Exercice 1

On s'intéresse à l'écoulement stationnaire, incompressible d'un fluide de masse volumique ρ et de viscosité η autour d'une sphère de rayon R. La vitesse de l'écoulement loin de la sphère est $v_\infty \vec{e_z}$. On adoptera les coordonnées sphériques d'axe Oz, O étant le centre le centre de la sphère.

- On suppose que l'écoulement permet de négliger le terme convectif de l'équation de Navier-Stokes devant le terme diffusif. Comment s'écrit alors cette équation ?
- On suppose que la vitesse est telle que : $\vec{rot}(\vec{rot}(\vec{v})) = \frac{3v_\infty R}{r^3}\left(\cos\theta \vec{e_r} + \frac{1}{2}\sin\theta \vec{e_\theta}\right)$. Quelle est la résultante des forces de pression sur la sphère ?
- Quelle est la résultante des actions de cisaillement sur la sphère ? On donne $\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)_{r=R} = \frac{3v_\infty}{2R}\sin\theta$.
- Trouver la force de trainée s'exerçant sur la sphère.

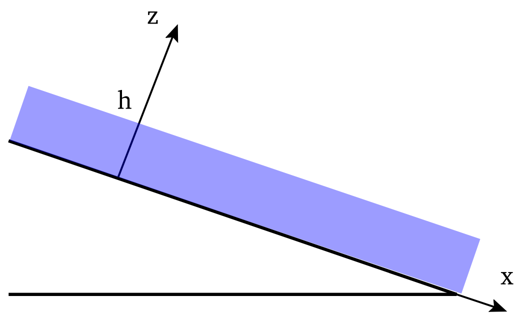
On donne :

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \tag{1}$$

$$\vec{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e_\varphi} \tag{2}$$

Exercice 2

On considère un fluide d'épaisseur h s'écoulant lentement sur un plan infini incliné d'un angle α par rapport à la verticale. Le fluide a une forte viscosité η et une masse volumique ρ, et il est soumis à la gravité. On est en régime permanent.



1 - Quel est le profil de vitesse dans le fluide ?

2 - En déduire le débit.

3 - On observe avec des images satellite que la vitesse d'écoulement d'un glacier à sa surface est d'environ 100m/an. En déduire la viscosité d'un glacier de 100m d'épaisseur, d'un kilomètre de large. Quelle quantité de glace est charriée en une année ?

5 - On place désormais une plaque au dessus du liquide, au niveau de $z = h$. Que deviennent les conditions aux limites ? Trouver le nouveau profil de vitesse. Comment s'appelle se type d'écoulement ?

Exercice 3

On étudie un écoulement permanent d'un fluide incompressible de masse volumique μ, dans un tuyau cylindrique horizontal d'axe Oz, de rayon R, et de longueur L. Le champ de pression appliqué le long du tube est noté $P(r, z)$. Par invariance, le champ de vitesse est supposé ne dépendre que de r et z, et est dirigé selon $\vec{e_z}$. Il est noté $\vec{u} = u(r, z)\vec{e_z}$. On définit la vitesse de cisaillement par la quantité $\dot{\gamma} = -\frac{du}{dr}$.

Contrainte de cisaillement

On définit désormais la contrainte de cisaillement (ou force surfacique de cisaillement) entre deux couches adjacentes de fluide, comme la quantité :

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{F}}{dS}$$

où $d\vec{F}$ est la force qui s'exerce mutuellement entre les couches adjacentes, et dS la surface élémentaire de contact entre ces deux surfaces.

Fluide de Bingham

Un fluide est dit de Bingham si les contraintes de cisaillements entre les couches obéissent à une loi de seuil :

$$\begin{cases} \tau > \tau_s & : \quad \tau = \tau_s + \eta\dot{\gamma} \\ \tau < \tau_s & : \quad \dot{\gamma} = 0 \end{cases}$$

On supposera que le fluide que l'on étudie obéit à une telle loi.

1 - Montrer que $\vec{u}$ ne dépend que de r. En négligeant les actions de la pesanteur, déterminer la relation suivante :

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r\tau)}{\partial r} = 0$$

2 - Établir la relation :

$$\tau(r) = \tau_s \frac{r}{R_s}$$

où R_s est le rayon de seuil, défini par $R_s = 2\tau_s L/\Delta P$, en notant $\Delta P = P(0) - P(L)$ la chute de pression entre l'entrée et la sortie du tuyau. Quel est le signe de ΔP ?

3 - Pour quelle pression minimale ΔP_{min} commence t-on à voir un écoulement à travers le tube ?

4 - On suppose que $\Delta P > \Delta P_{min}$. Déterminer le champs de vitesse dans le tube. Tracer son allure et expliquer pourquoi l'écoulement présente une zone dite *bouchon*.

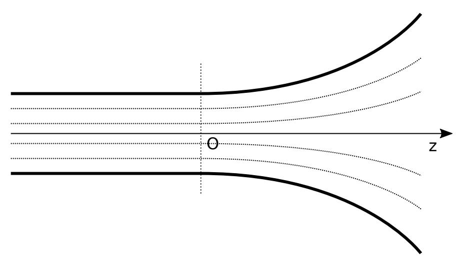
Exercice 4

Tuyau parabolique

Un fluide est en écoulement permanent dans une portion de tube à section parabolique, avec Oz en axe de symétrie. Les lignes de courant s'écoulant dans le tube ont pour équation :

$$\begin{cases} z < 0 & : \quad r = \lambda a \\ z > 0 & : \quad r = \lambda \left(a + \frac{z^2}{b}\right) \end{cases}$$

où λ est un nombre sans dimension, a et b des constantes.



Le fluide est incompressible et la composante axiale de v_z de la vitesse est supposée uniforme sur une section perpendiculaire, cad v_z ne dépend pas de r. On note v_0 la vitesse en O.

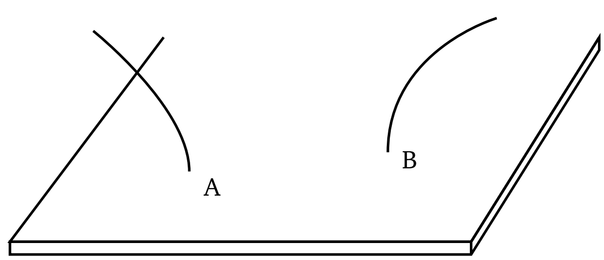
1 - Déterminez la vitesse $\vec{v}$ en tout point.

2 - Comment évolue un élément de fluide qui traverse le tuyau ?

3 - L'écoulement est-il potentiel ?

Écoulement entre deux lames

On considère deux plaques infinies de verres séparées d'une épaisseur e où circule un fluide incompressible. Du fluide est injecté à un débit D_e par un tuyau, et il peut ressortir à travers un autre tuyau identique.



1 - Au vu des symétries et des données du problèmes, proposez une expression pour le champ de vitesse.

2 - Est-ce un écoulement potentiel ?