

Dimensionnement d'un aimant

♡ On commence par écrire les relations décrivant le milieu : respectivement Maxwell-Ampère, la conservation du flux de \vec{B} et la relation caractéristique du milieu :

$$\begin{cases} H_a l_a + H_f l_f + H_e l_e = 0 \\ S_e B_e = S_a B_a = B_f l_f \\ B_f = \mu_0 \mu_{r,f} H_f \\ B_e = \mu_0 H_e \end{cases}$$

NB : Il n'y a pas de bobinage, donc pas d'excitation due à l'extérieur. Seule reste dans Maxwell-Ampère l'excitation originelle de l'aimant.

Il y a *a priori* plusieurs façons d'arriver au résultat, de mon côté, j'exprime le champ magnétique dans l'entrefer B_e , fixé, en fonction des autres variables :

$$B_e = -\frac{\mu_0}{e}(H_a l_a + H_f l_f) \quad (1)$$

$$= -\frac{\mu_0}{e} \left(H_a l_a + \frac{B_f}{\mu_0 \mu_{r,f}} l_f \right) \quad (2)$$

$$= -\frac{\mu_0}{e} \left(H_a l_a + \frac{B_a}{\mu_0 \mu_{r,f}} l_f \right) \quad (3)$$

Or le terme $\frac{B_a}{\mu_0 \mu_{r,f}} l_f$ est négligeable devant B_e : cela revient à comparer $\frac{S_a}{S_e}$ et $\frac{l_f}{e \mu_{r,f}}$, et d'après l'hypothèse faite dans l'énoncé, $\frac{l_f}{e \mu_{r,f}}$ est négligeable.

On a donc :

$$\begin{aligned} B_e &= -\frac{\mu_0 H_a l_a}{e} \\ \Leftrightarrow B_a B_e &= -\frac{\mu_0 B_a H_a l_a}{e} \\ \Leftrightarrow \frac{S_e e}{S_a} B_e^2 &= -\mu_0 B_a H_a l_a \\ \Leftrightarrow V_e B_e^2 &= -\mu_0 B_a H_a V_a \end{aligned}$$

Comme les termes de gauches sont fixés, minimiser V_a revient à maximiser $-B_a H_a$.

♡ Le produit $B_a H_a$ correspond à l'aire du carré $A(H)$ sous la courbe $(H, B(H))$. Pour le maximiser :

$$\begin{aligned} A'(h) &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{d(B_a H_a)}{dH_a} &= 0 \\ \Leftrightarrow 0 &= -H_a \frac{d(B_a)}{dH_a} - B_a \\ \Leftrightarrow \left| \frac{d(B_a)}{dH_a} \right| &= \left| \frac{B_a}{H_a} \right| \end{aligned}$$

Le terme de droite représente la pente de la tangente à la courbe au point P , le premier terme le rapport PI/OI . Cela impose l'égalité des angles (QI, QP) et (OI, OP) et donc le caractère isocèle du triangle OPQ .

♡ Au point P , on lit : $B_a = 0.40\text{T}$ et $H_a = 350\text{kA/m}$, ce qui impose un volume :

$$V_a = \frac{V_e B_e^2}{\mu_0 B_a H_a} = 55\text{cm}^3$$

Avec la conservation du flux, on a $S_a = B_e S_e / B_a = 13,5\text{cm}^2$. La longueur est alors $l_a = V_a / S_a = 4.1\text{cm}$.

Estimation de la puissance dissipée dans un cycle hystérésis

La puissance dissipée s'écrit comme $P = f \times \text{Volume} \times \text{Aire du cycle}$. L'aire peut être grossièrement assimilée à un rectangle d'aire $2 \times 75\text{A/m} \times 2 \times 0.75\text{T}$. On en déduit $P \approx 2.4 \times 10^2\text{W}$. La puissance est dissipée en énergie thermique.

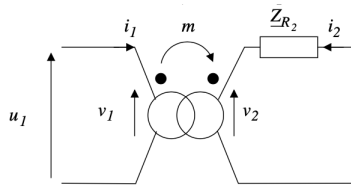
Transformateur réel série

- * L'idée consiste à transférer les impédances du primaire au secondaire en les multipliant par le rapport de transformation au carré :

$$Z_{R_2} = (R_2 + m^2 R_1) + j\omega(L'_2 + m^2 L'_1)$$

On rappelle que "passer" une impédance de l'autre côté du transformateur équivaut à multiplier celle-ci par m^2 .

