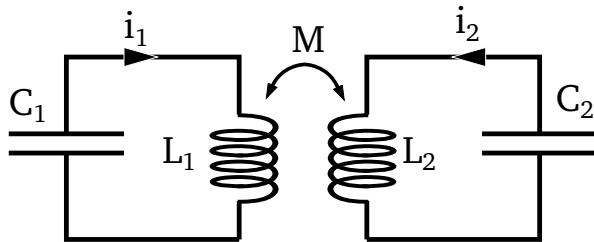


## Induction mutuelle entre deux circuits

3° On considère les deux circuits  $LC$  suivants, composés de capacités  $C_1$  et  $C_2$  et de bobines d'inductance propre  $L_1$  et  $L_2$  et d'inductance mutuelle  $M$ .



♣ Qu'est-ce que l'inductance propre ? Leur induction mutuelle ? Quelle condition a-t-on nécessairement entre  $L_1$ ,  $L_2$  et  $M$  ?

♣ Déterminer les équations différentielles satisfaites par  $i_1$  et  $i_2$ .

On supposera dans la suite que  $L_1 = L_2 = L$  et  $C_1 = C_2 = C$ .

♣ En proposant un changement de fonction bien choisi avec  $i_1$  et  $i_2$ , trouver la solution générale pour  $i_1$  et  $i_2$ . Pourquoi parle-t-on de modes propres ?

♣ Quelle est l'allure du spectre de  $i_1$  ? Dans le cas d'un faible couplage  $M$ , montrer que le spectre se scinde en deux harmoniques centrées autour de  $\omega_0$ , séparées en fréquence de  $\delta\omega$ , que l'on déterminera.

♣ On suppose qu'à  $t = 0$ , les deux condensateurs sont déchargés. Pour quelles valeurs de  $i_1(t = 0)$  et  $i_2(t = 0)$  n'y a-t-il qu'une fréquence dans le spectre de  $i_1$  et  $i_2$  ?

♣ Réaliser un bilan de puissance électrique et commenter.

On retourne au cas général : on suppose que  $L_1 \neq L_2$  et  $C_1 \neq C_2$ .

♣ Montrer que l'on peut écrire le système d'équation différentielle vérifiée par  $i_1$  et  $i_2$  sous la forme :

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{I}}{dt^2} + \mathbf{I} = 0$$

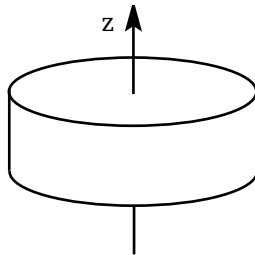
où  $\mathbf{M}$  est une matrice  $2 \times 2$  dont on précisera les coefficients et  $\mathbf{I}$  est le vecteur :

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

♣ Montrer que les vecteurs propres  $\hat{i}_1$  et  $\hat{i}_2$  de cette équation matricielle sont solutions d'une équation différentielle que l'on précisera ; expliciter des pulsations propres  $\omega_1$  et  $\omega_2$  et donner les expressions de  $\hat{i}_1$  et  $\hat{i}_2$

## Courants de Foucault dans un cylindre en rotation

Un cylindre conducteur plein et de conductivité  $\gamma$  est en rotation de vitesse angulaire constante  $\omega$  autour de son axe Oz. L'axe est en matière isolante.



### Champ axial

Un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$  est appliqué.

- ◇ En considérant la force de Lorentz qui s'exerce sur les électrons de conduction, analyser les effets de la rotation du cylindre pour justifier l'établissement d'un régime permanent. Existe-t-il des courants de Foucault lorsque ce régime est établi ?
- ◇ En régime permanent, montrer à l'aide de la force de Laplace que l'effet du champ magnétique est équivalent à un champ électrique  $\vec{E}_m$  dont on précisera l'expression. Quelle est alors la répartition des charges dans le cylindre ?

### Champ transverse

On applique désormais un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B_0 \vec{e}_x$  transverse à l'axe de rotation.

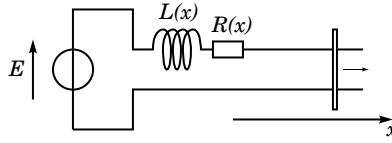
- Justifier l'existence de courants de Foucault dans ce cas en prévoyant leur allure (on pourra s'appuyer sur la force de Lorentz). Quel est leur effet mécanique ?

Si le cylindre est très long, la densité de courant est de la forme  $\vec{j} = j(r, \theta) \vec{e}_z$ . On suppose de plus que les phénomènes électromagnétiques proches des extrémités supérieures et inférieures (les disques) sont négligeables par rapport à ceux ayant lieu le long du cylindre.

- Quelle est la relation entre  $\vec{j}(r, \theta)$  et  $\vec{j}(r, \theta + \pi)$  ?
- A l'aide d'un contour soigneusement choisi, utiliser l'équation de Maxwell Faraday pour déterminer le champ électrique  $\vec{E}(r, t)$  à l'intérieur du cylindre.
- Exprimer alors l'expression de  $\vec{j}(r, \theta)$
- Quelle est la puissance dissipée dans le cylindre ?
- Déterminer le moment des efforts de Laplace par rapport à l'axe de rotation.

# Canon électromagnétique

On considère un circuit électrique équipé d'un générateur et de deux rails parallèles sur lesquels se trouve un barreau mobile, se déplaçant suivant  $x$ . L'inductance  $L(x)$  et la résistance  $R(x)$  dépendent alors de  $x$ . Le générateur impose un courant  $I(t)$  à travers le circuit.



