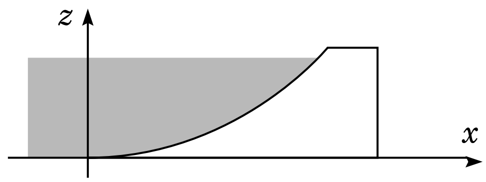
Force exercée sur un barrage $\bullet \circ \circ$

On considère un barrage de lac rempli d'une hauteur d'eau H. La forme de sa paroi en contact avec l'eau est décrite par l'équation $z = kx^2$, comme indiqué sur le schéma ci-dessous. Le barrage a une longueur L selon y.



- A partir d'un bilan de force, démontrer la relation fondamentale de la statique des fluides dans l'eau :

$$\vec{\text{grad}}(P) - \rho\vec{g} = \vec{0}$$

  où ρ est la densité massique de l'eau, supposée constante et $\vec{g}$ le champ de pesanteur terrestre.

- Donner l'expression du champ de pression p dans l'eau.
- Déterminer les forces horizontales et verticales exercées par le lac sur le barrage.

Correction - Force exercée sur un barrage

◇ Il s'agit de la démonstration classique de l'équation de statique des fluides. Le bilan des forces (pression et gravité) sur un volume élémentaire $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ d'air situé au point $M = (x, y, z)$ s'écrit

$$-P(x, y, z + \mathrm{d}z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\vec{e}_z + P(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\vec{e}_z + \rho\vec{g} = \vec{0}$$

On omis les variations de pression selon x et selon y mais qui sont traitées de la même manière qu'en z. On trouve alors rapidement l'expression $\vec{\mathrm{grad}}(P) + \rho\vec{g} = \vec{0}$ avec le développement de Taylor de $P(z + dz)$.

◇ En utilisant la relation précédente :

$$p(z) = p_0 + \rho g(H - z)$$

◇ Il faut faire un bilan des forces, en "zoomant" sur la paroi du barrage en un point (x, z) de la surface. La force élémentaire créée par la pression est $d\vec{F} = p(x)dS\vec{n}$, où $\vec{n}$ est la normale à la surface : $\vec{n} = \sin\alpha\vec{e}_x - \cos\alpha\vec{e}_z$, en notant α l'angle la pente du barrage en ce point, cad $\tan\alpha = dz/dx$.

Pour la force horizontale, selon $\vec{e_x}$:

$$dF_x = p(z)\sqrt{dx^2 + dz^2}L\sin\alpha = p(z)Ldz$$

car $dS = Ldl = \sqrt{dx^2 + dz^2}L$ et $\sin\alpha = dz/dl$. On a donc :

$$F_x = \int_0^H p(z)Ldz = \left[p_0 + \frac{\rho g H}{2}\right] LH$$

Pour la force verticale, selon $\vec{e_z}$:

$$dF_z = p(z)\sqrt{dx^2 + dz^2}L\cos\alpha = -p(z)Ldx$$

car $\cos\alpha = dx/dl$. En posant x_0 tel que $H = kx_0^2$, on a donc :

$$F_z = \int_0^{x_0} p(z)Ldz = L\int_0^{x_0} (p_0 + \rho g(H - kx^2)dz = -Lx_0p_0 - \frac{2}{3}L\rho g x_0 H$$

Pression dans une étoile ● ● ○

Soit une étoile sphérique de rayon R et de masse M, constituée de gaz. On note respectivement $p(r)$, $\rho(r)$ et $\vec{g}(r)$ la pression, la densité et le champ de gravitation dans l'étoile à une distance r du centre. On souhaite connaître ces quantités au sein de l'étoile.

- ♠ On admet que le champ de gravitation et la densité sont reliés par la relation :

$$\mathbf{div}\vec{g}(r) = -4\pi G\rho(r)$$

  où ρ est la constante gravitationnelle. Déterminer $g(r)$ en fonction d'une intégrale de ρ que l'on déterminera.

- ♠ A partir d'un bilan de force, démontrer la relation fondamentale de la statique des fluides dans le gaz de l'étoile :

$$\vec{\text{grad}}(p) - \rho\vec{g} = \vec{0}$$

- ♠ Dans le cas où la masse volumique est une constante, cad $\rho(r) = \rho_0$, déterminer le champ de gravité $\vec{g}(r)$ et le champ de pression $p(r)$.

