

## Questions et exercices de cours

### Transformation adiabatique réversible - loi de Laplace

On considère une transformation sur un gaz de  $n$  moles passant d'un état  $P_1, V_1, T_1$  à un état  $P_2, V_2, T_2$ . On rappelle l'identité thermodynamique reliant lors d'une transformation élémentaire l'évolution de l'énergie interne et l'entropie du système :

$$dU = TdS - PdV$$

Montrer que sur la transformation, la variation d'entropie peut s'écrire :

$$\Delta S = \frac{nR}{(\gamma - 1)} \left[ \gamma \ln \frac{T_2}{T_1} + (1 - \gamma) \ln \frac{P_2}{P_1} \right]$$

En déduire les différentes variantes de la loi de Laplace, lorsqu'une transformation est adiabatique et réversible :

$$PV^\gamma = C_1$$

$$TV^{\gamma-1} = C_2$$

$$T^\gamma P^{1-\gamma} = C_3$$

où  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  sont des constantes.

### Premier principe sur un fluide en écoulement stationnaire

Préciser les hypothèses et établir l'expression générale du premier principe pour un fluide en écoulement stationnaire à travers une machine quelconque sous la forme (les grandeurs thermodynamiques massiques sont en minuscule) :

$$\Delta(h + e_p + e_c) = w_u + q$$

Préciser la signification physique de chacun des termes et son unité. Même question, maintenant sous la forme :

$$D_m \Delta(h + e_p + e_c) = P_u + P_{th}$$

### Second principe sur un fluide en écoulement stationnaire

Préciser les hypothèses et établir l'expression générale du second principe pour un fluide en écoulement stationnaire à travers une machine quelconque sous la forme (les grandeurs thermodynamiques massiques sont en minuscule) :

$$\Delta s = s_{ech} + s_{cre}$$

Préciser la signification physique de chacun des termes et son unité. Même question, maintenant sous la forme :

$$D_m \Delta s = \dot{S}_{ech} + \dot{S}_{cre}$$

### Applications du principe sur un fluide en écoulement stationnaire

#### Pompe de relevage

Une pompe de relevage est une machine remontant un fluide d'un dénivelé  $h = 10\text{m}$ . On supposera que les sections d'entrée et de sortie du fluide sont identiques.

- ◊ Rappeler les densités typiques d'un gaz et d'un liquide. Ce type de machine fonctionne pour relever des gaz ou des liquides ?

- ◊ Lors du passage dans la machine, y a-t-il variation d'énergie cinétique, potentielle ou thermique ?
- ◊ Quelle est la puissance de la pompe pour un débit de  $d = 1\text{L/s}$  ?
- ◊ Le processus fonctionne de manière adiabatique. Quelle est la variation d'entropie du liquide entre l'entrée et la sortie de la pompe ?

### Écoulement d'un torrent

Un torrent s'écoule sur une montagne sur un dénivelé de 1000m, du fait de sa viscosité et des turbulences, la vitesse reste constante lors de son trajet. Pour simplifier, on suppose que l'écoulement est adiabatique car suffisamment rapide pour pouvoir négliger les transferts thermiques.

- ◊ Calculer l'échauffement de l'eau lors de sa descente. La capacité calorifique de l'eau est  $c_P = 4\text{kJ/K/kg}$ .
- ◊ Quelle est la variation d'entropie massique de l'eau lors de sa descente ? En déduire l'entropie massique créée.

On souhaite comparer de ce qui, entre l'air et l'eau, s'échauffe le plus lors de la descente en montagne. On suppose aussi qu'un écoulement d'air descend sur le même dénivelé de manière adiabatique et réversible.

- ◊ Montrer que la variation d'enthalpie massique de l'air peut s'écrire :

$$\Delta h = \frac{\gamma R}{M(\gamma - 1)} \Delta T$$

où  $M = 29\text{g/mol}$  est la masse molaire de l'air.

- ◊ Comparer avec la différence de température de l'air entre le haut et le bas de la montagne. Qui s'échauffe le plus entre l'eau et l'air ?
- ◊ Quelle est la variation d'entropie massique de cet écoulement d'air ?

### Compresseur

Un compresseur augmente la pression d'un gaz parfait arrivant au débit massique  $d$  de  $P_1$  à  $P_2$ , on notera  $a = P_2/P_1$  le taux de compression. La section dans laquelle circule le gaz est supposée constante. On suppose dans un premier temps que la compression est adiabatique réversible.

- ◊ Citer deux exemples d'objet utilisant un compresseur à flux continu.
- ◊ Quelle est la température  $T_2$  du gaz en sortie du compresseur ?
- ◊ En déduire le travail massique  $w_u$  nécessaire pour comprimer ce gaz. Exprimer aussi la puissance  $p_u$  de ce compresseur.

On suppose désormais que les pertes thermiques sont importantes : la compression n'est plus adiabatique, elle est isotherme.

- ◊ Quelle est le travail massique  $w_u$  nécessaire pour comprimer ce gaz dans ce cas-là ? En déduire la chaleur massique  $q$  perdue par le gaz.
- ◊ Calculer la variation d'entropie massique  $\Delta s$  du gaz lors de la compression.

### Détendeur ou tuyère

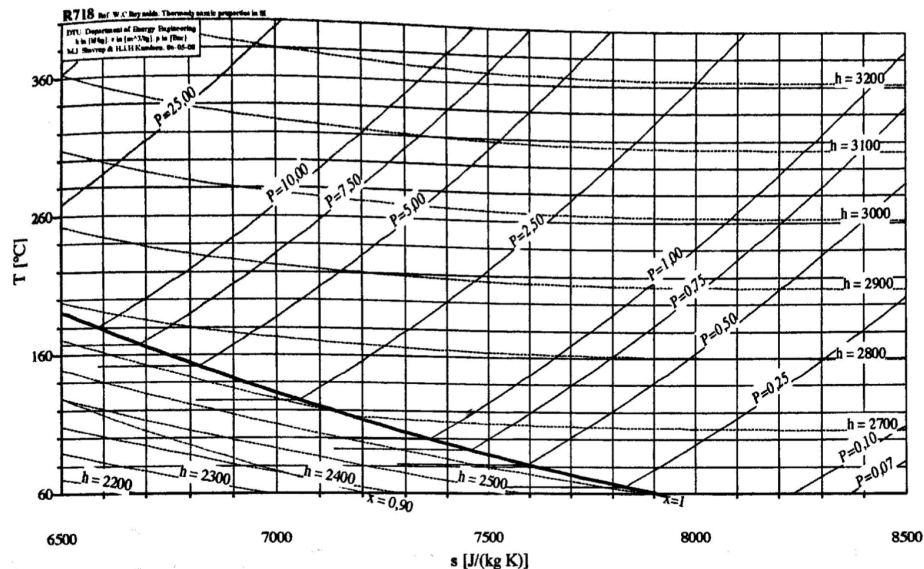
#### Turbine à gaz

#### Echangeur

## Détente adiabatique dans une tuyère • ○ ○

Une turbine calorifugée, conçue pour travailler sans liquide, détend une vapeur d'eau sèche issue d'un surchauffeur à la température  $T_e = 380^\circ\text{C}$  et à la pression  $P_e = 10$  bar jusqu'à la pression  $P_s = 1,0$  bar.

