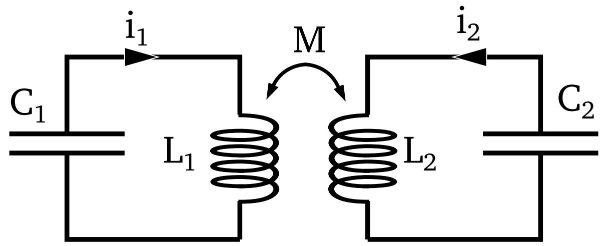
Induction mutuelle entre deux circuits

3° On considère les deux circuits LC suivants, composés de capacités C_1 et C_2 et de bobines d'inductance propre L_1 et L_2 et d'inductance mutuelle M.



- ♣ Qu'est-ce que l'inductance propre ? Leur induction mutuelle ? Quelle condition a t-on nécessairement entre L_1, L_2 et M ?
- ♣ Déterminer les équations différentielles satisfaites par i_1 et i_2.

On supposera dans la suite que $L_1 = L_2 = L$ et $C_1 = C_2 = C$.

- ♣ En proposant un changement de fonction bien choisi avec i_1 et i_2, trouver la solution générale pour i_1 et i_2. Pourquoi parle t-on de modes propres ?
- ♣ Quelle est l'allure du spectre de i_1 ? Dans le cas d'un faible couplage M, montrer que le spectre se scinde en deux harmoniques centrées autour de ω_0, séparées en fréquence de $\delta\omega$, que l'on déterminera.
- ♣ On suppose qu'à $t = 0$, les deux condensateurs sont déchargés. Pour quelles valeurs de $i_1(t = 0)$ et $i_2(t = 0)$ y a t-il qu'une fréquence dans le spectre de i_1 et i_2 ?
- ♣ Réaliser un bilan de puissance électrique et commenter.

On retourne au cas général : on suppose que $L_1 \neq L_2$ et $C_1 \neq C_2$.

- ♣ Montrer que l'on peut écrire le système d'équation différentielle vérifiée par i_1 et i_2 sous la forme :

$$\mathbf{M}\frac{\mathrm{d}\mathbf{I}^2}{\mathrm{dt}^2} + \mathbf{I} = 0$$

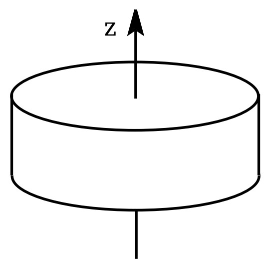
où $\mathbf{M}$ est une matrice 2×2 dont on précisera les coefficients et I est le vecteur :

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

- ♣ Montrer que les vecteurs propres $\hat{i}_1$ et $\hat{i}_2$ de cette équation matricielle sont solutions d'une équation différentielle que l'on précisera ; expliciter des pulsations propres ω_1 et ω_2 et donner les expressions de $\hat{i}_1$ et $\hat{i}_2$

Courants de Foucault dans un cylindre en rotation

Un cylindre conducteur plein et de conductivité γ est en rotation de vitesse angulaire constante ω autour de son axe Oz. L'axe est en matière isolante.



Champ axial

Un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0\vec{e_z}$ est appliqué.

- ◇ En considérant la force de Lorentz qui s'exerce sur les électrons de conduction, analyser les effets de la rotation du cylindre pour justifier l'établissement d'un régime permanent. Existe t-il des courants de Foucault lorsque ce régime est établi ?
- ◇ En régime permanent, montrer à l'aide de la force de Laplace que l'effet du champ magnétique est équivalent à un champ électrique $\vec{E_m}$ dont on précisera l'expression. Quelle est alors la répartition des charges dans le cylindre ?

Champ transverse

On applique désormais un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0\vec{e_x}$ transverse à l'axe de rotation.

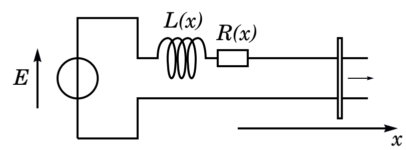
- □ Justifier l'existence de courants de Foucault dans ce cas en prévoyant leur allure (on pourra s'appuyer sur la force de Lorentz). Quel est leur effet mécanique ?

Si le cylindre est très long, la densité de courant est de la forme $\vec{j} = j(r,\theta)\vec{e_z}$. On suppose de plus que les phénomènes électromagnétiques proches des extrémités supérieures et inférieures (les disques) sont négligeables par rapport à ceux ayant lieu le long du cylindre.

- □ Quelle est la relation entre $\vec{j}(r,\theta)$ et $\vec{j}(r,\theta+\pi)$?
- □ A l'aide d'un contour soigneusement choisi, utiliser l'équation de Maxwell Faraday pour déterminer le champ électrique $\vec{E}(r,t)$ à l'intérieur du cylindre.
- □ Exprimer alors l'expression de $\vec{j}(r,\theta)$
- □ Quelle est la puissance dissipée dans le cylindre ?
- □ Déterminer le moment des efforts de Laplace par rapport à l'axe de rotation.