- ♠ On suppose maintenant que le gaz se comprime au fur et à mesure que la pression augmente au sein de l'étoile, en suivant la loi suivante :

$$\frac{P}{\rho^2} = C$$

  où C est une constante quelconque.

  Trouver une équation différentielle en $\rho(r)$ et la résoudre en introduisant la fonction $f(r) = r\rho(r)$.

Corrige - Pression dans une étoile

Pression dans une étoile ● ● ○

♠ En utilisant le théorèeme de Green-Ostravaski, sur une sphère de rayon r :

$$g(r) = -\frac{4\pi G}{r^2}\int_0^r dr' r'^2 \rho(r')$$

♠ Le classique, cf les corrections précédentes.

♠ On utilise l'expression intégrale précédente :

$$g(r) = -\frac{M_e G}{R^3} r$$

avec M_e la masse de l'étoile.

♠ On suppose maintenant que le gaz se comprime au fur et à mesure que la pression augmente au sein de l'étoile, en suivant la loi suivante :

$$\frac{P}{\rho^2} = C$$

où C est une constante quelconque.

Trouver une équation différentielle en $\rho(r)$ et la résoudre en introduisant la fonction $f(r) = r\rho(r)$.

Structure de l'atmosphère • • •

La troposphère constitue la partie basse de l'atmophère dans laquelle nous vivons, du niveau de la mer jusqu'à une altitude comprise entre 8 et 15km. On peut considérer la troposphère comme un gaz parfait de coefficient thermodynamique $\gamma = 7/5$, de masse molaire $M = 28.965\text{g.mol}^{-1}$, soumis à la gravitation terrestre, modélisée par l'accélération de la pesanteur $g = 9.81\text{m.s}^{-2}$ supposée constante avec l'altitude (représentée par la variable z). La pression au niveau de la mer $z = 0$ est $P_0 = 10^5\text{Pa}$ et la température est T_0 =293K. On souhaite connaître l'évolution de la pression P et de la tempérture T avec l'altitude.

- △ A partir d'un bilan de force, démontrer la relation fondamentale de la statique des fluides pour l'atmosphère :

$$\vec{\text{grad}}(P) - \rho\vec{g} = \vec{0}$$

où ρ est la densité massique de l'atmosphère.

- △ Redémontrer dans le cas classique de l'atmopshère isotherme ($T(z) = T_0$) l'expression de la pression $P(z)$ et $\rho(z)$. On mettra en évidence une altitude caractéristique H à déterminer. En quoi ce modèle est-il limité ?

- △ Pour déterminer l'évolution de la pression et de la température avec l'altitude, on suppose qu'un volume V d'air subit une transformation adiabatique réversible (et non plus isotherme) lorsqu'il change d'altitude. Montrer alors que la pression P et la densité ρ de l'air sont alors reliées par :

$$\rho = \frac{MP_0}{RT_0}\left(\frac{P}{P_0}\right)^{1/\gamma}$$

- △ En déduire l'évolution de la pression avec l'altitude $P(z)$, de la densité $\rho(z)$ puis celle de la température $T(z)$. Commenter en mettant en évidence l'altitude caractéristique H vue précédemment. Dans ce modèle, quelle est alors l'épaisseur de l'atmosphère ?

- △ De combien chute la température lorsqu'on monte à 1000m d'altitude d'après ce modèle ? Quelle est la pression et la densité de l'air au sommet de l'Everest (8848m) ?

- △ En réalité, le gradient de température diminue de $7.7 \cdot 10^{-3}\text{K.m}^{-1}$. Cela s'explique par le fait que une transformation thermodynamique dans l'atmosphère (comme évoqué ci-dessus) n'est pas parfaitement adiabatique et que le gaz n'est pas sec. Il peut néanmoins être modélisé par un coefficient thermodynamique $\gamma_{eff} \neq \gamma$. Estimer γ_{eff}. Commenter.

