

# Exercices de colle - seconde année de CPGE - MP/PC/PSI

Matthieu Santin

13 septembre 2023

Les exercices proposés dans ce document sont issus d'exercices de concours, d'exercices classiques de CPGE ou de mon imagination.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Electronique</b>	<b>1</b>
1.1	Puissance consommée par un AO ●○○○	2
1.2	Montage passe-bas ●●○○	4
1.3	Filtre passif ●●●●	7
1.4	Filtre avec ALI ●●○	10
1.5	Etude de deux bobines d'électroaimant	12
<b>2</b>	<b>Thermodynamique (sup)</b>	<b>15</b>
2.1	Chute d'une masse sur un piston ●●○○	16
2.2	Entropie d'une chute libre ●●○○	19
2.3	Machine de Stirling ●●○○	21
2.4	Cycle de Beau de Rochas ●●○○	23
2.5	Compression brutale ●●○○	26
2.6	Compresseur à deux étages ●●○○	28
2.7	Puissance d'une arme à feu ●●●●	31
<b>3</b>	<b>Thermodynamique (spé)</b>	<b>33</b>
3.1	Premier principe sur un fluide en écoulement stationnaire ●○○○	34
3.2	Second principe sur un fluide en écoulement stationnaire ●○○○	35
3.3	Pompe de relevage ●○○○	36
3.4	Ecoulement d'un torrent	38
3.5	Compresseur	40
3.6	Tuyère	41
3.7	Formation du brouillard ●○○○	43
3.8	Etude d'un turboréacteur ●●○○	44
3.9	Etude d'un turboréacteur ●●●●	45
<b>4</b>	<b>Diffusion</b>	<b>47</b>
4.1	Petits et gros mammifères ●●○○	48
4.2	Ailettes de refroidissement ●●○○	50
4.3	Lac gelé ●●●●	52
4.4	Transfert thermique et entropie ●●○○	55
4.5	Transfert thermique et entropie ●●○○	56
4.6	Combustion d'une poutre de bois ●●○○	59
4.7	Température dans une planète naine ●●○○	60
4.8	Une tente au soleil ●●●●	62
4.9	Diffusion de particules dans un récipient en rotation ●●○○	63
4.10	Diffusion à contre-courant ●●○○	66
4.11	Evaporation de l'éther ●●○○	68

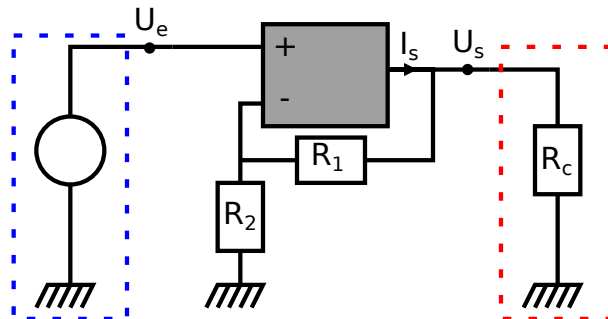
<b>5</b>	<b>Mécanique</b>	<b>71</b>
5.1	Le Petit Prince : satellisation d'une pomme ●●○○ . . . . .	72
5.2	Projectile lancé à la verticale ●○○○ . . . . .	74
5.3	Paramètre d'impact ●●○○ . . . . .	76
5.4	Piège de Penning ●●●○ . . . . .	78
5.5	Tir à grande distance ●●○○ . . . . .	80
5.6	Tir à grande distance ●●●● . . . . .	81
5.7	Frottement d'une corde et d'une poutre en bois ●●○○ . . . . .	84
5.8	Frottement d'une corde et d'une poutre en bois ●●●○ . . . . .	85
<b>6</b>	<b>Ondes mécaniques</b>	<b>87</b>
6.1	Longueur d'un son . . . . .	88
<b>7</b>	<b>Optique</b>	<b>91</b>
7.1	Fentes d'Young en montage Fraunhofer ●○○ . . . . .	92
7.2	Anneaux de Newton . . . . .	93
7.3	Miroir de Fresnel . . . . .	95
7.4	Fentes d'Young élargies . . . . .	97
7.5	Réflexion sur un CD . . . . .	98
7.6	Détermination de l'épaisseur d'une bulle de silicone . . . . .	99

Chapitre 1

Electronique

## 1.1 Puissance consommée par un AO ●○○○

On souhaite alimenter un dispositif électrique (en rouge) modélisé par une résistance de charge  $R_c$  avec une tension nominale  $V_{nom}$ . On dispose pour cela d'une source de tension (en bleue) mais dont la tension de sortie maximale  $V_{max}$  est  $V_{max} = V_{nom}/2$ , insuffisante pour l'usage voulu. On introduit un montage intermédiaire pour compenser l'insuffisance de la source.



