

Approche ontologique du champ magnétique

Approche en mécanique classique

- ♣ Dans un volume $a\Sigma$, on a une charge $+e$ et une charge $-e$, comme celle-ci sont réparties uniformément. Les densités de charges sont donc respectivement $\rho_+ = e/(a\Sigma)$ et $\rho_- = -e/(a\Sigma)$.
- ♣ Par définition, $\vec{j} = \rho\vec{v}$. Comme seuls les électrons ont une vitesse non nulle, $\vec{j} = \rho_- \vec{v}' = ev'/(a\Sigma)\vec{e}_x$. Et donc $I = \oint_{\Sigma} d\vec{S}\vec{j} = ev'/a$.
- ♣ $\rho_{tot} = \rho_+ + \rho_- = 0$ donc $\vec{E} = 0$.
- ♣ Avec le théorème d'Ampère appliqué uniquement en dehors du fil, on trouve :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

(résultat classique d'un fil parcouru par un courant I) La force qui s'exerce sur la charge q est donc :

$$\vec{F} = -\frac{qv\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_r$$

Approche en mécanique relativiste

- ♣ Ainsi, en se déplaçant à la vitesse \vec{v} , la charge $+q$ voit dans son référentiel la distance entre atomes réduite d'un facteur $\gamma_+ = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ et la distance entre électrons de conduction d'un facteur $\gamma_- = 1/\sqrt{1-(v-v')^2/c^2}$. On trouve donc que :

$$\rho_+ = \frac{e}{a\Sigma} \sqrt{1-v^2/c^2}$$

$$\rho_- = \frac{e}{a\Sigma} \sqrt{1-(v+v')^2/c^2}$$

Attention, l'hypothèse que la vitesse relative des électrons par rapport à la charge q est $v' + v$ est une approximation. En mécanique relativiste, la vitesse relative serait :

$$v_{e-/q} = \frac{v' - v}{1 - \frac{vv'}{c^2}} \quad (1)$$

- ♣ On trouve facilement avec le théorème de Gauss que :

$$\vec{E} = \frac{\Sigma(\rho_+ + \rho_-)}{2\pi r \epsilon_0}$$

En développant à l'ordre 2, on trouve :

$$\rho_+ + \rho_- \approx -\frac{e}{a\Sigma} \frac{vv'}{c^2}$$

On trouve alors que :

$$\vec{E} = -\frac{evv'}{2\pi r a \epsilon_0 c^2} \vec{e}_r = -\frac{I\mu_0 v}{2\pi r} \vec{e}_r$$

- ♣ La force de Lorentz associée est donc :

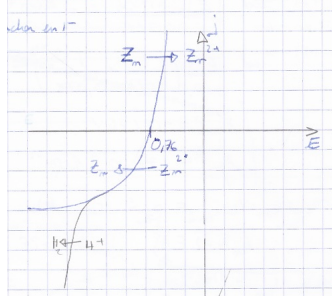
$$\vec{F} = -\frac{qevv'}{2\pi r a \epsilon_0 c^2} \vec{e}_r = -\frac{qI\mu_0 v}{2\pi r} \vec{e}_r$$

Cette expression est identique à celle trouvée par le calcul du champ magnétique en mécanique classique. Le champ magnétique est-il une approximation à l'ordre 2 de la force de Coulomb ?

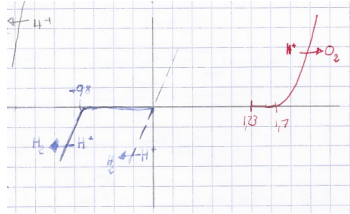
Corrosion en phase aqueuse

Corrosion uniforme du zinc en milieu acide

- ♣ Le potentiel de Nernst est $E_n = E^0 = -0.76V$ comme la concentration de zinc est de 1mol/L .



- ♣ Oui, le type de métal peut modifier la surtension (minimale pour le platine) mais aussi l'état de surface : plus la surface de réaction est grande, moins celle-ci sera limitée par la diffusion des ions H^+ . Par défaut, on suppose que le pH est acide, à 0, comme suggéré dans l'énoncé.



- ♣ $Zn + 2H^+ \longrightarrow Zn^{2+} + H_2$. On rappelle pour que pour voir ce qu'il se passe en oxydation, la première réaction qui se fait est celle de plus bas potentiel. En réduction, la première réaction est celle de plus haut potentiel. Cette réaction est thermodynamiquement possible car $E_{Zn/Zn^{2+}}^0 < E_{H^+/H_2}^0$
- ♣ Par conservation du courant, $i_a + i_c = 0$. comme les surfaces des deux électrodes sont les mêmes, on trouve $j_a + j_c = 0$.

