

# Réflexion d'une onde électromagnétique sur des plans métalliques en incidence oblique

On considère une onde plane progressive se propageant dans le vide, selon le vecteur d'onde  $\vec{k} = k \cos \theta \vec{u}_x + k \sin \theta \vec{u}_y$  et à la pulsation  $\omega$ . Elle arrive sur un plan métallique infiniment conducteur situé sur le demi-espace  $x > 0$ . On notera  $\vec{E}_i$  et  $\vec{B}_i$  respectivement le champ électrique et le champ magnétique incidents. Le champ électrique est polarisé rectilignement selon  $Oz$  et son amplitude est  $E_0$ .

♡ Retrouver l'équation de propagation des champs électrique et magnétique. Quelle est la relation de dispersion associée ?

♡ Expliciter les expressions des champs  $\vec{E}_i$  et  $\vec{B}_i$ .

En arrivant sur l'interface, les relations de passage du champ électromagnétique imposent l'apparition d'une onde réfléchie, dont on notera  $\vec{E}_r$  et  $\vec{B}_r$  les champ électrique et magnétique. On supposera que  $\vec{E}_r$  s'écrit sous la forme :

$$\vec{E}_r = \vec{E}'_0 \exp(i\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)$$

♡ Que valent les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  à l'intérieur de la plaque ? Justifier.

♡ En utilisant les relations de passage, écrire  $\vec{E}_r$  en fonction de  $E_0$ ,  $k$ ,  $\omega$  et  $\theta$ . En déduire l'expression du champ magnétique réfléchi,  $\vec{B}_r$ .

♡ Quelle est alors l'expression du champ électrique  $\vec{E}$  résultant pour  $x < 0$  ? De quel type d'onde s'agit-il ?

♡ On place une seconde plaque métallique en  $x = -L$ . Montrer que la présence de la seconde plaque impose une discrétisation du spectre, c'est-à-dire que seules des fréquences  $\omega$  discrètes peuvent se propager pour un angle  $\theta$  donné. Tracer les valeurs prises par  $\omega$  en fonction de  $\theta$ .

♡ Quelle est la valeur minimale que peut prendre  $\omega$  ? Justifier.

♡ Démontrer que  $k_y = \vec{k} \cdot \vec{u}_y$  vérifie l'équation dite de dispersion des modes d'une onde transverse électrique :

$$k_y^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \quad (1)$$

♡ Quel est le courant surfacique à la surface de la plaque ?

♡ Calculer l'expression du champ magnétique résultant  $\vec{B}$  entre les deux plaques et en déduire l'expression du vecteur de Poyting. Commenter.

# Propagation d'une onde radio dans un plasma en présence d'un champ magnétique longitudinal

♠ On écrit le PFD pour un électron du plasma :

$$m\vec{a} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}_{ext} - e\vec{E}$$

*NB* : dans la force de Lorentz, le champ magnétique de l'OPPM est négligeable par rapport au champ électrique et au champ magnétique extérieur. Pour une puissance solaire de  $1\text{kW/m}^2$ , on a un champ électrique de  $5 \cdot 10^2 \text{V/m}$ , et donc un champ magnétique associé de  $1\mu\text{T}$  environ. En comparaison, le champ magnétostatique terrestre est de  $50\mu\text{T}$ .

On trouve alors comme équation :

$$mj\omega \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \end{vmatrix} = -e \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \end{vmatrix} - e \begin{vmatrix} v_y B_e \\ -v_x B_e \end{vmatrix}$$

On a de plus :  $\vec{j} = -en_0\vec{v}$ . Pour trouver la relation, il faut inverser la matrice formée par  $(v_x, v_y)$  pour exprimer les coordonnées de la vitesse en fonction de  $(E_x, E_y)$ . On trouve :

$$\begin{cases} j_x = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega_c^2 - \omega^2} (j\omega E_x - \omega_c E_y) \\ j_y = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega_c^2 - \omega^2} (\omega_c E_x + j\omega E_y) \end{cases}$$

Cela correspond à une matrice de conductivité :

$$[\gamma] = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega_c^2 - \omega^2} \begin{pmatrix} j\omega & -\omega_c \\ \omega_c & j\omega \end{pmatrix}$$

♠ On appelle cette onde polarisation circulaire car si l'on regarde l'orientation du vecteur électrique au cours du temps, elle décrit un cercle.

