Réflexion d'une onde électromagnétique sur des plans métalliques en incidence oblique

On considère une onde plane progressive se propageant dans le vide, selon le vecteur d'onde $\vec{k} = k\cos\theta\vec{u_x} + k\sin\theta\vec{u_y}$ et à la pulsation ω. Elle arrive sur un plan métallique infiniment conducteur situé sur le demi-espace $x > 0$. On notera $\vec{E_i}$ et $\vec{B_i}$ respectivement le champ électrique et le champ magnétique incidents. Le champ électrique est polarisé rectilignement selon Oz et son amplitude est E_0.

- ♡ Retrouver l'équation de propagation des champs électrique et magnétique. Quelle est la relation de dispersion associée ?
- ♡ Expliciter les expressions des champs $\vec{E_i}$ et $\vec{B_i}$.

En arrivant sur l'interface, les relations de passage du champ électromagnétique imposent l'apparition d'une onde réfléchie, dont on notera $\vec{E_r}$ et $\vec{B_r}$ les champ électrique et magnétique. On supposera que $\vec{E_r}$ s'écrit sous la forme :

$$\vec{E_r} = \vec{E_0'} \exp(i\vec{k_r} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

- ♡ Que valent les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ à l'intérieur de la plaque ? Justifier.
- ♡ En utilisant les relations de passage, écrire $\vec{E_r}$ en fonction de E_0, k, ω et θ. En déduire l'expression du champ magnétique réfléchi, $\vec{B_r}$.
- ♡ Quelle est alors l'expression du champ électrique $\vec{E}$ résultant pour $x < 0$? De quel type d'onde s'agit-il ?
- ♡ On place une seconde plaque métallique en $x = -L$. Montrer que la présence de la seconde plaque impose une discrétisation du spectre, c'est-à-dire que seules des fréquences ω discrètes peuvent se propager pour un angle θ donné. Tracer les valeurs prises par ω en fonction de θ.
- ♡ Quelle est la valeur minimale que peut prendre ω ? Justifier.
- ♡ Démontrer que $k_y = \vec{k} \cdot \vec{u_y}$ vérifie l'équation dite de dispersion des modes d'une onde transverse électrique :

$$k_y^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \tag{1}$$

- ♡ Quel est le courant surfacique à la surface de la plaque ?
- ♡ Calculer l'expression du champ magnétique résultant $\vec{B}$ entre les deux plaques et en déduire l'expression du vecteur de Poyting. Commenter.

Propagation d'une onde radio dans un plasma en présence d'un champ magnétique longitudinal

- ♠ On écrit le PFD pour un électron du plasma :

$$m\vec{a} = -e\vec{v} \wedge \vec{B_{ext}} - e\vec{E}$$

NB : dans la force de Lorentz, le champ magnétique de l'OPPM est négligeable par rapport au champ électrique et au champ magnétique extérieur. Pour une puissance solaire de 1kW/m^2, on a un champ électrique de $5 \cdot 10^2\text{V/m}$, et donc un champ magnétique associé de $1\mu\text{T}$ environ. En comparaison, le champ magnétostatique terrestre est de $50\mu\text{T}$.

On trouve alors comme équation :

$$mj\omega \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \end{vmatrix} = -e \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \end{vmatrix} - e \begin{vmatrix} v_y B_e \\ -v_x B_e \end{vmatrix}$$

On a de plus : $\vec{j} = -en_0\vec{v}$. Pour trouver la relation, il faut inverser la matrice formée par (v_x, v_y) pour exprimer les coordonnées de la vitesse en fonction de (E_x, E_y). On trouve :

$$\begin{cases} j_x = \frac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega_c^2-\omega^2}(j\omega E_x - \omega_c E_y) \\ \\ j_y = \frac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega_c^2-\omega^2}(\omega_c E_x + j\omega E_y) \end{cases}$$

Cela correspond à une matrice de conductivité :

$$[\gamma] = \frac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega_c^2 - \omega^2}\begin{pmatrix} j\omega & -\omega_c \\ \omega_c & j\omega \end{pmatrix}$$

- ♠ On appelle cette onde polarisation circulaire car si l'on regarde l'orientation du vecteur électrique au cours du temps, elle décrit un cercle.

- ♠ Les équations de Maxwell permettent d'obtenir rapidement la relation générale suivante :

$$\Delta\vec{E} = \mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

En introduisant les expressions classique d'OPPM dedans, on trouve :

$$\left(\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \cdot \mathbb{1} + j\mu_0\omega\,[\gamma]\right)\vec{E} = \vec{0}$$

Si l'on veut obtenir des solutions non-triviales, cad valable pour $\vec{E} \neq \vec{0}$, il faut que :

$$\det\left(\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \cdot \mathbb{1} + j\mu_0\omega\,[\gamma]\right) = 0$$

cad :

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\omega_p^2}{c^2}\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_c^2} = \pm\frac{\omega_p^2}{c^2}\frac{\omega\omega_c}{\omega^2 - \omega_c^2}$$

Les deux possibilités correspondent à :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)}\right) \quad , \quad E_y = -jE_x$$

Cad une onde circulaire gauche et :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega+\omega_c)}\right) \quad , \quad E_y = +jE_x$$

cad une onde polarisée circulaire droite.

On appelle permittivité relative d'un milieu la quantité complexe ε_r que l'on peut définir ici à travers la relation $k^2 = \varepsilon_r\varepsilon_0\mu_0\omega^2 = \varepsilon_r\omega^2/c^2$.

♠ On trouve $\varepsilon_{rg} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega-\omega_c)}$ et $\varepsilon_{rd} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega+\omega_c)}$. Lorsque ε_r est négatif, k est imaginaire pur et l'onde est évanescente, elle ne se propage pas.

