

Oscillateurs quasi-sinusoidaux, AO en régime linéaire et saturé - corrigé

Correction Exercice 1

•

$$i(t) + [(1 - G)R_2C_1 + R_1C_1 + R_2C_2] \frac{di(t)}{dt} + R_1C_1R_2C_2 \frac{d^2i(t)}{dt^2} = 0 \quad (1)$$

- $G = \frac{R_1C_1 + R_2C_2 + R_2C_1}{R_2C_1}$ et $f_0 = \frac{1}{2\pi(R_1C_1R_2C_2)}$
- On remplace $R_2 \leftarrow \frac{R_2R_e}{R_2 + R_e}$ et $R_1 \leftarrow R_1 + R_s$

Correction exercice 2

Amplificateur idéal

- La boucle de rétroaction est sur la borne +, l'AO est en régime saturé et donc $u_s = \pm V_s$.
- Condition de basculement de $+/-V_s \rightarrow -/+V_s$: $u_- \rightarrow -/+ \frac{R_1}{R_2 + R_1}$. On peut commencer par $u_-(t=0) = \frac{R_1}{R_2 + R_1} V_s$ et $u_+(t=0) = -V_s$. Alors :

$$u_-(t) = V_s \left(1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \exp(-t/RC) - V_s \quad (2)$$

Puis, à $t = t_1 = RC \ln \left(\frac{2R_1 + R_2}{R_2} \right)$:

$$u_-(t) = -V_s \left(1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \exp(-(t - t_1)/RC) + V_s \quad (3)$$

Et ainsi de suite. La période est donc $T = 2RC \ln \left(\frac{2R_1 + R_2}{R_2} \right)$. $u_+(t)$ évolue en créneau de même période.

Amplificateur réel

On trouve :

$$\begin{cases} \tau_0 \frac{du_s}{dt} + u_s = \mu_0(u_+ - u_-) \\ u_+ = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \\ \tau_1 \frac{du_-}{dt} + u_- = u_s \end{cases}$$

On arrive alors sur deux équations différentielles couplées :

$$\begin{cases} \tau_0 \frac{du_s}{dt} = \mu_1 u_s - \mu_0 u_- \\ \tau_1 \frac{du_-}{dt} = u_s - u_- \end{cases}$$

avec $\mu_1 = \mu_0 \frac{R_1 + R_2}{R_1} - 1 \simeq \mu_0 \frac{R_1 + R_2}{R_1}$.

On trouve alors une ED sur u_s :

$$\frac{d^2 u_s}{dt^2} + \left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{\mu_1}{\tau_0} \right) \frac{du_s}{dt} + \frac{1}{\tau_1 \tau_0} (\mu_0 - \mu_1) u_s = 0 \quad (4)$$

Comme $\mu_0 < \mu_1$, les solutions sont exponentielles et divergentes. On se retrouve donc très rapidement dans le régime d'instabilité même si les conditions initiales sont nulles (la moindre perturbation étant amplifiée).

Correction exercice 3

•

$$H = \frac{jRC\omega}{1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2} = \frac{1/3}{1 + \frac{j}{3} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \quad (5)$$

donc $Q = 1/3$ et $\omega_0 = 1/RC$.

- Équation différentielle : $\omega_0 \frac{du_e}{dt} = u_s + 3\omega_0 \frac{du_s}{dt} + \omega_0^2 \frac{d^2 u_s}{dt^2}$. Comme $u_s = (1 + R_2/R_1)u_e$, on a :

$$0 = u_s + \left(2 - \frac{R_2}{R_1} \right) \omega_0 \frac{du_s}{dt} + \omega_0^2 \frac{d^2 u_s}{dt^2} \quad (6)$$

Oscillations si $R_2 = 2R_1$.

- Quasi-sinusoïdal car pour démarrer on a besoin de la condition $R_2 > 2R_1$ et alors solutions exponentielles divergentes, jusqu'à saturation. Le démarrage se fait à partir du bruit de fond qui est amplifié.

