Chapter 1

Fonctions de transfert, AO en régime linéaire - corrigé

Question de cours

Formes canoniques

Avec $x = \omega/\omega_0$

- Passe bas d'ordre 2 :
$$H(\omega) = \frac{H_0}{1 + \frac{jx}{Q} - x^2} \tag{1.1}$$
Résonance si $Q > 1/\sqrt{2}$

- Passe haut d'ordre 2 :
$$H(\omega) = \frac{-H_0 x^2}{1 + \frac{jx}{Q} - x^2} \tag{1.2}$$
Résonance si $Q > 1/\sqrt{2}$

- Passe bande d'ordre 2 :
$$H(\omega) = \frac{H_0 \frac{jx}{Q}}{1 + \frac{jx}{Q} - x^2} \tag{1.3}$$
Bande-passante : $\Delta\omega = \omega_0/Q$

Stabilité

Un système est stable si la réponse à une entrée bornée est bornée. Autre critère : tous les coefficients de l'équation différentielle du régime libre sont de même signe, car le polynôme caractéristique a une racine de partie réelle positive et donc une solution est une exponentielle croissante.

AO idéal

Un AO est idéal si :

- Les courants d'entrées sont nuls ;
- Différence de potentiel différentielle nulle en régime linéaire ;
- Gain infini et retard nul (cf caractéristique idéale) en régime linéaire ;
- Tension de sortie égale à $\pm V_{sat}$ en régime saturé.

Correction Exercice 1

- Amplificateur non-inverseur $u_s = \frac{R_1+R_2}{R_2} u_e$. Pour que $U_s = V_{nom} = 2V_{max}$ il faut que le montage double la tension, cad $R_1 = R_2$.

- Si $R_c = \infty$, alors le courant dans la charge i_c est nul. Alors $P = u_s i_s = \frac{R_1+R_2}{R_2^2} u_e^2$. L'AO consomme de l'énergie même s'il n'y a aucune puissance délivrée à la charge !

- Soit i_1 le courant traversant R_1 et R_2. Alors la loi des nœuds donne : $i_s - i_1 - ic = 0$ (signe pris tq les puissances soient positives). On a alors :
$$P = u_s i_s = \frac{R_1 + R_2}{R_2^2} u_e^2 + \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_2^2 R_c} u_e^2 \tag{1.4}$$

- On prend $R_2 \gg R_c$, le premier terme de dissipation de l'AO devient négligeable devant la puissance envoyée à la charge.

Correction exercice 2

Fonction de transfert :

$$H = \frac{u_s}{u_e} = \frac{R_1 + R_2}{R} \frac{1 + j\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}(C_1 + C_2)\omega}{(1 + jR_1C_1\omega)(1 + jR_2C_2\omega)} = H_0 \frac{1 + j\omega/\omega_0}{(1 + j\omega/\omega_1)(1 + j\omega/\omega_2)} \quad (1.5)$$

donc $H_0 = \frac{R_1+R_2}{R}$, $\omega_0 = \frac{R_1+R_2}{R_1R_2(C_1+C_2)}$, $\omega_1 = 1/R_1C_1$ et $\omega_2 = 1/R_2C_2$

Diagramme de Bode : on décompose en somme des diagramme de Bode des différents produits.

Correction exercice 3

Le courant de sortie est supposé nul.

- Comportement : BF, $u_e = u_s$ et HF, $u_e = u_s$, c'est un filtre passe bande
- Pour la fonction de transfert, on fait une loi des nœuds en A (entre les 2 résistances du haut), en B (entre les 2 capa du milieu) et à la sortie :

$$(u_e - u_a)/R + (u_s - u_a)/R - j2C\omega u_a = 0 \quad (1.6)$$

$$(u_e - u_b)jC\omega + (u_s - u_b)jC\omega - u_b/R = 0 \quad (1.7)$$

$$(u_s - u_a)/R + -jC\omega(u_s - u_b) = 0 \quad (1.8)$$

  On trouve alors :

$$H = \frac{1 + (jRC\omega)^2}{1 + 4jRC\omega + (jRC\omega)^2} \quad (1.9)$$

- Diagramme de Bode : Diagramme assymptotique : $\forall\omega, H = 0$ et pour $\omega = \omega_0 = 1/RC$, dirac à "l'envers" avec $H = -\infty$. C'est bien un coupe-bande.
- Bande-passante : $G_{DB} = -20\log\sqrt{1 + \left(\frac{4RC\omega}{1-R^2C^2\omega^2}\right)^2} = -3$