Correction - Structure de l'atmosphère

- Il s'agit de la démonstration classique de l'équation de statique des fluides. Le bilan des forces (pression et gravité) sur un volume élémentaire $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ d'air situé au point $M = (x, y, z)$ s'écrit

$$-P(x, y, z + \mathrm{d}z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\vec{e}_z + P(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\vec{e}_z + \rho\vec{g} = \vec{0}$$

On omis les variations de pression selon x et selon y mais qui sont traitées de la même manière qu'en z. On trouve alors rapidement l'expression $\vec{\mathrm{grad}}(P) + \rho\vec{g} = \vec{0}$ avec le développement de Taylor de $P(z + dz)$.

- Dans l'hypothèse d'une transformation adiabatique réversible, un volume V d'air changeant d'altitude suit la loi de Laplace $PV^\gamma = cste$. Comme la densité ρ du gaz contenu dans ce volume V est inversement proportionnelle à celui-ci, on a :

$$\rho = cste \times P^{1/\gamma}$$

Pour déterminer la constante, on utilise la loi des gaz parfait à l'altitude z_0 : $P_0V = nRT_0$, ce qui donne $\rho_0 = \frac{MP_0}{RT_0}$. On a donc :

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{P}{P_0}\right)^{1/\gamma} = \frac{MP_0}{RT_0}\left(\frac{P}{P_0}\right)^{1/\gamma}$$

- Avec l'équation de statique des fluide, on a donc :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g = -\frac{Mg}{RT_0}P_0\left(\frac{P}{P_0}\right)^{1/\gamma}$$

On introduit le paramètre $H = \frac{RT_0}{Mg}$ homogène à une altitude et la variable de pression réduite $p = P/P_0$. L'équation différentielle devient alors :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\frac{1}{H}p^{1/\gamma}$$

La solution est alors :

$$\boxed{p(z) = \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{z}{H}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

La densité se trouve grâce à la relation explicitée à la question précédente :

$$\boxed{\rho(z) = \frac{P_0}{Hg}\left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{z}{H}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}$$

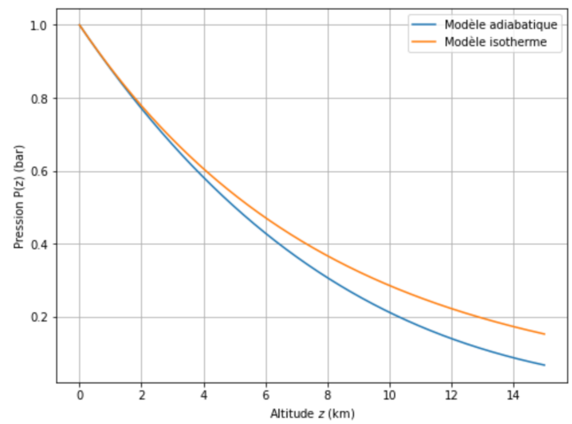
La température se trouve grâce à la relaiton de Laplace, $T^\gamma P^{1-\gamma} = cste$. On a alors $T = T_0\left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_0 p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$, donc :

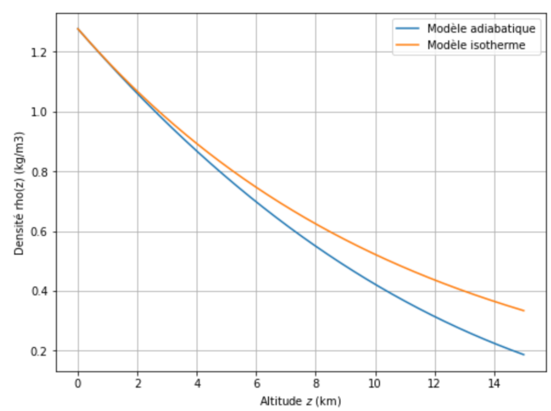
$$\boxed{T(z) = T_0\left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{z}{H}\right)}$$