- * Lorsque le secondaire est court-circuité à 50 Hz, on a ce circuit :



- * A ce moment-là, on a $u_{1cc} = v_1 = \frac{v_2}{m} = -\frac{Z_{R_2} i_2}{m}$, donc :

$$U_{1cc} = \frac{|Z_{R_2}| I_{2cc}}{m}$$

Le transformateur central étant idéal, la puissance fournie par le générateur est intégralement fournie au secondaire. La puissance est dissipée au secondaire dans les résistances, ce qui donne :

$$P_{1cc} = \frac{1}{2} (R_2 + m^2 R_1) I_{2cc}^2$$

Le facteur $1/2$ provient qu'on est ici sur la puissance moyenne.

Les formules théoriques obtenues sont des relations linéaires. L'ordonnée à l'origine des courbes expérimentales s'explique par les défauts non pris en compte : inductance de fuite pour la figure 1, pertes fer pour la figure 2,...

- * On utilise les pentes pour déterminer les différentes grandeurs demandées.

- figure 1 : la pente est l'inverse du rapport de transformation ($i_2 = -i_1/m$), donc $m = 0.5$
- Comme $R_2 = m R_1$, $P_{1cc} = m^2 R_1 I_{2cc}^2$, donc $R_1 = \text{pente} / m^2 = 8,8\Omega$
- figure 2 : la relation entre U_{1cc} et I_{2cc} prend la forme simplifiée :

$$U_{1cc} = \frac{\sqrt{(2m^2 R_1)^2 + (2m^2 L'_1)^2}}{m} I_{2cc}$$

On peut en déduire $L'_1 + 63\text{mH}$ en l'isolant.

Transformateur réel

- ▷ En négligeant la chute de tension due à la résistance des enroulements (modèle du transformateur parfait), pour le primaire :

$$v = -e = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d(N_1 B \times 2s)}{dt} = 2s N_1 j\omega B$$

Pour les amplitudes, on obtient :

$$V_{eff}\sqrt{2} = 2\pi f N_1 \times 2s B_0 \quad \Leftrightarrow \quad N_1 = \frac{V_{eff}\sqrt{2}}{2\pi f \times 2s B_0}$$

On trouve $N_1 = 620$ spires. De la même manière pour avoir une tension $2\times$ plus faible pour obtenir V_2 , on trouve $N_2 = 310$. Avec une fréquence de 400 Hz, on trouve $N_1 = 78$ spires.

- ▷ On applique Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère :

$$\begin{cases} v_1 = -e_1 = \frac{d\phi_T}{dt} = j\omega N_1 \phi \\ v_2 = j\omega N_2 \phi \\ N_1 i_1 + N_2 i_2 = H \times l = \frac{B}{\mu_0 \mu_r} = \frac{\phi l}{\mu_0 \mu_r S} \end{cases}$$

En remplaçant l'expression du flux, on obtient $N_1 i_1 + N_2 i_2 = \frac{v_1}{j\omega N_1} \times \frac{l}{\mu_0 \mu_r S}$. En divisant par N_1 , on obtient :

$$i_1 - \frac{v_1}{j\omega \mu_0 \mu_r S N_1^2 / l} = -\frac{N_2}{N_1} i_2$$

avec $L_1 = \mu_0 \mu_r N_1^2 S / l$.

- ▷ Pour $\mu_r \rightarrow \infty$, $I_m \rightarrow 0$, cad on retrouve la loi de transformation des courants du transformateur idéal.
- ▷ D'après $i_1 - I_m = -i_2$, on constate que la relation de transformation des courants s'applique en remplaçant i_1 par $i_1 - I_m$, un courant I_m est prélevé ; de la relation entre I_m et v_1 , on en déduit la présence en parallèle d'une inductance L_1 parcourue par le courant I_m .
- ▷ $I_m = \frac{V_1}{2\pi f L_1} = 73\text{mA}$.