Exercice 3

- ♠ Entre t et $t + dt$, le nombre d'électrons ayant subi une collision est $N(t)\frac{dt}{\tau}$: en effet, à t il reste $N(t)$ électrons n'ayant pas collisionné et parmi eux, une proportion $\frac{dt}{\tau}$ va subir une collision durant dt . A noter que cela est valable dans le cadre de la loi des grand nombre, qui est largement validée ici au vu des quantité d'électrons dans un métal.

On en déduit alors que le nombre d'électrons n'ayant pas collisionné à $t + dt$ est :

$$N(t + dt) = N(t) - N(t)\frac{dt}{\tau}$$

On tombe sur l'équation différentielle classique de la désintégration radioactive, donnée par $\dot{N}(t) = -\frac{1}{\tau}N(t)$. En intégrant, on trouve la relation voulue.

- ♠ La probabilité pour un électron de ne pas subir de collision jusqu'à l'instant t correspond au nombre total d'électrons n'ayant pas subi de collision sur le nombre total d'électrons, soit $N(t)/N_0 = \exp(-t/\tau)$.

La probabilité dp pour un électron de subir une collision entre t et $t+dt$ correspond à la *probabilité de ne pas avoir subi de collision jusqu'à t* ET à la *probabilité de subir une collision entre t et $t+dt$* , soit le produit de probabilité :

$$dp = \exp(-t/\tau) \cdot \frac{dt}{\tau}$$

La valeur moyenne du temps de collision correspond à la somme des temps t durant laquelle il y a eu collision multiplié par la probabilité de collision entre t et $t+dt$:

$$\bar{t} = \int_0^\infty t dp = \int_0^\infty t \exp(-t/\tau) \cdot \frac{dt}{\tau} = \tau$$

- ♠ Soit N_0 le nombre total d'électrons. Entre t et $t+dt$, il y a eu dtN_0/τ qui ont subi une collision. La quantité de mouvement de tous ces électrons est donc perdue. D'autre part, entre t et $t+dt$ chaque électron est soumis à la force $\vec{F}(t)$, faisant changer la quantité de mouvement totale de $N_0\vec{F}(t)dt$. Finalement, il vient :

$$\vec{P}(t+dt) = \vec{P}(t) - \frac{dt}{\tau}\vec{P}(t) + N_0\vec{F}dt \quad (2)$$

- ♠ On en déduit la vitesse moyenne d'un électron, définie par $\vec{v}(t) = \vec{P}/(mN_0)$:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{v}}{\gamma} + \vec{F}(t)$$

où $\gamma = m/\tau$.

- ♠ La force subie par les électrons est la force de Lorentz : $\vec{F} = -eE_0 \exp(-i\omega t)$. L'équation précédente devient :

$$-i\omega\vec{v} = -\frac{e}{m}\vec{E}_0 - \frac{\vec{v}}{\tau}$$

On en déduit :

$$\vec{v} = \frac{e\tau}{m} \frac{E_0}{i\omega\tau - 1}$$

En introduisant la conductivité γ , $\vec{j} = \gamma\vec{E}$, où $\vec{j} = -ne\vec{v}$, on trouve :

$$\gamma(\omega) = \frac{ne^2\tau}{m} \frac{1}{1 - i\omega\tau}$$

- ♠ Dans un métal, qui est un réseau cristallin, il y a typiquement un électron tous les Angstrom, soit tous les 10^{-10}m . On obtient des densités typiques de 10^{30} atomes par m^3 .
- ♠ La résistivité statique correspond à une fréquence qui tend vers 0, cad :

$$\rho = \frac{1}{\gamma} = \frac{m}{ne^2\tau}$$

On trouve donc $\tau \simeq 10^{-14}\text{s}$.

Conduction électrique dans un semiconducteur bidimensionnel

$$\propto \vec{j}_s = -en_s \vec{v} \text{ et } \vec{j}_s = I/W.$$

Entre t et $t + dt$, les électrons ont acquis une quantité de mouvement $-eN_0 \vec{E} dt$, mais en ont perdu par collision $-P(t)dp = -P(t) \times dt/\tau$ (comme une fraction dt/τ d'électrons ont perdu **en moyenne** leur quantité de mouvement). On a donc :

$$P(t + dt) = P(t) - eN_0 \vec{E} dt - P(t) \frac{dt}{\tau}$$

En régime permanent, $P(t + dt) = P(t)$, donc :

$$\vec{P} = -eN_0 \tau \vec{E}$$

Et alors :

$$\vec{v} = -\frac{e\tau}{m} \vec{E}$$

Le courant surfacique est donc :

