Réflexion d'une onde électromagnétique sur des plans métalliques en incidence oblique

On considère une onde plane progressive se propageant dans le vide, selon le vecteur d'onde $\vec{k} = k\cos\theta\vec{u_x} + k\sin\theta\vec{u_y}$ et à la pulsation ω. Elle arrive sur un plan métallique infiniment conducteur situé sur le demi-espace $x > 0$. On notera $\vec{E_i}$ et $\vec{B_i}$ respectivement le champ électrique et le champ magnétique incidents. Le champ électrique est polarisé rectilignement selon Oz et son amplitude est E_0.

- ♡ Retrouver l'équation de propagation des champs électrique et magnétique. Quelle est la relation de dispersion associée ?
- ♡ Expliciter les expressions des champs $\vec{E_i}$ et $\vec{B_i}$.

En arrivant sur l'interface, les relations de passage du champ électromagnétique imposent l'apparition d'une onde réfléchie, dont on notera $\vec{E_r}$ et $\vec{B_r}$ les champ électrique et magnétique. On supposera que $\vec{E_r}$ s'écrit sous la forme :

$$\vec{E_r} = \vec{E_0'} \exp(i\vec{k_r} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

- ♡ Que valent les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ à l'intérieur de la plaque ? Justifier.
- ♡ En utilisant les relations de passage, écrire $\vec{E_r}$ en fonction de E_0, k, ω et θ. En déduire l'expression du champ magnétique réfléchi, $\vec{B_r}$.
- ♡ Quelle est alors l'expression du champ électrique $\vec{E}$ résultant pour $x < 0$? De quel type d'onde s'agit-il ?
- ♡ On place une seconde plaque métallique en $x = -L$. Montrer que la présence de la seconde plaque impose une discrétisation du spectre, c'est-à-dire que seules des fréquences ω discrètes peuvent se propager pour un angle θ donné. Tracer les valeurs prises par ω en fonction de θ.
- ♡ Quelle est la valeur minimale que peut prendre ω ? Justifier.
- ♡ Démontrer que $k_y = \vec{k} \cdot \vec{u_y}$ vérifie l'équation dite de dispersion des modes d'une onde transverse électrique :

$$k_y^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \tag{1}$$

- ♡ Quel est le courant surfacique à la surface de la plaque ?
- ♡ Calculer l'expression du champ magnétique résultant $\vec{B}$ entre les deux plaques et en déduire l'expression du vecteur de Poyting. Commenter.

Propagation d'une onde radio dans un plasma en présence d'un champ magnétique longitudinal

- ♠ On écrit le PFD pour un électron du plasma :

$$m\vec{a} = -e\vec{v} \wedge \vec{B_{ext}} - e\vec{E}$$

NB : dans la force de Lorentz, le champ magnétique de l'OPPM est négligeable par rapport au champ électrique et au champ magnétique extérieur. Pour une puissance solaire de 1kW/m^2, on a un champ électrique de $5 \cdot 10^2\text{V/m}$, et donc un champ magnétique associé de $1\mu\text{T}$ environ. En comparaison, le champ magnétostatique terrestre est de $50\mu\text{T}$.

On trouve alors comme équation :

$$mj\omega \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \end{vmatrix} = -e \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \end{vmatrix} - e \begin{vmatrix} v_y B_e \\ -v_x B_e \end{vmatrix}$$

On a de plus : $\vec{j} = -en_0\vec{v}$. Pour trouver la relation, il faut inverser la matrice formée par (v_x, v_y) pour exprimer les coordonnées de la vitesse en fonction de (E_x, E_y). On trouve :

$$\begin{cases} j_x = \frac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega_c^2-\omega^2}(j\omega E_x - \omega_c E_y) \\ \\ j_y = \frac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega_c^2-\omega^2}(\omega_c E_x + j\omega E_y) \end{cases}$$

Cela correspond à une matrice de conductivité :

$$[\gamma] = \frac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega_c^2 - \omega^2}\begin{pmatrix} j\omega & -\omega_c \\ \omega_c & j\omega \end{pmatrix}$$

- ♠ On appelle cette onde polarisation circulaire car si l'on regarde l'orientation du vecteur électrique au cours du temps, elle décrit un cercle.

