

## Lac gelé

- \* En redémontrant l'équation de la chaleur, on trouverait :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\rho c_g}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} \simeq 0$$

car  $c_g \simeq 0$  dans le cadre de l'ARQS. On a alors :

$$T(z) = \frac{T_F - T_0(t)}{\xi(t)} z + T_0(t)$$

- \* Par conservation de l'énergie, la densité de flux thermique dans la glace  $j_g(z, t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}$  est égale à la densité de flux thermique à l'interface  $j_a$  donné par la loi de Newton :

$$\begin{aligned} j_g(z=0, t) &= j_a \\ \Rightarrow -\frac{\lambda}{\xi(t)} (T_F - T_0(t)) &= -h(T_A - T_0(t)) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$T_0(t) = \frac{T_F + \frac{h\xi(t)}{\lambda} T_A}{1 + \frac{h\xi(t)}{\lambda}}$$

- \* On considère un volume d'eau  $dV = S \times dz$  se transformant en glace durant un temps  $dt$ . Comme le front de glace avance à la vitesse  $\xi$ , on a  $dz = \xi dt$ . Ce volume dégage une énergie  $dQ = l_f \rho_g \xi dt S$  lors de sa transformation, qui est évacuée à travers le flux thermique dans la glace  $dQ = -S dt \times j_g(z = \xi, t)$ . Le signe  $-$  correspond au fait que l'énergie est évacuée vers l'atmosphère, donc selon  $-\vec{e}_z$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\xi(t)} (T_F - T_0(t)) &= l_F \rho_g \xi(t) \\ \Rightarrow T_F - \frac{T_F + \frac{h\xi(t)}{\lambda} T_A}{1 + \frac{h\xi(t)}{\lambda}} &= \frac{l_F \rho_g}{\lambda} \xi(t) \dot{\xi}(t) \\ \Rightarrow \frac{h}{l_F \rho_g} (T_F - T_A) &= \left(1 + \frac{h}{\lambda} \xi(t)\right) \dot{\xi}(t) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\left(1 + \frac{\xi(t)}{l_0}\right) \dot{\xi}(t) = v_0$$

Avec  $l_0 = \frac{\lambda}{h}$  et  $v_0 = \frac{h}{l_F \rho_g} (T_F - T_A)$ . On peut vérifier l'homogénéité, qui est bien respectée. On remarque par ailleurs que  $v_0 = \dot{\xi}(t=0)$ , qui correspond à la vitesse d'avancée du front de glace au début de la glaciation.

- \*  $l_0 = 0,05m$  et de  $v_0 = 1,27 \cdot 10^{-6}m/s$ . On définit un temps caractéristique  $\tau_0$  comme tout simplement  $\tau_0 = l_0/v_0 = 39 \cdot 10^3s$ .

- \* On intègre la relation précédente :

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{l_0}{2} \frac{d}{dt} \left(1 + \frac{\xi(t)}{l_0}\right)^2 \\ \Rightarrow \frac{2t}{\tau_0} &= \left(1 + \frac{\xi(t)}{l_0}\right)^2 + C \end{aligned}$$

En tenant compte des conditions initiales,  $\xi(0) = 0$ , on trouve  $C = -1$ . Donc, en résolvant l'équation du second degré et en prenant la racine positive, on obtient :

$$\xi(t) = l_0 \left( \sqrt{1 + \frac{2t}{\tau_0}} - 1 \right)$$

Et de même :

$$T_0(t) = T_A + \frac{T_F - T_A}{\sqrt{1 + \frac{2t}{\tau_0}}}$$

Pour qu'il y ait 5 cm de glace, soit une épaisseur  $\xi(t) = l_0$ , il faut un temps  $t = \frac{3}{2}\tau_0 \simeq 59 \cdot 10^3$ s, soit environ 16h30. Cela montre bien que la vitesse de glaciation diminue, si elle se maintenait à  $v_0$ , il faudrait un temps  $\tau_0$  pour geler ces 5cm, soit environ 11h.