Correction exercice 4

- C'est un passe-bande d'ordre 2. Soit u_1 le potentiel entre la résistance R , la capacité C et l'inductance L_1 . Alors :

$$\frac{u_1}{u_e} = \frac{1}{1 + R \left(\frac{1}{jL\omega} + jC\omega \right)} \quad (7)$$

De même :

$$\frac{u_s}{u_1} = \frac{jL_2\omega}{jL_1\omega + jL_2\omega} \quad (8)$$

Alors :

$$\frac{u_s}{u_e} = \frac{A_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_c} - \frac{\omega_c}{\omega} \right)} \quad (9)$$

avec $\omega_c = \frac{1}{\sqrt{(L_1+L_2)C}}$, $A_0 = \frac{L_2}{L_1+L_2}$ et $Q = RC\omega_c = R\sqrt{\frac{C}{L_1+L_2}}$

- La fonction de transfert totale faite du filtre et de l'amplificateur d'écrit :

$$\frac{u'_s}{u_e} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \frac{A_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \frac{A_0}{1 + jR \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)} \quad (10)$$

Le circuit est quasi-sinusoïdal s'il existe une pulsation ω_0 tq $|F(j\omega_0)| = 1$ et $\arg[F(j\omega_0)] = 0$.

On peut passer aussi par l'équation différentielle. On trouve $\omega_0 = \omega_c$ et la condition :

$$\frac{R_1 + R_2}{R_1} \frac{L_2}{L_1 + L_2} = 1 \quad (11)$$

Question supplémentaire

On ne peut avoir des oscillations qu'avec un basse bande. Pour un filtre passe-haut et passe-bas, on ne peut avoir que des solutions divergentes ou qui tendent vers 0. On peut le trouver avec les fonctions canoniques.

Remplissage d'un réservoir d'hélium

Première version

- Pas de boucle de rétroaction : l'AO fonctionne forcément en régime saturé car la condition $u_+ = u_-$ n'est jamais remplie. L'AO marche donc en comparateur et comme il est parfait $I_+ = i_- = 0$. Les résistances R_1 et R_2 sont inutiles.
- Le potentiomètre fonctionne comme 2 résistances $(1-x)R_P$ et xR_P . Le potentiel (au niveau de la flèche) est pris entre ces 2 résistances. On a donc $u_+ = \frac{xR_P + R_3}{R_P + R_3}U$, avec $U = 5V$. La vanne s'ouvre lorsque $u_+ > u_-$ cad pour :

$$u_+ > u_- \Rightarrow \frac{xR_P + R_3}{R_P + R_3}U > \alpha h_{min} \quad (12)$$

De même, la vanne se ferme lorsque :

$$u_+ < u_- \Rightarrow \frac{xR_P + R_3}{R_P + R_3}U < \alpha h_{max} \quad (13)$$

On trouve que $h_{min} = h_{max} \in [0, 2; 1]$ pour x variant de 0 à 1. On a donc bien un système qui verse de l'hélium lorsque la hauteur descend en dessous de h_{min} et s'arrête lorsque la hauteur atteint h_{max} . Le défaut est que $h_{min} = h_{max}$: la vanne s'ouvre et se referme en permanence.

Seconde version

- L'AO fonctionne toujours en régime saturé car la boucle de rétroaction est sur la borne +. u_P est inchangé car les résistances R_1 sont très grandes devant les autres. On a donc $u_+ = \frac{1}{2}u_s + \frac{1}{2}u_P$. Si la vanne est initialement fermée, celle-ci s'ouvre lorsque le niveau atteint un niveau h_{min} qui correspond à :

$$u_+ = \frac{1}{2}V_{sat+} + \frac{1}{2}u_P = \alpha h_{min} \quad (14)$$

De même, si la vanne est initialement ouverte, celle-ci se ferme lorsque le niveau atteint un niveau h_{max} qui correspond à :

$$u_+ = \frac{1}{2}V_{sat-} + \frac{1}{2}u_P = \alpha h_{min} \quad (15)$$

On a alors : $h_{min} = 0,1m$ et $h_{max} = 1,1m$ si $x = 0$ et $h_{min} = 0,5m$ et $h_{max} = 1,5m$ si $x = 1$. Le système ne s'ouvre et ferme plus en permanence.

Électrolyse du sulfate de Cobalt

Quelques rappels

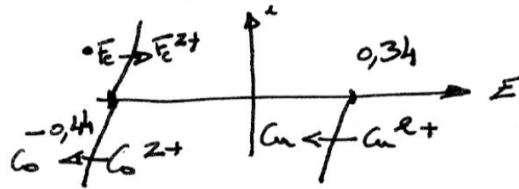
Une réaction d'oxydo-réduction : $\alpha Ox + ne^- \longrightarrow \beta Red$.

