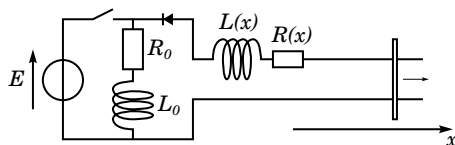
Cas mobile

Le barreau est supposée désormais libre de ses mouvement selon l'axe x .

- △ Lorsqu'un courant électrique parcourt le circuit, le barreau se met en mouvement. Expliquer. Exprimer, à l'instant t , la puissance fournie par le générateur en sus de celle dissipée par effet Joule.
- △ Une partie de cette puissance correspond à la variation de E_m , une autre correspond à la puissance mécanique P_{mca} donnée au barreau. Donner l'expression de P_{mca} . Quelle force s'exerce sur le barreau ?

Étude du mouvement

On suppose que le générateur est constitué d'une dynamo couplée à une bobine d'inductance L_0 et de résistance R_0 . Tant que l'interrupteur C est fermé, la dynamo impose un fort courant I_0 dans la bobine. A $t = 0$, où l'on ouvre C , le courant s'écoule alors dans les rails et accélère le barreau.



On suppose par ailleurs que $L(x) = L'x$ et $R(x) = R'x$, où L' et R' sont respectivement l'inductance et la résistance linéique du barreau.

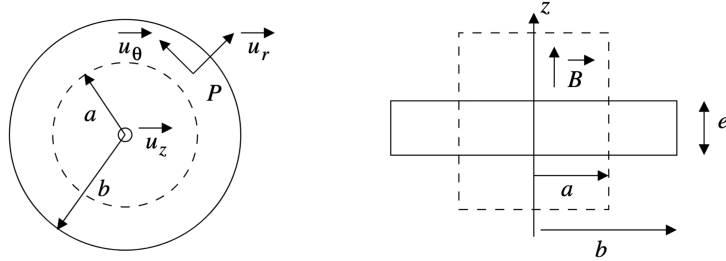
- ◇ Écrire la force électromotrice du circuit déformable, puis l'équation électrique du circuit.
- ◇ Ecrire l'équation du mouvement du barreau. On notera sa masse M .
- ◇ Quelles sont les conditions initiales ? Existe-t-il des solutions stationnaires ?
- ◇ On suppose que L_0 est très "grande". Justifier que $I(t) \simeq I_0$ et en déduire $\dot{x}(t)$ et $x(t)$.

Question supplémentaire : déterminer l'inductance et la résistance linéique dans le cas de deux rails cylindriques de rayon a , distants de b et de conductivité γ .

Chauffage par induction

Un disque métallique de conductivité σ , d'axe Oz vertical, de rayon b et d'épaisseur e est plongé dans un champ magnétique \vec{B} . Ce champ magnétique a les caractéristiques suivantes :

- Il est localisé dans un cylindre d'axe vertical Oz et de rayon a ;
- il est uniforme dans le cylindre précédent et nul à l'extérieur de ce cylindre ;
- il est dirigé suivant \vec{e}_z ;
- il varie au cours du temps selon $\vec{B} = B_m \cos(\omega t) \vec{e}_z$.



On admettra par la suite que le champ magnétique induit est négligeable devant le champ magnétique extérieur appliqué.

- ♣ Justifiez l'existence de courants de Foucault dans le cylindre métallique de la forme $\vec{j} = j(r, t) \vec{e}_\theta$.
- ♣ A l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday, exprimer $j(r, t)$ en fonction des données du problème.
- ♣ Quelle est l'expression de la puissance dissipée par effet Joule P_{Joule} ? Donner sa valeur moyenne $\langle P_{Joule} \rangle$
- ♣ Ce dispositif est utilisé dans des plaques électrique de cuisine pour chauffer une casserole. Comment créer en pratique le champ magnétique souhaité ?
- ♣ Le champ magnétique utilisé a une pulsation de $\omega = 2 \times 10^5 \text{ rad.s}^{-1}$ et son intensité de l'ordre de 10^{-4} T . On considère une plaque à induction de rayon $b = 10 \text{ cm}$ et une casserole dont le fond a le même rayon $a = b = 10 \text{ cm}$ et une conductivité $\sigma = 6,0 \times 10^7 \text{ S.m}^{-1}$. Déterminer l'ordre de grandeur de la puissance dissipée dans le fond de la casserole.

Questions supplémentaires

- ◇ Dans l'énoncé, on suppose que le champ induit dans la plaque est négligeable. Comment cela se traduit-il sur le coefficient d'auto-induction de la plaque L_p et le coefficient d'induction mutuelle M ?
- ◇ A partir d'un raisonnement énergétique, expliquer pourquoi le dispositif est équipé d'un système de sécurité coupant le champ \vec{B} dès qu'on éloigne la casserole de la plaque.