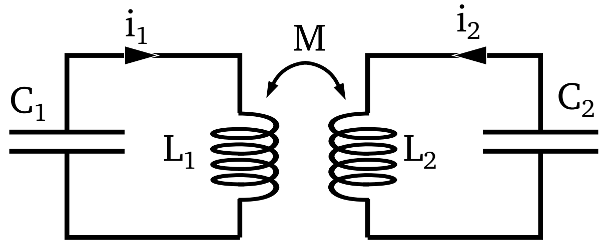
# Induction mutuelle entre deux circuits

On considère les deux circuits $LC$ suivants, composés de capacités $C_1$ et $C_2$ et de bobines d'inductance propre $L_1$ et $L_2$ et d'inductance mutuelle $M$.




- ♣ Qu'est-ce que l'inductance propre ? Leur induction mutuelle ? Quelle condition a t-on nécessairement entre $L_1$, $L_2$ et $M$ ?
- ♣ Déterminer les équations différentielles satisfaites par $i_1$ et $i_2$.

On supposera dans la suite que $L_1 = L_2 = L$ et $C_1 = C_2 = C$.

- ♣ En proposant un changement de fonction bien choisi avec $i_1$ et $i_2$, trouver la solution générale pour $i_1$ et $i_2$. Pourquoi parle t-on de modes propres ?
- ♣ Quelle est l'allure du spectre de $i_1$ ? Dans le cas d'un faible couplage $M$, montrer que le spectre se scinde en deux harmoniques centrées autour de $\omega_0$, séparées en fréquence de $\delta\omega$, que l'on déterminera.
- ♣ On suppose qu'à $t = 0$, les deux condensateurs sont déchargés. Pour quelles valeurs de $i_1(t = 0)$ et $i_2(t = 0)$ y a t-il qu'une fréquence dans le spectre de $i_1$ et $i_2$ ?
- ♣ Réaliser un bilan de puissance électrique et commenter.

On retourne au cas général : on suppose que $L_1 \neq L_2$ et $C_1 \neq C_2$.

- ♣ Montrer que l'on peut écrire le système d'équation différentielle vérifiée par $i_1$ et $i_2$ sous la forme :

$$\mathbf{M}\frac{\mathrm{d}\mathbf{I}^2}{\mathrm{d}t^2} + \mathbf{I} = 0$$

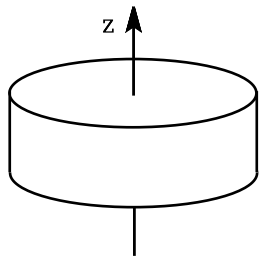
où $\mathbf{M}$ est une matrice $2 \times 2$ dont on précisera les coefficients et I est le vecteur :

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

- ♣ Montrer que les vecteurs propres $\hat{i}_1$ et $\hat{i}_2$ de cette équation matricielle sont solutions d'une équation différentielle que l'on précisera ; expliciter des pulsations propres $\omega_1$ et $\omega_2$ et donner les expressions de $\hat{i}_1$ et $\hat{i}_2$

# Courants de Foucault dans un cylindre en rotation

Un cylindre conducteur plein et de conductivité $\gamma$ est en rotation de vitesse angulaire constante $\omega$ autour de son axe Oz. L'axe est en matière isolante.




### Champ axial

Un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0\vec{e_z}$ est appliqué.

- ♢ En considérant la force de Lorentz qui s'exerce sur les électrons de conduction, analyser les effets de la rotation du cylindre pour justifier l'établissement d'un régime permanent. Existe t-il des courants de Foucault lorsque ce régime est établi ?
- ♢ En régime permanent, montrer à l'aide de la force de Laplace que l'effet du champ magnétique est équivalent à un champ électrique $\vec{E_m}$ dont on précisera l'expression. Quelle est alors la répartition des charges dans le cylindre ?

### Champ transverse

On applique désormais un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0\vec{e_x}$ transverse à l'axe de rotation.

