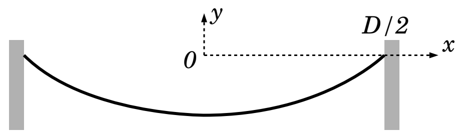
Étude d'une corde

On considère une corde suspendue entre deux points fixes de même hauteur $y = 0$, situés à $x = -D/2$ et $x = +D/2$. La corde a une masse volumique μ.

Cas statique

La corde est supposée dans un premier temps statique.

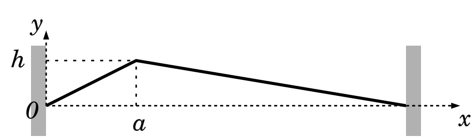


- ⋆ En appliquant le principe fondamental de la statique sur un élément de corde, déterminer une équation différentielle en $y(x)$, correspondant à la hauteur y de la corde à l'abscisse x. On fera apparaître une longueur caractéristique l_c, dont on précisera l'expression.
- ⋆ Résoudre cette équation différentielle (on pourra résoudre l'équation en utilisant le changement de variable $p(x) = \mathrm{d}y/\,\mathrm{d}x$). Trouver la solution à l'aide des conditions aux limites.
- ⋆ Déterminer la tension $T(x)$ le long de la corde. A quelle endroit est-elle maximale ? Minimale ? Commenter.
- ⋆ Exprimer la longueur L et la *flèche* h (la hauteur entre le point le plus haut et le plus bas) de la chaîne en fonction du paramètre l_c. Comment connaître alors la tension dans une chaîne suspendue simplement à partir d'une photographie de celle-ci et de sa masse linéique ?

Cas dynamique

On considère maintenant que la corde est fortement tendue mais qu'elle n'est plus statique. On cherche à comprendre sa dynamique. On négligera les frottements.

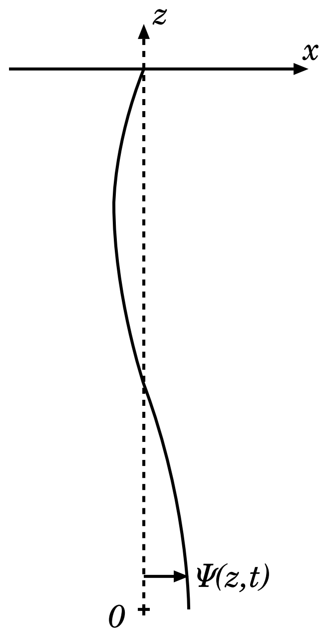
- ⋄ Que se passe t-il lorsque la corde devient extrêmement tendue ? Que peut-on négliger par rapport au cas statique ?
- ⋄ Déterminer l'équation régissant $y(x,t)$ le long de la corde. Comment s'appelle cette équation ? Quelles sont ses solutions ? Commenter.
- ⋄ Sachant que la corde est ancrée en $x = 0$ et $x = L$, donner l'expression générale de $y(x,t)$ dans le cas de solutions stationnaires.
- ⋄ On excite la corde avec une excitation dessinée ci-dessous. Donner l'expression de $y(x,t)$ dans ce cas-là.



- ⋄ Si la corde décrite dans l'exercice est celle d'un instrument de musique (violon, guitare, piano...), comment expliquer la différence de timbre entre ces instruments pour une note donnée ?

Corde pendue verticalement

On considère une corde attachée au plafond à un point fixe et laissée verticalement à elle-même dans le vide. On prendra pour origine $z = 0$ le bout de la corde. Elle n'est soumise qu'à la gravité. On notera $\Psi(z,t)$ l'écart de la corde à la verticale à la hauteur z à l'instant t, que l'on supposera très petit par rapport à la longueur L de la corde.



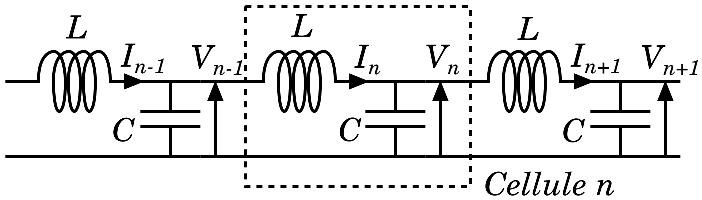
* En appliquant le principe fondamental de la dynamique, trouver une équation différentielle en $\Psi(z,t)$.