- ♠ Les équations de Maxwell permettent d'obtenir rapidement la relation générale suivante :

$$\Delta\vec{E} = \mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

En introduisant les expressions classique d'OPPM dedans, on trouve :

$$\left(\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \cdot \mathbb{1} + j\mu_0\omega\,[\gamma]\right)\vec{E} = \vec{0}$$

Si l'on veut obtenir des solutions non-triviales, cad valable pour $\vec{E} \neq \vec{0}$, il faut que :

$$\det\left(\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \cdot \mathbb{1} + j\mu_0\omega\,[\gamma]\right) = 0$$

cad :

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\omega_p^2}{c^2}\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_c^2} = \pm\frac{\omega_p^2}{c^2}\frac{\omega\omega_c}{\omega^2 - \omega_c^2}$$

Les deux possibilités correspondent à :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)}\right) \quad , \quad E_y = -jE_x$$

Cad une onde circulaire gauche et :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega+\omega_c)}\right) \quad , \quad E_y = +jE_x$$

cad une onde polarisée circulaire droite.

On appelle permittivité relative d'un milieu la quantité complexe ε_r que l'on peut définir ici à travers la relation $k^2 = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 = \varepsilon_r \omega^2/c^2$.

♠ On trouve $\varepsilon_{rg} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega-\omega_c)}$ et $\varepsilon_{rd} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega+\omega_c)}$. Lorsque ε_r est négatif, k est imaginaire pur et l'onde est évanescente, elle ne se propage pas.

Les graphes montrent que la propagation de l'onde circulaire droite est possible pour $\omega > \omega_1$, où ω_1 est la pulsation pour laquelle ε_{rd} devient positif :

$$\omega_1 = \frac{-\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2}}{2}$$

Celle de l'onde circulaire gauche est possible pour $\omega < \omega_c$ ou $\omega > \omega_2$, avec :

$$\omega_2 = \frac{\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2}}{2}$$

♠ Une onde rectiligne peut être considérée comme une superposition de deux ondes circulaires de même amplitude, tournant dans le même sens. Par exemple, pour une onde dirigée suivant $\vec{e_x}$:

$$\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right. = \Re\left(\frac{E_0}{2} \left| \begin{matrix} 1 \\ -i \end{matrix} \right. \exp(j\omega t - kz) + \frac{E_0}{2} \left| \begin{matrix} 1 \\ i \end{matrix} \right. \exp(j\omega t - kz)\right)$$

♠ Si on considère que l'onde rentre dans le plasma en $z = 0$, on a alors à la sortie :

$$\vec{E}(L,t) = \Re\left(\frac{E_0}{2} \left| \begin{matrix} 1 \\ -i \end{matrix} \right. \exp(j\omega t - k_g L) + \frac{E_0}{2} \left| \begin{matrix} 1 \\ i \end{matrix} \right. \exp(j\omega t - k_d L)\right)$$

où k_g et k_d sont les vecteurs d'ondes associées aux ondes polarisées circulaire droite et gauche. On trouve que l'onde de sortie est bien rectiligne :

$$\vec{E}(L,t) = E_0 \left| \begin{matrix} \cos\left(\frac{k_g - k_d}{2} L\right) \\ \sin\left(\frac{k_g - k_d}{2} L\right) \end{matrix} \right. \times \cos\left(\omega t - \frac{k_g + k_d}{2} L\right)$$

La polarisation est donc bien rectiligne avec un angle de décalage $\Psi = \frac{k_g - k_d}{2} L$ Pour $\lambda_0 = 30$cm, $\omega = 2\pi 10^9$rad/s, ce qui est largement supérieur à $\omega_p = 5,6 \cdot 10^7$rad/s. On peut écrire :

$$k_g - k_d = \frac{\omega}{c}\left(-\frac{\omega_p^2}{2\omega(\omega-\omega_c)} + \frac{\omega_p^2}{2\omega(\omega+\omega_c}\right) \simeq \frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega^2} \simeq -1,16 \cdot 10^{-3}\text{rad}$$

C'est une valeur négligeable.