♠ Les équations de Maxwell permettent d'obtenir rapidement la relation générale suivante :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

En introduisant les expressions classique d'OPPM dedans, on trouve :

$$\left( \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \cdot \mathbb{1} + j\mu_0 \omega [\gamma] \right) \vec{E} = \vec{0}$$

Si l'on veut obtenir des solutions non-triviales, cad valable pour  $\vec{E} \neq \vec{0}$ , il faut que :

$$\det \left( \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \cdot \mathbb{1} + j\mu_0 \omega [\gamma] \right) = 0$$

cad :

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_c^2} = \pm \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{\omega \omega_c}{\omega^2 - \omega_c^2}$$

Les deux possibilités correspondent à :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)} \right) \quad , \quad E_y = -jE_x$$

Cad une onde circulaire gauche et :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)} \right) \quad , \quad E_y = +jE_x$$

cad une onde polarisée circulaire droite.

On appelle permittivité relative d'un milieu la quantité complexe  $\varepsilon_r$  que l'on peut définir ici à travers la relation  $k^2 = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 = \varepsilon_r \omega^2 / c^2$ .

- ♠ On trouve  $\varepsilon_{rg} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)}$  et  $\varepsilon_{rd} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)}$ . Lorsque  $\varepsilon_r$  est négatif,  $k$  est imaginaire pur et l'onde est évanescence, elle ne se propage pas.

Les graphes montrent que la propagation de l'onde circulaire droite est possible pour  $\omega > \omega_1$ , où  $\omega_1$  est la pulsation pour laquelle  $\varepsilon_{rd}$  devient positif :

$$\omega_1 = \frac{-\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2}}{2}$$

Celle de l'onde circulaire gauche est possible pour  $\omega < \omega_c$  ou  $\omega > \omega_2$ , avec :

$$\omega_2 = \frac{\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2}}{2}$$

- ♠ Une onde rectiligne peut être considérée comme une superposition de deux ondes circulaires de même amplitude, tournant dans le même sens. Par exemple, pour une onde dirigée suivant  $\vec{e}_x$  :

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \Re \left( \frac{E_0}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ -i \end{vmatrix} \exp(j\omega t - kz) + \frac{E_0}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ i \end{vmatrix} \exp(j\omega t - kz) \right)$$

- ♠ Si on considère que l'onde rentre dans le plasma en  $z = 0$ , on a alors à la sortie :

$$\vec{E}(L, t) = \Re \left( \frac{E_0}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ -i \end{vmatrix} \exp(j\omega t - k_g L) + \frac{E_0}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ i \end{vmatrix} \exp(j\omega t - k_d L) \right)$$

où  $k_g$  et  $k_d$  sont les vecteurs d'ondes associées aux ondes polarisées circulaire droite et gauche. On trouve que l'onde de sortie est bien rectiligne :

$$\vec{E}(L, t) = E_0 \begin{vmatrix} \cos \left( \frac{k_g - k_d}{2} L \right) \\ \sin \left( \frac{k_g - k_d}{2} L \right) \end{vmatrix} \times \cos \left( \omega t - \frac{k_g + k_d}{2} L \right)$$

La polarisation est donc bien rectiligne avec un angle de décalage  $\Psi = \frac{k_g - k_d}{2} L$  Pour  $\lambda_0 = 30\text{cm}$ ,  $\omega = 2\pi 10^9 \text{rad/s}$ , ce qui est largement supérieur à  $\omega_p = 5,6 \cdot 10^7 \text{rad/s}$ . On peut écrire :

$$k_g - k_d = \frac{\omega}{c} \left( -\frac{\omega_p^2}{2\omega(\omega - \omega_c)} + \frac{\omega_p^2}{2\omega(\omega + \omega_c)} \right) \simeq \frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega^2} \simeq -1,16 \cdot 10^{-3} \text{rad}$$

C'est une valeur négligeable.

