Exercice 1

Transfert d'une fusée d'une orbite terrestre à l'orbite lunaire

On considère une fusée placée sur une orbite terrestre basse (altitude de 2000km), de masse à vide $M_0 = 10\text{t}$ et remplie d'un mélange carburant-comburant appelé *ergols* de masse initiale m_0. A $t = 0$, la fusée allume ses propulseurs pour se diriger vers l'orbite lunaire ou martienne. La combustion d'ergol éjecte des gaz à une vitesse v_e par rapport à celle de la fusée et à un débit massique D_m, qui reste constant tout au long de la combustion. Après la combustion totale des ergols, la fusée acquiert un supplément de vitesse ΔV.

- ♣ Trouver une relation, dite *équation de Tsiolkovski* entre ΔV et la proportion $m_0/(m_0+M_0)$, cad la proportion entre la masse initiale d'ergols et la masse totale de la fusée.
- ♣ Pour atteindre l'orbite lunaire, il faut d'abord acquérir un supplément de vitesse égal à $\Delta V = 2,8\text{km.s}^{-1}$ puis ralentir de la même quantité de vitesse (la fusée peut soit accélérer soit ralentir grâce à son système de propulsion). Quelle masse d'ergols faut-il prévoir ?
- ♣ Même question pour atteindre l'orbite martienne, où dans ce cas $\Delta V = 4,2\text{km.s}^{-1}$. Commenter.

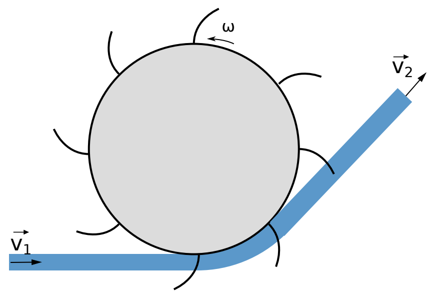
Condition de décollage d'une fusée

On s'intéresse désormais au décollage de la fusée depuis la terre ferme. La fusée a toujours les même caractéristiques, elle est désormais soumise au champs de pesanteur $\vec{g}$, supposé uniforme. La résistance de l'air est négligée.

- ♣ Montrer que la fusée ne peut décoller que si D_m est supérieur à une certaine valeur.
- ♣ En supposant que D_m est suffisamment important pour permettre le décollage, calculez la vitesse finale de la fusée une fois que tous les ergols ont été consommés, ainsi que l'altitude atteinte.

Exercice 2

Une turbine de barrage est un cylindre de rayon a avec des pâles à ses extrémités, entraînées par un jet d'eau. Elle tourne autour de son axe à la vitesse angulaire ω. Un jet incident, d'épaisseur négligeable, arrive avec un débit massique D_m sur la turbine avec une vitesse $\vec{v_1}$ et ressort avec une vitesse $\vec{v_2}$, toutes deux tangentielles à la turbine.



La turbine a un moment d'inertie J autour de son axe. Elle est ralentie par un générateur et des frottements qui opposent un couple de résistance Γ. On négligera l'action de la pesanteur.

♠ A l'aide de bilans, trouver deux relations entre ω, $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ et les données de l'énoncé.

♠ Trouver l'expression de ω_P, la vitesse de rotation en régime permanent.

♠ La vitesse v_1 et D_m étant données, quelle est la valeur de Γ pour laquelle la puissance P transmise à la turbine est maximale ? Commenter le résultat.

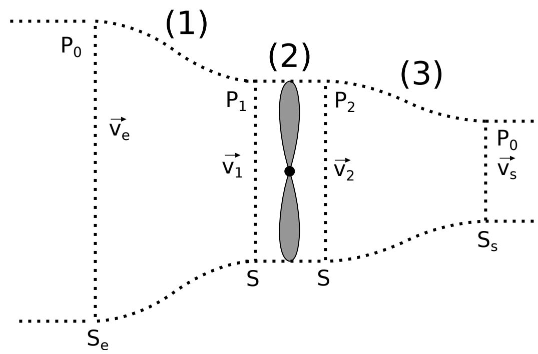
♠ On choisit Γ de sorte à ce que P soit maximale. La turbine est à l'arrêt à $t = 0$, déterminer ω au cours du temps. Quelle est le temps caractéristique d'établissement permanent ?

♠ On suppose que la turbine est en bas d'un barrage de 100m de haut, obstruant le lit d'une rivière d'un débit de $100\text{m}^3/\text{s}$. Quelle est la vitesse v_1 de l'eau à la sortie du barrage ? En supposant que le rendement de conversion de la puissance mécanique de la turbine à un alternateur est de 90%, quelle puissance électrique peut-on extraire d'une telle rivière ? Retrouver ce calcul à l'aide d'une autre méthode.