Les graphes montrent que la propagation de l'onde circulaire droite est possible pour $\omega > \omega_1$, où ω_1 est la pulsation pour laquelle ε_{rd} devient positif :

$$\omega_1 = \frac{-\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2}}{2}$$

Celle de l'onde circulaire gauche est possible pour $\omega < \omega_c$ ou $\omega > \omega_2$, avec :

$$\omega_2 = \frac{\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2}}{2}$$

♠ Une onde rectiligne peut être considérée comme une superposition de deux ondes circulaires de même amplitude, tournant dans le même sens. Par exemple, pour une onde dirigée suivant $\vec{e_x}$:

$$\vec{E}(z,t) = E_0\cos(\omega t - kz)\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right. = \Re\left(\frac{E_0}{2}\left|\begin{matrix}1\\-i\end{matrix}\right.\exp(j\omega t - kz) + \frac{E_0}{2}\left|\begin{matrix}1\\i\end{matrix}\right.\exp(j\omega t - kz)\right)$$

♠ Si on considère que l'onde rentre dans le plasma en $z = 0$, on a alors à la sortie :

$$\vec{E}(L,t) = \Re\left(\frac{E_0}{2}\left|\begin{matrix}1\\-i\end{matrix}\right.\exp(j\omega t - k_gL) + \frac{E_0}{2}\left|\begin{matrix}1\\i\end{matrix}\right.\exp(j\omega t - k_dL)\right)$$

où k_g et k_d sont les vecteurs d'ondes associées aux ondes polarisées circulaire droite et gauche. On trouve que l'onde de sortie est bien rectiligne :

$$\vec{E}(L,t) = E_0\left|\begin{matrix}\cos\left(\frac{k_g-k_d}{2}L\right)\\\sin\left(\frac{k_g-k_d}{2}L\right)\end{matrix}\right. \times \cos\left(\omega t - \frac{k_g+k_d}{2}L\right)$$

La polarisation est donc bien rectiligne avec un angle de décalage $\Psi = \frac{k_g-k_d}{2}L$ Pour $\lambda_0 = 30\text{cm}$, $\omega = 2\pi 10^9\text{rad/s}$, ce qui est largement supérieur à $\omega_p = 5,6\cdot 10^7\text{rad/s}$. On peut écrire :

$$k_g - k_d = \frac{\omega}{c}\left(-\frac{\omega_p^2}{2\omega(\omega-\omega_c)} + \frac{\omega_p^2}{2\omega(\omega+\omega_c}\right) \simeq \frac{\omega_p^2\omega_c}{\omega^2} \simeq -1,16\cdot 10^{-3}\text{rad}$$

C'est une valeur négligeable.

Ondes électromagnétiques dans un métal conducteur

On s'intéresse à la propagation des ondes électromagnétiques dans un conducteur métallique, en fonction de leur fréquence et des caractéristiques du métal. Plus particulièrement, on souhaite savoir pourquoi un métal peut être transparent à très basse fréquence, réfléchissant sur sur une certaine bande de fréquences, puis de nouveau transparent à très haute fréquence.

On considère donc que le demi-espace $z > 0$ est rempli d'un métal, sur lequel arrive une onde plane progressive monochromatique à la fréquence ω et polarisée suivant $\vec{e_x}$.

◇ Retrouver l'équation de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide. A l'aide des données de l'énoncé, donner l'expression du champ $\vec{E}$ et du champ $\vec{B}$.

Pour décrire le métal, on adopte un modèle d'électrons libres, de masse m, de charge $-e$ et de densité particulaire N_0, soumis au champ électromagnétique, et subissant des collisions en moyenne au bout d'un temps $\tau = 1/\omega_c$. On modélise alors le comportement des électrons par l'équation de mouvement (aussi appelé modèle de Drude) :

$$m\vec{a} = -e\vec{E} - m\frac{\vec{v}}{\tau} \tag{2}$$

Pour un métal très conducteur, on a $N_0 \simeq 10^{29}\text{m}^{-3}$ et $\tau \simeq 10^{14}$.

◇ En utilisant l'équation 2, définir une conductivité γ complexe qui dépend de la pulsation ω. Commenter.

◇ En utilisant les équations de Maxwell, trouver une équation vérifiée par le champ $\vec{B}$. En déduire une relation de dispersion des OPPM dans le métal. On fera apparaître la pulsation plasma $\omega_p = \sqrt{N_0 e^2/m\varepsilon_0}$.

◇ Comparer $\omega_c = 1/\tau$ et ω_p. Justifier de l'existence de 3 régimes de propagation dans le métal que nous allons étudier par la suite.

On se place dans le cas où $\omega \ll \omega_c$.

◇ Que devient la relation de dispersion dans ce cas-là ? Trouver les solutions possibles pour k.

◇ Écrire l'expression du champ $\vec{E}$ dans le métal, puis celle du champ $\vec{B}$. Comment appelle t-on ce régime et le phénomène associé ?

On se place dans le cas où $\omega \gg \omega_c$.

◇ Que devient la relation de dispersion dans ce cas-là ? Trouver les solutions possibles pour k.

◇ Écrire l'expression du champ $\vec{E}$ dans le métal, puis celle du champ $\vec{B}$. On distinguera les cas $\omega < \omega_p$ et $\omega > \omega_p$. Décrire alors le comportement de l'onde dans ces 2 situations.

Bilan

◇ Finalement, résumer les 3 situations rencontrées et justifier les observations décrites dans l'énoncé.

◇ Quelle est la différence fondamentale entre un plasma vu en cours et un métal comme décrit ici ?