On donne un extrait du diagramme  $(T, s)$  de l'eau pure. Les isobares (en bar) sont représentées en trait plein et les courbes de même enthalpie (en kJ/kg) en pointillé. On suppose dans un premier temps que la détente est réversible.



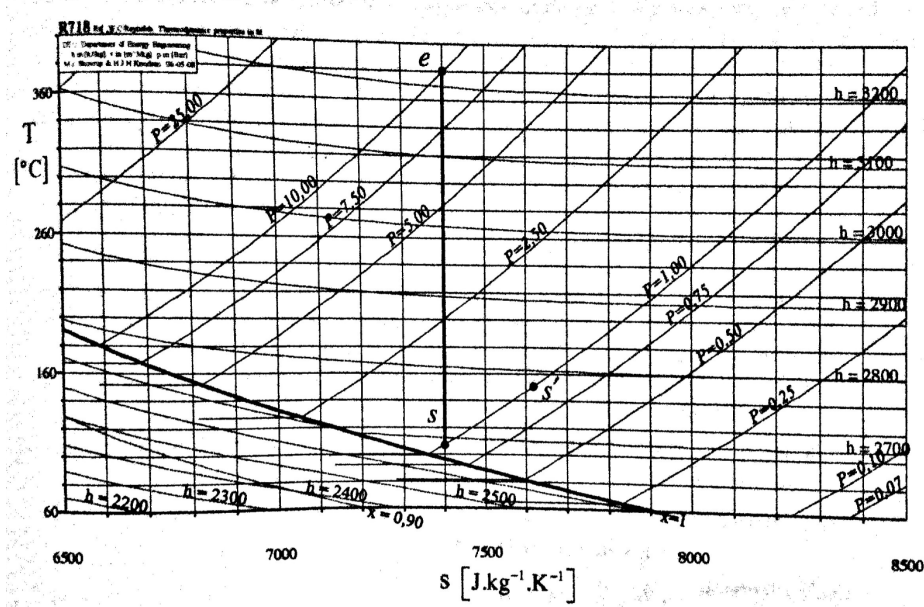
- ⊗ Que représente la courbe en gras ?
- ⊗ Positionner le point  $e$  représentant la valeur à l'entrée. La vapeur est-elle sèche ou saturante ?
- ⊗ Tracer sur le diagramme la courbe d'évolution du fluide et le point  $s$  correspond à l'état de sortie.
- ⊗ La vapeur de sortie est-elle sèche ? Quelle est sa température de sortie  $T_s$  ? Quel est le travail massique utile de détente  $w_u$  ? Jusqu'à quelle pression pourrait-on détendre isentropiquement la vapeur sans faire apparaître de liquide ?

En réalité, la détente est irréversible. Les pressions d'entrée et de sortie sont encore  $P_e = 10$  bar et  $P_s = 1,0$  bar mais la température de sortie réelle est mesurée à  $T'_s = 150^\circ\text{C}$ .

- ⊗ Positionner sur un diagramme le point  $s'$  correspondant à l'état sortie. Mesurer l'entropie créée massique.
- ⊗ La vapeur en sortie est-elle sèche ? Quelle est le travail utile de détente  $w'_u$  ? Commenter le résultat, définir et calculer un "rendement" isentropique de la turbine.

## Correction - Détente adiabatique dans une tuyère

- ⊗ Il s'agit de la courbe de rosée, correspondant à la vapeur juste saturante.
- ⊗ En  $e$ , la vapeur est sèche, voire surchauffée.
- ⊗  $s$  est à la verticale de  $e$  car la transformation est isentropique (adiabatique réversible),  $s$  est également sur l'isobare  $P_s = 1$  bar.



- ⊗ En  $s$ , la vapeur est encore sèche, mais pas très loin de se condenser. L'ordonnée donne la température  $T_s = 108^\circ\text{C}$ . Le système est en écoulement donc le premier principe entre  $e$  et  $s$  s'écrit :

$$h_s - h_e = w_u + q$$

En interpolant entre les deux courbes de même enthalpie, on trouve  $h_s - h_e = 2690 - 3220 = -530\text{kJ/kg}$ , soit  $w_u = -530\text{kJ/kg}$ . La turbine fournit du travail à l'extérieur  $w_u < 0$ . On pourrait encore diminuer la pression à partir de  $s$  jusqu'à la courbe de rosée qui serait atteinte pour  $P = 0,9$  bar.

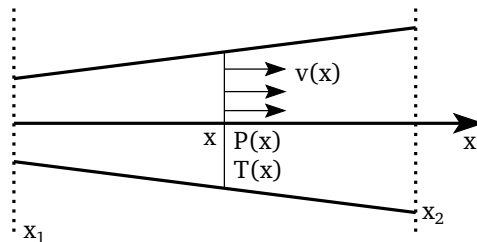
- ⊗ Pour tracer  $s'$ , on trace l'intersection de l'isobare  $P_s$  avec l'horizontale  $T'_s = 150^\circ\text{C}$ .  $\Delta s = s_{s'} - s_e = s_{s'} - s_s$  et  $\Delta s = s_{ech.} + s_{cre} = s_{cre}$  car la transformation est adiabatique. La différence entre les abscisses de  $s$  et  $s'$  donne  $s_{cre} = 210\text{J/K/kg}$ .
- ⊗  $s'$  est dans le domaine de la vapeur sèche. Le travail utile de détente est :  $w'_u = h_{s'} - h_e$ , soit  $w'_u = -445\text{kJ/kg}$ . Comme il fallait s'y attendre, on récupère moins de travail que dans le cas réversible :

$$r = \frac{-w'_u}{-w_u} = 0,84$$

Attention il ne s'agit pas du redement de la turbine, mais du rapport de ce qu'elle peut produire par rapport au cas idéal réversible.

## Ecoulement à travers une tuyère • ◦ ◦

On étudie l'écoulement d'un gaz dans une tuyère isolée thermiquement du milieu extérieur. En régime permanent, dans une section droite, les vitesses d'écoulement sont égales et normales à la section. La pression et la température sont supposées indépendantes du temps et uniformes. On note  $h_m(x)$  l'enthalpie molaire du gaz à l'abscisse  $x$  de la tuyère et  $M$  la masse molaire du gaz. A cause, fois, les gaz considérés seront considérés comme parfaits.



- > A l'aide du premier principe de la thermodynamique, montrer que pour une mole de gaz passant dans la tuyère, on peut écrire  $h_m(x) + \frac{1}{2}Mv^2(x) = cste$ .

Le gaz entre à une vitesse nulle  $v(x_1) \simeq 0$  et est échauffé par la combustion d'un carburant à la  $T(x_1) = 1600$  K, à la pression  $P(x_1) = 52$  bar, et il ressort à  $T(x_2) = 55$  K et  $P(x_2) = 1$  bar.

