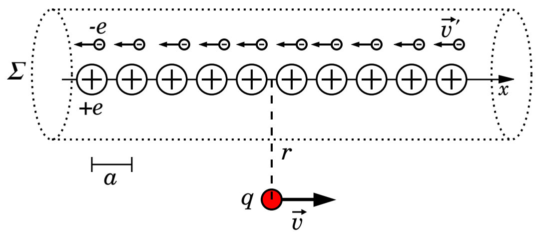
Approche ontologique du champ magnétique ● ● ○

On considère un fil électrique de section Σ dirigé suivant l'axe x. Il est constitué d'atomes séparés d'une distance a, de charge $+e$ et d'autant d'électrons de conduction de charge $-e$; on suppose que atomes et électrons sont confondus sur l'axe x et uniformément répartis à travers la section Σ. On impose un courant I dans le fil, les électrons se déplacent alors avec une vitesse $\vec{v'} = -v'\vec{e_x}$ uniforme le long du fil.

Une particule de charge q se déplace à la vitesse $\vec{v} = v\vec{e_x}$ à l'extérieur du fil à une distance $r > a$ de l'axe x.



On s'intéresse aux forces électromagnétiques exercées par les charges du fil sur la particule de charge q par deux approches différentes.

Approche en mécanique classique

- ♣ Quelle est la densité de charge ρ_+ (respectivement ρ_-) due aux atomes (resp. aux électrons) dans le fil ? En déduire le champ électrique $\vec{E}$ créé par cette distribution de charge pour $r > a$.
- ♣ Quelle est la densité de courant $\vec{j}$ dans le fil ? Exprimer la vitesse $\vec{v'}$ des électrons de conduction en fonction de I. En déduire le champ magnétique $\vec{B}$ créé par ce courant en fonction de v' et des autres données de l'énoncé.
- ♣ Exprimer la force totale s'exerçant alors sur la charge $+q$, en fonction de q, v, v', a, r et de constantes fondamentales. Quels sont les contributions des forces électriques et magnétiques sur cette particule ?
- ♣ Que devient cette force dans le référentiel en mouvement de la charge $+q$? En quoi est-ce une contradiction ?

Approche en mécanique relativiste

La théorie de la relativité restreinte permet de lever cette contradiction, en affirmant que tout objet se déplaçant relativement par rapport à un autre voit sa longueur contractée dans le sens du déplacement. Ainsi, Einstein a démontré en 1905 qu'un objet à la vitesse v par rapport à un autre objet, voit la longueur de ce dernier contractée d'un facteur $\gamma(v) = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ (où c est la vitesse de la lumière). Dans son référentiel, la charge q voit donc la densité de charge des atomes ρ_+ et des électrons ρ_- augmenter, mais pas dans les mêmes proportions.

- ♣ Que deviennent les densités de charge ρ_+ et ρ_- dans le référentiel de la particule $+q$?
- ♣ Déterminer le champ électrique créé par cette nouvelle distribution de charges en fonction de v, v', a, r et de constantes fondamentales. On supposera que $v' \ll v \ll c$.
- ♣ Quelle est la force électrique s'exerçant sur la particule $+q$?
- ♣ Comparer avec le résultat trouvé en approche classique (non relativiste). Que peut-on en dire sur la nature du champ magnétique ?

N.B. : On rappelle que la vitesse de la lumière c est définie comme $c^2 = 1/\epsilon_0\mu_0$, où ϵ_0 et μ_0 sont respectivement la permittivité électrique et la perméabilité magnétique du vide.

Correction Approche ontologique du champ magnétique

Approche en mécanique classique

- ♣ Dans une volume $a\Sigma$, on a une charge $+e$ et une charge $-e$, comme celle-ci sont réparties uniformément. Les densités de charges sont donc respectivement $\rho_+ = e/(a\Sigma)$ et $\rho_- = -e/(a\Sigma)$.
- ♣ Par définition, $\vec{j} = \rho\vec{v}$. Comme seuls les électrons ont une vitesse non nulle, $\vec{j} = \rho_-\vec{v'} = ev'/(a\Sigma)\vec{e}_x$. Et donc $I = \oiint_\Sigma \mathrm{d}\vec{S}\vec{j} = ev'/a$.
- ♣ $\rho_{tot} = \rho_+ + \rho_- = 0$ donc $\vec{E} = 0$.
- ♣ Avec le théorème d'Ampère appliqué uniquement en dehors du fil, on trouve :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e_\theta}$$

(résultat classique d'un fil parcouru par un courant I) La force qui s'exerce sur la charge q est donc :

$$\vec{F} = -\frac{qv\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e_r}$$