$$\vec{j}_s = \frac{e^2 \tau n_s}{m} \vec{E}$$

Et comme $V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{dl} \cdot \vec{E} = E \times L$ et que $I = j_s \times W$, on obtient :

$$V_1 - V_2 = I \times \frac{m}{e^2 \tau n_s} \frac{L}{W}$$

$$\text{Donc } R_{\square} = \frac{m}{e^2 \tau n_s} \frac{L}{W}$$

R_{\square} ne dépend que du rapport d'aspect du conducteur (qui est rectangulaire) : dans le cas $W = L$, la résistance ne dépend plus des dimensions du conducteur. Pour connaître la résistance d'un tel conducteur, il suffit de "compter" les carrés composant le conducteur (et faire les lois d'addition de résistance en série et en parallèle) pour en déduire la résistance totale du conducteur.

On note x la dimension le long du conducteur (selon l) et on décompose le conducteur en 3 parties : la première partie du sablier, le carré central et la seconde partie en sablier, notées 1, 2 et 3.

Dans la partie 1, on a $j_s = I/(w - ax)$, avec $a = \frac{l}{W-d}$. Comme on a toujours $\vec{j}_s = \frac{e^2 \tau n_s}{m} \vec{E}$, on obtient :

$$\Delta V_1 = \frac{m}{e^2 \tau n_s} \int_{x=0}^{x=l} dx j_s(x) = \frac{m}{e^2 \tau n_s} \times \frac{I}{a} \ln \left(\frac{w}{d} \right)$$

où $\Delta V_1 = V_1 - V(x=l)$ est la chute de tension dans la partie 1. On a $\Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 = V_1 - V_2 = E \times (2l + d)$.

Finalement, on obtient :

$$R_1 = \frac{m}{e^2 \tau n_s a} \ln \left(\frac{w}{d} \right) = \frac{R_{\square}}{a} \ln \left(\frac{w}{d} \right)$$

Comme la résistance centrale est une résistance "carrée", on a $R_2 = R_{\square}$. Enfin, par symétrie, on a $R_1 = R_3$. Donc :

$$R = R_1 + R_2 + R_3 = R_{\square} \left(\frac{2}{a} \ln \left(\frac{w}{d} \right) + 1 \right)$$

$p_s = \vec{j}_s \cdot \vec{E} = \frac{I}{l(x)} \times \frac{V_1 - V_2}{2l + d}$, où $l(x)$ est la largeur du conducteur en x .

La puissance totale est donc :

$$P_J = \iint dx dy \times p_s = \int_0^{2l+d} dx l(x) \times \frac{I}{l(x)} \times \frac{V_1 - V_2}{2l + d} = (V_1 - V_2) \times I = RI^2$$

Exercice 4

♡ Résistance classique d'un cylindre : $R = L/(\gamma\pi a^2)$.

♡ Isolons le câble arrivant en A . Par symétrie, le courant I partira dans tous les directions. La densité de courant va s'écrire en un point M :

$$\vec{j}_A = \frac{I}{2\pi e} \frac{\vec{AM}}{\|\vec{AM}\|^2}$$

C'est une décroissance typique en $1/r$, où $r = AM$. On effectue le même raisonnement pour la source de courant en B , mais où la source de courant est $-I$. Par superposition, la densité de courant totale est alors :

$$\vec{j} = \frac{I}{2\pi e} \left[\frac{\vec{AM}}{\|\vec{AM}\|^2} - \frac{\vec{BM}}{\|\vec{BM}\|^2} \right]$$

♡ En intégrant la relation $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ le long du chemin AB , dont la coordonnée sera donnée par x , en faisant varier x de a à $d-a$ (pour éviter une divergence de la densité de courant) :

$$\int_a^{d-a} dx j(x) = \frac{I}{2\pi e} \int_a^{d-a} dx \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) = \gamma \int_a^{d-a} dx E = -\gamma \int_a^{d-a} dx \frac{dV}{dx}$$

Remarque : Lorsque M est strictement contenu sur le segment AB , on a : $\vec{BM} = -\|BM\|\vec{e}_x = -(d-a)\vec{e}_x$ où \vec{e}_x est le vecteur normé orientant ce segment.