## Transfert thermique et entropie

- ▷ Il faut d'abord obtenir l'équation de la chaleur lorsqu'une source de chaleur est présente dans le volume. L'équation de conservation (qui n'en est plus une !) devient :

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x} + p_{vol}$$

où  $p_{vol} = \rho I^2 / S^2$  est la puissance volumique dissipée par effet Joule. L'équation de la chaleur devient donc :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{p_{vol}}{c\rho}$$

En régime permanent :

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -p_{vol}$$

En intégrant, on obtient :

$$T(x) = -\frac{p_{vol}x^2}{2\lambda} + Ax + B$$

Avec les CL  $T(0) = T_1$  et  $T(L) = T_2$ , on trouve :

$$T(x) = \frac{p_{vol}}{2\lambda}x(L-x) + \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1$$

- ▷ Il y a plusieurs façon de répondre à la question. Je préfère utiliser la condition où  $T'(L) = 0$ , cad que la puissance électrique chauffe suffisamment pour tordre la courbe de température de sorte à ce que la dérivée deviennent nulle en  $x = L$  (en considérant que  $T_2 > T_1$ ). Comme on a :

$$T'(x) = \frac{p_{vol}}{2\lambda}(L - 2x) + \frac{T_2 - T_1}{L}$$

La condition  $T'(L) = 0$  donne alors :

$$p_{vol} = 2\lambda \frac{T_2 - T_1}{L^2}$$

- ▷ On effectue un bilan d'entropie sur le système constitué d'une tranche de barre entre  $x$  et  $x + dx$  du barreau durant un temps  $dt$  :

$$dS = \delta s_e(x) - \delta s_e(x + dx) + \delta s_c$$

Il s'agit, pour l'entropie échangée, du même raisonnement que dans le cas d'une machine thermique avec deux sources extérieures, un échange d'entropie en  $x$  et un autre en  $x + dx$ .  $\delta s_c$  est l'entropie créée durant  $dt$

En RP,  $dS = 0$  et  $\delta s_e(x) = \frac{\delta Q(x)}{T(x)} = S dt \frac{j(x)}{T(x)}$ . Alors :

$$\begin{aligned} S dt \frac{j(x)}{T(x)} - S dt \frac{j(x + dx)}{T(x + dx)} + \delta s_c &= 0 \\ \delta s_c &= -S \lambda dt \left( \frac{1}{T(x + dx)} \frac{\partial T}{\partial x}(x + dx) \right) + S \lambda dt \left( \frac{1}{T(x)} \frac{\partial T}{\partial x}(x) \right) \\ \frac{\delta s_c}{S dx dt} &= -\lambda \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{T(x)} \frac{\partial T}{\partial x} \right) = -\frac{\lambda}{T(x)} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\lambda}{T^2(x)} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 \end{aligned}$$

L'entropie créée par unité de volume et de temps est donc :

$$\frac{s_{c,vol}}{dt} = \frac{\rho I^2}{S^2 T} + \frac{\lambda}{T^2(x)} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 > 0$$

Le premier terme correspond à l'entropie créée par effet Joule, le second par les transferts thermiques.

- ▷ On peut réutiliser les résultats de la question précédente, pour  $I = 0$  :

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$$

- ▷ Il y a plusieurs façon de calculer la température finale. Pour ma part, j'utilise la conservation de l'énergie thermique  $U$  de la barre lors de la transformation. Comme celle-ci est totalement isolée, on a :  $U(t = 0) = U_\infty = SL\mu c T_\infty$  où  $\mu$  est la masse volumique de la barre. Or, l'énergie interne à  $t = 0$  est la somme de toutes les énergies internes du barreau d'épaisseurs  $dx$  :

$$\begin{aligned} U(t = 0) &= c\mu S \int_0^L dx T(x) \\ &= c\mu S L \frac{T_1 + T_2}{2} \end{aligned}$$

donc  $T_\infty = \frac{T_1 + T_2}{2}$ , on trouve bien que la température finale correspond à la moyenne des températures extrêmes. Pour le calcul de l'entropie, on se base sur la variation d'entropie d'un solide lors d'une transformation d'une température à une autre. Plus précisément, un élément  $Sdx$  de la barre à l'abscisse  $x$  passe de la température  $T(x)$  à  $T_\infty$ . Sa variation d'entropie est donc :

$$\Delta(\delta S) = \mu c S dx \ln \left( \frac{T_\infty}{T(x)} \right)$$

Donc pour l'ensemble de la barre :

$$\begin{aligned} \Delta S &= -\mu c S \int_0^L dx \ln \left( \frac{T(x)}{T_\infty} \right) \\ &= -\mu c S \frac{L}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} dT \ln \left( \frac{T}{T_\infty} \right) \end{aligned}$$

Finalement :

$$\Delta S = Mc \left( 1 + \frac{T_1}{T_2 - T_1} \ln \left( \frac{2T_1}{T_1 + T_2} \right) - \frac{T_2}{T_2 - T_1} \ln \left( \frac{2T_2}{T_1 + T_2} \right) \right)$$

## Température dans une planète naine

- ⊙ La concentration de thorium est de  $c = 10 \times 10^{-6} \times \mu = 27 \text{ g.m}^{-3}$ , soit une quantité  $n = cN_A/M = 7,00 \times 10^{22}$  atomes de thorium par  $\text{m}^3$ . La puissance peut être estimée par l'énergie  $\varepsilon$  d'une désintégration divisée par le temps de demi-vie  $\tau$  (ce qui correspond peu ou prou à l'activité nucléaire, un facteur  $\ln 2$  près), soit  $P_r = \frac{\varepsilon n}{\tau} = 8,90 \times 10^{-8} \text{ W.m}^{-3}$ .