Ondes électromagnétiques dans un métal conducteur

- ◊ Equation de propagation d'Alembert, archi-classique. Avec les données de l'énoncé, on a dans le vide :

$$\begin{cases} \vec{E} & = E_0 \exp[i(kz - \omega t)]\vec{e}_x \\ \vec{B} & = \frac{E_0}{c} \exp[i(kz - \omega t)]\vec{e}_y \end{cases}$$

- ◊ En régime sinusoïdal, l'équation du mouvement des électrons devient :

$$mi\omega\vec{v} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v}$$

Sachant que $\vec{j} = -eN_0$, on a donc :

$$\vec{j} = \gamma\vec{E} = \frac{\varepsilon_0\omega_p^2}{i\omega + \frac{1}{\tau}}\vec{E}$$

Ou encore :

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{1 + i\omega\tau}$$

avec $\gamma_0 = \frac{N_0 e^2 \tau}{m}$ est la conductivité statique du métal.

- ◊ Les équations de Maxwell donnent :

$$\Delta\vec{E} = \mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - i\frac{\gamma}{\varepsilon_0\omega}\right) \\ &= \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - i\frac{i\omega_p^2}{\omega\left(i\omega + \frac{1}{\tau}\right)}\right) \end{aligned}$$

- ◊ Comparer $\omega_c = 1/\tau \simeq 10^{14}$ et $\omega_p \simeq 10^{16}$. On a donc $\omega_c \ll \omega_p$. Il existe bien trois régimes :

  1 - $\omega \ll \omega_c \ll \omega_p$. Régime basse fréquence.

  2 - $\omega_c \ll \omega < \omega_p$. Régime "moyenne" fréquence.

  3 - $\omega_c \ll \omega_p < \omega$. Régime haute fréquence.

On se place dans le cas où $\omega \ll \omega_c$.

- ◊ On trouve alors que :

$$k^2 = -\frac{i\omega_p^2\omega}{\omega_c c^2} = -i\gamma_0\mu_0\omega$$

- ◊ Dans ce cas-là :

$$k = \frac{1 - j}{\delta}$$

avec $\delta = \sqrt{2/\mu_0\gamma\omega}$. Et :

$$\vec{E} = E_0 \exp[-z/\delta] \exp[i(\omega t - z/\delta)]\vec{e}_x \tag{2}$$

On retrouve bien le cas de l'effet de peau à basse fréquence. L'onde se propage encore dans le métal mais son amplitude décroit exponentiellement.

On se place dans le cas où $\omega \gg \omega_c$.

◇ Dans ce cas-là, c'est le terme dissipatif en $m\vec{v}/\tau$ qui devient négligeable, et on se retrouve dans le cas du plasma non dissipatif :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$$

◇ Dans ce cas plasma, la conductivité devient imaginaire pure, donc il n'y a plus de dissipation (le terme $\vec{j} \cdot \vec{E}$ est en $\cos(\omega t)\sin(\omega t)$ et sa valeur moyenne s'annule).

Si $\omega < \omega_p$, k est imaginaire pur : $k = i\delta$ et alors :

$$\vec{E} = E_0 \exp[-z/\delta] \exp[i\omega t]\vec{e}_x \tag{3}$$

avec $\delta = \frac{c^2}{\omega_p^2 - \omega}$. L'onde est stationnaire et evanescente : elle ne se propage plus du tout, contrairement au cas de l'effet de peau.

Si $\omega > \omega_p$, k est réel :

$$\vec{E} = E_0 \exp[-z/\delta] \exp[i(\omega t - kz)]\vec{e}_x \tag{4}$$

L'onde se propage a une vitesse différente que celle-dans le vide mais le métal est transparent pour l'onde.

Bilan

◇ Finalement, résumer les 3 situations rencontrées et justifier les observations décrites dans l'énoncé.

Guide d'onde métallique

★ Ce n'est pas une OPPM : l'amplitude n'est pas uniforme dans le plan orthogonal à la direction de propagation. On ne peut donc pas utiliser la relation de structure ; la relation de dispersion du vide $\omega = kc$ est *a priori* non valide.

★ On utilise $div(\vec{E} = 0$, et on voit rapidement que :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Avec les autres équations de Maxwell, on trouve très facilement l'équation d'Alembert sur $\vec{E}$ dans le guide, qui est assimilé au vide. La présence des parois modifient les conditions aux limites. En injectant l'expression de $\vec{E}$ dans l'équation de propagation, on trouve :

$$f''(y) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) \cdot f(y) = 0$$

Si $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 < 0$, alors on a des solutions exponentielles :

$$f(y) = A\exp(Ky) + B\exp(-Ky)$$

avec $K = -\frac{\omega^2}{c^2} + k^2$

Si $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 > 0$, alors on a des solutions sinusoïdales :

$$f(y) = A\cos(Ky) + B\sin(-Ky)$$

avec $K = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$

★ Les conditions aux limites sont :

$$E_x(y=0) = E(y=b) = 0$$

Elles proviennent des relations de passage à l'interface avec la paroi métallique, où la composante tangentielle du champ électrique est continue. Le champ électrique étant nul dans le métal infiniment conducteur, la composante tangentielle de celui-ci dans le vide doit être nulle. Dans le cas des solutions exponentielles, on aurait :

