

## Exercice 1

- Avec les hypothèses :  $\eta \Delta \vec{v} = \vec{grad} P$ . On néglige la variation due à la gravité à l'échelle de la taille de la sphère.
- On cherche à connaître le champ de pression pour connaître la résultante des forces. Liquide incompressible donc  $div \vec{v} = 0$  et donc  $r \vec{rot}(r \vec{rot}(\vec{v})) = \vec{grad}(div \vec{v}) - \Delta \vec{v} = -\Delta \vec{v}$ , donc le gradient de pression vaut l'opposé l'expression de la vitesse donné plus haut.

En choisissant une projection sur  $\vec{e}_r$  ou  $\vec{e}_\theta$  (ce qui revient au même) :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 3\eta \frac{Rv_\infty}{r^3} \cos \theta$$

$$P = -3\eta \frac{Rv_\infty}{2r^2} \cos \theta + P_\infty$$

En notant  $P_\infty$  la pression qui est dans le liquide loin de la sphère.

La résultante des forces de pression, selon l'axe  $\vec{e}_z$ , est  $F_{p,z} = -P(M) d\vec{S} \vec{e}_z$ . Alors :

$$F_{p,z} = - \iint P_\infty R^2 d\varphi \sin \theta d\theta \cos \theta + \iint 3\eta \frac{Rv_\infty}{2R^2} \cos^2 \theta \sin \theta R^2 d\theta d\varphi$$

On trouve alors :  $F_{p,z} = 2\pi\eta v_\infty R$

- La force de cisaillement correspond à la force de frottement due à la viscosité du fluide. Pour un élément de surface  $d\vec{S}$  de la sphère, celle-ci s'écrit :

$$d\vec{F}_c = \eta dS \frac{\partial v}{\partial r} \vec{e}_\theta$$

La projection suivant  $\vec{e}_z$  nous donne alors :

$$F_{c,z} = \iint \eta \frac{\partial v}{\partial r} R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \sin \theta = \iint \eta \frac{3}{2} Rv_\infty \sin^3 \theta d\theta d\varphi = 4\pi\eta Rv_\infty$$

L'intégrale sur  $\theta$  vaut  $4/3$ .

- La force de trainée est la somme des deux forces précédentes. On a donc :  $F_z = 6\pi\eta Rv_\infty$ .

## Exercice 2

- 1 - Comme l'écoulement est lent, et invariant selon  $x$  et  $y$  : l'écoulement ne dépend que de  $z$ . De plus, comme il est incompressible,  $div(\vec{v}) = 0$ , donc  $v_z = cste = 0$ , car la vitesse doit être nécessairement nulle en  $z = 0$ . L'écoulement est donc laminaire et est dirigé selon  $\vec{e}_z$  (c'est une hypothèse, on suppose qu'il est dans le sens de la descente) :  $\vec{v}(x, y, z) = v(z)\vec{e}_z$ .

*NB* : avec un tel profil de vitesse,  $(\vec{v} \cdot \vec{grad})\vec{v}$  est identiquement nul, mais on peut directement le négliger ce terme avec l'hypothèse de l'énoncé (écoulement lent et très visqueux).

L'équation de Navier-Stokes, avec les hypothèses de l'énoncé, devient :

$$0 = \eta \Delta \vec{v} + \rho \vec{g} - \vec{grad}(P)$$

En projetant, on obtient :

$$\begin{cases} \vec{e}_x & : \quad \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \rho g \sin \alpha - \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \vec{e}_z & : \quad -\rho g \cos \alpha - \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

En intégrant selon  $\vec{e}_z$  et avec la condition au limite  $P(x, z = h) = P_0$ , on obtient :

$$P(x, z) = P_0 + \rho g \cos \alpha (h - z)$$

En intégrant selon  $\vec{e}_x$ , avec la condition aux limites  $\frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0$  (il n'y a pas de forces de cisaillement à l'interface air/fluide) devient alors :

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\rho g}{\eta} \sin \alpha (h - z)$$

En intégrant une nouvelle fois, avec la condition aux limites  $v(z = 0) = 0$  (continuité de la vitesse avec le support) :

$$v(z) = \frac{\rho g}{\eta} \sin \alpha z \left( h - \frac{z}{2} \right)$$

Le profil de vitesse est parabolique.