- > Après avoir rappelé le rôle d'une tuyère, calculer la vitesse de sortie  $v(x_2)$ .

On donne l'identité thermodynamique, qui relie l'énergie interne massique  $u$  d'un gaz à son entropie massique  $s$  et son volume massique  $v$  :  $du = Tds - Pdv$ .

- > Montrer que la variation d'entropie massique sur une transformation élémentaire s'écrit :

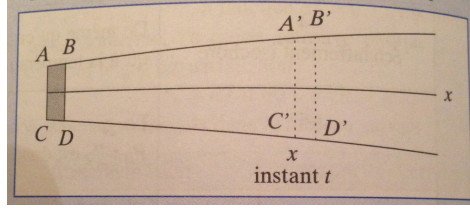
$$ds = \frac{R}{M(\gamma - 1)} \left[ \gamma \frac{dT}{T} + (1 - \gamma) \frac{dP}{P} \right]$$

- > En déduire que la détente à travers la tuyère n'est pas une transformation réversible, puis calculer l'entropie par unité de masse créée  $s_c$ .

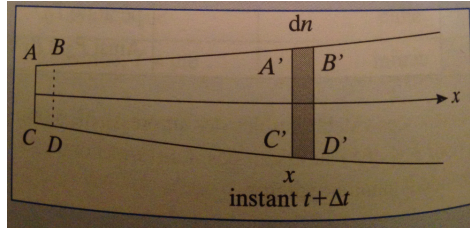
Données :  $M = 32g.mol^{-1}$  et  $\gamma = 1.4$

## Correction *Ecoulement à travers une tuyère*

- Démonstration de la détente de Joule Thomson. On considère une tranche de  $dn$  moles entrant en  $x = x_1$  à l'instant  $t$ . Elle est caractérisée par  $U_1, T_1, P_1, H_1$  et  $v_1$ .



A l'instant  $t + \Delta t$ , elle est à l'abscisse  $x$ . Elle est caractérisée par  $U(x), T(x), P(x), H(x)$  et  $v(x)$ .



On considère la tranche de gaz  $ACA'C'$  à l'instant  $t$ . A l'instant  $t' > t$ , elle correspond à la tranche  $BDB'D'$ , comme le système est en régime permanent.

On applique le premier principe à la tranche  $ACA'C'$ .  $Q = 0$  comme les parois sont adiabatiques. Il reçoit en  $x = x_1$  un travail  $V_{ABCD}P_1$  et en  $x$  un travail  $V_{A'B'C'D'}P(x)$ .

Le premier principe s'écrit alors :

$$E_{c,BDB'D'} + U_{BDB'D'} - E_{c,ACA'C'} - U_{ACA'C'} = -V_{A'B'C'D'}P(x) + V_{ABCD}P_1 \quad (1)$$

Comme la partie centrale  $BDA'C'$  reste complètement inchangée entre  $t$  et  $t'$ , on a (on peut utiliser l'additivité de  $E_c$  et  $U$ ) :

$$E_{c,A'B'C'D'} + U_{A'B'C'D'} - E_{c,ABCD} - U_{ABCD} = -V_{A'B'C'D'}P(x) + V_{ABCD}P_1 \quad (2)$$

Sa variation d'énergie cinétique est :  $\Delta E_c = E_{c,A'B'C'D'} - E_{c,ABCD} = \frac{1}{2}Mdn(v(x)^2 - v_1^2)$  Et la variation d'énergie interne  $U_{A'B'C'D'} - U_{ABCD} = (U_m(x) - U_m(x_1))dn$  Donc :

$$\frac{1}{2}Mdn(v(x)^2 - v_1^2) + U_m(x)dn - U_m(x_1)dn = -V_{A'B'C'D'}P(x) + V_{ABCD}P_1 \quad (3)$$

Comme  $H_m(x) = U_m(x) + P(x)V_m(x)$ :

$$\frac{1}{2}Mv(x)^2 + H_m(x) = \frac{1}{2}Mv^2(x_1) + H_m(x_1) = cst \quad (4)$$

- Une tuyère est un dispositif qui permet de convertir l'énergie thermique d'un gaz en énergie cinétique, pour la propulsion aérospatiale. Le gaz est parfait donc  $h_m(x_1) - h_m(x_2) = \frac{R\gamma}{\gamma-1}(T_1 - T_2)$ . Cad :

$$v_2 = \sqrt{\frac{2}{M} \frac{R\gamma}{\gamma-1} (T_1 - T_2)} \quad (5)$$

On trouve  $v = 1381$  m/s.

➤ On a  $ds = \frac{du}{T} + \frac{Pdv}{T}$ . Avec la loi des gaz parfaits, on exprime  $dv$  en fonction de  $dP$ , en effet pour un gaz de  $n$  moles :

$$\begin{aligned} VdP + PdV &= nrdT \\ \Rightarrow PdV &= \frac{nRdT}{T} + \frac{nRdP}{P} \end{aligned}$$

En divisant tout par  $n/M$ , on obtient les grandeurs *massiques* :

$$\frac{Pdv}{T} = \frac{R}{M} \frac{dT}{T} - \frac{R}{M} \frac{dP}{P}$$

Et donc la relation voulue en utilisant  $du = \frac{R}{M(\gamma-1)}dT$ .

➤ Le second principe pour un système ouvert en écoulement s'écrit  $\Delta s = s_e + s_c = s_c$ . Si la transformation était réversible, on aurait  $s_c = 0 = \Delta s$ , soit en utilisant la relation précédente (intégrée, qui donne la loi de Laplace) :

$$\begin{aligned} T^\gamma(x_1)P^{1-\gamma}(x_1) &= T^\gamma(x_2)P^{1-\gamma}(x_2) \\ \Rightarrow T(x_1) &= T(x_2) \left( \frac{P(x_2)}{P(x_1)} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \end{aligned}$$

On trouverait alors 517K, soit une température inférieure à celle que l'on a en pratique : on ne récupère pas toute l'énergie cinétique, la transformation n'est pas réversible.

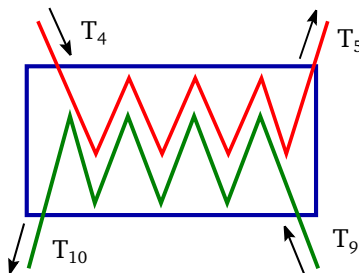
On a donc  $\Delta s = s_c$ , et donc :

$$s_c = \frac{R}{M(\gamma-1)} \ln \left( \frac{P(x_2)^{1-\gamma} T(x_2)^\gamma}{P(x_1)^{1-\gamma} T(x_2)^\gamma} \right)$$

On trouve  $s_c = 62\text{J/K/kg}$ .

