Le Petit Prince : satellisation d'une pomme

On se place à la surface d'une planète de rayon R et de champ gravitationnel g. On envoie une pomme avec une vitesse v_0 purement horizontale et on négligera les frottements de l'air.

- En supposant la planète localement plane, déterminer la hauteur $\mathrm{d}z$ dont est tombée la pomme après avoir parcouru une longueur $\mathrm{d}x$ dans le plan horizontal.
- Après une distance horizontale $\mathrm{d}x$, de combien le sol de la planète est-il descendu ? On pourra utiliser les formules pour les petits angles : $\tan\theta \simeq \theta$, $\sin\theta \simeq \theta$ et $\cos\theta \simeq 1 - \theta^2/2$.
- En déduire qu'il existe une certaine vitesse v_0 pour laquelle la pomme va revenir à son point de départ.

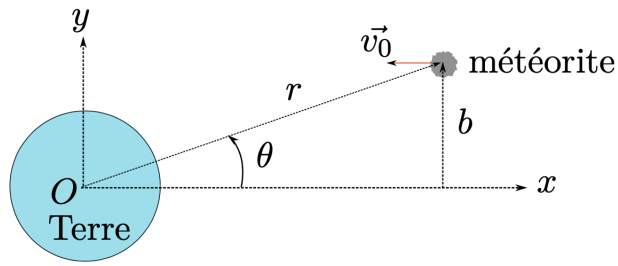
Projectile lancé à la verticale

On tire un petit projectile à la verticale, avec une vitesse initiale v_0. Le problème est de calculer son altitude z en fonction du temps, en tenant compte de la gravité et de la résistance de l'air. Comme l'objet est petit, on supposera que la résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse et que la force de résistance est $m\gamma v$, m étant la masse de l'objet, v sa vitesse et γ une constante. Nous supposerons que la force de gravité est constante (on néglige sa variation en fonction de l'altitude). On adoptera comme origine la position du tir ($z = 0$) et on supposera que le mouvement ne se produit que dans la direction z.

- Soit $v(t)$ la composante en z de la vitesse du projectile. Écrivez l'équation différentielle que doit satisfaire $v(t)$ en fonction du temps, d'après la deuxième loi de Newton.
- Résoudre cette équation différentielle avec la condition initiale $v(0) = v_0$.
- Exprimer maintenant l'altitude z en fonction du temps.
- Calculer l'altitude maximale atteinte par le projectile ($z_{\max}$), en fonction des paramètres v_0, g et γ.
- Exprimer le résultat de la question précédente ($z_{\max}$) dans les limites de très faible résistance ($\gamma \to 0$) et de très forte résistance ($\gamma \to \infty$). Quelles modifications mineures devrait-on apporter à l'équation différentielle trouvée première question pour retrouver ces résultats plus simplement ?

Paramètre d'impact

Une météorite arrive depuis l'infini vers la Terre avec une vitesse à l'infini $\vec{v}_0$. La Terre a une masse M_T et un rayon R_T. On note b le paramètre d'impact comme indiqué sur la figure ci-dessous. L'objectif de ce problème est de déterminer la valeur minimale de b pour laquelle la météorite évite la collision avec la Terre.



- La météorite n'est soumise qu'à la force gravitationnelle de la Terre. Déterminer la nature de sa trajectoire. Montrer que le mouvement est plan et déterminer une relation entre r et $\dot{\theta}$.

- On note N le point de la trajectoire où la distance qui sépare la météorite de la Terre est la plus petite. Montrer qu'en N, la vitesse est uniquement suivant $\vec{u}_\theta$. Déterminer une relation entre v_N au point N, la distance ON, b et v_0.

- En utilisant la conservation de l'énergie, montrer la relation :

$$0 = r_{\min}^2 v_0^2 + 2GM_T r_{\min} - v_0^2 b^2.$$

- En déduire l'expression minimale b_c du paramètre d'impact telle que pour $b < b_c$, la météorite frappe la Terre et pour $b > b_c$, la météorite évite la Terre. On pourra exprimer le résultat en fonction de la vitesse de libération v_{lib}.

Piège de Penning

A l'aide d'un dispositif approprié, on créé dans une région de l'espace au voisinage d'un point O un champ électrique défini en coordonnées carthésiennes par :

$$\vec{E} = \frac{U_0}{2R^2}\left(-x\vec{e}_x - y\vec{e}_y + 2z\vec{e}_z\right)$$

Un électron de masse m et de charge e se meut dans la région située autour du point O.

- $\ominus$ Montrer que le point O est une position d'équilibre pour l'éléctron. Discuter de la stabilité selon les directions. On introduira $\omega_z^2 = eU_0/mR^2$.

Pour stabiliser la trajectoire de l'électron, on supperpose au champ électrique un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$. On définit $\omega_c = eB_0/m$.

- $\ominus$ Montrer que le mouvement suivant $\vec{e}_z$ est inchangé.
- $\ominus$ Pour le mouvement dans le plan (xOy), montrer que l'électron n'est piégé que si B_0 est supérieur a une certaine valeur B_c, à déterminer en fonction des données de l'exercice. On utilisera le changement de variable : $\rho = x + iy$.
- $\ominus$ Résoudre l'équation en ρ pour le cas $B_0 \gg B_c$, sans chercher à mettre en évidence les constante d'intégration, mais en mettant en évidence deux pulsations, l'une voisine de ω_c, notée ω_c', et une autre notée ω_m, appelée pulsation magnétique.

Tir à grande distance

Dans le jeu *Call of Duty 4 : Modern Warfare*, le joueur prend le rôle d'un tireur d'élite devant abattre une cible située à une distance d =897m à l'aide d'un fusil de précision, qui tire un projectile à une vitesse $v_0 = 850\text{m.s}^{-1}$. Le tir s'effectue depuis le dernier étage d'un immeuble d'une hauteur $H = 30\text{m}$, la cible se trouvant plein nord par rapport au tireur. La scène se situe en Russie, à une latitude $\lambda = 45°$. Le coéquipier du joueur précise, avant le tir, qu'il faut tenir compte de l'effet de Coriolis et l'on souhaite vérifier cette affirmation.

On définit $R = (O, x, y, z)$ le repère situé au pied de l'immeuble où se trouve le joueur, avec l'axe $\vec{e}_x$ dirigé vers l'est et l'axe $\vec{e}_y$ se dirigeant vers le nord. On notera $\vec{\Omega}_T$ le vecteur rotation de la terre. On supposera que les frottements de l'air sont négligés.

- † Ecrire les équations du mouvement dans le référentiel R de la balle une fois que le tireur fait feu.
- † Déterminer la solution sur $x(t)$ sans préciser les variables d'intégration.
- † Donner une estimation du temps de vol avant impact t_{impact} puis simplifier les équations du mouvement, les résoudre.
- † Que pensez-vous de l'affirmation du coéquipier ? Quel est l'écart $\vec{\varepsilon}$ de la balle par rapport à si celle-ci avait une trajectoire parfaitement rectiligne ?