

## Le Petit Prince : satellisation d'une pomme

- La planète étant supposée parfaitement plane, on peut commencer par calculer l'équation du mouvement de la pomme. Soumise à la seule force de pesanteur, on obtient :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t + x_0 \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + z_0 \end{cases}$$

En supposant que  $x_0$  et  $z_0$  sont les coordonnées de la position initiale. On obtient donc l'équation de la trajectoire :

$$z(x) = -\frac{g(x - x_0)^2}{2v_0^2} + z_0$$

Lorsque la pomme avance de  $dx$  par rapport à sa position initiale  $x_0$ , elle descend de  $z_0$  à  $z_0 + dz$  :

$$z(x_0 + dx) = z_0 + dz = -\frac{gdx^2}{2v_0^2} + z_0$$

Donc  $dz = -\frac{gdx^2}{2v_0^2}$ .

- Il faut penser à la rotondité de la Terre qui n'est donc pas parfaitement plane localement :  $dh = R - R \cos(d\theta) = R(d\theta)^2/2 = (dx)^2/2R$ .
- Si la vitesse initiale est suffisamment grande, la chute de la pomme est compensée par le fait que le sol "s'abaisse" en même temps à cause de la rotondité, cad  $dh = -dz$ , soit  $v_0 = \sqrt{gR} = \sqrt{GM_T/R}$ .
- Si la pomme revient à son point de départ, c'est que la trajectoire est supposée circulaire, avec  $R$  constant. On peut effectuer un PFD sur la pomme en coordonnées cylindriques, et trouver à partir de la projection sur  $\vec{e}_r$  :

$$-mR\dot{\theta}^2 = -\frac{GmM_T}{R^2}$$

Soit  $v_0 = R\dot{\theta} = \sqrt{GM_T/R}$ .

## Projectile lancé à la verticale

- Rien de bien difficile, en notant  $v = \dot{z}$  :

$$m\dot{v} = -\gamma mv - mg$$

- La solution de cette équation est :

$$v(t) = \left(v_0 + \frac{g}{\gamma}\right) \exp(-\gamma t) - \frac{g}{\gamma}$$

- On intègre l'expression de la vitesse précédente. On trouve :

$$z(t) = \frac{1}{\gamma} \left(v_0 + \frac{g}{\gamma}\right) (1 - \exp(-\gamma t)) - \frac{g}{\gamma} t$$

- L'altitude maximale correspond à l'instant  $t_0$  où la vitesse s'annule :  $v(t_0) = 0$ , soit  $t_0 = \frac{1}{\gamma} \ln\left(\frac{1+v_0\gamma}{g}\right)$ . On a donc :  $z_{\max} = \frac{v_0}{\gamma} - \frac{g}{\gamma^2} \ln\left(1 + \frac{\gamma v_0}{g}\right)$ .
- Dans le cas où  $\gamma \rightarrow 0$ ,  $z_{\max} \rightarrow \frac{v_0}{\gamma} - \frac{g}{\gamma^2} \frac{\gamma v_0}{g} + \frac{g}{2\gamma^2} \frac{\gamma^2 v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{2g}$  en utilisant  $\ln(1+x) \simeq 1+x-x^2/2$ . Cela correspond à une chute libre en l'absence de frottement.

Dans le cas où  $\gamma \rightarrow 0$ ,  $z_{\max} \rightarrow \frac{v_0}{\gamma}$

## Paramètre d'impact

- La météorite n'est soumise qu'à la gravitation, qui est une force centrale. On peut donc utiliser la conservation du moment cinétique (car le moment des forces est nul). Comme le moment se conserve, il est dirigé orthogonalement au plan délimité par  $\vec{r}_0$  et  $\vec{v}_0$  tout le long de la trajectoire. Le mouvement reste donc inscrit à ce plan.