Pic de courant dans un relais à palette

- ◊ La première étape consiste à déterminer l'inductance propre du dispositif qui permettra de déterminer l'énergie magnétique et la force magnétique ainsi que l'équation électrique. À section constante, la conservation du flux magnétique et l'absence de fuite magnétique impose $B = B_e = B_f$. On applique le théorème d'Ampère à l'excitation magnétique sur un contour incluant le matériau ferromagnétique et l'entrefer :

$$H_f \times l + H_e \times 2x(t) = Ni(t)$$

Avec $B_f = \mu_0 \mu_r H_f$ et $B_e = \mu_0 H_e$, on en déduit :

$$B = \frac{\mu_0 N i(t)}{l/\mu_r + 2x(t)}$$

On peut alors en déduire le flux propre à travers les N spires :

$$\phi = NBS = \frac{\mu_0 N^2 S}{l/\mu_r + 2x(t)} i(t) \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l/\mu_r + 2x(t)}$$

On applique la relation fondamentale de la dynamique à la palette. Une fois le support horizontal quitté, la palette est soumise à son poids et à la force électromagnétique, ce qui donne en projection sur l'axe vertical descendant :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg + \left(\frac{\partial \varepsilon_m}{\partial x} \right)_{i=cste} = mg + \frac{1}{2} \frac{dL(x)}{dx} i^2$$

C'est-à-dire :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - \frac{\mu_0 N^2 S i^2}{(l/\mu_r + 2x)^2}$$

D'autre part, pour l'équation électrique on a un phénomène d'induction dans le bobinage :

$$U = Ri - e = Ri + \frac{d(Li)}{dt} = Ri + i \frac{dL}{dt} + L \frac{di}{dt} = Ri + i \frac{dL}{dx} \frac{dx}{dt} + L \frac{di}{dt}$$

C'est-à-dire :

$$U = Ri + \frac{\mu_0 N^2 S}{l/\mu_r + 2x} \times \left[\frac{di}{dt} - \frac{2i}{l/\mu_r + 2x} \frac{dx}{dt} \right]$$

On est bien en présence d'un système d'équations différentielles couplées.

- ◇ 1 : montée du courant. Dans un premier temps, le courant doit croître dans le circuit afin de créer une force électromagnétique suffisante pour compenser le poids et permettre à la palette de monter. On peut donc considérer dans un premier temps que la distance x reste fixée à e et le circuit électrique est un simple circuit RL_0 qui subit un échelon de tension avec une constante de temps :

$$\tau_0 = \frac{L_0}{R} = \frac{\mu_0 N^2 S}{R(l/\mu_r + 2e)} \simeq 7\text{ms}$$

Ceci semble cohérent avec la montée initiale du courant en quelques dixièmes de seconde et une immobilité mécanique.

2 : Seconde étape : mouvement mécanique. Sous l'effet de la force électromagnétique, la palette vient coller à l'aimant en U ; la baisse du courant peut s'interpréter comme une conséquence de la loi de Lenz, le système réagissant en tentant de contrer l'effet qui lui a donné naissance.

Troisième étape : seconde montée du courant On se trouve à nouveau en présence d'un simple circuit RL_1 avec une inductance $L_1 > L_0$ et une constante de temps :

$$\tau_1 = \frac{L_1}{R} = \frac{\mu_0 N^2 S}{Rl/\mu_r} \simeq 84\text{ms}$$

Transformateur à 3 bobinages

- ♣ On utilise les hypothèses du transformateur parfait. Le théorème d'Amplère s'écrit :

$$HL = N_1 i_1 + N_2 i_2 + N'_2 i'_2$$

Pour chaque spire k , Maxwell-Faraday s'écrit :

$$e_k = -j\omega\phi_k$$

La conservation du flux impose : $\phi_k = N_k \phi_B$ et donc :

$$\frac{u_1}{N_1} = \frac{u_2}{N_2} = \frac{u'_2}{N'_2}$$

- ♣ Si le transformateur est parfait, $HL = \frac{BL}{\mu_0 \mu_r} \simeq 0$. On a alors $N_1 i_1 + N_2 i_2 + N'_2 i'_2 = 0$

Transfert de puissance

On souhaite alimenter un dipôle ohmique de résistance R par un générateur sinusoïdal de fem $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ par l'intermédiaire d'un transformateur supposé parfait de rapport de transmission m . Les câbles électriques reliant le transformateur ont un coefficient d'auto-induction L et l'ensemble générateur-fils une résistance r .

- ★ Déterminer le rapport de transformation pour avoir la puissance maximale dissipée dans R .
- ★ Calculer le rendement de l'installation électrique en fonction de m .
- ★ Tracer les courbes de la puissance dissipée dans R en fonction de m .