

Petits et gros mammifères • ◦ ◦

Les mammifères sont des animaux à sang chaud, dont la chaleur est produite par le fonctionnement du métabolisme, qui dégage une puissance thermique p_{th} par unité de volume. Cette puissance et la circulation sanguine permettent de maintenir une température T_1 à peu près uniforme et constante à l'intérieur du corps. Pour se prémunir contre les variations de température extérieure, les mammifères peuvent avoir une couche d'isolant (fourrure ou graisse) autour de leur corps. On souhaite connaître la variation de cette épaisseur en fonction de la taille des mammifères.

Pour simplifier, on considère que les mammifères sont des animaux sphériques de rayon R recouverts d'une couche d'isolant d'épaisseur e de capacité calorifique c , d'emasse volumique ρ et de conductivité thermique λ . On notera $T(r)$ et $\vec{j}(r)$ le champ de température et le vecteur densité volumique de puissance en coordonnées sphériques, r étant le rayon par rapport au centre de l'animal.

- ◉ La température extérieure étant T_0 et celle dans le mammifère étant maintenue dans tout son métabolisme à T_1 , écrire les deux conditions aux limites vérifiées par la température.
- ◉ En faisant un bilan d'enthalpie entre deux sphères concentriques de rayon r et $r + dr$ situées dans la couche d'isolant, montrer la relation suivante :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j_r) = -\rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

- ◉ Après avoir rappelé la loi de Fourier, montrer alors que la température vérifie, dans la couche d'isolant, la relation suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\mu c_p r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

Comment s'appelle cette équation ?

- ◉ On se place en régime permanent. Résoudre cette équation avec les conditions aux limites.
- ◉ On introduit $\Phi = 4\pi r^2 j_r(r)$. Que représente cette quantité ? Dépend-elle de r ? Montrer que $\Phi = 4/3\pi R^3 p_{th}$. En déduire :

$$\frac{R^2 p_{th}}{3} = \frac{\lambda(R+e)}{e} (T_1 - T_0)$$

- ◉ En déduire une expression du rapport de l'épaisseur de fourrure sur la taille de l'animal e/R . Pourquoi les gros mammifères résistent-ils mieux au froid ?

Correction Petits et gros mammifères

⊙ On a simplement $T_0 = T(R)$ et $T_1 = T(R + e)$.

⊙ On effectue un bilan d'enthalpie entre r et $r + dr$:

$$\begin{aligned} r^2 dr 4\pi \times \mu c_p \times [T(r, t + dt) - T(r, t)] = \\ r^2 4\pi \times j(r, t) dt - (r + dr)^2 4\pi \times j(r + dr, t) dt \end{aligned}$$

On a donc :

$$r^2 \mu c_p \times \frac{\partial T}{\partial t}(r, t) = \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j(r, t))$$

Et alors, avec la loi de Fourier $j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\mu c_p r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

⊙ La solution est $T(r) = A/r + B$. On trouve :

$$T(r) = \frac{R(R + e)}{re} (T_1 - T_0) + \frac{R + e}{e} T_0 - T_1 \frac{R}{e}$$

⊙ On introduit $\Phi = 4\pi r^2 j_r(r)$. Il s'agit du flux thermique (une puissance) à travers toute sphère de rayon r autour du mamifère. Comme l'énergie se conserve, elle ne dépend pas de r : $\Phi(r) = 4\pi \times j(r) \times r^2 = 4\pi \lambda \frac{R(R+e)}{e} (T_1 - T_0)$. La puissance dégagée par le mamifère est tout simplement $4/3\pi R^3 p_{th}$, elle correspond à la puissance thermique passant par la sphère de rayon R , donc $\Phi = 4/3\pi R^3 p_{th}$. On trouve donc :

$$\frac{R^2 p_{th}}{3} = \frac{\lambda(R + e)}{e} (T_1 - T_0)$$

⊙ On trouve :

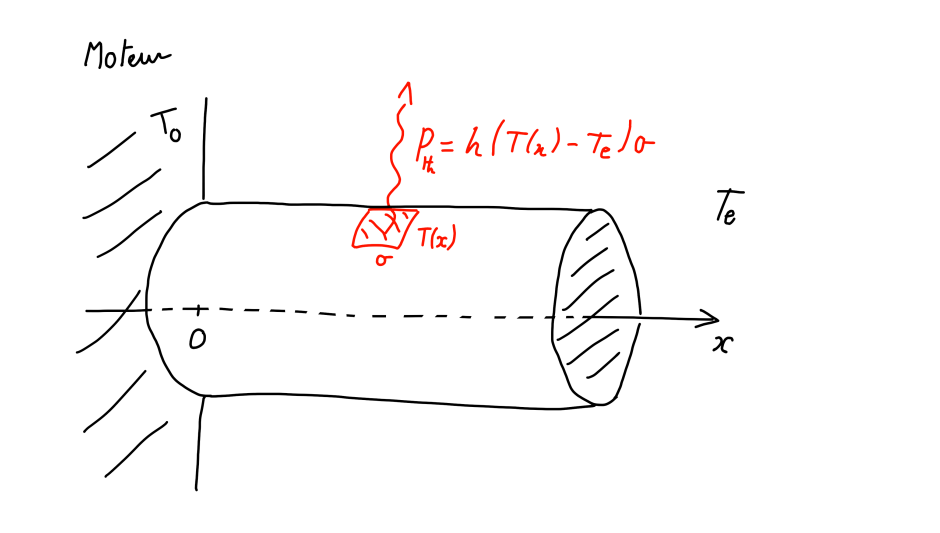
$$\frac{e}{R} = \frac{1}{\frac{R^2 p_{th}}{3\lambda(T_1 - T_0)} - 1}$$

Ce rapport diminue d'autant plus que la taille de l'animal augmente.