## Echangeur à gaz • • ○

On considère un échangeur de chaleur représenté sur le schéma ci-dessous. Il comporte deux canalisations dans lesquelles le même gaz (supposé parfait) circule avec le même débit  $d$  mais dans des sens opposés. Les températures d'entrées, supposées connues, seront notées  $T_4$  et  $T_9$  et les températures de sorties respectives  $T_5$  et  $T_{10}$ . Dans chaque canalisation, la pression est constante.



- Démontrer l'expression du premier principe de la thermodynamique appliqué sur un fluide en écoulement.
- Montrer alors que les températures vérifient la relation suivante :

$$T_{10} + T_5 = T_4 + T_9$$

Commenter cette relation.

- Démontrer l'expression du second principe de la thermodynamique appliqué sur un fluide en écoulement.
- En supposant que toutes les transformations à l'intérieur des canalisations sont adiabatiques et réversibles, montrer que :

$$T_5 \times T_{10} = T_4 \times T_9$$

On admettra que la variation de l'entropie d'une mole de gaz parfait lors d'une transformation isobare s'écrit  $\Delta S = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \ln \frac{T_2}{T_1}$

- Quelles sont les solutions physiquement acceptables pour les températures de sortie ?



## Correction Echangeur à gaz

- Cf. La démonstration de l'exercice de la tuyère.
- Le premier principe appliqué au fluide  $4 \rightarrow 5$  en écoulement s'écrit ici :

$$d \times (h_5 - h_4) = \dot{q}$$

où  $\dot{q}$  est la puissance thermique échangée par ce fluide dans l'échangeur. Le premier principe appliqué au fluide  $9 \rightarrow 10$  en écoulement s'écrit quant à lui :

$$d(h_{10} - h_9) = -\dot{q}$$

En effet, l'ensemble étant calorifugé, la puissance thermique évacuée par l'un est reçue par l'autre. On a donc :

$$h_{10} - h_9 = h_5 - h_4 \quad (6)$$

Comme la transformation est isobare,  $\Delta h = c_P \Delta T$ , et on en déduit la relation voulue.

- Même chose que le premier principe pour la démonstration. Le résultat est :

$$\Delta s = s_e + s_c$$

- On applique le second principe sur les deux fluides à la fois. L'ensemble étant calorifugé, il n'y a pas d'entropie échangée. Le second principe appliqué sur cette même masse de gaz s'écrit :  $\Delta s = dc_P \ln(T_5/T_4) + dmc_P \ln(T_{10}/T_9) = \delta s_e + \delta s_c$  et  $\Delta s = 0$  car il n'y a pas d'échanges avec l'extérieur et la transformation est réversible. Donc :

$$T_5 T_{10} = T_4 T_9 \quad (7)$$

La résolution conduit à  $T_9 = T_5$  et  $T_{10} = T_4$  ou  $T_{10} = T_5$  et  $T_9 = T_4$ . Seule la première est acceptable car sinon les gaz sortent à la même température.

- Si la transformation est irréversible :  $\Delta s = dc_P \ln(T_5/T_4) + dmc_P \ln(T_{10}/T_9) = \delta S_c > 0$ , donc  $T_5 T_{10} > T_4 T_9$ .

En supposant que  $T_9 > T_4$ , on a alors :  $T_9 > T_5$  et  $T_{10} > T_4$ , cad une perte d'efficacité du dispositif.

## Formation du brouillard • ○ ○

On considère un gaz parfait de coefficient  $\gamma$  contenu dans un cylindre de section  $S$  orienté verticalement. L'altitude le long de ce cylindre est notée  $z$ , et on note  $g$  l'accélération de la pesanteur supposée uniforme le long du cylindre. Le gaz est soumis à un mouvement ascendant dans le cylindre en se déplaçant à la vitesse notée  $c$ . Les parois du cylindre ne permettent pas de transfert thermique. L'écoulement est de plus supposé stationnaire.

On note  $T_0$ ,  $P_0$  et  $c_0$  la température, la pression et la vitesse du gaz à l'altitude  $z = 0$  et  $T(z)$ ,  $P(z)$  et  $c(z)$  ces trois grandeurs à l'altitude  $z$ . De la même manière, on introduit  $h_{m,0}$  et  $h_m(z)$  l'enthalpie massique du gaz à l'altitude  $z = 0$  et  $z$ .

△ En utilisant le premier principe industriel appliqué au gaz dans le cylindre entre les altitudes  $z = 0$  et  $z$ , trouver une relation entre  $h_{m,0}$ ,  $h_m(z)$ ,  $c_0$ ,  $c(z)$  et  $z$ .

△ Pour simplifier le problème, on considère que la vitesse du gaz est quasi-nulle, de sorte à ce que  $c_0 = c(z) = 0$ . Montrer que la température obéit alors à la loi suivante :

$$T(z) = T_0 \left(1 - \frac{z}{H}\right)$$

Expliciter  $H$  en fonction de  $\gamma$ ,  $g$  et la masse molaire du gaz  $M$ . Donner une estimation numérique.

On considère que le gaz étudié est de l'air humide, subissant une ascension verticale, lente et isentropique dans ce cylindre. La vapeur d'eau contenue en faible quantité dans l'air se comporte comme un gaz parfait. La pression de vapeur saturante de l'eau, notée  $P_s$  et exprimée en Pa est une fonction de  $T$  suivant la loi empirique suivante :

$$\ln(P_s(T)) = a - \frac{b}{T}$$

△ Soit  $\varphi$  la fraction molaire de vapeur d'eau contenue dans une masse d'air ascendante. Après avoir explicité la pression  $P(z)$  dans la colonne, déterminer la pression partielle  $P_e(z)$  de cette vapeur.

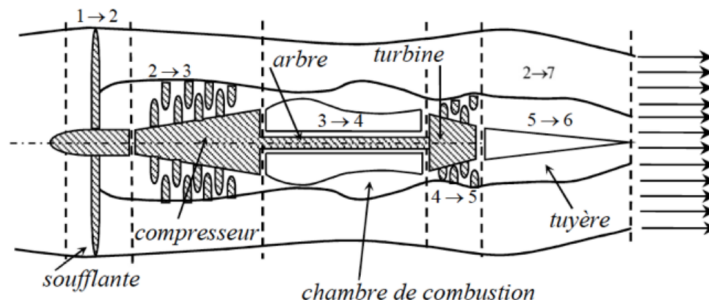
△ A quelle altitude, notée  $z_1$ , peut-on avoir le changement d'état liquide-vapeur ? On pourra supposer que  $z \ll H$ .

△ Justifier que les reliefs sont propices à l'apparition du brouillard.

## Etude d'un turboréacteur • • •

Un turboréacteur est un moteur thermique équipant les avions dits à *réaction*, schématisé ci-dessous. Le fonctionnement général est le suivant : une turbine aspire et comprime l'air en amont du réacteur (soufflante et compresseur, étapes  $1 \rightarrow 2$  et  $2 \rightarrow 3$ ), qui est échauffé par la combustion du kérosène dans la chambre de combustion (étape  $3 \rightarrow 4$ ). Les gaz de combustion sont ensuite détendus ( $4 \rightarrow 5$ ) à travers une turbine dont l'arbre est commun avec celui du compresseur et de la soufflante, puis ces gaz sont finalement évacués par la tuyère ( $5 \rightarrow 6$ ), en accélérant fortement, fournissant la poussée requise.