Approche en mécanique relativiste

- ♣ Ainsi, en se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$, la charge $+q$ voit dans son référentiel la distance entre atomes réduite d'un facteur $\gamma_+ = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ et la distance entre électrons de conduction d'un facteur $\gamma_- = 1/\sqrt{1-(v-v')^2/c^2}$. On trouve donc que :

$$\rho_+ = \frac{e}{a\Sigma}\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$$\rho_- = \frac{e}{a\Sigma}\sqrt{1 - (v+v')^2/c^2}$$

Attention, l'hypothèse que la vitesse relative des électrons par rapport à la charge q est $v' + v$ est une approximation. En mécanique relativiste, la vitesse relative serait :

$$v_{e_-/q} = \frac{v' - v}{1 - \frac{vv'}{c^2}} \tag{1}$$

- ♣ On trouve facilement avec le théorème de Gauss que :

$$\vec{E} = \frac{\Sigma(\rho_+ + \rho_-)}{2\pi r\varepsilon_0}$$

En développant à l'ordre 2, on trouve :

$$\rho_+ + \rho_- \approx -\frac{e}{a\Sigma}\frac{vv'}{c^2}$$

On trouve alors que :

$$\vec{E} = -\frac{evv'}{2\pi r a\varepsilon_0 c^2}\vec{e_r} = -\frac{I\mu_0 v}{2\pi r}\vec{e_r}$$

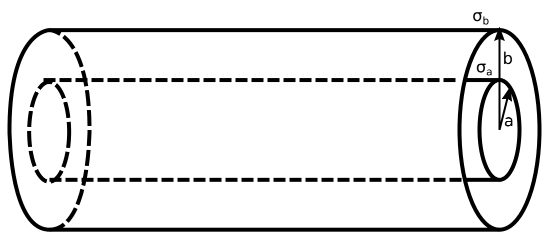
- ♣ La force de Lorentz associée est donc :

$$\vec{F} = -\frac{qevv'}{2\pi r a\varepsilon_0 c^2}\vec{e_r} = -\frac{qI\mu_0 v}{2\pi r}\vec{e_r}$$

Cette expression est identique à celle trouvée par le calcul du champ magnétique en mécanique classique. Le champ magnétique est-il est une approximation à l'ordre 2 de la force de Coulomb ?

Câble coaxial • • ○

On considère un câble coaxial constitué de deux conducteurs cylindriques de même axe, séparés par du vide, de rayon a (l'âme) et b (la gaine), avec $a < b$, et d'épaisseur négligeable. Le conducteur central (de rayon a) a une charge surfacique σ_a répartie uniformément et est traversé par une densité surfacique de courant $\vec{j_{s,a}}$, répartie aussi uniformément sur l'âme. La longueur du câble est L, très grande devant les rayons a et b.



On cherche à connaitre la capacité et l'inductance linéique du câble coaxial, pour comprendre la propagation des ondes électromagnétiques à l'intérieur.

- Exprimer le courant I circulant dans l'âme et sa charge totale Q en fonction de $\vec{j_{s,a}}$ et σ_a. En déduire la charge et l'intensité surfacique de la gaine, σ_b et $\vec{j_{s,b}}$, sachant que, sur toute la longueur du câble, le courant total à travers le câble est nul et qu'il est neutre électriquement.
- Déterminer le champ électrique en tout point.
- En déduire la capacité c par unité de longueur de câble.
- Déterminer le champ magnétique en tout point.
- On définit l'inductance L d'un circuit délimitant une surface S, parcouru par un courant I comme comme le rapport du flux du champ magnétique à travers S avec le courant I :

$$\Phi_B = \oiint_S \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{B} = LI$$

  En choisissant soigneusement une surface S, déterminer l'inductance linéique l.
- Que vaut le produit le produit $l \times c$? A quoi correspond cette grandeur ?

Correction Câble coaxial

♡ Le courant circulant dans l'âme est $I = 2\pi a j_{s,a}$. De même, la charge totale est $Q = 2\pi a l \sigma_a$. On a forcément $I = 2\pi b j_{s,b}$. De même, la charge totale est $Q = 2\pi b l \sigma_b$ par conservation de la charge et du courant.