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ \exp(Kb) + \exp(-Kb) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

La solution serait alors $A = B = 0$. A l'inverse, des solutions sinusoïdales non nulles sont possibles avec ces conditions aux limites, où l'on a $B = 0$ et $A = E_0$, l'amplitude du champ éléctrique :

$$\vec{E} = E_0 \sin(Kx) \exp[i(kz - \omega t)]\vec{e}_x$$

★ Les solution ssinusoïdales trouvées correspondent au cas $K^2 = \omega^2/c^2 - k^2 > 0$, cad $\lambda > 2\pi c/\omega$. A une fréquence donnée, la longueur d'onde doit avoir une valeur minimale.

D'autre part, la condition $f(y = b) = 0$ implique que $\sin(Kb) = 0$, cad que $Kb = m\pi$, où m est un entier, cad :

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = \frac{m^2\pi^2}{b^2}$$

On a alors :

$$\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \exp[i(kz - \omega t)]\vec{e}_x$$

On parle de mode de quantification car pour une pulsation donnée, seuls des valeurs du vecteur d'onde k sont autorisées, discrétisées par la valeur m. Pour $m = 0$, il n'y a aucun mode, donc pas de propagation possible ($f = 0$). Pour $m = 1$, on a un mode, cad un k pour un ω donné, compris entre $[c\pi/b; 2c\pi/b]$. Pour $m = 2$, on a deux modes, cad 2 k pour un ω donné, compris entre $[2c\pi/b; 3c\pi/b]$. Etc. Inversement, pour une pulsation ω donnée, on a $E(\omega b/c\pi)$ modes possibles.

Pour représenter $\vec{E}$, il suffit de représenter les fonctions $\sin(\frac{\pi}{b}y)$ (m=1) et $\sin(\frac{2\pi}{b}y)$ (m=2).

★ Le champ magnétique $\vec{B}$ est donné par Maxwell-Faraday :

$$\nabla \wedge \vec{E} = i\omega \cdot \vec{B}$$

On doit trouver :

$$\begin{aligned} \vec{B} = &\frac{k}{\omega} E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \exp[i(kz - \omega t)]\vec{e}_y \\ &+ \frac{im\pi}{\omega b} E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \exp[i(kz - \omega t)]\vec{e}_z \end{aligned}$$

★ Le vecteur $\vec{\Pi}$ est défini comme :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

NE JAMAIS OUBLIER DE PASSER E ET B EN REEL !

On trouve, après calculs :

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} = &\frac{m\pi}{\omega b \mu_0} E_0^2 \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \cos(kz - \omega t) \sin(kz - \omega t) \cdot \vec{e}_y \\ &+ \frac{k}{\omega \mu_0} E_0^2 \sin^2\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \cos^2(kz - \omega t) \cdot \vec{e}_z \end{aligned}$$

Seule la valeur moyenne temporelle de la composante selon $\vec{e}_z$ est non nulle : l'énergie se propage bien selon la direction de propagation de l'onde.

Réflexion sur un conducteur de conductivité finie

♣ Equation de propagation d'une onde, ou d'Alembert. En injectant l'expression des ondes incidentes et réfléchies, on trouve que $k_i^2 = k_r^2 = \omega^2/c^2$. Le signe est donné par la direction de propagation : on a donc $k_i = \omega/c$ et $k_r = -\omega/c$.

♣ Pour des fréquences inférieures au GHz, on peut négliger dans l'équation de Maxwell-Ampère le courant de déplacement $\vec{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ les courants induits par ce même champ électrique, $\vec{j} = \gamma \vec{E}$, car $\omega\varepsilon_0 \ll \gamma$. On en déduit que le champ électrique vérifie une équation de diffusion :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

En insérant l'expression proposée sur l'onde transmise, on trouve que $k_t^2 = -j\mu_0\gamma\omega$. On a donc :

$$k_t = \frac{1-j}{\delta}$$

avec $\delta = \sqrt{2/\mu_0\gamma\omega}$.