- 2 - Le débit s'écrit, en prenant comme section un carré de largeur  $L \gg h$  pour que les hypothèses de l'énoncé soient valables :

$$D = \int_{y=0}^L dy \int_{z=0}^h dz \cdot v(z)$$

En intégrant, on obtient :

$$D = \frac{\rho g}{3\eta} \sin \alpha L h^3$$

- 3 - La glace a une densité de  $900 \text{ kg.m}^3$ . La vitesse proposée est la vitesse maximale de la glace, car c'est celle en surface. On a donc  $\eta \simeq 7.1 \cdot 10^{12} \text{ Pa.s}$ .

On obtient donc, sur une année :  $V = D \Delta t \simeq 4,73 \cdot 10^6 \text{ m}^3$ , soit 4250 tonnes chaque année.

Il faut garder à l'esprit que ce sont des ordre de grandeurs, car nous n'avons pas pris en compte les conditions aux limites sur les bords (en  $y$ ) du canal d'écoulement du glacier, et que la vitesse est elle aussi un ordre de grandeur.

- 4 - Les conditions aux limites deviennent alors  $v(z = 0) = v(z = h) = 0$ , mais on a plus la condition sur la dérivée première de la vitesse. La vitesse s'écrit :  $v(z) = -\frac{\rho g}{2\eta} \sin \alpha z^2 + a + b$ . Avec les conditions aux limites, on trouve  $b = 0$  et  $a = \frac{\rho g}{2\eta} \sin \alpha h$ .

$$v(z) = \frac{\rho g}{2\eta} \sin \alpha z (h - z)$$

C'est un écoulement de Poiseuille.

### Exercice 3

- 1 - Dans l'énoncé, le problème est dit invariant en  $\theta$  donc la vitesse ne dépend pas de  $\theta$ . D'autre part l'équation de conservation s'écrit, comme le fluide est incompressible :  $\text{div}(\vec{v}) = 0$ , cad  $\partial u_z / \partial z = 0$ , cad  $u_z$  ne dépend pas de  $z$ . Finalement,  $\vec{u}$  ne dépend que de  $r$ .

On effectue un bilan de force sur un petit volume en coordonnées cylindrique au point  $M(r, \theta, z)$ . On projette directement selon  $z$  :

$$rd\theta dr P(z) - rd\theta dr P(z + dz) - \eta\tau(r + dr)(r + dr)d\theta dz + \eta\tau(r)rd\theta dz = 0 \quad (2)$$

Attention, la définition de  $\tau$  implique qu'il est opposé à la variation spatiale de la vitesse. Il y a donc un signe - par rapport aux force classique de cisaillement. On obtient la relation voulue :

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau)}{\partial r} = 0$$

- 2 - On commence à intégrer selon  $z$ . Étant donné que  $u$  ne dépend pas de  $z$ ,  $\dot{\gamma}$  non plus, et  $\tau$  non plus. Dès lors :

$$\int_0^L dz P(z) = P(L) - P(0) = -\Delta P = -\frac{L}{r} \frac{\partial r\tau}{\partial r}$$

On obtient donc :  $\Delta P = \frac{L}{r} \frac{\partial r\tau}{\partial r}$ . On intègre désormais sur  $r$ , et on trouve la relation demandée. Attention, durant le calcul, on intègre un  $r^2$  qui fait apparaître un facteur  $1/2$ .

- 3 - Pour qu'il y ait écoulement, il faut qu'il existe une valeur de  $r$  telle que  $\tau > \tau_s$  (car sinon  $\dot{\gamma} = 0$ ). La plus grande valeur de  $r$  est le rayon  $R$ , on doit alors nécessairement avoir  $R > R_s$  pour espérer voir un écoulement. On a alors  $\tau_s = \tau_s R / R_s$ .