♡ Les symétries et les invariances donnent $\vec{E} = E(r)\vec{e_r}$. Avec le théorème de Gauss appliqué sur un cylindre de rayon r, on obtient :

$$\begin{cases} r < a & : \quad \vec{E} = \vec{0} \\ a < r < b & : \quad \vec{E} = \frac{\sigma_a a}{\varepsilon_0 r}\vec{e_r} \\ r > b & : \quad \vec{E} = \vec{0} \end{cases}$$

♡ On en déduit le potentiel entre les deux conducteurs :

$$V = \frac{\sigma_a a}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{Q}{2\pi l \varepsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

La capacité par unité de longueur est donc :

$$c = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

♡ Les symétries et les invariances donnent $\vec{B} = B(r)\vec{e_\theta}$. Avec le théorème de d'Ampère appliqué sur un cercle de rayon r, on obtient :

$$\begin{cases} r < a & : \quad \vec{B} = \vec{0} \\ a < r < b & : \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 j_{s,a} a}{r}\vec{e_\theta} \\ r > b & : \quad \vec{B} = \vec{0} \end{cases}$$

♡ Le flux du champ $\vec{B}$ se calcule sur la surface rectangulaire comprises entre a et b, de longueur l avec $\vec{e_\theta}$ comme vecteur normal. On trouve alors :

$$\Phi_B = \frac{L\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

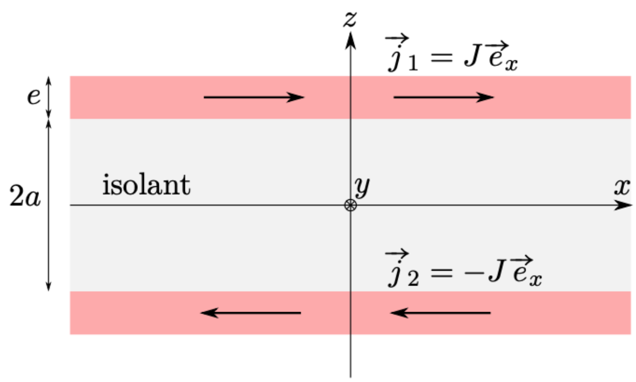
On a donc :

$$l = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

♡ On trouve que $l \times c = \varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$. Cela correspond à l'inverse du carré de la vitesse de la lumière, qui est la vitesse de propagation dans le câble coaxial.

Champ magnétique entre deux nappes de courant ● ○ ○

Deux nappes de courant identiques de très grande surface $S = L_x \times L_y$, d'épaisseur e, sont parallèles entre elles et séparées d'une longueur $2a$ par un matériau isolant. Elles sont parcourues par un courant permanent de vecteur densité $J\vec{e}_x$ pour la nappe supérieure 1 et $-J\vec{e}_x$ pour la nappe inférieure 2. On se place suffisament loin des bords de la nappe pour négliger les effets de bord.



- ♣ Etudier la dépendance et la direction du champ magnétique à partir des symétries et invariances.
- ♣ Déterminer rigoureusement le champ magnétique dans tous l'espace, et le représenter sur un graphe.

On définit l'inductance L d'un circuit délimitant une surface S, parcouru par un courant I comme comme le rapport du flux du champ magnétique à travers S avec le courant I :

$$\Phi_B = \oiint_S \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{B} = LI$$

- ♣ Quelle est la surface délimitée par le circuit formé par les deux nappes ? En déduire l'inductance formée par ce système.

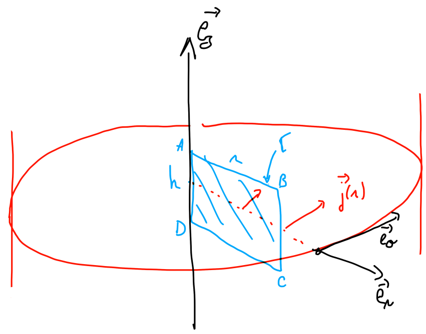
Champ magnétique dans un cylindre parcouru par un courant orthoradial ● ● ○

On considère un cylindre conducteur de rayon a et de longueur $L \gg a$ selon l'axe O_z, dans lequel circule une densité volumique de courant $\vec{j}(r) = j_0 \frac{r}{a} \vec{e}_\theta$.

- A l'aide des symétries et invariances, expliciter la dépendance spatiale et la direction du champ magnétique.
- Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}(r)$ en fonction de la valeur du champ magnétique en $r = 0$.
- Quel est l'expression du champ magnétique $\vec{B}(r)$ si on impose un champ exterieur $\vec{B}_{ext}$ de sorte à ce que $\vec{B}(r = a) = \vec{0}$? Quelle est alors la valeur de $\vec{B}_{ext}$?