Canon électromagnétique

On considère un circuit électrique équipé d'un générateur et de deux rails parallèles sur lesquels se trouve un barreau mobile, se déplaçant suivant x. L'inductance $L(x)$ et la résistance $R(x)$ dépendent alors de x. Le générateur impose un courant $I(t)$ à travers le circuit.



Cas statique

On suppose dans un premier temps que le mobile est fixé à $x = x_0$ et ne peut pas se mouvoir.

♡ Exprimer le flux magnétique à travers le circuit et en déduire la force électromotrice d'auto-induction.

♡ Lors de l'établissement du courant de 0 à $I(t)$, le générateur doit fournir une énergie magnétique E_m en plus de l'énergie dissipée par effet Joule. Quelle est l'expression de E_m ?

Cas mobile

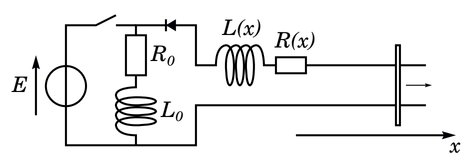
Le barreau est supposée désormais libre de ses mouvement selon l'axe x.

△ Lorsqu'un courant électrique parcourt le circuit, le barreau se met en mouvement. Expliquer. Exprimer, à l'instant t, la puissance fournie par le générateur en sus de celle dissipée par effet Joule.

△ Une partie de cette puissance correspond à la variation de E_m, une autre correspond à la puissance mécanique P_{mca} donnée au barreau. Donner l'expression de P_{mca}. Quelle force s'exerce sur le barreau ?

Étude du mouvement

On suppose que le générateur est constitué d'une dynamo couplée à une bobine d'inductance L_0 et de résistance R_0. Tant que l'interrupteur C est fermé, la dynamo impose un fort courant I_0 dans la bobine. A $t = 0$, où l'on ouvre C, le courant s'écoule alors dans les rails et accélère le barreau.



On suppose par ailleurs que $L(x) = L'x$ et $R(x) = R'x$, où L' et R' sont respectivement l'inductance et la résistance linéique du barreau.

♢ Écrire la force électromotrice du circuit déformable, puis l'équation électrique du circuit.

♢ Ecrire l'équation du mouvmeent du barreau. On notera sa masse M.

♢ Quelles sont les conditions initiales ? Existe t-il des solutions stationnaires ?

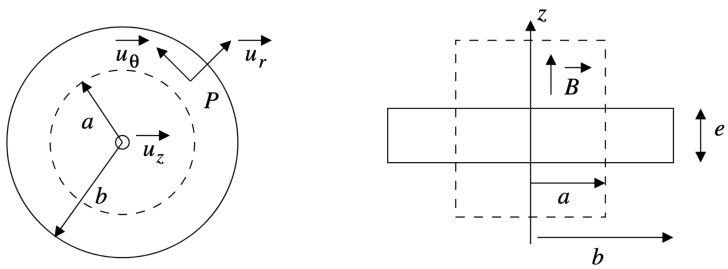
♢ On suppose que L_0 est très "grande". Justifier que $I(t) \simeq I_0$ et en déduire $\dot{x}(t)$ et $x(t)$.

Question supplémentaire : déterminer l'inductance et la résistance linéique dans le cas de deux rails cylindriques de rayon a, distants de b et de conductivité γ.

Chauffage par induction

Un disque métallique de conductivité σ, d'axe Oz vertical, de rayon b et d'épaisseur e est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$. Ce champ magnétique a les caractéristiques suivantes :

- Il est localisé dans un cylindre d'axe vertical Oz et de rayon a ;
- il est uniforme dans le cylindre précédent et nul à l'extérieur de ce cylindre ;
- il est dirigé suivant $\vec{e_z}$;
- il varie au cours du temps selon $\vec{B} = B_m \cos(\omega t)\vec{e_z}$.



On admettra par la suite que le champ magnétique induit est négligeable devant le champ magnétique extérieur appliqué.

♣ Justifiez l'existence de courants de Foucault dans le cylindre métallique de la forme $\vec{j} = j(r,t)\vec{e_\theta}$.

♣ A l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday, exprimer $j(r,t)$ en fonction des données du problème.

♣ Quelle est l'expression de la puissance dissipée par effet Joule P_{Joule} ? Donner sa valeur moyenne $\langle P_{Joule} \rangle$

♣ Ce dispositif est utilisé dans des plaques électrique de cuisine pour chauffer une casserole. Comment créer en pratique le champ magnétique souhaité ?

♣ Le champ magnétique utilisé a une pulsation de $\omega = 2 \times 10^5 \text{rad.s}^{-1}$ et son intensité de l'ordre de 10^{-4}T. On considère une plaque à induction de rayon $b = 10$cm et une casserole dont le fond a le même rayon $a = b = 10$cm et une conductivité $\sigma = 6,0 \times 10^7 \text{S.m}^{-1}$. Déterminer l'ordre de grandeur de la puissance dissipée dans le fond de la casserole.