Ailettes de refroidissement • ○ ○

Certains moteurs à essence utilisent des ailettes métalliques pour se refroidir avec l'air ambiant (on parle de refroidissement à air). Si ce système est beaucoup plus simple qu'un refroidissement liquide, la puissance de refroidissement est limitée et donc celle du moteur aussi.

On modélise cette ailette de refroidissement comme un cylindre d'axe Ox , de longueur L , de rayon R constitué d'un matériau de conductivité λ , en contact avec l'air extérieur de température T_e . En $x = 0$, l'ailette est en équilibre thermique avec le moteur à la température T_0 . Une section de l'ailette de surface σ à la température T en contact avec l'air évacue sa puissance thermique suivant la loi de Newton $P_s = h(T - T_e)\sigma$.



- ~ En faisant un bilan d'enthalpie, déterminer en régime permanent l'équation différentielle vérifiée par la température $T(x)$.
- ~ Donner l'expression de la température, si l'on suppose L suffisamment long (devant quoi ?)
- ~ Déterminer la puissance thermique évacuée par l'ailette.
- ~ Que devient cette étude si L n'est pas suffisamment grand ? Déterminer les nouvelles conditions aux limites.

Ailettes de refroidissement • ○ ○

~ On trouve :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{2h}{\lambda R}(T(x) - T_e)$$

~ On introduit $\delta = \sqrt{\lambda R/2h}$. Les solutions sont $T(x) = Ae^{x/\delta} + Be^{-x/\delta} + T_e$. Si $L \gg \delta$, alors $A = 0$. On trouve nécessairement $B = T_0 - T_e$.

~ La puissance évacuée entre les tranches situées en x et $x + dx$ est :

$$\begin{aligned} dP &= 2\pi R dx (T(x) - T_e) \\ &= \pi R dx (T_0 - T_e) e^{-x/\delta} \end{aligned}$$

La puissance totale évacuée est donc :

$$\begin{aligned} P &= \int_0^L \pi R dx (T_0 - T_e) e^{-x/\delta} \\ &= \pi R \sqrt{2h\lambda R} (T_0 - T_e) \end{aligned}$$

~ La condition à la limite $A = 0$ n'est plus valide, on garde la solution générale. Il faut utiliser la continuité du flux thermique en $x = L$. On a alors :

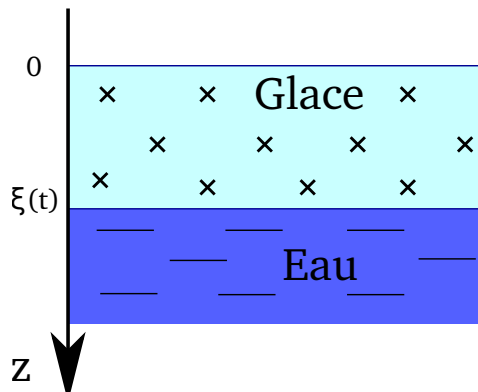
$$\begin{aligned} T_1 &= A + B + T_e \\ \Phi &= -\lambda \pi R^2 \frac{dT}{dx}(L) = h \pi R^2 (T(L) - T_e) \end{aligned}$$

Ces deux conditions réunies, on trouve (après calculs) :

$$\begin{aligned} A &= \frac{(T_1 - T_e) \left(1 - \frac{\lambda}{h\delta}\right)}{\left(1 - \frac{\lambda}{h\delta}\right) - \left(1 + \frac{\lambda}{h\delta}\right) e^{2L\delta}} \\ B &= \frac{(T_1 - T_e) \left(1 + \frac{\lambda}{h\delta}\right)}{\left(1 + \frac{\lambda}{h\delta}\right) - \left(1 - \frac{\lambda}{h\delta}\right) e^{-2L\delta}} \end{aligned}$$

Lac gelé • • •

On s'intéresse à la glaciation d'un lac, et plus particulièrement de l'évolution au cours du temps de l'épaisseur de glace, notée $\xi(t)$, qui se forme à sa surface. L'interface entre l'atmosphère et la surface du lac se situe en $z = 0$ et on considère qu'à $t = 0$, le lac est encore libre de glace $\xi(t = 0) = 0$. On suppose que l'atmosphère est à la température constante $T_A = 263$ K et que l'eau située sous la glace du lac est à la température de fusion $T_F = 273$ K.



Lors de la formation de la glace à l'interface $z = \xi(t)$, l'énergie thermique dégagée par la solidification de l'eau est évacuée à travers la glace jusqu'à l'atmosphère. On supposera que ce transfert est instantané, ce qui revient à supposer que la glace a une capacité calorifique c_g négligeable (hypothèse des régimes quasi-stationnaire).