Correction Champ magnétique dans un cylindre parcouru par un courant orthoradial

- Invariance : le champ ne dépend que de r. Symétrie : le plan $(\vec{e}_r;\vec{e}_\theta)$ est plan de symétrie de la distribution de courant donc $\vec{B}$ est suivant $\vec{e}_z$.
- On calcule la circulation de $\vec{B}$ sur le contour Γ :



$$\oint_\Gamma d\vec{l}\cdot\vec{B} = \int_B^C dz \times B(r) + \int_D^A dz \times B(0)$$
$$= -hB(r) + hB(0)$$

D'après le théorème d'Ampère, pour $r < a$:

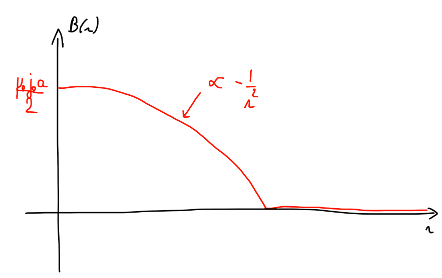
$$-hB(r) + hB(0) = \mu_0 j_0 h \frac{r^2}{2a} \tag{2}$$

Donc :

$$B(r) = B(0) - \mu_0 j_0 \frac{r^2}{2a}$$

Pour $r > a$:

$$B(r) = B(0) - \mu_0 j_0 \frac{a}{2}$$



- On ajoute un champ magnétique esxtérieur $\vec{B}_{ext}$, nécessairement selon $\vec{e}_z$:

$$B(r) = B(0) - \mu_0 j_0 \frac{r^2}{2a} + B_{ext}$$

Si $B(r=a)=0$ alors $B_{ext}=-B(0)+\mu_0 j_0 \frac{a}{2}$ et alors :

$$B(r)=\frac{\mu_0 j_0}{2a}\left(a^2-r^2\right)$$

Foudre ● ○ ○

On modélise la foudre par un tube d'air ionisé cylindrique de rayon a=1m et de densité de courant $\vec{j} = j_0 \frac{r}{a} \vec{e}_z$. Ce sont les électrons de charge $-e$ qui sont supposés porter le courant électrique.

- Relier le courant total I avec j_0 et a. Sachant que l'intensité d'un éclair peut atteindre 100 kA, quelle est la densité de courant j_0 associée ?
- Etudier la dépendance et la direction du champ magnétique à partir des symétries et invariances.
- Déterminer rigoureusement le champ magnétique dans tous l'espace, et le représenter sur un graphe. Estimer la valeur maximale que prend le champ magnétique.
- Rappeler l'expression de la force de Lorentz pour un électron de charge $-e$ lorsqu'il est soumis à un champ magnétique extérieur $\vec{B}$. Expliquer succinctement pourquoi le tube d'air ionisé se contracte sur lui-même, se comprimant fortement et générant une grande quantité de chaleur.

Correction Foudre

- L'intensité s'écrit (où D est le disque de rayon a) :

$$
\begin{aligned}
I &= \oiint_D d\vec{S} \cdot \vec{j} \\
&= 2\pi j_0 \int_0^a \frac{r^2}{a} dr \\
&= \frac{2}{3} j_0 a^2
\end{aligned}
$$

  On trouve donc $j_0 \simeq 50\text{kA.m}^{-2}$.

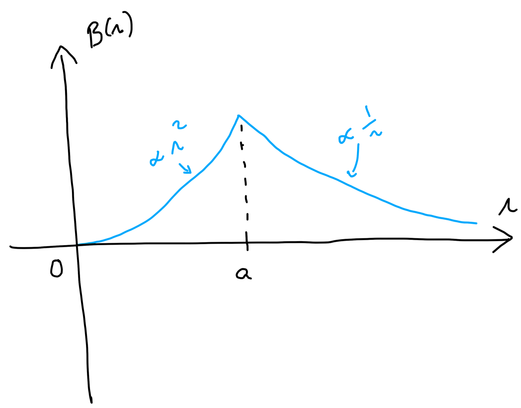
- On trouve que $\vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta$.

- Théorème d'Ampère pour $r < a$:

$$
\begin{aligned}
2\pi \times B(r) &= 2\pi\mu_0 j_0 \frac{r^3}{3a} \\
\Rightarrow B(r) &= \mu_0 j_0 \frac{r^2}{3a}
\end{aligned}
$$

  Théorème d'Ampère pour $r > a$:

$$
\begin{aligned}
2\pi \times B(r) &= 2\pi\mu_0 j_0 \frac{a^2}{3} \\
\Rightarrow B(r) &= \mu_0 j_0 \frac{a^2}{3r}
\end{aligned}
$$



- Force de Lorentz sur un électron :

$$\vec{f} = -e\vec{E} - e\vec{v} \wedge \vec{B}$$

  Ici, $\vec{E} = \vec{0}$ et si $j_0 > 0$ alors $\vec{v}$ est dirigé suivant $-\vec{e}_z$ et $\vec{B}$ est dirigé suivant $+\vec{e}_\theta$. On a donc $\vec{f}$ dirigé suivant $-(-\vec{e}_z) \wedge \vec{e}_\theta = -\vec{e}_r$. Les électrons sont donc attirés vers l'intérieur de l'éclair, se compriement et s'échauffent (faisant de la lumière et du bruit).