On trouve alors :

$$\Delta V = \frac{I}{\pi e \gamma} \log \left(\frac{d-a}{a} \right)$$

♡ En se plaçant en coordonnées sphériques, on a :

$$\vec{j} = \frac{I}{2\pi} \left[\frac{\vec{e}_r}{\|\vec{AM}\|^2} - \frac{\vec{e}_r}{\|\vec{BM}\|^2} \right]$$

Attention, il y a un facteur 2 par rapport à la surface d'une sphère car il s'agit de demi-sphères. On trouve alors :

$$\Delta V = \frac{I}{\pi \gamma} \frac{d}{a(d-a)}$$

Exercice 5

◇ Les lignes de champs sont radiales cad $\vec{j} = j(r)\vec{e}_r$. On a donc :

$$\vec{j}(r) = \frac{I}{2\pi r^2} \vec{e}_r$$

On en déduit :

$$dV = -E(r)dr = \frac{-I}{2\pi r^2 \gamma} dr$$

Par intégration, on trouve :

$$V(r) = \frac{I}{2\pi r \gamma}$$

◇ Le potentiel de l'hémisphère est donc simplement :

$$U = \frac{I}{2\pi a\gamma}$$

La résistance est donc tout simplement $R = \frac{1}{2\pi a\gamma}$. On trouve qu'elle ne dépasse pas 30Ω si $a > 53\text{cm}$.

◇ La tension de pas vaut, si $d = 1\text{m}$:

$$V_p(r) = V(r) - V(r+d) = \frac{I}{2\pi\gamma r(r+d)}$$

On trouve que $V_p(10\text{m}) = 7,2\text{kV}$ et $V_p(100\text{m}) = 79\text{V}$

◇ Le courant qui traverse la personne est $i = V_p/R$. On trouve $i(10)=2,9\text{A}$ et $i(100)=32\text{mA}$.

Câble coaxial

♡ Le courant circulant dans l'âme est $I = 2\pi a j_{s,a}$. De même, la charge totale est $Q = 2\pi a l \sigma_a$. On a forcément $I = 2\pi b j_{s,b}$. De même, la charge totale est $Q = 2\pi b l \sigma_b$ par conservation de la charge et du courant.

♡ Les symétries et les invariances donnent $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$. Avec le théorème de Gauss appliqué sur un cylindre de rayon r , on obtient :

$$\begin{cases} r < a & : & \vec{E} = \vec{0} \\ a < r < b & : & \vec{E} = \frac{\sigma_a a}{\epsilon_0 r} \vec{e}_r \\ r > b & : & \vec{E} = \vec{0} \end{cases}$$

♡ On en déduit le potentiel entre les deux conducteurs :

$$V = \frac{\sigma_a a}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{Q}{2\pi l \epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

La capacité par unité de longueur est donc :

$$c = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

♡ Les symétries et les invariances donnent $\vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta$. Avec le théorème de d'Ampère appliqué sur un cercle de rayon r , on obtient :

$$\begin{cases} r < a & : & \vec{B} = \vec{0} \\ a < r < b & : & \vec{B} = \frac{\mu_0 j_{s,a} a}{r} \vec{e}_\theta \\ r > b & : & \vec{B} = \vec{0} \end{cases}$$

♡ Le flux du champ \vec{B} se calcule sur la surface rectangulaire comprises entre a et b , de longueur l avec \vec{e}_θ comme vecteur normal. On trouve alors :

$$\Phi_B = \frac{L\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

On a donc :

$$l = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

♡ On trouve que $l \times c = \epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$. Cela correspond à l'inverse du carré de la vitesse de la lumière, qui est la vitesse de propagation dans le câble coaxial.

Étude d'un colloïde

♡ Classique, champ électrique généré par le potentiel d'une charge Q :

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

Et, en prenant le potentiel nul à l'infini :

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Si $Q > 0$, on aura les ions négatifs qui vont venir s'agglutiner autour de la charge Q , alors que les ions positifs seront plus repoussés plus loin. Le problème est que cette répartition d'ions n'est pas "stable" car il faut tenir compte du potentiel des ions lors de la nouvelle répartition.

♡ Le milieu est composé de cations et d'anions à la même densité :

$$\rho = eN_+ - eN_- = -2eN_0 \sinh\left(\frac{eV}{k_B T}\right)$$

Lorsque $eV \ll k_B T$, on a alors :

$$\rho \simeq -2N_0 \frac{eV}{k_B T}$$

♡ Avec les rotations et les symétries, on montre facilement que $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$. On applique le théorème de Gauss sur un volume compris entre r et $r + dr$:

$$-4\pi r^2 E(r) - 4\pi(r + dr)^2 E(r + dr) = \frac{4\pi r^2 dr \rho}{\epsilon}$$

On trouve donc :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) + \frac{\rho}{\epsilon} = 0$$

Cette équation correspond à l'équation de Maxwell-Gauss : $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$ (qui correspond à l'équation de Poisson avec le potentiel).