♠ En moyenne, il pleut environ une hauteur 1000mm d'eau par an sur le territoire Français, qui fait 547 000km^2. Seulement 40% de cette quantité d'eau s'écoule dans les fleuves et rivière, le reste s'écoule soit dans les nappes phréatiques, soit s'évapore. Sachant que l'altitude moyenne du pays est de 342m, en déduire le potentiel de production d'énergie hydroélectrique sur une année. Comparer avec la production actuelle qui est de 63TWh/an et la consommation d'énergie finale en France, qui est de 1629TWh/an.

Exercice 3

On s'intéresse à l'interaction entre l'air et une hélice (d'avion, d'hélicoptère ou d'éolienne). On considère le tube d'air qui va traverser la section S de l'hélice. L'écoulement est supposé permanent, incompressible, parfait et on néglige les effets de la pesanteur. La pression loin de l'hélice est P_0.



On distingue 3 zones remarquables dans l'écoulement :

(1) Cette zone correspond au passage d'un écoulement lointain de l'hélice à proche. Le tube d'air passe alors d'une section S_e, avec une vitesse v_e et une pression P_0 a une section S, avec une vitesse v_1 et une pression P_1.

(2) Zone juste autour de l'hélice, l'écoulement est turbulent. Juste avant l'hélice, la vitesse est $\vec{v_1}$ et la pression P_1. Juste après, la vitesse est $\vec{v_2}$ et la pression P_2.

(3) Cette zone correspond au passage d'un écoulement proche de l'hélice à lointain. Le tube d'air passe alors d'une section S, avec une vitesse v_2 et une pression P_2 a une section S_s, avec une vitesse v_s et une pression P_0.

Dans les sections (1) et (2), on suppose que l'écoulement de l'air est irrotationnel, unidimentionnel et laminaire. Les pressions et les vitesses sont donc uniformes pour une section droite donnée du tube. Toutes les vitesses seront d'ailleurs supposées dirigées uniquement suivant l'axe de rotation de l'hélice. On notera $\vec{F}$ la force exercée par l'hélice sur l'air et P la puissance fournie au fluide.

- ♣ Comment s'écrivent les relations de conservation du début massique ? Comparer les sections S_e et S_s dans le cas où l'hélice est celle d'un avion, et dans le cas où c'est celle d'une éolienne.

- ♣ Appliquer le théorème de Bernoulli dans la zone (1) et (3). Est-ce paradoxal d'avoir $v_e \neq v_s$ alors que les pressions sont identiques et égales à P_0 ?

- ♣ En faisant un bilan sur une portion de fluide dans la zone (2) du tube, déterminer une expression de F en fonction de ρ, S, v_e et v_s.

- ♣ En effectuant un bilan sur une autre section de fluide, déterminer une autre expression entre F, ρ, S, v_e et v_s. En déduire une relation simple entre v_1, v_2, v_e et v_s.

- ♣ Déterminer la puissance P en fonction de ρ, S, v_e et v_s.

- ♣ Démontrer la *loi de Betz*, qui stipule que le rendement maximal théorique d'une éolienne est de η =16/27. Commenter.

Exercice 4

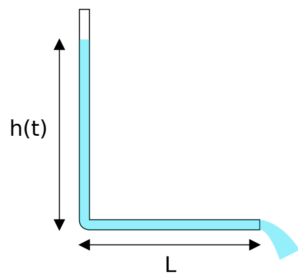
Le tube en "L" suivant a une section constante s, mais dont les dimensions longitudinales sont très grande devant le diamètre, on pourra considérer que l'écoulement est unidimensionnel. Le liquide est supposé idéal et incompressible.

On admet que le second principe de la dynamique s'écrit, pour un fluide décrit par un champ de vitesse $\vec{v}$, sous la forme :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\rho}{2} gr\vec{a}d(v^2) + \rho \cdot r\vec{o}t(\vec{v}) \wedge \vec{v} = \rho \vec{g} - gr\vec{a}dP$$

Cette équation est appelée *équation de Navier-Stockes*.

Dans l'état initial, la hauteur du liquide est h_0 et l'extrémité inférieur est bouchée. On ouvre le bouchon à $t = 0$.



1 - Déterminez la vitesse d'éjection v en fonction la hauteur h. On intègrera pour cela l'équation de Navier-Stockes sur une ligne de fluide. Examiner le cas où $L \longrightarrow 0$.

2 - Exprimer la pression $P(M, t)$ en tout point en fonction de P_{atm}, ρ, g, L et $h(t)$. En quel point est-elle maximale ?