Le but de l'exercice est de calculer la vitesse de sortie  $c_6$  des gaz de combustion. On ne s'intéresse ici qu'au flux primaire, circulant dans le compresseur. Le flux dit secondaire, passant de  $2 \rightarrow 7$  n'est pas étudié ici.



On formule les hypothèses suivantes pour les différentes transformations :

- 1 → 3 : Soufflante et compresseur, compression adiabatique réversible au taux de compression  $P_2/P_1 = 2$  puis  $P_3/P_2 = 13$  ;
- 3 → 4 : Chambre de combustion, le gaz est chauffé jusqu'à  $T_4 = 1450\text{K}$  de manière isobare ;
- 4 → 5 : Détente adiabatique réversible du gaz de  $P_4$  et  $P_5$  à travers la turbine ;
- 5 → 6 : Détente adiabatique réversible du gaz de  $P_5$  et  $P_6$  dans la tuyère.

On supposera que le régime est stationnaire, que l'énergie potentielle de pesanteur du fluide est négligeable dans toutes les étapes. L'énergie cinétique sera aussi négligée dans toutes les étapes, sauf à la sortie de la tuyère (en 6) où le gaz est très fortement accéléré. On négligera tout frottement mécanique. Les pressions en entrée et en sortie sont  $P_1 = P_6 = 1 \text{ bar}$  et la température en entrée est  $T_1 = 288\text{K}$ . On note  $C_p$  la capacité thermique massique de l'air.

- ★ En s'inspirant de la démonstration du premier principe industriel, montrer que le travail massique utile reçu par le gaz lors de la transformation de l'état  $i$  à  $j$  (sauf pour  $3 \rightarrow 4$ , dans la chambre de combustion) est donné par :

$$w_{i \rightarrow j} = C_p(T_j - T_i) + \frac{1}{2}(c_j^2 - c_i^2)$$

- ★ Donner une relation entre  $P_i$ ,  $P_j$ ,  $T_i$ ,  $T_j$  et  $\gamma$  (sauf pour  $3 \rightarrow 4$ ).
- ★ En exploitant le couplage mécanique entre turbine, compresseur et soufflante, établir les expressions littérales et les valeurs numériques des températures  $T_2$ ,  $T_3$ ,  $T_5$  et de la pression  $P_5$  en sortie de turbine.
- ★ En déduire la vitesse  $c_6$  en sortie de turbine.

Données :  $C_p = 1,0 \times 10^3 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ,  $\gamma = 1,4$

## Comparaison des machines de Carnot et de Stirling • ◦ ◦

### Machine de Carnot

On considère une machine thermodynamique effectuant les transformations suivantes, sur un gaz parfait contenant  $n$  moles :

- $A \rightarrow B$  : compression isotherme, réversible à la température  $T_f$  (contact avec une source froide)
- $B \rightarrow C$  : compression adiabatique, réversible
- $C \rightarrow D$  : détente isotherme, réversible à la température  $T_c$  (contact avec une source chaude)
- $D \rightarrow A$  : détente adiabatique, réversible

Ce cycle est appelé cycle de Carnot, qui permet en théorie, d'obtenir un rendement maximal. On supposera que le rapport des volumes  $V_A/V_B = 10$ . Questions :

- ♣ Tracer le cycle dans un diagramme de Clapeyron ( $P, V$ ). Ce cycle est-il moteur ou récepteur ? Justifier.
- ♣ Déterminer, pour chaque transformation,  $\Delta U$ ,  $W$ , et  $Q$ .
- ♣ En déduire le rendement théorique.

### Machine de Stirling

On s'intéresse au cycle de Stirling, dans lequel les transformations  $B \rightarrow C$  et  $D \rightarrow A$  sont désormais des isochores au contact respectivement de la source chaude et source froide. Les autres transformations sont les mêmes. Le cycle de Stirling a l'avantage de pouvoir être réalisable en pratique sur des dispositifs appelés *moteurs de Stirling*, contrairement au cycle de Carnot, théorique.

- ♠ Mêmes questions que pour le cycle de Carnot ci-dessus. Quel est le rendement théorique ? Montrer qu'il est nécessairement inférieur au rendement de Carnot.
- ♠ Montrer que l'on peut récupérer une partie de la chaleur lors du cycle pour atteindre le rendement de Carnot.
- ♠ On suppose qu'une voiture normale est mue par le moteur étudié jusque-là. En supposant que la chaleur apportée par la source chaude est créée par de la combustion d'essence, de pouvoir calorifique de  $35\,475\text{kJ.L}^{-1}$ . Estimer la quantité d'essence injectée à chaque cycle ? Combien vaut alors  $T_c$  ?

## Correction Comparaison des machines de Carnot et de Stirling

### Machine de Carnot

- 0 - Le cycle est moteur, il est décrit "en tournant" dans le sens des aiguilles d'une montre dans le diagramme de Clapeyron. L'intégrale  $W = -\oint P dV < 0$  est négative donc le travail est bien évacué à l'extérieur.
- 1 - On trouve les expressions grâce à l'expression du travail  $W$  et au premier principe de la thermodynamique. Le point "difficile" est le calcul du travail pour une transformation adiabatique. Il faut utiliser la loi de Laplace :

$$\begin{aligned}
 \delta W &= - \int_B^C P dV = -cste \int_B^C \frac{dV}{V^\gamma} \\
 &= -cste \frac{V_C^{1-\gamma} - V_B^{1-\gamma}}{1-\gamma} \\
 &= \frac{P_C V_C - P_B V_B}{\gamma - 1} \\
 &= \frac{nR}{\gamma - 1} (T_c - T_f)
 \end{aligned}$$

Le tableau des différentes transformations est alors :

Transformation	$\Delta U$	$W$	$Q$
$A \rightarrow B$	0	$nRT_f \ln \left( \frac{V_A}{V_B} \right)$	$-nRT_f \ln \left( \frac{V_A}{V_B} \right)$
$B \rightarrow C$	$\frac{nR}{\gamma-1} (T_c - T_f)$	$\frac{nR}{\gamma-1} (T_c - T_f)$	0
$C \rightarrow D$	0	$-nRT_c \ln \left( \frac{V_D}{V_C} \right)$	$nRT_c \ln \left( \frac{V_D}{V_C} \right)$
$D \rightarrow A$	$\frac{nR}{\gamma-1} (T_f - T_c)$	$\frac{nR}{\gamma-1} (T_f - T_c)$	0

- 2- Le rendement est  $\eta = -W/Q_c$ . La source chaude est ici :

$$\begin{aligned}
 Q_c &= Q_{C \rightarrow D} \\
 &= nRT_c \ln \left( \frac{V_D}{V_C} \right)
 \end{aligned}$$

Et le travail :

$$\begin{aligned}
 W &= \sum_i W_i \\
 &= nRT_f \ln \left( \frac{V_A}{V_B} \right) - nRT_c \ln \left( \frac{V_D}{V_C} \right) \\
 &= nR(T_f - T_c) \ln \left( \frac{V_A}{V_B} \right)
 \end{aligned}$$

car on a  $V_A/V_B = V_D/V_C$  avec la loi de Laplace  $TV^{\gamma-1} = cste$ . On trouve alors :

$$\eta = \frac{T_f - T_c}{T_c} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

C'est le rendement de Carnot : c'est normal, c'est un cycle de Carnot !