  $\Rightarrow R^2C^2\omega^2 - 4RC\omega - 1 = 0$ alors : $\omega_\pm = \frac{\pm 2+\sqrt{5}}{RC}$

  AN : $\omega_- = 230$ Hz et $\omega_+ = 4230$ Hz
- Question supplémentaire : Le filtre supprime les harmonique 1 et 3. Le signal est un créneau, pour le tracer, on retire les 2 premières harmoniques d'un signal créneau.

Correction exercice 4

- $H = \frac{1-jRC\omega}{1+jRC\omega}$. On remarque que $\mid H \mid= 1$, mais que $\varphi = -2\arctan(RC\omega)$. On peut écrire alors H sous la forme :

$$H = e^{-2j\arctan(RC\omega)} \quad (1.10)$$

  C'est un filtre déphaseur.

- Dans l'espace de fourier, pour un signal quelconque d'entrée $e(t) = \sum_k A_k e^{jk\omega_0 t}$, la sortie est :
$$s(t) = \sum_k A_k e^{jk\omega_0 t + j\varphi(k\omega_0)} \tag{1.11}$$
Si $\omega \ll RC$, alors $\varphi(\omega) \longrightarrow -2RC\omega$ et que toutes les harmoniques valident cette condition (ex : signal triangulaire, avec une décroissance rapide de l'amplitude des harmoniques) :
$$s(t) = \sum_k A_k e^{jk\omega_0(t-2RC)} = e(t-\tau) \tag{1.12}$$

- $\cos^3(\omega t) = \frac{1}{4}(3\cos(\omega t) + \cos(3\omega t))$. Pour les fréquences proposées, le déphasage n'est pas homogène. Il y a donc déformation du signal.

- Pour $t < 0$, le condensateur est déchargé donc $u_e(t) = u_s(t) = 0$. Pour $t \geq 0$, le condensateur se charge donc $u_-(t) = E(1 - e^{-t/RC})$, et alors :
$$u_s(t) = 2E(1 - e^{-t/RC}) - E \tag{1.13}$$
Le signal finit bien par "redevenir" celui d'entrée (car $H = 1$) mais un retard. Attention, ici c'est une transformation de Fourier et non une série de Fourier qu'il faut opérer.

Correction exercice 5

- $H = -jRC\omega$ cad $u_s(t) = -RC\frac{du_e}{dt}$. C'est un dérivateur.

- En TF : $u_s = \varepsilon\frac{\mu_0}{1+j\tau\omega}$. Puis loi des nœuds, avec $\varepsilon = u_-$:
$$H(j\omega) = \frac{-\mu_0 jRC\omega}{1 + \mu_0 + j\omega(\tau + RC) - RC\tau\omega^2} \tag{1.14}$$
L'équation différentielle associée à tous ses coefficients du même signe, les solutions sont sinusoïdales donc bornées.

- En inversant les pôles, $\varepsilon = +u_-$. Cela revient à remplacer $\mu_0 \leftarrow -\mu_0$. Le terme de dérivée 0 devient alors $1 - \mu_0$ et est négatif donc la solution contient une partie exponentielle et diverge jusqu'à saturation.

- C'est un filtre passe bande d'ordre 2 de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{1+\mu_0}{RC\tau}}$ Sous forme canonique, on a :
$$H(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})} \tag{1.15}$$
avec $H_0 = \frac{\mu_0 RC}{\tau+RC} = -5,9 \cdot 10^3$ et $Q = \frac{\sqrt{(1+\mu_0)RC\tau}}{\tau+RC} = 74$ Ce filtre est dérivateur pour x petit, cad $H \approx \frac{j\omega}{Q\omega_0}$. Cette condition est vérifiée jusqu'à $x \approx 0,9$ cad $f = 2\pi\omega \approx 11\text{kHz}$.