D'autre part, les échanges thermiques entre l'atmosphère et la glace de la surface du lac sont modélisés par la loi de Newton :

$$\vec{j}_a = -h(T_0(t) - T_A)\vec{e}_z$$

où \vec{j}_a est la densité surfacique de flux thermique entre la glace et l'atmosphère, $T_0(t)$ est la température de la glace en $z = 0$ et h une constante égale à $42 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$. Autrement dit, la surface du lac ne se thermalise pas instantanément avec l'atmosphère.

On note par ailleurs $\rho_g = 990 \text{ kg.m}^{-3}$ la masse volumique de la glace, $\lambda = 2,1 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et la chaleur latente massique de fusion de l'eau $l_f = 335 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

- * Donner le profil de température $T(z, t)$ dans la glace en fonction de $T_0(t)$, T_F , $\xi(t)$ et z .
- * En déduire la température de surface $T_0(t)$ en fonction de l'épaisseur de glace $\xi(t)$, et h , T_A , T_F , λ .
- * En faisant un bilan d'énergie sur le front de glaciation en $z = \xi(t)$, établir une relation entre $\xi(t)$ et $\dot{\xi}(t)$. En déduire l'équation différentielle suivante :

$$\left(1 + \frac{\xi(t)}{l_0}\right) \dot{\xi}(t) = v_0$$

Préciser l'expression de l_0 et v_0 .

- * Donner une estimation numérique de l_0 et de v_0 . En déduire un temps caractéristique τ_0 dont on donnera aussi une estimation numérique.
- * Déterminer l'évolution de $\xi(t)$ puis de $T_0(t)$ et donner l'allure de leur courbe. Combien de temps faut-il pour que 5 cm de glace ne se forment ?

Correction Lac gelé

- * En redémontrant l'équation de la chaleur, on trouverait :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\rho c_g}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} \simeq 0$$

car $c_g \simeq 0$ dans le cadre de l'ARQS. On a alors :

$$T(z) = \frac{T_F - T_0(t)}{\xi(t)} z + T_0(t)$$

- * Par conservation de l'énergie, la densité de flux thermique dans la glace $j_g(z, t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}$ est égale à la densité de flux thermique à l'interface j_a donné par la loi de Newton :

$$\begin{aligned} j_g(z=0, t) &= j_a \\ \Rightarrow -\frac{\lambda}{\xi(t)}(T_F - T_0(t)) &= -h(T_A - T_0(t)) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$T_0(t) = \frac{T_F + \frac{h\xi(t)}{\lambda} T_A}{1 + \frac{h\xi(t)}{\lambda}}$$

- * On considère un volume d'eau $dV = S \times dz$ se transformant en glace durant un temps dt . Comme le front de glace avance à la vitesse ξ , on a $dz = \xi dt$. Ce volume dégage une énergie $dQ = l_f \rho_g \xi dt S$ lors de sa transformation, qui est évacuée à travers le flux thermique dans la glace $dQ = -S dt \times j_g(z = \xi, t)$. Le signe $-$ correspond au fait que l'énergie est évacuée vers l'atmosphère, donc selon $-\vec{e}_z$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\xi(t)}(T_F - T_0(t)) &= l_F \rho_g \xi(t) \\ \Rightarrow T_F - \frac{T_F + \frac{h\xi(t)}{\lambda} T_A}{1 + \frac{h\xi(t)}{\lambda}} &= \frac{l_F \rho_g}{\lambda} \xi(t) \dot{\xi}(t) \\ \Rightarrow \frac{h}{l_F \rho_g} (T_F - T_A) &= \left(1 + \frac{h}{\lambda} \xi(t)\right) \dot{\xi}(t) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\left(1 + \frac{\xi(t)}{l_0}\right) \dot{\xi}(t) = v_0$$

Avec $l_0 = \frac{\lambda}{h}$ et $v_0 = \frac{h}{l_F \rho_g} (T_F - T_A)$. On peut vérifier l'homogénéité, qui est bien respectée. On remarque par ailleurs que $v_0 = \dot{\xi}(t=0)$, qui correspond à la vitesse d'avancée du front de glace au début de la glaciation.

- * $l_0 = 0,05m$ et de $v_0 = 1,27 \cdot 10^{-6}m/s$. On définit un temps caractéristique τ_0 comme tout simplement $\tau_0 = l_0/v_0 = 39 \cdot 10^3s$.

- * On intègre la relation précédente :

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{l_0}{2} \frac{d}{dt} \left(1 + \frac{\xi(t)}{l_0}\right)^2 \\ \Rightarrow \frac{2t}{\tau_0} &= \left(1 + \frac{\xi(t)}{l_0}\right)^2 + C \end{aligned}$$

En tenant compte des conditions initiales, $\xi(0) = 0$, on trouve $C = -1$. Donc, en résolvant l'équation du second degré et en prenant la racine positive, on obtient :

$$\xi(t) = l_0 \left(\sqrt{1 + \frac{2t}{\tau_0}} - 1 \right)$$

Et de même :

$$T_0(t) = T_A + \frac{T_F - T_A}{\sqrt{1 + \frac{2t}{\tau_0}}}$$

Pour qu'il y ait 5 cm de glace, soit une épaisseur $\xi(t) = l_0$, il faut un temps $t = \frac{3}{2}\tau_0 \simeq 59 \cdot 10^3 \text{s}$, soit environ 16h30. Cela montre bien que la vitesse de glaciation diminue, si elle se maintenait à v_0 , il faudrait un temps τ_0 pour geler ces 5cm, soit environ 11h.