## Machine de Stirling

*A faire !*

## Cycle de Beau de Rochas • • ○

Les moteurs à essence équipant la plupart des véhicules terrestres sont des machines thermodynamiques généralement constitués de plusieurs cylindres, dans lesquels un piston fait subir sur  $n$  moles de gaz parfait le cycle suivant (dit de Beau de Rochas) :

- $A \rightarrow B$  : compression adiabatique, réversible du volume  $V_A$  au volume  $V_B$  : le mélange d'air frais et essence est comprimé ;
- $B \rightarrow C$  : échauffement isochore en contact de la source chaude, en pratique il s'agit de la combustion très rapide de l'essence dégageant une chaleur  $Q_c$  ;
- $C \rightarrow D$  : détente adiabatique, réversible du volume  $V_B$  au volume  $V_C = V_A$  : les gaz de combustion "poussent" le cylindre en fournissant du travail ;
- $D \rightarrow A$  : refroidissement isochore en contact de la source froide : les gaz issus de combustion sont évacués et remplacés par un mélange d'air frais et d'essence. Le cycle reprend ensuite.

Ce cycle de fonctionnement a l'avantage de pouvoir faire varier la puissance du moteur très rapidement, car il est facile de contrôler la quantité de chaleur  $Q_c$  apportée par la combustion de l'essence lors de la transformation  $B \rightarrow C$ . On souhaite montrer que cet avantage pratique se fait néanmoins au détriment du rendement  $\eta$ , qui est nécessairement inférieur au rendement de Carnot  $\eta_C$ .

- ♣ Décrire ce cycle dans un diagramme de Clapeyron ( $P, V$ ) et justifier qu'il est moteur.
- ♣ Déterminer, pour chaque transformation,  $\Delta U$ ,  $W$ , et  $Q$  en fonction de températures  $T_A$ ,  $T_B$ ,  $T_C$  et  $T_D$  atteintes aux moments  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ .
- ♣ Déterminer les températures  $T_B$ ,  $T_C$  et  $T_D$  en fonction de  $T_A$ . Quel paramètre doit-on introduire pour calculer  $T_C$  ?
- ♣ Calculer son rendement  $\eta$  en fonction de  $a = V_A/V_B$  et  $\gamma$ .
- ♣ Rappeler l'expression du rendement de Carnot  $\eta_C$  et montrer que celui-ci est nécessairement supérieur au rendement  $\eta$  de ce cycle.
- ♣ On suppose que ce moteur sert à mouvoir une voiture individuelle. En supposant que la chaleur apportée par la source chaude est créée par de la combustion d'essence, de pouvoir calorifique de  $35\,475\text{kJ.L}^{-1}$ ; estimer le volume d'essence injecté à chaque cycle. Combien vaut alors  $T_c$  ?

Données :  $V_2/V_1 = 10$  et  $\gamma = 1.4$

## Correction Cycle de Beau de Rochas

0 - Il faut utiliser la loi de Laplace :

$$\begin{aligned}
 \delta W &= - \int_i^f P dV = -cste \int_i^f \frac{dV}{V^\gamma} \\
 &= -cste \frac{V_f^{1-\gamma} - V_i^{1-\gamma}}{1-\gamma} \\
 &= \frac{P_f V_f - P_i V_i}{\gamma - 1} \\
 &= \frac{nR}{\gamma - 1} (T_f - T_i)
 \end{aligned}$$

1 - On utilise le résultat précédent pour les transformations  $A \rightarrow B$  et  $D \rightarrow A$ . Pour les transformations isochores, on calcule  $\Delta U$  tout simplement pour l'échauffement d'un gaz.

Transformation	$\Delta U$	$W$	$Q$
$A \rightarrow B$	$\frac{nR}{\gamma-1}(T_B - T_A)$	$\frac{nR}{\gamma-1}(T_B - T_A)$	0
$B \rightarrow C$	$\frac{nR}{\gamma-1}(T_C - T_B)$	0	$Q_c = \frac{nR}{\gamma-1}(T_C - T_B)$
$C \rightarrow D$	$\frac{nR}{\gamma-1}(T_D - T_C)$	$\frac{nR}{\gamma-1}(T_D - T_C)$	0
$D \rightarrow A$	$\frac{nR}{\gamma-1}(T_A - T_D)$	0	$Q_f = \frac{nR}{\gamma-1}(T_A - T_D)$

2 - Pour calculer le rendement, il faut expliciter la quantité de chaleur issue de la source chaude : il s'agit de  $Q_{AB}$ , car on augmente la pression à volume constant, c'est-à-dire qu'on apporte de la chaleur. Ici, elle est apportée par l'explosion de l'essence. Le travail, quant à lui, s'écrit :

$$\begin{aligned}
 W &= -\frac{nR}{\gamma-1}(T_B - T_A + T_D - T_C) \\
 &= -\frac{nR}{\gamma-1}(T_D - T_A) + Q_c
 \end{aligned}$$

Il reste à déterminer  $T_D$  par rapport à  $T_A$ . Pour cela, on détermine la température à chaque transformation :

$A \rightarrow B$  :  $T_B = a^{\gamma-1}T_A$  car compression adabatique en utilisant  $TV^{\gamma-1} = cste$ .

$B \rightarrow C$  :  $T_C = \frac{nR}{\gamma-1}Q_c + T_B$ , d'après le premier principe : on échauffe le gaz en lui apportant  $Q_c$ .

$C \rightarrow D$  :  $T_D = T_C/a^{\gamma-1}$  car compression adabatique.

On a donc :

$$T_D = \frac{\gamma-1}{a^{\gamma-1}nR}Q_c + T_f$$

Donc  $W = Q_c \left(1 - \frac{1}{a^{\gamma-1}}\right)$  et alors :

$$\eta = 1 - \frac{1}{a^{\gamma-1}}$$

3 - Pour comparer avec le rendement de Carnot  $\eta_C = 1 - T_f/T_c$ , il faut expliciter les températures de la source chaude  $T_c$  et froide  $T_f$ . La température de la source chaude est à priori  $T_C$  car le gaz est au maximum de sa température en  $C$ . En effet, comme la transformation  $C \rightarrow D$  est



réversible, elle est supposée très lente, donc on peut supposer que le gaz s'est thermalisé à la température de la source chaude en  $C$ .