Cela correspond à une pression minimum de  $\Delta P_{min} = \frac{2\tau_s L}{R}$ .

- 4 - Comme  $\Delta P > \Delta P_{min}$ , on a forcément  $R > R_s$ . Donc pour  $r > R_s$  :

$$-\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\tau_s}{\eta} \left( \frac{r}{R_s} - 1 \right)$$

On trouve donc pour  $r > R_s$  :

$$u(r) = \frac{\Delta P}{4L\eta} (R + r - 2R_s)(R - r)$$

Pour  $r < R_s$ , on a  $\dot{\gamma} = 0$  donc :

$$u(r) = u(R_s) = \frac{\Delta P}{4L\eta} (R - R_s)^2$$

Pour visualiser, l'effet, bouchon, il suffit de tracer la courbe de  $u(r)$  en fonction de  $r$ .

## Exercice 4

1 - Il y a deux cas :

$z < 0$  : Avec l'équation d'incompressibilité  $\text{div}(\vec{v}) = 0$ , on trouve  $\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$ . Comme dans cette partie, les lignes de courants sont parallèle à l'axe  $Oz$ , la vitesse est nécessairement selon  $e_z$  donc l'équation de conservation devient  $\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$ , donc  $cv_z = \text{cste} = v_0$ . Finalement,

$$\vec{v} = v_0 \vec{e}_z$$

$z > 0$  : La conservation du débit impose que pour toute section du tube, on ait  $\iint d\vec{S} \vec{v} = \pi r^2 v_z(r, z) = \text{cste}$ , car  $v$  ne dépend pas de  $r$ . En l'occurrence, pour  $z = 0$ , on a  $\pi r^2 v_z(r, z) = \pi \lambda^2 a^2 v_0$ . On a donc :

$$v_z(r, z) = \frac{a^2}{\left(a + \frac{z^2}{b}\right)^2} v_0$$

Les lignes de courant sont définies par  $\vec{v} \wedge d\vec{l}$ . Comme  $d\vec{l} = dr \vec{e}_r + dz \vec{e}_z$ , donc on a :

$$v_r dz - v_z dr = 0 \implies \frac{v_r}{v_z} = \frac{\partial r}{\partial z}$$

On trouve alors :

$$\vec{v} = \frac{a^2}{\left(a + \frac{z^2}{b}\right)^2} v_0 \vec{e}_z + \frac{2rz}{ab \left(1 + \frac{z^2}{ab}\right)^3} v_0 \vec{e}_r$$

On peut vérifier que l'écoulement est bien incompressible.

2 - Les lignes de courant s'écartent lors du passage dans la zone parabolique, l'élément de fluide se déforme de sorte à être plus fin pour respecter la conservation de la masse.

3 -

$$\vec{\Omega} = \text{rot}(\vec{v}) = \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta = \frac{1 - 5z^2/ab}{(1 + z^2/ab)^4} \frac{2rv_0}{ab} \vec{e}_\theta \neq 0$$

### Écoulement entre deux plaques

On peut raisonner en superposant les deux champs de vitesse comme en électromagnétisme.

Il faut séparer le  $\ln$  en deux parties pour distinguer les deux vecteurs directeurs correspondant à l'écoulement. On introduit alors  $r_0$  une longueur intermédiaire.

$$\vec{\text{grad}}(\phi) = av_0 \left( \vec{\text{grad}} \ln \frac{r_1}{r_0} - \vec{\text{grad}} \ln \frac{r_2}{r_0} \right)$$

On trouve :

$$\vec{v} = av_0 \left( \frac{\vec{e}_{r_A}}{r_A} - \frac{\vec{e}_{r_B}}{r_B} \right)$$

Le champs de vitesse créé par la source en A, à une distance  $r_A$  de cette source peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{v}_A = v_A(r_A, z)e_{r_A}$$

En effet, par invariance,  $\vec{v}_A$  ne peut dépendre de  $\theta$ . D'autre part, comme l'écoulement est lent, il ne pourra être dirigé que selon  $e_{r_A}$ .