Potentiel de Nernst : $E_N = E_0 + \frac{0,06}{n} \log \frac{a_{ox}^\alpha}{a_{red}^\beta}$

Anode : $E_a > E_N$ siège de l'oxydation $\beta Red \longrightarrow \alpha Ox + ne^-$. Cathode : $E_c < E_N$ siège de la réduction $\alpha Ox + ne^- \longrightarrow \beta Red$

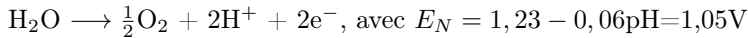
Correction

- Équation bilan de cémentation : $\text{Fe} + \text{Cu}^{2+} \longrightarrow \text{Cu} + \text{Fe}^{2+}$. Pour Co/Co^{2+} , $E_C \sim -0,29 - 0,15 = -0,44\text{V}$ donc la réaction $\text{Fe} + \text{Co}^{2+} \longrightarrow \text{Co} + \text{Fe}^{2+}$ est thermodynamiquement possible mais cinétiquement bloquée. Seul Cu^{2+} réagit avec Fe, le Cobalt reste en solution.

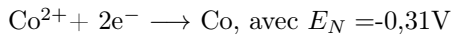


- Les espèces présentes sont : H_2O , Co^{2+} et SO_4^{2-} .

A l'anode on peut avoir :



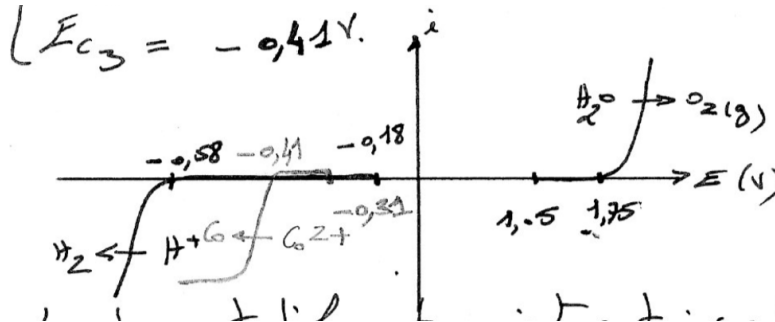
A la cathode, on peut avoir :



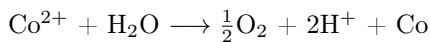
Sans surtension, on réalise l'électrolyse de l'eau avec $\Delta E_{\min} = 1,23\text{V}$.

- $E_{A1} = 1,05 + 0,7 = 1,75\text{V}$, $E_{C1} = -0,18 + 0,4 = -0,58\text{V}$ et $E_{C2} = -0,41\text{V}$

Avec les surtensions, les potentiels à la cathode sont inversés. On réalise l'électrolyse du cobalt.



- L'électrolyse est sous contrôle cinétique :



- On a : $\Delta E = E_{\text{ohmique}} + E_{N,\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}} + \eta_{\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}} - (E_{N,\text{Co}/\text{Co}^{2+}} + \eta_{\text{Co}})$

$$E_{N,\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}} = 1,23 - 0,06\text{pH} = 1,05\text{V}$$

Il faut calculer $E_{N,\text{Co}/\text{Co}^{2+}}$:

$$n(\text{SO}_4^{2-}, 7\text{H}_2\text{O}) = m(\text{SO}_4^{2-}, 7\text{H}_2\text{O})M(\text{SO}_4^{2-}, 7\text{H}_2\text{O}) = 0,18 \text{ mol.}$$

Comme c'est la quantité pour 1L, $[\text{Co}^{2+}] = 0,18 \text{ mol.L}^{-1}$. Alors $E_{N,\text{Co}/\text{Co}^{2+}} = -0,29 + 0,03 \log[\text{Co}^{2+}] = -0,31\text{V}$.

A courant nul, $\Delta E_{\min} = 1,75 - 0,41 = 2,16\text{V}$, avec la chute ohmique $\Delta E_{\min} = 3,26 \text{ V}$.

- La charge échangée en un jour est : $C = I\Delta t = 8,64 \cdot 10^8 \text{C}$, cad une quantité de $C/F = 8953$ moles d'électrons échangés. Comme pour deux électrons consommés, il n'ya qu'un Co qui est crée : $n_{Co} = 4477$ moles, cad 264kg de Co.
- $\eta = 0,97$. Il y a toujours une petite quantité d' H_2 qui est formée, au détriment du Co, à cause de la faible différence entre les potentiels.
- On consomme $E = UI\Delta t = 3,02 \text{GJ}$. Il faut donc 11,8MJ pour créer 1kg de Co.