## Ondes électromagnétiques dans un métal conducteur

- ◇ Equation de propagation d'Alembert, archi-classique. Avec les données de l'énoncé, on a dans le vide :

$$\begin{cases} \vec{E} &= E_0 \exp[i(kz - \omega t)] \vec{e}_x \\ \vec{B} &= \frac{E_0}{c} \exp[i(kz - \omega t)] \vec{e}_y \end{cases}$$

- ◇ En régime sinusoïdal, l'équation du mouvement des électrons devient :

$$mi\omega \vec{v} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$$

Sachant que  $\vec{j} = -eN_0 \vec{v}$ , on a donc :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{i\omega + \frac{1}{\tau}} \vec{E}$$

Ou encore :

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{1 + i\omega\tau}$$

avec  $\gamma_0 = \frac{N_0 e^2 \tau}{m}$  est la conductivité statique du métal.

- ◇ Les équations de Maxwell donnent :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - i \frac{\gamma}{\varepsilon_0 \omega} \right) \\ &= \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - i \frac{i\omega_p^2}{\omega (i\omega + \frac{1}{\tau})} \right) \end{aligned}$$

- ◇ Comparer  $\omega_c = 1/\tau \simeq 10^{14}$  et  $\omega_p \simeq 10^{16}$ . On a donc  $\omega_c \ll \omega_p$ . Il existe bien trois régimes :

- 1 -  $\omega \ll \omega_c \ll \omega_p$ . Régime basse fréquence.
- 2 -  $\omega_c \ll \omega < \omega_p$ . Régime "moyenne" fréquence.
- 3 -  $\omega_c \ll \omega_p < \omega$ . Régime haute fréquence.

**On se place dans le cas où  $\omega \ll \omega_c$ .**

- ◇ On trouve alors que :

$$k^2 = -\frac{i\omega_p^2 \omega}{\omega_c c^2} = -i\gamma_0 \mu_0 \omega$$

- ◇ Dans ce cas-là :

$$k = \frac{1 - j}{\delta}$$

avec  $\delta = \sqrt{2/\mu_0 \gamma_0}$ . Et :

$$\vec{E} = E_0 \exp[-z/\delta] \exp[i(\omega t - z/\delta)] \vec{e}_x \quad (2)$$

On retrouve bien le cas de l'effet de peau à basse fréquence. L'onde se propage encore dans le métal mais son amplitude décroît exponentiellement.

**On se place dans le cas où  $\omega \gg \omega_c$ .**

- ◇ Dans ce cas-là, c'est le terme dissipatif en  $m\vec{v}/\tau$  qui devient négligeable, et on se retrouve dans le cas du plasma non dissipatif :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$$

- ◇ Dans ce cas plasma, la conductivité devient imaginaire pure, donc il n'y a plus de dissipation (le terme  $\vec{j} \cdot \vec{E}$  est en  $\cos(\omega t) \sin(\omega t)$  et sa valeur moyenne s'annule).

Si  $\omega < \omega_p$ ,  $k$  est imaginaire pur :  $k = i\delta$  et alors :

$$\vec{E} = E_0 \exp[-z/\delta] \exp[i\omega t] \vec{e}_x \quad (3)$$

avec  $\delta = \frac{c^2}{\omega_p^2 - \omega^2}$ . L'onde est stationnaire et évanescence : elle ne se propage plus du tout, contrairement au cas de l'effet de peau.

Si  $\omega > \omega_p$ ,  $k$  est réel :

$$\vec{E} = E_0 \exp[-z/\delta] \exp[i(\omega t - kz)] \vec{e}_x \quad (4)$$

L'onde se propage à une vitesse différente que celle dans le vide mais le métal est transparent pour l'onde.

### Bilan

- ◇ Finalement, résumer les 3 situations rencontrées et justifier les observations décrites dans l'énoncé.
- ◇ Quelle est la différence fondamentale entre un plasma vu en cours et un métal comme décrit ici ?

## Guide d'onde métallique

- ★ Ce n'est pas une OPPM : l'amplitude n'est pas uniforme dans le plan orthogonal à la direction de propagation. On ne peut donc pas utiliser la relation de structure ; la relation de dispersion du vide  $\omega = kc$  est *a priori* non valide.