A ce moment là :

$$\begin{aligned}
 \eta_C &= 1 - \frac{T_A}{T_C} \\
 &= 1 - \frac{T_A}{\frac{\gamma-1}{nR}Q_c + a^{\gamma-1}T_A} \\
 &= 1 - \frac{1}{\frac{\gamma-1}{nRT_A}Q_c + a^{\gamma-1}} \\
 &> 1 - \frac{1}{a^{\gamma-1}} = \eta
 \end{aligned}$$

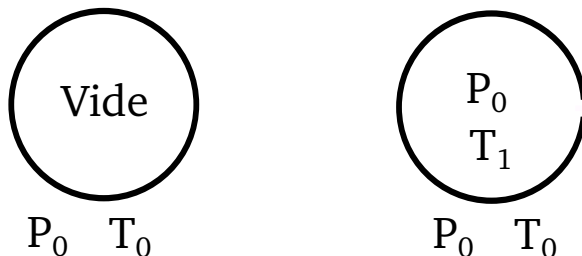
On retrouve bien le fait que le rendement de Carnot est supérieur.

## Exercice 3

### Premier principe

Une ampoule de volume de  $V_1$ , dans laquelle règne le vide, est entourée d'air ambiant à la pression  $P_0 = 1\text{atm}$  et à la température  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ , qu'on assimile à un gaz parfait de coefficient  $\gamma = 1.4$ . On perce un petit trou dans l'ampoule, l'air s'y engouffre et au bout d'une durée très courte, la pression dans l'ampoule est égale à la pression ambiante.

Quel est la température  $T_1$  dans l'ampoule une fois celle-ci remplie?



### Second principe

Soit un système de volume constant constitué d'un nombre  $N \gg 1$  de particules en équilibre à la température  $T$  et dont chacune peut avoir deux niveau d'énergie  $E_1$  et  $E_2$ , avec  $E_1 < E_2$ .

Soit  $n_1$  le nombre de particules dans l'état d'énergie  $E_1$  et  $n_2$  le nombre de particules dans l'état d'énergie  $E_2$ .

On suppose que la répartition des particules se fait selon la loi de Boltzmann :

$$\frac{n_2}{n_1} = \exp\left(\frac{E_2 - E_1}{k_b T}\right) \quad (8)$$

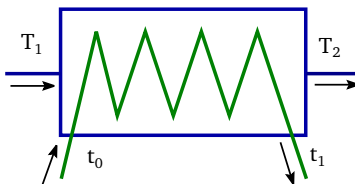
Cette distribution indique que les niveaux ont d'autant plus de chance d'être peuplés qu'ils n'ont pas une énergie élevée. D'autre part plus la température est élevée, plus les niveaux d'énergies élevées pourront être peuplés.

- Déterminez la différentielle de l'énergie interne du système en fonction de  $n_1$  et  $E_2 - E_1$ .
- On rappelle que l'entropie peut s'écrire comme  $S = k_B \ln \Omega$ , où  $\Omega$  est le nombre de configurations possibles pour le système. Exprimez  $S$  en fonction de  $N$  et  $n_1$ . On utilisera la formule de Stirling  $\ln(N!) = N \ln(N)$  valable pour  $N \gg 1$ .
- Exprimez la différentielle de  $S$  en fonction de  $T$ ,  $\Delta$  et  $n_1$ .
- Montrez que l'on retrouve l'identité thermodynamique :  $dU = TdS$

## Exercice 4

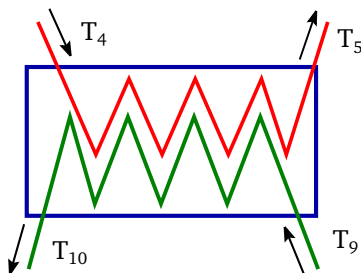
Dans tout le problème, les échanges de travail et de chaleur seront toujours considérés du point de vue du gaz.

- On considère le réfrigérant représenté ci-dessous, qu'on suppose parfaitement calorifugé. Le gaz, de chaleur massique  $c_p$  est refroidi à pression constante, de la température  $T_2$  à la température  $T_3$ , au moyen d'un circuit d'eau (de chaleur massique  $c$  constante), qui, elle, est réchauffée de  $t_0$  à  $t_1$ .



Le débit massique du gaz étant imposé, déterminer le débit massique  $D$  nécessaire du circuit d'eau de refroidissement.

- On considère maintenant un échangeur de chaleur représenté ci-dessous. Il comporte deux canalisations dans lesquelles le même gaz circule avec le même débit mais dans des sens opposés. Les températures d'entrées, supposées connues, seront notées  $T_4$  et  $T_9$  et les températures de sorties respectives  $T_5$  et  $T_{10}$ . Dans chaque canalisation, la pression est constante. On suppose



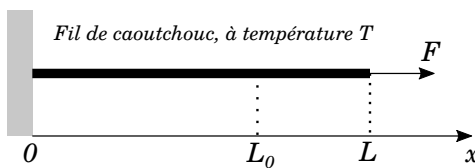
d'abord réversible les transformations subies par le gaz dans chaque canalisation. En utilisant les fonctions enthalpie et entropie, écrire les relations reliant  $T_5$  et  $T_{10}$  à  $T_4$  et  $T_9$ .

En déduire les solutions physiquement acceptables pour  $T_5$  et  $T_{10}$ .

Si les transformations sont en fait irréversibles, quel les inégalités satisfaites par  $T_5$  et  $T_{10}$ , si l'on suppose  $T_4 > T_9$  ?

- On définit l'efficacité comme étant :  $e = \frac{T_5 - T_4}{T_9 - T_4}$  en considérant la canalisation 4-5. Montrer qu'on obtient la même efficacité en considérant la canalisation 9-10.

## Exercice 5



On considère un fil de caoutchouc décrit par les variables d'état suivantes : sa longueur  $L$ , sa température  $T$  et  $F$  la force appliquée dessus. On le modélise à travers une équation d'état de la forme :

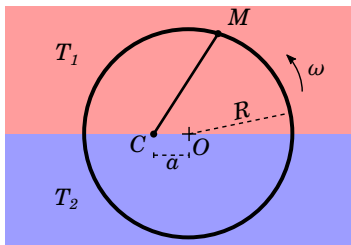
$$F(L, T) = F_0 + \rho(L - L_0) + \sigma(T - T_0) \quad (9)$$

où  $\rho$  et  $\sigma$  sont des constantes positives et les grandeurs indicées par "0" sont des grandeurs intrinsèques au fil. D'autre part, on admet que l'énergie interne du fil s'écrit :

$$U(L, T) = C_L(T - T_0) + (F_0 - \sigma T_0)(L - L_0) + \frac{\rho}{2}(L - L_0)^2 + U_0 \quad (10)$$

où  $C_L$  est une constante.