Transfert thermique et entropie ●●○

On considère une barre métallique conductrice de section S , de longueur L , de résistivité électrique ρ et de conductivité thermique λ . On suppose que ces extrémités sont maintenues aux températures T_1 et T_2 grâce à des thermostats, et que les parois extérieures sont calorifugées sur toute la longueur du barreau. En régime permanent, elle est parcourue par un courant I .

- ▷ Déterminer le profil de température $T(x)$ dans la barre, où x est l'abscisse le long de celui-ci.
- ▷ A quelle condition la température passe par un maximum ?
- ▷ Calculer l'entropie s_c créée par unité de temps et de volume dans la barre à une abscisse x . Commenter.

On coupe désormais le courant dans la barre ($I = 0$), puis une fois le nouveau régime permanent établi, on l'isole totalement des thermostats.

- ▷ Obtenir le nouveau profil de température juste avant que les deux thermostats soient retirés de la barre.
- ▷ Une fois les thermostats enlevés, quelle sera la température finale T_∞ de la barre après avoir suffisamment attendu ? En déduire la variation d'entropie de la barre.

Transfert thermique et entropie ●○○

On considère une barre métallique conductrice de section S , de longueur L , de résistivité électrique ρ et de conductivité thermique λ . On suppose que ces extrémités sont maintenues aux températures T_1 et T_2 grâce à des thermostats, et que les parois extérieures sont calorifugées sur toute la longueur du barreau. En régime permanent, elle est parcourue par un courant I .

- ▷ Montrer que la température vérifie l'équation :

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -p_{vol}$$

Préciser l'expression de p_{vol} en fonction des données de l'énoncé.

- ▷ Déterminer le profil de température $T(x)$ dans la barre, où x est l'abscisse le long de celui-ci.
- ▷ A quelle condition la température passe par un maximum ?
- ▷ Calculer l'entropie s_c créée par unité de temps et de volume dans la barre à une abscisse x . Commenter.

On coupe désormais le courant dans la barre ($I = 0$), puis une fois le nouveau régime permanent établi, on l'isole totalement des thermostats.

- ▷ Obtenir le nouveau profil de température juste avant que les deux thermostats soient retirés de la barre.
- ▷ Une fois les thermostats enlevés, quelle sera la température finale T_∞ de la barre après avoir suffisamment attendu ? En déduire la variation d'entropie de la barre.

Correction Transfert thermique et entropie

- ▷ Il faut d'abord obtenir l'équation de la chaleur lorsqu'une source de chaleur est présente dans le volume. L'équation de conservation (qui n'en est plus une !) devient :

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x} + p_{vol}$$

où $p_{vol} = \rho I^2 / S^2$ est la puissance volumique dissipée par effet Joule. L'équation de la chaleur devient donc :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{p_{vol}}{c\rho}$$

En régime permanent :

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -p_{vol}$$

En intégrant, on obtient :

$$T(x) = -\frac{p_{vol}x^2}{2\lambda} + Ax + B$$

Avec les CL $T(0) = T_1$ et $T(L) = T_2$, on trouve :

$$T(x) = \frac{p_{vol}}{2\lambda}x(L-x) + \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1$$

- ▷ Il y a plusieurs façon de répondre à la question. Je préfère utiliser la condition où $T'(L) = 0$, cad que la puissance électrique chauffe suffisamment pour tordre la courbe de température de sorte à ce que la dérivée deviennent nulle en $x = L$ (en considérant que $T_2 > T_1$). Comme on a :

$$T'(x) = \frac{p_{vol}}{2\lambda}(L-2x) + \frac{T_2 - T_1}{L}$$

La condition $T'(L) = 0$ donne alors :

$$p_{vol} = 2\lambda \frac{T_2 - T_1}{L^2}$$

- ▷ On effectue un bilan d'entropie sur le système constitué d'une tranche de barre entre x et $x + dx$ du barreau durant un temps dt :

$$dS = \delta s_e(x) - \delta s_e(x + dx) + \delta s_c$$

Il s'agit, pour l'entropie échangée, du même raisonnement que dans le cas d'une machine thermique avec deux sources extérieures, un échange d'entropie en x et un autre en $x + dx$. δs_c est l'entropie créée durant dt

En RP, $dS = 0$ et $\delta s_e(x) = \frac{\delta Q(x)}{T(x)} = S dt \frac{j(x)}{T(x)}$. Alors :

$$\begin{aligned} S dt \frac{j(x)}{T(x)} - S dt \frac{j(x+dx)}{T(x+dx)} + \delta s_c &= 0 \\ \delta s_c &= -S \lambda dt \left(\frac{1}{T(x+dx)} \frac{\partial T}{\partial x}(x+dx) \right) + S \lambda dt \left(\frac{1}{T(x)} \frac{\partial T}{\partial x}(x) \right) \\ \frac{\delta s_c}{S dx dt} &= -\lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{T(x)} \frac{\partial T}{\partial x} \right) = -\frac{\lambda}{T(x)} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\lambda}{T^2(x)} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 \end{aligned}$$

L'entropie créée par unité de volume et de temps est donc :

$$\frac{s_{c,vol}}{dt} = \frac{\rho I^2}{S^2 T} + \frac{\lambda}{T^2(x)} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 > 0$$

Le premier terme correspond à l'entropie créée par effet Joule, le second par les transferts thermiques.