Avec la conservation du débit, on a :

$$D_e = 2\pi r_A \int_{-e/2}^{e/2} dz v(r_A, z)$$

En notant  $v_{moy} = \frac{1}{e} \int_{-e/2}^{e/2} dz v(r, z)$ , qui correspond à la vitesse moyenne entre les deux plaques, on obtient :

$$v_{moy}(\vec{r}_A) = \frac{D_e}{2\pi r e} e_{r_A}$$

La vitesse décroît en  $1/r_A$ . S'il n'ya pas de viscosité, on a bien  $v_{moy} = v$ .

Même chose pour la source en B :

$$v_{moy}(\vec{r}_B) = -\frac{D_e}{2\pi r e} e_{r_B}$$

Au final :

$$v_{moy} = \frac{D_e}{2\pi e} \left( \frac{1}{r_A} e_{r_A} - \frac{1}{r_B} e_{r_B} \right)$$

Les champs de vitesses sont à divergence nulle donc incompressibles.

## Exercice 5

- 1 - Il y a invariance selon  $\theta$  et selon  $z$ , mais aussi selon  $t$  (écoulement permanent).  $\vec{v}$  ne dépend donc que de  $r$ .
- 2 - Le bilan de matière donne :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Les deux derniers termes de l'équation sont nuls à cause des invariances. En intégrant le premier terme, on trouve  $v_r = \frac{cste}{r}$ . Comme  $v_r(R_1) = 0$  par conservation du débit,  $\forall r, v_r = 0$ .

La vitesse ne dépend donc que de  $r$  et a une composante uniquement selon  $\vec{e}_\theta$  (d'après l'énoncé,  $v_z = 0$ ).

- 3 - Le plus simple est de faire un bilan des moments selon  $\vec{e}_z$  à un élément de fluide (en coordonnées cylindriques) qui est un anneau (ou tore) compris entre  $r$  et  $r + dr$ , d'épaisseur  $dz$ . Les forces visqueuses s'appliquent orthoradialement alors sur les surfaces internes et externe.

Le moment total exercé doit être nul de sorte que :

$$2\pi r dz \sigma_\theta(r) \times r - 2\pi(r + dr) dz \sigma_\theta(r + dr) \times (r + dr) = 0$$

cad :  $r^2 \sigma_\theta(r) - (r + dr)^2 \sigma_\theta(r + dr) = 0$ . On en déduit que  $\frac{\partial}{\partial r} r^2 \sigma_\theta = 0$ .

D'autre part,  $\sigma_\theta = \eta \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) = \eta r \frac{\partial}{\partial r} \frac{v_\theta}{r}$ . On trouve le résultant voulu :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^3 \frac{\partial}{\partial r} \frac{v_\theta}{r} \right) = 0$$

- 4 - On intègre la relation précédente et on trouve :

$$v_\theta = \frac{A}{r} + Br$$

Les conditions aux limites sont :  $v_\theta(r = R_{1,2}) = R_{1,2} \Omega_{1,2}$ . On obtient alors :

$$v_\theta = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_2^2 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r}$$

- 5 - Le couple exercé par le cylindre de rayon  $R_1$  s'exprime comme la résultante des contraintes de cisaillement dues à la viscosité :

$$M_\eta(R_1) = \iint R_1 d\theta dz R_1 \sigma_\theta(R_1) = 2\pi R_1^2 L \sigma_\theta(R_1)$$

Or,  $\sigma_\theta(R_1) = -2B\eta/R_1^2$  donc on trouve que :

$$M_\eta(R_1) = 4\pi\eta \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_2^2 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

L'angle du ressort est donc :  $\theta = M_\eta(R_1)/k$ . On peut donc mesurer la viscosité du fluide.