- ⊙ On effectue un bilan d'enthalpie entre  $r$  et  $r + dr$  :

$$r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi \times \mu c_p \times [T(r, t + dt) - T(r, t)] = \\ r^2 \sin \theta d\theta d\phi \times j(r, t) dt - (r + dr)^2 \sin \theta d\theta d\phi \times j(r + dr, t) dt + P_r dt r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$$

On a donc :

$$r^2 \mu c_p \times \frac{\partial T}{\partial t}(r, t) = \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j(r, t)) + r^2 \times P_r$$

Et alors, avec la loi de Fourier  $j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}$  :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{D}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \kappa$$

Avec  $\kappa = P_r/(\mu c_p)$  et de  $D = \lambda/(\mu c_p)$ .

- ⊙ Le temps caractéristique de diffusion thermique est estimé comme  $\tau_d \simeq L^2/D = L^2 \mu c_p / \lambda = 6,09 \times 10^{15} \text{ s}$ , soit 0,19 milliard d'années. C'est long mais toujours bien inférieur à 14 milliards d'années, qui est le temps caractéristique de décroissance radioactive du thorium. La planète a donc le temps d'être à tout instant thermalisée avec l'extérieur.

- ⊙ On peut donc estimer que le terme  $\partial T/\partial t$  est nul. L'équation de diffusion devient :

$$\frac{D}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -\kappa$$

L'intégration fait apparaître deux constantes d'intégration,  $A$  et  $B$  :

$$T(r) = -\frac{\kappa}{6D} r^2 - \frac{A}{r} + B$$

La température étant définie en tout point de la planète, y compris en  $r = 0$ , on a nécessairement  $A = 0$ .

La planète perd de l'énergie thermique par rayonnement, qui part dans l'espace depuis sa surface. La puissance thermique associée à ce rayonnement suit la loi de Stefan-Boltzmann  $\phi = \sigma T_s^4$ , où  $\phi$  est la puissance rayonnée par unité de surface à la surface de la planète,  $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$  une constante et  $T_s$  la température à la surface de l'astre.

- ⊙ La loi de Stefan-Boltzmann donne une seconde CL :  $j(r = R) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}(r = R) = \sigma T^4(r = R)$ . On a donc :

$$\lambda \frac{\kappa}{3D} R = \sigma \left( B - \frac{\kappa}{6D} R^2 \right)^4$$

et donc :

$$B = \sqrt[4]{\frac{P_r R}{3\sigma}} + \frac{\kappa}{6D} R^2$$

Finalement :

$$T(r) = \frac{\kappa}{6D} (R^2 - r^2) + \sqrt[4]{\frac{P_r R}{3\sigma}}$$

- ⊙ Pour  $T(0) = \sqrt[4]{\frac{P_r R}{3\sigma}} + \frac{\kappa}{6D} R^2 \simeq 63 \text{ K}$  et  $T(R) = \sqrt[4]{\frac{P_r R}{3\sigma}} \simeq 20 \text{ K}$ .

# Diffusion de particules dans un récipient en rotation

## Cas statique : sédimentation

- ⊙ La poussée d'Archimède est définie comme :

$$\vec{\pi} = \rho_s \frac{m}{\rho_p} g \vec{e}_z$$

Elle est égale au poids du volume de solvant déplacé et est opposée à la gravitation. Le bilan des forces devient en régime permanent, appliqué sur une particule :

$$\vec{0} = \vec{\pi} - mg\vec{e}_z - 6\pi\eta a\vec{v}$$

La vitesse moyenne qui en résulte est donc :

$$\vec{v} = -\frac{mg}{6\pi\eta a} \left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_p}\right) \vec{e}_z = -\frac{m^*g}{6\pi\eta a} \vec{e}_z$$

On trouve bien que la particule tombe (respectivement remonte) si sa masse volumique est supérieure à celle du solvant (respectivement inférieure). Le flux associé de particules est  $\vec{j}_s = c \times \vec{v}$ .