▷ On peut réutiliser les résultats de la question précédente, pour $I = 0$:

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1$$

▷ Il y a plusieurs façon de calculer la température finale. Pour ma part, j'utilise la conservation de l'énergie thermique U de la barre lors de la transformation. Comme celle-ci est totalement isolée, on a : $U(t=0) = U_\infty = SL\mu c T_\infty$ où μ est la masse volumique de la barre. Or, l'énergie interne à $t=0$ est la somme de toutes les énergies internes du barreau d'épaisseurs dx :

$$\begin{aligned} U(t=0) &= c\mu S \int_0^L dx T(x) \\ &= c\mu S L \frac{T_1 + T_2}{2} \end{aligned}$$

donc $T_\infty = \frac{T_1 + T_2}{2}$, on trouve bien que la température finale correspond à la moyenne des températures extrêmes. Pour le calcul de l'entropie, on se base sur la variation d'entropie d'un solide lors d'une transformation d'une température à une autre. Plus précisément, un élément Sdx de la barre à l'abscisse x passe de la température $T(x)$ à T_∞ . Sa variation d'entropie est donc :

$$\Delta(\delta S) = \mu c S dx \ln \left(\frac{T_\infty}{T(x)} \right)$$

Donc pour l'ensemble de la barre :

$$\begin{aligned} \Delta S &= -\mu c S \int_0^L dx \ln \left(\frac{T(x)}{T_\infty} \right) \\ &= -\mu c S \frac{L}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} dT \ln \left(\frac{T}{T_\infty} \right) \end{aligned}$$

Finalement :

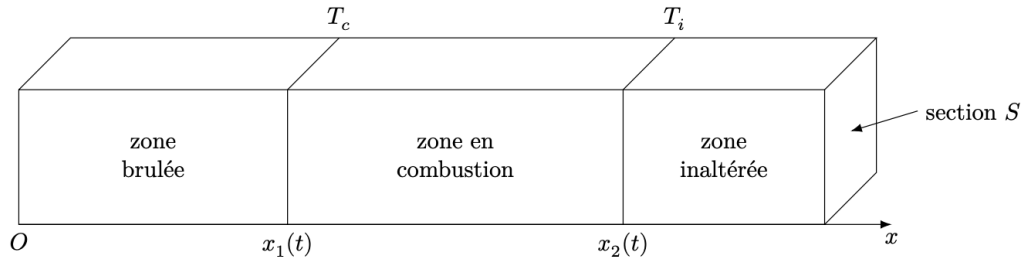
$$\Delta S = Mc \left(1 + \frac{T_1}{T_2 - T_1} \ln \left(\frac{2T_1}{T_1 + T_2} \right) - \frac{T_2}{T_2 - T_1} \ln \left(\frac{2T_2}{T_1 + T_2} \right) \right)$$

Combustion d'une poutre de bois • • ○

On considère une poutre en bois homogène de section carrée S et de longueur L rentrant en combustion à l'instant $t = 0$ en $x = 0$. On cherche à comprendre la progression de la combustion le long de la poutre, en supposant que celle-ci est uniquement due à la diffusion de la chaleur dans le bois. A l'instant t , on distingue la combustion en 3 zones distinctes :

- une zone brûlée, située entre $x = 0$ et $x_1(t)$, à la température uniforme $T_c = 720$ K dite de combustion ;
- une zone dans laquelle s'effectue la combustion, située entre $x_1(t)$ et $x_2(t)$, dégageant une puissance thermique massique $P_c = 4,0 \times 10^3$ W.kg⁻¹ ;
- et une zone inaltérée, où le bois est encore intact, située entre $x_2(t)$ et L

La température $T(x, t)$ dans la zone en combustion et celle de la zone inaltérée augmentent par diffusion au cours du temps jusqu'à atteindre les températures de combustion T_c et d'inflammation du bois $T_i = 520$ K, conduisant à l'avancement des frontières $x_1(t)$ et $x_2(t)$ au cours du temps. Ainsi, tant que la poutre n'a pas fini de brûler, on a toujours $T(x_1(t), t) = T_c$ et $T(x_2(t), t) = T_i$. D'autre part, loin du front de combustion $x_1(t)$, la température de la poutre est $T_\infty = 320$ K.



On considère enfin que le bois brûlé, en combustion ou inaltéré est un même matériau homogène, de capacité calorifique massique à pression constante $c_p = 2,0 \times 10^3$ J.K⁻¹.kg⁻¹, de diffusivité thermique $D = 1,0 \times 10^{-7}$ m².s⁻¹ et de masse volumique $\mu = 850$ kg.m⁻³.

- ✕ En effectuant un bilan d'enthalpie sur un élément de bois compris entre x et $x + dx$ dans la zone en combustion, montrer que la température vérifie l'équation suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \kappa$$

Préciser l'expression de κ .

- ✕ De même, trouver l'équation vérifiée par T dans la zone brûlée et inaltérée.

On se propose de résoudre les équations précédentes sous forme d'une onde se propageant dans la poutre. On pose $u = x - ct$ où c est une constante positive et on effectue le changement de variable $T(x, t) = \theta(u)$.