## 0.1 Exercice 6

- 1 - Comme  $2\vec{\Omega} = r\vec{\text{ot}}(\vec{v})$ , le théorème de Stokes nous donne sur un cercle  $C$  fermé de centre  $O$  de rayon  $r$  :

$$\oint_C \vec{v}(r, \theta, z) \cdot r d\theta \vec{e}_\theta = 2 \iint_{S_C} d\vec{S} \cdot \vec{\Omega}$$

Pour  $r < a$ , on a :

$$\oint_C \vec{v}(r, \theta, z) \cdot r d\theta \vec{e}_\theta = 2\pi r^2 \Omega$$

Pour  $r > a$ , on a :

$$\oint_C \vec{v}(r, \theta, z) \cdot r d\theta \vec{e}_\theta = 2\pi a^2 \Omega$$

Il s'agit du même problème que celui du fil infini de rayon parcouru par une densité volumique de courant uniforme.

- 2 - Les intégrales précédentes permettent de trouver que :

Pour  $r < a$ , on a :

$$\vec{v}(r) \vec{e}_\theta = r \Omega \vec{e}_\theta$$

Pour  $r > a$ , on a :

$$\vec{v}(r) \vec{e}_\theta = \frac{a^2}{r} \Omega \vec{e}_\theta$$

- 3 - Pour  $r < a$ , l'équation de Navier-Stokes donne :

$$\vec{\text{grad}} \frac{v^2}{2} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = -g\vec{e}_z - \frac{1}{\rho} \vec{\text{grad}} P$$

Le premier terme est l'accélération centrifuge et vaut  $\Omega r^2 \vec{e}_r$ , le second vaut  $-2\Omega r^2 \vec{e}_r$ . En projetant sur  $r$  et  $z$  et en intégrant la pression, on obtient :

$$P(r, z) = k + \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2 - \rho g z$$

La constante  $k$  sera à déterminer avec la continuité de la pression.

Pour  $r < a$ , l'équation de Navier-Stokes donne :

$$\vec{\text{grad}} \frac{v^2}{2} = -g\vec{e}_z - \frac{1}{\rho} \vec{\text{grad}} P$$

Le premier terme (l'accélération centrifuge) vaut  $-\frac{a^4 \Omega^2}{r^3} \vec{e}_r$ . En projetant sur  $r$  et  $z$  et en intégrant la pression, on obtient :

$$P(r, z) = P_0 - \rho g z + \frac{\rho a^4 \Omega^2}{2r^2}$$

On sait en effet que la pression pour  $r \rightarrow \infty$  est égale à la pression atmosphérique  $P_0 - \rho g z$ .

La continuité de  $P(r, z)$  en  $a$  donne  $k = P_0 - \rho \Omega^2 a^2$ .

Au final :

$$\begin{cases} r < a & : & P(r, z) = P_0 - \rho g z + \rho \Omega^2 \left( \frac{r^2}{2} - a^2 \right) \\ r > a & : & P(r, z) = P_0 - \rho g z + \frac{\rho a^4 \Omega^2}{2r^2} \end{cases}$$

- 4 - La pression est minimale en  $r = 0$ , et surtout elle ne peut pas être négative. Dans le cas extrême où  $P(r = 0) = 0$ , on a  $P_0 - \rho \Omega^2 a^2 = 0$ , cad  $a \Omega = \sqrt{P_0 / \rho} = v(r = a) = v_{max}$ . Pour une pression  $P_0 = 1 \text{ bar}$ , on a une vitesse maximale de  $277 \text{ m.s}^{-1}$  ! Ce qui correspond à des vents de  $1000 \text{ km.h}^{-1}$ , ce qui n'est pas observable. D'autres phénomènes interviennent avec la compressibilité de l'air, qui est négligée ici, avec des turbulences fortes.
- 5 - Avec le même raisonnement précédent, on a  $a \Omega = 180 \text{ km.h}^{-1} = 50 \text{ m.s}^{-1}$ . On suppose que lorsque la tornade passe sur le bâtiment, la pression à l'intérieur est restée à  $P_0$ . Il s'en suit une différence de pression de :  $\Delta P = P_0 - P_{min} = -\rho a^2 \Omega^2 = 3250 \text{ Pa}$ , cad une force de  $325 \text{ kg par m}^2$ . Le toit s'envole.