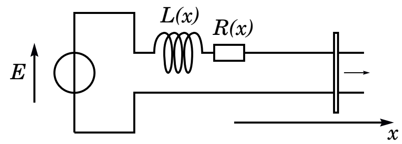
- □ Justifier l'existence de courants de Foucault dans ce cas en prévoyant leur allure (on pourra s'appuyer sur la force de Lorentz). Quel est leur effet mécanique ?

Si le cylindre est très long, la densité de courant est de la forme $\vec{j} = j(r,\theta)\vec{e_z}$. On suppose de plus que les phénomènes électromagnétiques proches des extrémités supérieures et inférieures (les disques) sont négligeables par rapport à ceux ayant lieu le long du cylindre.

- □ Quelle est la relation entre $\vec{j}(r,\theta)$ et $\vec{j}(r,\theta+\pi)$ ?
- □ A l'aide d'un contour soigneusement choisi, utiliser l'équation de Maxwell Faraday pour déterminer le champ électrique $\vec{E}(r,t)$ à l'intérieur du cylindre.
- □ Exprimer alors l'expression de $\vec{j}(r,\theta)$
- □ Quelle est la puissance dissipée dans le cylindre ?
- □ Déterminer le moment des efforts de Laplace par rapport à l'axe de rotation.

# Canon électromagnétique

On considère un circuit électrique équipé d'un générateur et de deux rails parallèles sur lesquels se trouve un barreau mobile, se déplaçant suivant $x$. L'inductance $L(x)$ et la résistance $R(x)$ dépendent alors de $x$. Le générateur impose un courant $I(t)$ à travers le circuit.




### Cas statique

On suppose dans un premier temps que le mobile est fixé à $x = x_0$ et ne peut pas se mouvoir.

♡ Exprimer le flux magnétique à travers le circuit et en déduire la force électromotrice d'auto-induction.

♡ Lors de l'établissement du courant de 0 à $I(t)$, le générateur doit fournir une énergie magnétique $E_m$ en plus de l'énergie dissipée par effet Joule. Quelle est l'expression de $E_m$ ?

### Cas mobile

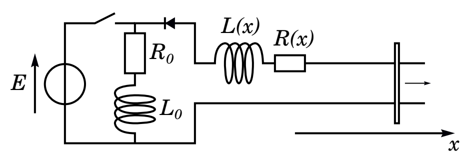
Le barreau est supposée désormais libre de ses mouvement selon l'axe $x$.

△ Lorsqu'un courant électrique parcourt le circuit, le barreau se met en mouvement. Expliquer. Exprimer, à l'instant $t$, la puissance fournie par le générateur en sus de celle dissipée par effet Joule.

△ Une partie de cette puissance correspond à la variation de $E_m$, une autre correspond à la puissance mécanique $P_{mca}$ donnée au barreau. Donner l'expression de $P_{mca}$. Quelle force s'exerce sur le barreau ?

### Étude du mouvement

On suppose que le générateur est constitué d'une dynamo couplée à une bobine d'inductance $L_0$ et de résistance $R_0$. Tant que l'interrupteur $C$ est fermé, la dynamo impose un fort courant $I_0$ dans la bobine. A $t = 0$, où l'on ouvre $C$, le courant s'écoule alors dans les rails et accélère le barreau.




On suppose par ailleurs que $L(x) = L'x$ et $R(x) = R'x$, où $L'$ et $R'$ sont respectivement l'inductance et la résistance linéique du barreau.

♢ Écrire la force électromotrice du circuit déformable, puis l'équation électrique du circuit.

♢ Ecrire l'équation du mouvmeent du barreau. On notera sa masse $M$.

♢ Quelles sont les conditions initiales ? Existe t-il des solutions stationnaires ?

♢ On suppose que $L_0$ est très "grande". Justifier que $I(t) \simeq I_0$ et en déduire $\dot{x}(t)$ et $x(t)$.

Question supplémentaire : déterminer l'inductance et la résistance linéique dans le cas de deux rails cylindriques de rayon $a$, distants de $b$ et de conductivité $\gamma$.