- ★ On utilise  $\text{div}(\vec{E}) = 0$ , et on voit rapidement que :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Avec les autres équations de Maxwell, on trouve très facilement l'équation d'Alembert sur  $\vec{E}$  dans le guide, qui est assimilé au vide. La présence des parois modifie les conditions aux limites. En injectant l'expression de  $\vec{E}$  dans l'équation de propagation, on trouve :

$$f''(y) + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \cdot f(y) = 0$$

Si  $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 < 0$ , alors on a des solutions exponentielles :

$$f(y) = A \exp(Ky) + B \exp(-Ky)$$

avec  $K = -\frac{\omega^2}{c^2} + k^2$

Si  $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 > 0$ , alors on a des solutions sinusoïdales :

$$f(y) = A \cos(Ky) + B \sin(-Ky)$$

avec  $K = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$

★ Les conditions aux limites sont :

$$E_x(y=0) = E_x(y=b) = 0$$

Elles proviennent des relations de passage à l'interface avec la paroi métallique, où la composante tangentielle du champ électrique est continue. Le champ électrique étant nul dans le métal infiniment conducteur, la composante tangentielle de celui-ci dans le vide doit être nulle. Dans le cas des solutions exponentielles, on aurait :

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ \exp(Kb) + \exp(-Kb) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

La solution serait alors  $A = B = 0$ . A l'inverse, des solutions sinusoïdales non nulles sont possibles avec ces conditions aux limites, où l'on a  $B = 0$  et  $A = E_0$ , l'amplitude du champ électrique :

$$\vec{E} = E_0 \sin(Kx) \exp[i(kz - \omega t)] \vec{e}_x$$

★ Les solutions sinusoïdales trouvées correspondent au cas  $K^2 = \omega^2/c^2 - k^2 > 0$ , c'est-à-dire  $\lambda > 2\pi c/\omega$ . A une fréquence donnée, la longueur d'onde doit avoir une valeur minimale.

D'autre part, la condition  $f(y=b) = 0$  implique que  $\sin(Kb) = 0$ , c'est-à-dire que  $Kb = m\pi$ , où  $m$  est un entier, c'est-à-dire :

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = \frac{m^2 \pi^2}{b^2}$$

On a alors :

$$\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \exp[i(kz - \omega t)] \vec{e}_x$$

On parle de mode de quantification car pour une pulsation donnée, seuls des valeurs du vecteur d'onde  $k$  sont autorisées, discrétisées par la valeur  $m$ . Pour  $m = 0$ , il n'y a aucun mode, donc pas de propagation possible ( $f = 0$ ). Pour  $m = 1$ , on a un mode, c'est-à-dire un  $k$  pour un  $\omega$  donné, compris entre  $[c\pi/b; 2c\pi/b]$ . Pour  $m = 2$ , on a deux modes, c'est-à-dire 2  $k$  pour un  $\omega$  donné, compris entre  $[2c\pi/b; 3c\pi/b]$ . Etc. Inversement, pour une pulsation  $\omega$  donnée, on a  $E(\omega b/c\pi)$  modes possibles.

Pour représenter  $\vec{E}$ , il suffit de représenter les fonctions  $\sin(\frac{\pi}{b}y)$  ( $m=1$ ) et  $\sin(\frac{2\pi}{b}y)$  ( $m=2$ ).

★ Le champ magnétique  $\vec{B}$  est donné par Maxwell-Faraday :

$$\nabla \wedge \vec{E} = i\omega \cdot \vec{B}$$

On doit trouver :

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{k}{\omega} E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \exp[i(kz - \omega t)] \vec{e}_y \\ &+ \frac{im\pi}{\omega b} E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \exp[i(kz - \omega t)] \vec{e}_z \end{aligned}$$

★ Le vecteur  $\vec{\Pi}$  est défini comme :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

NE JAMAIS OUBLIER DE PASSER E ET B EN REEL !

On trouve, après calculs :

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} &= \frac{m\pi}{\omega b \mu_0} E_0^2 \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \cos(kz - \omega t) \sin(kz - \omega t) \cdot \vec{e}_y \\ &+ \frac{k}{\omega \mu_0} E_0^2 \sin^2\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \cos^2(kz - \omega t) \cdot \vec{e}_z \end{aligned}$$

Seule la valeur moyenne temporelle de la composante selon  $\vec{e}_z$  est non nulle : l'énergie se propage bien selon la direction de propagation de l'onde.

## Réflexion sur un conducteur de conductivité finie

♣ Equation de propagation d'une onde, ou d'Alembert. En injectant l'expression des ondes incidentes et réfléchies, on trouve que  $k_i^2 = k_r^2 = \omega^2/c^2$ . Le signe est donné par la direction de propagation : on a donc  $k_i = \omega/c$  et  $k_r = -\omega/c$ .