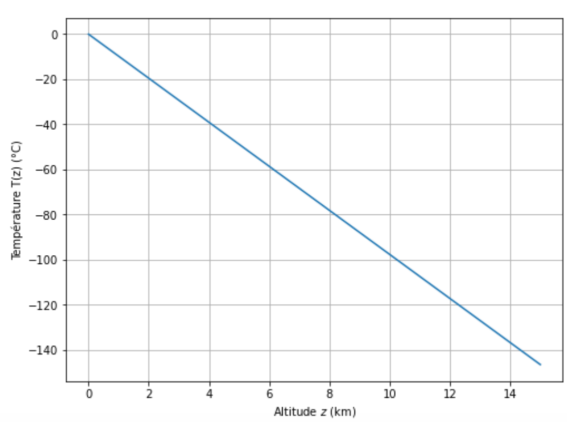
Les fonctions P, ρ et T ne sont définies si et seulement si $1 - \frac{1-\gamma}{\gamma}\frac{z}{H} > 0$, cad si $z < \frac{\gamma}{\gamma-1}H \simeq$ 29.75km. Il n'y a plus du tout de gaz au-delà !

△ La température décroit linéairement avec l'altitude, c'est un résultat que l'on retrouve expérimentalement : plus on monte, plus il fait froid ! Plus précisément, elle diminue de $T_0 \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{1}{H} \simeq 9.77 \cdot 10^{-3}$ °C pour une élévation de 1m, soit une chute de 9.77°C pour 1000m.

Au sommet de l'Everest, la pression est de seulement 1/3 celle au niveau de la mer, et la densité seulement la moitié.







△ L'atmosphère réelle permet des échanges thermiques même faibles. Le gradient de température est un peu plus faible, et coefficient thermodynamique γ_{eff} est plus faible, correspondant à une situation où l'on est pas parfaitement adaibatique. Pour le retrouver, on utilise le gradient de température :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = -T_0\frac{\gamma-1}{\gamma H} = -Mg\frac{\gamma-1}{\gamma R}$$

Pour $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = -7.7 \cdot 10^{-3}\mathrm{K.m}^{-1}$, on trouve $\gamma_{eff} = 1,26$.

△ Le modèle d'atmosphère isotherme correspond au cas où $\gamma_{eff} = 1$. En effet, dans ce cas là on retrouve la loi des gaz parfait $PV = cste = nRT$, on voit aussi que l'atmosphère a un graident de température nulle et une extension infinie : $z < \frac{\gamma}{\gamma-1}H \longrightarrow \infty$. D'autre part, les fonctions pécédentes convergent vers la décroissance exponentielles de l'atmosphère isotherme :

$$\begin{aligned}
P(z) &= P_0\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{z}{H}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\
&= P_0\exp\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\ln\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{z}{H}\right)\right) \\
&\xrightarrow[\gamma\to1]{} P_0\exp\left(-\frac{z}{H}\right)
\end{aligned}$$

Résultante des forces sur une digue $\bullet\circ\circ$

En notant z l'altitude, avec $\vec{g} = -g\vec{e}_z$, le champ de pression est à gauche $P_0 + \mu_0 g(h_1 - z)$ pour $z \in [0, h_1]$ et P_0 pour $z \in [h_1, H]$. A droite, $P_0 + \mu_0 g(h_2 - z)$ pour $z \in [0, h_2]$ et P_0 pour $z \in [h_2, H]$. La résultante des forces est donc issue de deux forces dans l'air, et de deux forces dans l'eau.

$$\begin{aligned} f_{1e} &= \int_{z=0}^{h_1}\int_{y=0}^{5H}(P_0 + \mu_0 g(h_1 - z))dydz \\ &= 5H\left(P_0 h_1 + \mu_0 g\frac{h_1^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Pour la pression dans l'air :

$$\begin{aligned} f_{1a} &= \int_{z=h_1}^{H}\int_{y=0}^{5H} P_0 dydz \\ &= 5HP_0(H - h_1) \end{aligned}$$

Et donc :

$$f_1 = 5H\left(P_0 H + \mu_0 g\frac{h_1^2}{2}\right)$$

De même :

$$f_1 = -5H\left(P_0 H + \mu_0 g\frac{h_2^2}{2}\right)$$

Donc la résultante est :

$$f = 5H\frac{\mu_0 g}{2}(h_1^2 - h_2^2) = \frac{25\mu_0 g H^3}{32}$$