## Cas statique

On suppose dans un premier temps que le mobile est fixé à  $x = x_0$  et ne peut pas se mouvoir.

- ♡ Exprimer le flux magnétique à travers le circuit et en déduire la force électromotrice d'auto-induction.
- ♡ Lors de l'établissement du courant de 0 à  $I(t)$ , le générateur doit fournir une énergie magnétique  $E_m$  en plus de l'énergie dissipée par effet Joule. Quelle est l'expression de  $E_m$  ?

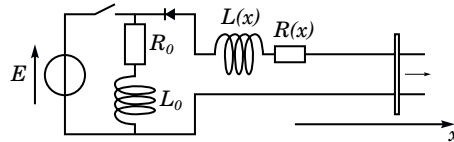
## Cas mobile

Le barreau est supposée désormais libre de ses mouvement selon l'axe  $x$ .

- △ Lorsqu'un courant électrique parcourt le circuit, le barreau se met en mouvement. Expliquer. Exprimer, à l'instant  $t$ , la puissance fournie par le générateur en sus de celle dissipée par effet Joule.
- △ Une partie de cette puissance correspond à la variation de  $E_m$ , une autre correspond à la puissance mécanique  $P_{meca}$  donnée au barreau. Donner l'expression de  $P_{meca}$ . Quelle force s'exerce sur le barreau ?

## Étude du mouvement

On suppose que le générateur est constitué d'une dynamo couplée à une bobine d'inductance  $L_0$  et de résistance  $R_0$ . Tant que l'interrupteur  $C$  est fermé, la dynamo impose un fort courant  $I_0$  dans la bobine. A  $t = 0$ , où l'on ouvre  $C$ , le courant s'écoule alors dans les rails et accélère le barreau.



On suppose par ailleurs que  $L(x) = L'x$  et  $R(x) = R'x$ , où  $L'$  et  $R'$  sont respectivement l'inductance et la résistance linéique du barreau.

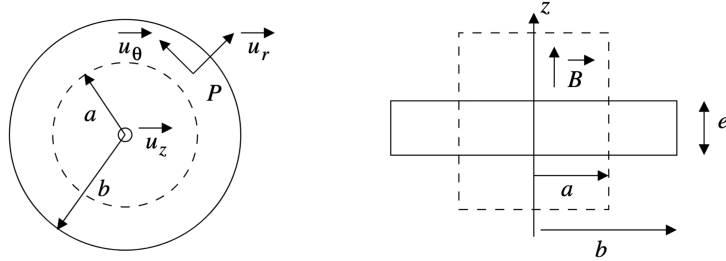
- ◇ Écrire la force électromotrice du circuit déformable, puis l'équation électrique du circuit.
- ◇ Ecrire l'équation du mouvement du barreau. On notera sa masse  $M$ .
- ◇ Quelles sont les conditions initiales ? Existe-t-il des solutions stationnaires ?
- ◇ On suppose que  $L_0$  est très "grande". Justifier que  $I(t) \simeq I_0$  et en déduire  $\dot{x}(t)$  et  $x(t)$ .

Question supplémentaire : déterminer l'inductance et la résistance linéique dans le cas de deux rails cylindriques de rayon  $a$ , distants de  $b$  et de conductivité  $\gamma$ .

## Chauffage par induction

Un disque métallique de conductivité  $\sigma$ , d'axe  $Oz$  vertical, de rayon  $b$  et d'épaisseur  $e$  est plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$ . Ce champ magnétique a les caractéristiques suivantes :

- Il est localisé dans un cylindre d'axe vertical  $Oz$  et de rayon  $a$  ;
- il est uniforme dans le cylindre précédent et nul à l'extérieur de ce cylindre ;
- il est dirigé suivant  $\vec{e}_z$  ;
- il varie au cours du temps selon  $\vec{B} = B_m \cos(\omega t) \vec{e}_z$ .



On admettra par la suite que le champ magnétique induit est négligeable devant le champ magnétique extérieur appliqué.

- ♣ Justifiez l'existence de courants de Foucault dans le cylindre métallique de la forme  $\vec{j} = j(r, t) \vec{e}_\theta$ .
- ♣ A l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday, exprimer  $j(r, t)$  en fonction des données du problème.
- ♣ Quelle est l'expression de la puissance dissipée par effet Joule  $P_{Joule}$  ? Donner sa valeur moyenne  $\langle P_{Joule} \rangle$ .
- ♣ Ce dispositif est utilisé dans des plaques électrique de cuisine pour chauffer une casserole. Comment créer en pratique le champ magnétique souhaité ?
- ♣ Le champ magnétique utilisé a une pulsation de  $\omega = 2 \times 10^5 \text{ rad.s}^{-1}$  et son intensité de l'ordre de  $10^{-4} \text{ T}$ . On considère une plaque à induction de rayon  $b = 10 \text{ cm}$  et une casserole dont le fond a le même rayon  $a = b = 10 \text{ cm}$  et une conductivité  $\sigma = 6,0 \times 10^7 \text{ S.m}^{-1}$ . Déterminer l'ordre de grandeur de la puissance dissipée dans le fond de la casserole.

### Questions supplémentaires

- ◇ Dans l'énoncé, on suppose que le champ induit dans la plaque est négligeable. Comment cela se traduit-il sur le coefficient d'auto-induction de la plaque  $L_p$  et le coefficient d'induction mutuelle  $M$  ?
- ◇ A partir d'un raisonnement énergétique, expliquer pourquoi le dispositif est équipé d'un système de sécurité coupant le champ  $\vec{B}$  dès qu'on éloigne la casserole de la plaque.