♣ On trouve à partir de la relation de structure $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$:

$$\begin{cases} \vec{B}_i = \vec{B_{0,i}} \exp[i(\omega t - kz)] \vec{e}_y \\ \vec{B}_r = \vec{B_{0,r}} \exp[i(\omega t + kz)] \vec{e}_y \\ \vec{B}_t = \vec{B_{0,t}} \exp[-z/\delta] \exp[i(\omega t - z/\delta)] \vec{e}_y \end{cases} \tag{6}$$

avec $k = \omega/c$, $\vec{B_{0,i}} = \frac{\vec{e}_z \wedge E_{0,i}}{c}$, $\vec{B_{0,r}} = \frac{\vec{e}_z \wedge E_{0,r}}{c}$ et $\vec{B_{0,t}} = \frac{1-i}{\delta} \frac{\vec{e}_z \wedge E_{0,t}}{\omega}$

♣ Il y a continuité des champs électriques et magnétiques : il n'y a ni charges surfaciques, ni courants surfaciques (la conductivité est finie !). On a alors :

$$\begin{cases} E_{0,i} + E_{0,r} = E_{0,t} \\ \frac{\vec{E}_{0,i}}{c} - \frac{\vec{E}_{0,r}}{c} = \vec{E}_{0,t} \frac{(1-j)}{\delta\omega} \end{cases} \tag{7}$$

On trouve alors en faisant le produit vectoriel de la seconde ligne avec $\vec{e}_z$ (on se débarrase des vecteurs) :

$$\begin{cases} r = \frac{1-n}{1+n} = \frac{1-\frac{(1-j)c}{\omega\delta}}{1+\frac{(1-j)c}{\omega\delta}} \\ t = \frac{2}{1+n} = \frac{2}{1-\frac{(1-j)c}{\omega\delta}} \end{cases} \tag{8}$$

avec $n = \frac{(1-j)c}{\omega\delta}$.

♣ On bourrine avec $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$, toujours en notation réelle ! On peut utiliser $(1-j)/\sqrt{2} = \exp(-j\pi/4)$. On trouve alors :

$$\begin{cases} \left\langle \vec{\Pi}_i \right\rangle = \frac{E_{0,i}^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_z \\ \left\langle \vec{\Pi}_r \right\rangle = \frac{E_{0,r}^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_z \\ \left\langle \vec{\Pi}_t \right\rangle = \frac{E_{0,t}^2}{2\mu_0 \omega\delta} \vec{e}_z \end{cases} \tag{9}$$

En $z = 0$, on a :

$$\begin{cases} R = -\frac{\langle \vec{\Pi}_r \rangle \cdot \vec{e}_z}{\langle \vec{\Pi}_i \rangle \cdot \vec{e}_z} = \frac{1+\left(1-\frac{\omega\delta}{c}\right)^2}{1+\left(1+\frac{\omega\delta}{c}\right)^2} \\ T = -\frac{\langle \vec{\Pi}_t \rangle \cdot \vec{e}_z}{\langle \vec{\Pi}_i \rangle \cdot \vec{e}_z} = \frac{4\frac{\omega\delta}{c}}{1+\left(1+\frac{\omega\delta}{c}\right)^2} \end{cases} \tag{10}$$

On trouve évidemment que $R + T = 1$: l'énergie est belle et bien conservée.

♣ La puissance dissipe par unité de volume par effet Joule dans le métal s'écrit :

$$p_{vol} = \vec{j} \cdot \vec{E}_t = \gamma \vec{E}_t \cdot \vec{E}_t$$

Pour obtenir une puissance dissipée, on intègre sur un cylindre de section S, sur la longueur $z \in [0; \infty]$ pour prendre en compte la dissipation sur toute l'épaisseur du métal. La décroissance étant exponentielle, l'intégrale sera définie :

$$\begin{aligned}
\langle P \rangle &= S\gamma \frac{E_{0,t}^2}{2} \int_0^\infty dz \exp[-2z/\delta] \\
&= S\gamma\delta |t|^2 \frac{E_{0,i}^2}{2} \\
&= ST \frac{E_{0,i}^2}{2\mu_0 c} \\
&= S \left\langle \| \vec{\Pi}_t(z=0) \| \right\rangle
\end{aligned}$$