D'autre part, on a par la conservation du moment :

$$\vec{\sigma}_O(M) = m\vec{r} \wedge \vec{v} = -mr_0 v_0 \sin(\theta_0) = -mbv_0$$

Et d'autre part,  $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ , donc  $\vec{\sigma}_O(M) = r^2\dot{\theta} = -mbv_0$ .

- La distance  $ON$  entre la météorite et la terre correspond à la coordonnée  $r$ . Lorsque celle-ci est minimale, on a nécessairement  $\dot{r} = 0$ . La vitesse s'exprime donc  $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ .

A ce point, le moment cinétique est  $\vec{\sigma}_O = ON \cdot v_N$ . Par conservation du moment on a alors :

$$ON \cdot v_N = bv_0$$

- L'énergie potentielle de gravitation s'écrit  $E_p = -GM_T m/r^2$ . L'énergie mécanique totale du système est égale au point  $N$  et à l'infini (lorsque la météorite arrive à la vitesse  $v_0$ ), alors :

$$\frac{1}{2}mv_N^2 - \frac{GM_T m}{r_N}$$

$$0 = r_{\min}^2 v_0^2 + 2GM_T r_{\min} - v_0^2 b^2.$$

- En déduire l'expression minimale  $b_c$  du paramètre d'impact telle que pour  $b < b_c$ , la météorite frappe la Terre et pour  $b > b_c$ , la météorite évite la Terre. On pourra exprimer le résultat en fonction de la vitesse de libération  $v_{\text{lib}}$ .

## Piège de Penning

⊖ On applique le principe fondamental de la dynamique à l'électron :

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= e\frac{U_0}{2B^2}x \\ m\ddot{y} &= e\frac{U_0}{2B^2}y \\ m\ddot{z} &= -e\frac{U_0}{R^2}z \end{cases}$$

La position est bien une position de stabilité : les forces appliquées en ce point sont nulles. Néanmoins, ce n'est pas une position stable en  $x$  ou en  $y$  car la solution est exponentielle. Le mouvement est stable uniquement sur  $z$ , avec une pulsation  $\omega_z = eU_0/mR^2$ .

⊖ LE PFD devient :

$$\begin{cases} \ddot{x} &= \frac{\omega_z^2}{2}x - \omega_c\dot{y} \\ \ddot{y} &= \frac{\omega_z^2}{2}y + \omega_c\dot{x} \\ \ddot{z} &= -\omega_z^2z \end{cases}$$

Le mouvement selon  $z$  est bien inchangé.

⊖ En multipliant la seconde première ligne par  $i$ , puis en sommant ces deux lignes, on obtient :

$$\ddot{\rho} - \frac{\omega_z^2}{2}\rho - i\omega_c\dot{\rho} = 0$$

Le déterminant de l'équation caractéristique est  $\Delta = 2\omega_z^2 - \omega_c^2$ . Le mouvement est stable uniquement si  $\Delta > 0$ , c'est-à-dire si  $B_0 > B_c = \sqrt{2mU_0/eR^2}$ .

⊖ Les solutions de l'équation caractéristique sont :

$$r = i\frac{\omega_c}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{2\omega_z^2}{\omega_c^2}} \right)$$

Les pulsations caractéristiques sont donc  $\omega_{\pm} = \frac{\omega_c}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{2\omega_z^2}{\omega_c^2}} \right)$ . Dans le cas où  $B_0 \gg B_c$ ,  $\omega_c \gg \omega_z$  et on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \omega_+ &= \frac{\omega_c}{2} \left( 1 + \frac{\omega_z^2}{2\omega_c^2} \right) = \omega'_c \\ \omega_- &= \frac{\omega_z^2}{2\omega_c} = \omega_m \end{aligned}$$

La solution est donc :

$$\rho(t) = Ae^{i\omega'_c t} + Be^{i\omega_m t}$$

L'équation de la trajectoire est donnée par  $x(t) = \text{Re}(\rho(t))$  et  $y(t) = \text{Im}(\rho(t))$ .