- ⊙ Si on regardait le phénomène sans diffusion, toutes les particules tomberaient au fond du récipient et s'agglutinaient. Or, au fur et à mesure qu'elles tombent, leur concentration  $c(z)$  augmente, générant un courant de diffusion  $\vec{j}_D = -D\text{grad}(c)$  opposé qui fait "remonter" les particules. Un équilibre s'établit.
- ⊙ On refait le bilan élémentaire du flux de particule sur un volume élémentaire, en ajoutant le courant  $\vec{j}_s$ . On trouve alors facilement :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\text{div}(\vec{j}_D + \vec{j}_s)$$

- ⊙ En régime permanent :

$$\text{div}(\vec{j}_D + \vec{j}_s) = 0$$

Comme les flux ne sont que selon  $\vec{e}_z$ , en intégrant par rapport à  $z$ , on a  $\vec{j}_D + \vec{j}_s = A$ . En  $z = 0$ , au fond du récipient, le flux total est nécessairement nul car les particules ne peuvent pas traverser le récipient. Donc :

$$\vec{j}_D + \vec{j}_s = 0$$

Et alors :

$$c(z) \frac{m^*g}{6\pi\eta a} = -D \frac{\partial c}{\partial z}$$
$$c(z) + L \frac{\partial c}{\partial z} = 0$$

avec  $L = \frac{6\pi\eta a D}{m^*g}$ . Et donc :

$$c(z) = c_0 \exp\left[-\frac{z}{L}\right]$$

## Cas dynamique

- ⊙ Même raisonnement que précédemment, en remplaçant la force du poids par la force centrifuge. Attention, il y a toujours une poussée d'Archimède ! On trouve que  $\vec{v} = \frac{m^* \omega^2 r}{6\pi\eta a} \vec{e}_r$ . Les particules sont bien ramenées vers l'extérieurs si elles sont plus denses que le solvant. Le courant de particules associé est  $\vec{j}_c = c(r)\vec{v}$ , la concentration ne dépendant que de  $r$  dans ce cas-là.

On trouve ensuite, avec un bilan en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( D \frac{\partial c}{\partial r} - sr\omega^2 c(r) \right) \right)$$

avec  $s = \frac{m^*}{6\pi\eta a}$ .

- ⊙ Même raisonnement que précédemment, pour trouver que  $D \frac{\partial c}{\partial r} - sr\omega^2 c(r) = 0$ . On trouve alors que :

$$\frac{\partial c}{\partial r} = \frac{r}{L^2} c(r)$$

avec  $L = \sqrt{s\omega^2/D}$ . La solution est :

$$c(r) = c_0 \exp \left[ \frac{r^2}{2L^2} \right]$$

## Diffusion à contre-courant

Dans un tuyau de section  $S$  circule un solvant à la vitesse  $-v_0 \vec{e}_x$ , où  $x$  est l'axe le long du tuyau. En  $x = 0$ , on injecte à travers une petite ouverture un colorant dans le tuyau, avec un débit molaire  $n^*$ . On suppose que le colorant s'homogénéise immédiatement sur toute la section  $S$  du tuyau dès son injection en  $x = 0$ . On remarque que, en plus de s'évacuer avec le solvant vers les  $x$  négatifs, le colorant remonte à contre-courant sur une longueur caractéristique  $L$ . Le coefficient de diffusion du colorant dans le solvant est noté  $D$ .

- ♠ Montrer que la concentration  $c$  de particules de colorant en aval de l'écoulement ( $x < 0$ ) ne dépend de  $x$  et s'écrit  $c = \frac{N_A n^*}{v_0 S}$ , en notant  $N_A$  le nombre d'Avogadro. En déduire le flux de particule associé  $\vec{j}_c$ .
- ♠ Pourquoi la concentration  $c$  va dépendre de  $x$  en amont de l'écoulement ( $x < 0$ ) ? Quel est le flux de particule  $\vec{j}_c(x)$  associé ?
- ♠ En déduire une équation différentielle sur  $c(x)$ . La résoudre, et en déduire la longueur  $L$  de remontée à contre-courant.

## Evaporation de l'éther

- ▲ Le grand classique :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

- ▲ En RP,  $c(x) = Ax + B$ . Avec les CL :

$$c(x) = \frac{P_{sat}}{RT} \frac{x}{h(t)}$$

▲ On a  $dN = \frac{\mu}{M} S(h(t+dt) - h(t))$ . Mais aussi  $dN = -j(x=h(t))S = \frac{P_{sat}}{RT} \frac{D}{h(t)}$

▲ On en déduit l'équation :

$$h\dot{h} = \frac{DP_{sat}M}{R\mu}$$

▲ En déduire un ordre de grandeur du temps d'évaporation de l'éther.