On cherche des solutions sous la forme $\Psi(z,t) = \alpha(z)\cos(\omega t) + \beta(z)\sin(\omega t)$.

* Comment s'appellent ce type de solutions ? Déterminer l'équation différentielle vérifiée par α et β.
* En posant $Z = \frac{z\omega^2}{g}$, trouver un nouveau système d'équation différentielle en $A(Z) = \alpha(z)/\alpha(0)$.
* On cherche la solution sous la forme d'une série entière $A(Z) = \sum_k A_k Z^K$. Déterminer les coefficients K.
* Comment pourrait-on trouver une relation de dispersion $\omega(k)$?

Propagation sur une ligne électrique

On considère une ligne électrique composée d'une suite de cellules identiques, constituées d'une inductance L et d'une capacité C comme indiqué sur le schéma ci-dessous. Dans la cellule n, on note V_n la tension au bornes de la capacité et I_n le courant traversant l'inductance.



♠ En établissant des relations entre les courants et les tensions des cellules $n-1$, n et $n+1$, montrer que la tension V_n vérifie la relation suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2 V_n}{\mathrm{d}t^2} = \omega_0^2 (V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n) \tag{1}$$

On précisera l'expression de ω_0.

♠ Calculer la quantité $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}CV_n^2 + LI_n^2\right)$. Interpréter physiquement l'ensemble des termes.

On cherche une solution sinusoïdale pour $V_n(t)$ de l'équation 1 (on prendra la notation complexe $V_n(t) = A_n \exp(j\omega t)$) de sorte à ce que l'effet après le passage dans une cellule soit un déphasage α fixé : $V_{n+1} = V_n \exp(-j\alpha)$, avec $\alpha > 0$.

♠ Quelle est la signification de la grandeur α en terme de propagation ? Exprimer A_n en fonction de A_0, n et α. En déduire une relation de "dispersion" entre ω et α.

♠ Montrer que ces solutions n'existent que si ω est inférieur à une certaine fréquence ω_c, que l'on exprimera. Si cette condition est vérifiée, pourquoi peut-on parler de propagation de la phase ? Préciser la "vitesse" de propagation v_φ correspondante.

♠ On suppose maintenant que $\omega \ll \omega_c$. En explicitant α en fonction de ω, exprimer v_φ. Que constate t-on ? En déduire l'effet d'une cellule sur un signal électrique, composé de fréquence suffisamment basses, se traduit par un retard temporel τ que l'on exprimera en fonction de ω_0. Application numérique : $C = 10\text{nF}$ et $L = 25\mu\text{H}$, calculer ω_0 et τ. Combien de cellules doit-on mettre pour obtenir un retard de 0.1ms ?

♠ On se place dans le cas où $\omega < \omega_c$ et $\alpha > 0$. Rappeler la définition et l'interprétation de la vitesse de groupe. En donner l'expression en fonction de ω_0 et α et donner son allure de son graphe en fonction de α. Que se passe t-il pour $\alpha = \pi$?

♠ En notation complexe, l'intensité I_n est de la forme $I_n(t) = B_n \exp(j\omega t)$. Exprimer B_n en fonction de A_n, L, ω_0 et α. Calculer la moyenne temporelle de l'énergie de la cellule n $E = \left\langle \frac{1}{2}CV_n^2 + \frac{1}{2}LI_n^2 \right\rangle$, ainsi que celle de la puissance P reçue de la cellule $n-1$. En déduire le rapport P/E. Commenter.

Question supplémentaire

On suppose que l'inductance L et la capacité C sont remplacées respectivement par une inductance linéique Λ et une capacité linéique Γ.

♡ En substituant judicieusement l'indice n par la dimension spatiale x le long du câble coaxial, montrer que l'équation 1 devient une équation d'Alembert.

♡ Dans ce cas-là, par quelle quantité substituer α ? Sur quel type de solutions sur V retombe t-on ? Que devient l'équation de dispersion ? Justifier.