- ✕ Que représente physiquement c ?
- ✕ Déterminer les équations différentielles régissant la fonction $\theta(u)$ dans les trois zones, puis montrer que les solutions peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \theta(u) = a_1 & \text{pour } u < u_1 \\ \theta(u) = a_2 + b_2 \exp\left(-\frac{c}{D}u\right) - \frac{\kappa}{c}u & \text{pour } u_1 < u < u_2 \\ \theta(u) = a_3 + b_3 \exp\left(-\frac{c}{D}u\right) & \text{pour } u > u_2 \end{cases}$$

- ✕ Déterminer les expressions de a_1 et de a_3 avec les données de l'énoncé, puis expliciter les conditions permettant de trouver a_2 , b_2 et b_3 (on ne cherchera pas à obtenir leur expression).
- ✕ Tracer l'allure de la courbe $\theta(u)$. Commenter.

Température dans une planète naine ●●○

On s'intéresse au profil de température au sein d'une planète naine, faisant 100 km de rayon. On suppose qu'elle est intégralement constituée de roches proches du granit (conductivité thermique $\lambda = 3,5 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, masse volumique $\mu = 2700 \text{ kg.m}^{-3}$ et capacité calorifique massique $c_p = 790 \text{ J.K}^{-1}.\text{s}^{-1}$), sans activité géologique, c'est-à-dire que l'astre est figé, sans convection possible à l'intérieur. Il existe de surcroît une activité radioactive due à la présence de thorium 232 (^{232}Th , masse molaire $M = 232 \text{ g.mol}^{-1}$) uniformément réparti dans le volume, dont la désintégration dégage une énergie $\varepsilon = 5,6 \times 10^{-12} \text{ J}$, avec une demi-vie de $\tau = 14 \times 10^{10}$ années.

- ⊙ La concentration massique de thorium étant de l'ordre de 10 ppm, estimer la puissance volumique P_r due à la désintégration du thorium.
- ⊙ Le problème étant supposé à symétrie sphérique, effectuer un bilan d'enthalpie entre deux couches adjacentes de roche de rayon r et $r + dr$ et montrer que la température vérifie l'équation suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{D}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \kappa$$

Préciser l'expression de κ et de D .

- ⊙ Montrer que l'on peut se placer dans le régime quasi stationnaire $T(r, t) \simeq T(r)$, c'est-à-dire que l'activité nucléaire varie très lentement par rapport au temps caractéristique τ_d de diffusion thermique.
- ⊙ Exprimer l'expression du champ de température $T(r)$ à l'aide de deux constantes d'intégration. Montrer que l'une d'entre elle est nécessairement nulle.

La planète perd de l'énergie thermique par rayonnement, qui part dans l'espace depuis sa surface. La puissance thermique associée à ce rayonnement suit la loi de Stefan-Boltzmann $\phi = \sigma T_s^4$, où ϕ est la puissance rayonnée par unité de surface à la surface de la planète, $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$ une constante et T_s la température à la surface de l'astre.

- ⊙ En utilisant la loi de Stefan-Boltzmann, déterminer la seconde constante d'intégration et donner l'expression de la température $T(r)$.
- ⊙ Donner la valeur de la température au centre de la planète et à la surface.

On donne, pour les coordonnées sphériques : $\vec{\text{grad}} f \cdot \vec{e}_r = \frac{\partial f}{\partial r}$

Correction Température dans une planète naine

- ⊙ La concentration de thorium est de $c = 10 \times 10^{-6} \times \mu = 27 \text{ g.m}^{-3}$, soit une quantité $n = cN_A/M = 7,00 \times 10^{22}$ atomes de thorium par m^3 . La puissance peut être estimée par l'énergie ε d'une désintégration divisée par le temps de demi-vie τ (ce qui correspond peu ou prou à l'activité nucléaire, un facteur $\ln 2$ près), soit $P_r = \frac{\varepsilon n}{\tau} = 8,90 \times 10^{-8} \text{ W.m}^{-3}$.

- ⊙ On effectue un bilan d'enthalpie entre r et $r + dr$:

$$r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi \times \mu c_p \times [T(r, t + dt) - T(r, t)] = \\ r^2 \sin \theta d\theta d\phi \times j(r, t) dt - (r + dr)^2 \sin \theta d\theta d\phi \times j(r + dr, t) dt + P_r dt r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$$

On a donc :

$$r^2 \mu c_p \times \frac{\partial T}{\partial t}(r, t) = \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j(r, t)) + r^2 \times P_r$$

Et alors, avec la loi de Fourier $j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{D}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \kappa$$

Avec $\kappa = P_r/(\mu c_p)$ et de $D = \lambda/(\mu c_p)$.

- ⊙ Le temps caractéristique de diffusion thermique est estimé comme $\tau_d \simeq L^2/D = L^2 \mu c_p / \lambda = 6,09 \times 10^{15} \text{ s}$, soit 0,19 milliard d'années. C'est long mais toujours bien inférieur à 14 milliards d'années, qui est le temps caractéristique de décroissance radioactive du thorium. La planète a donc le temps d'être à tout instant thermalisée avec l'extérieur.
- ⊙ On peut donc estimer que le terme $\partial T/\partial t$ est nul. L'équation de diffusion devient :

$$\frac{D}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -\kappa$$

L'intégration fait apparaître deux constantes d'intégration, A et B :

$$T(r) = -\frac{\kappa}{6D} r^2 - \frac{A}{r} + B$$

La température étant définie en tout point de la planète, y compris en $r = 0$, on a nécessairement $A = 0$.