♡ On remplace ρ par l'expression trouvée plus haut. On obtient :

$$\frac{d^2 U}{dr^2} - \frac{2N_0 e^2}{k_B T \epsilon} U = 0$$

On pose $\lambda^2 = \frac{k_B T \epsilon}{2N_0 e^2}$. C'est une longueur caractéristique de la décroissance du potentiel. Dans de l'eau pure, le pH est égal à 7 donc $N_0 = 10^{-7} \text{mol/L} = 10^{19} \text{part.m}^{-3}$, soit $\lambda = 1 \mu\text{m}$.

En résolvant l'équation, on trouve $U(r) = A \exp(-r/\lambda) + B \exp(r/\lambda)$. La condition aux limites $V(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ impose $B = 0$. On a alors :

$$V(r) = \frac{A}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right)$$

♡ L'expression du champ est :

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r = A \frac{\exp(-r/\lambda)}{r^2} \left(1 + \frac{r}{\lambda}\right) \vec{e}_r$$

S'il n'y avait pas d'ions, on devrait retrouver l'expression du champ d'une particule ponctuelle de charge Q . Or l'absence d'ions correspond à $\lambda = \infty$, c'est-à-dire qu'il n'y a plus d'écrantage. On doit nécessairement retrouver $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \vec{e}_r$.

D'autre part, pour $r = r_0$, l'expression du champ *avec* ou *sans* ions autour est la même (car on est collé à la surface de la particule). Donc :

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} = A \frac{\exp(-r_0/\lambda)}{r^2} \left(1 + \frac{r_0}{\lambda}\right)$$

On a alors :

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \frac{1}{1 + \frac{r_0}{\lambda}} \exp\left(-\frac{r - r_0}{\lambda}\right)$$

Le potentiel décroît très rapidement avec la distance (beaucoup plus rapidement que si la charge était seule).

♡ La densité de charge est proportionnelle à l'opposé du potentiel :

$$\rho(r) = -\frac{2N_0 e Q}{4\pi k_B T \epsilon r^2} \frac{1}{1 + \frac{r_0}{\lambda}} \exp\left(-\frac{r - r_0}{\lambda}\right)$$

Cette densité de charge est opposée à la charge Q : les ions de signe opposés s'agglutinent bien autour de la charge Q . D'autre part, le potentiel décroît rapidement : celui créé par la charge Q disparaît rapidement, à cause de l'agglutinement des ions autour. Ils écrantent sa charge.

♡ Dans le cas où $N_0 = 10^{-7}$ mol/L, la concentration en ions est 100 fois supérieure à celle de l'eau pure et λ est donc inférieur d'un facteur 10. Le champ électrique chute très rapidement avec la distance, plus on rajoute d'ions, plus l'effet d'une particule à l'autre sera faible, et moins les particules de colloïde se repousseront naturellement. Elles auront tendance à tomber au fond de la solution.

Condensateur Terre-ionosphère

♣ Les symétries et les invariances donnent $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$. Avec le théorème de Gauss appliqué sur une sphère de rayon r , on obtient :

$$\begin{cases} r < R & : & \vec{E} = \vec{0} \\ R < r < R + z_0 & : & \vec{E} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \\ r > R + z_0 & : & \vec{E} = \vec{0} \end{cases}$$

♣ Le potentiel se retrouve grâce à l'équation $\frac{dV}{dr} = -E(r)$. On a donc :

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + A$$

Comme le potentiel est nul en $z = 0$ (cad en $r = R$) :

$$V = V(R + z_0) - V(0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R + z_0} \right)$$

On trouve une capacité équivalente de :

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R(R + z_0)}{z_0} \simeq \frac{4\pi\epsilon_0 R^2}{z_0}$$

L'approximation est la formule d'un condensateur plan. de surface $4\pi R^2$. L'énergie électrostatique est $W_{el} = \frac{1}{2}CV^2$. Enfin on peut dire dans cette approximation que $\vec{E} \simeq \frac{V}{z_0}\vec{e}_r$. On trouve $C = 6,7 \cdot 10^{-2}$ F, $W_{el} = 4,3 \cdot 10^9$ J et $E = 6$ V/m.

- ♣ Toujours dans l'analogie avec le condensateur plan, $\vec{E} = \sigma/\varepsilon\vec{e}_r$. On trouve donc $\sigma = 5,3 \cdot 10^{-11}\text{C.m}^{-2}$ et $Q = 4\pi R^2\sigma = 24 \cdot 10^3\text{C}$.
- ♣ On peut dire que $E \simeq V/z_1$, où z_1 est l'altitude des nuages. En ordre de grandeur, on a $Z_1 = 1\text{km}$, donc $V_1 \simeq 10^8\text{V}$.