♣ Pour des fréquences inférieures au GHz, on peut négliger dans l'équation de Maxwell-Ampère le courant de déplacement  $\vec{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  les courants induits par ce même champ électrique,  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ , car  $\omega \varepsilon_0 \ll \gamma$ . On en déduit que le champ électrique vérifie une équation de diffusion :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

En insérant l'expression proposée sur l'onde transmise, on trouve que  $k_t^2 = -j\mu_0\gamma\omega$ . On a donc :

$$k_t = \frac{1-j}{\delta}$$

avec  $\delta = \sqrt{2/\mu_0\gamma\omega}$ .

♣ On trouve à partir de la relation de structure  $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$  :

$$\begin{cases} \vec{B}_i = \frac{E_{0,i}}{c} \exp[i(\omega t - kz)] \vec{e}_y \\ \vec{B}_r = -\frac{E_{0,r}}{c} \exp[i(\omega t + kz)] \vec{e}_y \\ \vec{B}_t = (1-j) \frac{E_{0,t}}{\delta \omega} \exp[-z/\delta] \exp[i(\omega t - z/\delta)] \vec{e}_y \end{cases} \quad (6)$$

avec  $k = \omega/c$ .

♣ Il y a continuité des champs électriques et magnétiques : il n'y a ni charges surfaciques, ni courants surfaciques (la conductivité est finie !). On a alors :

$$\begin{cases} E_{0,i} + E_{0,r} = E_{0,t} \\ \frac{E_{0,i}}{c} + \frac{E_{0,r}}{c} = E_{0,t} \frac{(1-j)}{\delta \omega} \end{cases} \quad (7)$$

On trouve alors :

$$\begin{cases} r = \frac{1-n}{1+n} = \frac{1 - \frac{(1-j)c}{\omega\delta}}{1 - \frac{(1-j)c}{\omega\delta}} \\ t = \frac{2}{1+n} = \frac{2}{1 - \frac{(1-j)c}{\omega\delta}} \end{cases} \quad (8)$$

avec  $n = \frac{(1-j)c}{\omega\delta}$ .

♣ On bourrine avec  $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ , toujours en notation réelle ! On peut utiliser  $(1-j)/\sqrt{2} = \exp(-j\pi/4)$ . On trouve alors :

$$\begin{cases} \langle \vec{\Pi}_i \rangle = \frac{E_{0,i}^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_z \\ \langle \vec{\Pi}_r \rangle = \frac{E_{0,r}^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_z \\ \langle \vec{\Pi}_t \rangle = \frac{E_{0,t}^2}{2\mu_0 \omega \delta} \vec{e}_z \end{cases} \quad (9)$$

En  $z = 0$ , on a :

$$\begin{cases} R = -\frac{\langle \vec{\Pi}_r \rangle \cdot \vec{e}_z}{\langle \vec{\Pi}_i \rangle \cdot \vec{e}_z} = \frac{1 + \left(1 - \frac{\omega\delta}{c}\right)^2}{1 + \left(1 + \frac{\omega\delta}{c}\right)^2} \\ T = -\frac{\langle \vec{\Pi}_t \rangle \cdot \vec{e}_z}{\langle \vec{\Pi}_i \rangle \cdot \vec{e}_z} = \frac{4 \frac{\omega\delta}{c}}{1 + \left(1 + \frac{\omega\delta}{c}\right)^2} \end{cases} \quad (10)$$

On trouve évidemment que  $R + T = 1$  : l'énergie est belle et bien conservée.

♣ La puissance dissipe par unité de volume par effet Joule dans le métal s'écrit :

$$p_{vol} = \vec{j} \cdot \vec{E}_t = \gamma \vec{E}_t \cdot \vec{E}_t$$

Pour obtenir une puissance dissipée, on intègre sur un cylindre de section  $S$ , sur la longueur  $z \in [0; \infty]$  pour prendre en compte la dissipation sur toute l'épaisseur du métal. La décroissance étant exponentielle, l'intégrale sera définie :

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= S \gamma \frac{E_{0,t}^2}{2} \int_0^\infty dz \exp[-2z/\delta] \\ &= S \gamma \delta |t|^2 \frac{E_{0,i}^2}{2} \\ &= ST \frac{E_{0,i}^2}{2\mu_0 c} \\ &= S \left\langle \parallel \vec{\Pi}_t(z=0) \parallel \right\rangle \end{aligned}$$