La planète perd de l'énergie thermique par rayonnement, qui part dans l'espace depuis sa surface. La puissance thermique associée à ce rayonnement suit la loi de Stefan-Boltzmann $\phi = \sigma T_s^4$, où ϕ est la puissance rayonnée par unité de surface à la surface de la planète, $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$ une constante et T_s la température à la surface de l'astre.

- ⊙ La loi de Stefan-Boltzmann donne une seconde CL : $j(r = R) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}(r = R) = \sigma T^4(r = R)$. On a donc :

$$\lambda \frac{\kappa}{3D} R = \sigma \left(B - \frac{\kappa}{6D} R^2 \right)^4$$

et donc :

$$B = \sqrt[4]{\frac{P_r R}{3\sigma}} + \frac{\kappa}{6D} R^2$$

Finalement :

$$T(r) = \frac{\kappa}{6D} (R^2 - r^2) + \sqrt[4]{\frac{P_r R}{3\sigma}}$$

- ⊙ Pour $T(0) = \sqrt[4]{\frac{P_r R}{3\sigma}} + \frac{\kappa}{6D} R^2 \simeq 63 \text{ K}$ et $T(R) = \sqrt[4]{\frac{P_r R}{3\sigma}} \simeq 20 \text{ K}$.

Une tente au soleil •••

Un campeur se trouve allongé dans sa tente canadienne. Le soleil se lève et éclaire une des faces de la tente, mais pas l'autre. Pour se refroidir, est-ce une bonne idée pour notre campeur de se mettre en position assise ?



Diffusion de particules dans un récipient en rotation • • ○

Des particules de masse m , de rayon a et de masse volumique ρ_p sont en suspension dans un solvant de masse volumique ρ_s et de viscosité η , contenu dans un récipient. Elles subissent par ailleurs une force de frottement fluide $-6\pi\eta a\vec{v}$ lorsqu'elles sont en mouvement à la vitesse moyenne \vec{v} . Le coefficient de diffusion de ces particules dans le solvant est noté D .

Cas statique : sédimentation

- ⊙ En régime permanent, établir la vitesse moyenne d'une particule isolée qui sédimente, soumise à son poids, à la poussée d'Archimède et à la force de frottement fluide. On introduira la masse effective $m^* = m \left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_p}\right)$. Quel est le flux de particules \vec{j}_s associé à cette sédimentation ?
- ⊙ Ce flux de sédimentation est compensée par le phénomène de diffusion. Expliquer le phénomène.
- ⊙ En faisant un bilan de particules sur un volume élémentaire, montrer que la concentration de particule c est reliée à \vec{j}_s et au flux de particule \vec{j}_D dû à la diffusion par la relation suivante :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\text{div}(\vec{j}_D + \vec{j}_s)$$

- ⊙ En déduire la concentration de particule $c(z)$ dans le récipient en régime permanent.

Cas dynamique

On fait tourner désormais le récipient à une vitesse angulaire ω , soumettant les particules à une force centrifuge $\vec{f}_r = m\omega^2 r \vec{e}_r$. On néglige désormais le poids des particules.

- ⊙ Montrer que la concentration en particules vérifient l'équation suivante :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(D \frac{\partial c}{\partial r} - sr\omega^2 c(r) \right) \right)$$

Préciser l'expression de s .

- ⊙ En déduire la concentration de particules en régime permanent.

Correction : Diffusion de particules dans un récipient en rotation

Cas statique : sédimentation

- ⊙ La poussée d'Archimède est définie comme :

$$\vec{\pi} = \rho_s \frac{m}{\rho_p} g \vec{e}_z$$

Elle est égale au poids du volume de solvant déplacé et est opposée à la gravitation. Le bilan des forces devient en régime permanent, appliqué sur une particule :

$$\vec{0} = \vec{\pi} - mg\vec{e}_z - 6\pi\eta a\vec{v}$$

La vitesse moyenne qui en résulte est donc :

$$\vec{v} = -\frac{mg}{6\pi\eta a} \left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_p}\right) \vec{e}_z = -\frac{m^*g}{6\pi\eta a} \vec{e}_z$$

On trouve bien que la particule tombe (respectivement remonte) si sa masse volumique est supérieure à celle du solvant (respectivement inférieure). Le flux associé de particules est $\vec{j}_s = c \times \vec{v}$.

- ⊙ Si on regardait le phénomène sans diffusion, toutes les particules tomberaient au fond du récipient et s'agglutineraient. Or, au fur et à mesure qu'elles tombent, leur concentration $c(z)$ augmente, générant un courant de diffusion $\vec{j}_D = -D\text{grad}(c)$ opposé qui fait "remonter" les particules. Un équilibre s'établit.
- ⊙ On refait le bilan élémentaire du flux de particule sur un volume élémentaire, en ajoutant le courant \vec{j}_s . On trouve alors facilement :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\text{div}(\vec{j}_D + \vec{j}_s)$$