On attache désormais le fil de caoutchouc en  $CM$ , où le cercle de centre  $O$  et de rayon  $OM = R$  tourne à la vitesse angulaire  $\omega$ . On a  $CO = a \ll R$ . Le cercle est plongé à son diamètre entre deux sources de chaleurs à températures  $T_1$  et  $T_2$  (avec  $T_1 > T_2$ ) :



En tournant dans le sens de rotation indiqué sur le schéma, le fil subit les transformations successives suivantes :

- $A \rightarrow B$  : Une transformation isotherme à  $T_1$  lorsque le fil est dans la demi-partie supérieure (rouge)
- $B \rightarrow C$  : Lorsque le fil passe à l'horizontale (longueur  $R - a$ ), il passe instantanément de  $T_1$  à  $T_2$
- $C \rightarrow D$  : Une transformation isotherme à  $T_2$  lorsque le fil est dans la demi-partie inférieure (bleue)
- $D \rightarrow A$  : Lorsque le fil passe à l'horizontale (longueur  $R + a$ ), il passe instantanément de  $T_2$  à  $T_1$

Questions :

- ♠ Par analogie avec le travail des forces de pression d'un gaz parfait ( $P, V \leftarrow F, L$ ), montrer que le travail reçu par l'élastique sur une transformation  $A \rightarrow B$  s'écrit  $W = \int_A^B dL \cdot F$ .
- ♠ Décrire le cycle dans un diagramme de Clapeyron ( $F, L$ ).
- ♠ Calculer les divers échanges mécaniques et thermiques au cours de ce cycle.
- ♠ Le cycle proposé est-il moteur ? Calculer son rendement.

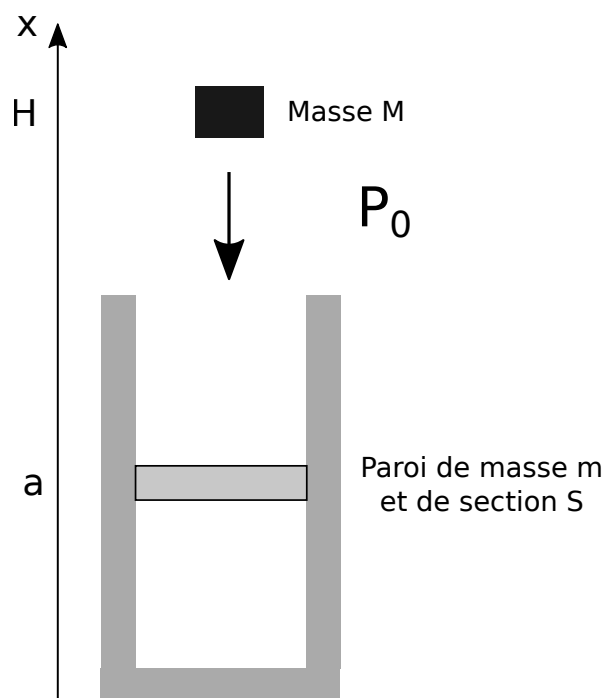
## Exercice 6

On considère un cylindre rempli d'un gaz parfait à la température  $T_1$ , à la pression  $P_1$  et un volume  $V_1 = aS$ , où  $a$  est la hauteur et  $S$  la section.

Le cylindre est surmonté d'un piston, de masse  $m$ , libre de coulisser sans frottement. La pression à l'extérieur du dispositif est  $P_0$ .

Les parois du cylindre et du piston sont considérées comme athermane : il n'y a aucun échange thermique avec l'extérieur.

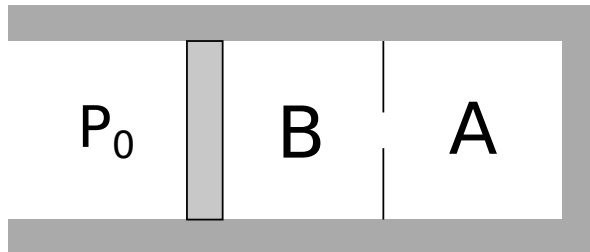
A un certain moment, on fait tomber une masse  $M$  sur le piston d'une hauteur  $H$  au-dessus de la surface du cylindre. Après quelques oscillations, le piston retourne à un nouvel équilibre.



- Calculez les paramètres internes du gaz au nouvel équilibre.
- Pour quelle hauteur de chute  $H_C$  le piston se retrouve-t-il exactement à la même hauteur initiale  $a$  ?
- Que se passe-t-il si  $M$  devient très lourde ?

## Exercice 7

On considère le dispositif ci-dessous. Le piston (gris, entouré de noir) et les parois (en gris) sont adiabatiques. La paroi interne séparant les espaces  $A$  et  $B$  est fixe et diatherme. Elle est percée d'un trou fermé par une fenêtre amovible. La pression extérieure est  $P_0 = 1$  bar. Initialement, le volume  $B$  est rempli d'une mole de gaz parfait  $\gamma = 1,4$ , avec une pression  $P_0 = 1$  bar, une température  $T_0 = 300\text{K}$ . Le volume  $A$  est vide.



- On ouvre la fenêtre. Décrire qualitativement ce qu'il se passe suivant le volume de  $A$ . En déduire l'existence d'un volume critique  $V_C$  que l'on ne demande pas de calculer ici.
- On suppose  $V_A < V_C$ . Déterminez l'état final du gaz en fonction de  $(P_0, V_A, V_B)$ . Calculer la création d'entropie. Quelle est la cause de la création d'entropie ? Déterminez  $V_C$ .
- On suppose désormais que  $V_A > V_C$ . Quel est l'état final ?

## Travail maximal de deux réservoirs finis

On considère deux réservoirs  $A$  et  $B$  remplis du même gaz parfait caractérisé par  $\gamma$ , l'un contenant  $n_A$  moles à la température  $T_A$ , l'autre  $n_B$  moles à la température  $T_B$ . Ils sont parfaitement isolés du monde extérieur, mais peuvent échanger de la chaleur avec une machine thermique  $M$ , considérée comme parfaite (pas de capacité calorifique propre, pas de d'échange thermique autre qu'avec  $A$  et  $B$ , aucun frottement). Cette machine peut néanmoins extraire un travail  $W$  avec l'extérieur.

- ◆ Quelle est la quantité maximale de travail  $W$  que peut extraire la machine  $M$  ?

## Cuisson du bacon avec un fusil semi-automatique

L'actuel sénateur du Texas, Ted Cruz, a réalisé une vidéo dans laquelle il fait cuire son *bacon* dominical sur le canon de son fusil d'assaut, en tirant plusieurs cartouches. Pour cela, il enroule 4 tranches de bacon sur le canon de son fusil, elles-mêmes enroulées sous du papier aluminium (la cuisson sera considérée comme adiabatique par rapport à l'air ambiant). Combien Ted doit-il tirer de cartouches pour obtenir un bacon bien croquant, c'est-à-dire exposé à une température de  $300^{\circ}\text{C}$  ?

*Données :*

- Energie de combustion de la poudre :  $5700 \text{ J}$
- Pression maximale atteinte dans le canon :  $4300 \text{ bar}$
- Volume de la cartouche :  $350 \text{ mm}^3$
- Capacité calorifique du canon :  $365 \text{ J.K}^{-1}$
- Capacité calorifique massique du bacon :  $2750 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$