- ⊙ En régime permanent :

$$\text{div}(\vec{j}_D + \vec{j}_s) = 0$$

Comme les flux ne sont que selon \vec{e}_z , en intégrant par rapport à z , on a $\vec{j}_D + \vec{j}_s = A$. En $z = 0$, au fond du récipient, le flux total est nécessairement nul car les particules ne peuvent pas traverser le récipient. Donc :

$$\vec{j}_D + \vec{j}_s = 0$$

Et alors :

$$c(z) \frac{m^*g}{6\pi\eta a} = -D \frac{\partial c}{\partial z}$$
$$c(z) + L \frac{\partial c}{\partial z} = 0$$

avec $L = \frac{6\pi\eta a D}{m^*g}$. Et donc :

$$c(z) = c_0 \exp\left[-\frac{z}{L}\right]$$

Cas dynamique

- ⊙ Même raisonnement que précédemment, en remplaçant la force du poids par la force centrifuge. Attention, il y a toujours une poussée d'Archimède ! On trouve que $\vec{v} = \frac{m^* \omega^2 r}{6\pi\eta a} \vec{e}_r$. Les particules sont bien ramenées vers l'extérieurs si elles sont plus denses que le solvant. Le courant de particules associé est $j_c = c(r)\vec{v}$, la concentration ne dépendant que de r dans ce cas-là.

On trouve ensuite, avec un bilan en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(D \frac{\partial c}{\partial r} - sr\omega^2 c(r) \right) \right)$$

avec $s = \frac{m^*}{6\pi\eta a}$.

- ⊙ Même raisonnement que précédemment, pour trouver que $D \frac{\partial c}{\partial r} - sr\omega^2 c(r) = 0$. On trouve alors que :

$$\frac{\partial c}{\partial r} = \frac{r}{L^2} c(r)$$

avec $L = \sqrt{s\omega^2/D}$. La solution est :

$$c(r) = c_0 \exp \left[\frac{r^2}{2L^2} \right]$$

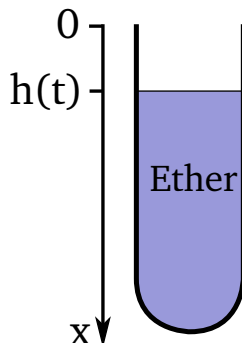
Diffusion à contre-courant • • •

Dans un tuyau de section S circule un solvant à la vitesse $-v_0\vec{e}_x$, où x est l'axe le long du tuyau. En $x = 0$, on injecte à travers une petite ouverture un colorant dans le tuyau, avec un débit molaire n^* . On suppose que le colorant s'homogénéise immédiatement sur toute la section S du tuyau dès son injection en $x = 0$. On remarque que, en plus de s'évacuer avec le solvant vers les x négatifs, le colorant remonte à contre-courant sur une longueur caractéristique L . Le coefficient de diffusion du colorant dans le solvant est noté D .

- ♠ Montrer que la concentration c de particules de colorant en aval de l'écoulement ($x < 0$) ne dépend de x et s'écrit $c = \frac{N_A n^*}{v_0 S}$, en notant N_A le nombre d'Avogadro. En déduire le flux de particule associé \vec{j}_c .
- ♠ Pourquoi la concentration c va dépendre de x en amont de l'écoulement ($x < 0$) ? Quel est le flux de particule $\vec{j}_c(x)$ associé ?
- ♠ En déduire une équation différentielle sur $c(x)$. La résoudre, et en déduire la longueur L de remontée à contre-courant.

Evaporation de l'éther • ○ ○

Un tube à essai de section S est rempli d'éther (masse volumique $\mu = 626 \text{ kg.m}^{-3}$, masse molaire $M = 74 \text{ g.mol}^{-1}$), à une distance $h(t)$ du bord. L'éther étant un liquide très volatile, il s'évapore progressivement de sorte à ce que la hauteur h augmente. A la surface de l'éther, il y a un équilibre vapeur/liquide à la pression de vapeur saturante de l'éther $P_{sat} = 0,583 \text{ mbar}$ (à une température $T = 293\text{K}$ que l'on supposera fixe). Au bord du tube, l'éther est vite dilué dans l'air ambiant et sa concentration est donc nulle. Sa diffusivité dans l'air est notée $D = 1,5 \times 10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$.



- ▲ En notant $c(x)$ la concentration molaire en vapeur d'éther dans le tube entre 0 et $h(t)$, retrouver l'équation de diffusion sur $c(x)$ en supposant la loi de Fick vérifiée.
- ▲ En déduire la concentration de vapeur d'éther $c(x)$ dans le tube en fonction de x , $h(t)$, P_{sat} , R et T . On supposera qu'on est en régime quasi-stationnaire.
- ▲ Quelle quantité d'éther dN est évaporée entre t et $t + dt$?
- ▲ En déduire l'équation différentielle suivante :

$$h\dot{h} = C$$

où C est une constante que l'on précisera.

- ▲ En déduire un ordre de grandeur du temps d'évaporation de l'éther.

Evaporation de l'éther

- ▲ Le grand classique :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

- ▲ En RP, $c(x) = Ax + B$. Avec les CL :

$$c(x) = \frac{P_{sat}}{RT} \frac{x}{h(t)}$$

- ▲ On a $dN = \frac{\mu}{M} S(h(t+dt) - h(t))$. Mais aussi $dN = -j(x=h(t))S = \frac{P_{sat}}{RT} \frac{D}{h(t)}$

- ▲ On en déduit l'équation :

$$h\dot{h} = \frac{DP_{sat}M}{R\mu}$$

- ▲ En déduire un ordre de grandeur du temps d'évaporation de l'éther.