1. Calculer  $U_s$  en fonction de  $U_e$  et déterminer le rôle de ce montage. Comment doit-on choisir  $R_1$  et  $R_2$  pour que  $U_s = V_{nom} = 2V_{max}$  ?
2. On suppose dans un premier temps que  $R_c = \infty$ , cad que la résistance de charge n'est pas connectée au circuit. Quelle est la puissance électrique émise par l'AO ?
3. On suppose maintenant que le circuit est connecté à la charge, cad que  $R_c$  est finie. Quelle est désormais la puissance dégagée par l'AO ?
4. Comment choisir  $R_1$  et  $R_2$  de sorte à minimiser la puissance sortie par l'AO ?

**Corrigé :**

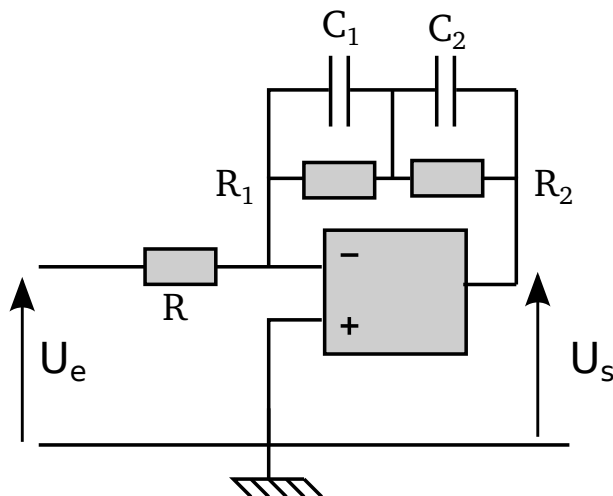
1. Amplificateur non-inverseur  $u_s = \frac{R_1+R_2}{R_2}u_e$ . Pour que  $U_s = V_{nom} = 2V_{max}$  il faut que le montage double la tension, cad  $R_1 = R_2$ .
2. Si  $R_c = \infty$ , alors le courant dans la charge  $i_c$  est nul. Alors  $P = u_s i_s = \frac{R_1+R_2}{R_2^2}u_e^2$ . L'AO consomme de l'énergie même s'il n'y a aucune puissance délivrée à la charge!
3. Soit  $i_1$  le courant traversant  $R_1$  et  $R_2$ . Alors la loi des nœuds donne :  $i_s - i_1 - i_c = 0$  (signe pris tq les puissances soient positives). On a alors :

$$P = u_s i_s = \frac{R_1 + R_2}{R_2^2}u_e^2 + \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_2^2 R_c}u_e^2 \quad (1.1)$$

4. On prend  $R_2 \gg R_c$ , le premier terme de dissipation de l'AO devient négligeable devant la puissance envoyée à la charge.

## 1.2 Montage passe-bas ●●○○

On considère le montage suivant. L'ALI est supposé idéal.



1. Montrer que la fonction de transfert de ce filtre s'écrit sous la forme :

$$H = H_0 \frac{1 + j\omega/\omega_0}{(1 + j\omega/\omega_1)(1 + j\omega/\omega_2)} \quad (1.2)$$

On donnera l'expression de  $\omega_0$ ,  $\omega_1$  et  $\omega_2$ .

2. Tracer le diagramme de Bode correspondant en fonction des différentes pulsations en jeu. Expliciter les cas possibles.
3. On considère désormais que  $R = R_1 = R_2$  et  $C_1 = C_2 = C$ . Simplifier la fonction de transfert, en introduisant  $\omega_0 = 1/RC$ . A quel type de filtre à t-on affaire ?
4. On envoie en entrée le signal suivant :

$$U_e(t) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2p+1} \sin(2(p+1)\omega t) \quad (1.3)$$

On suppose que  $\omega \gg \omega_0$ . Quel est le signal de sortie  $U_s$  ? Donner son allure et commenter.



**Corrigé :**

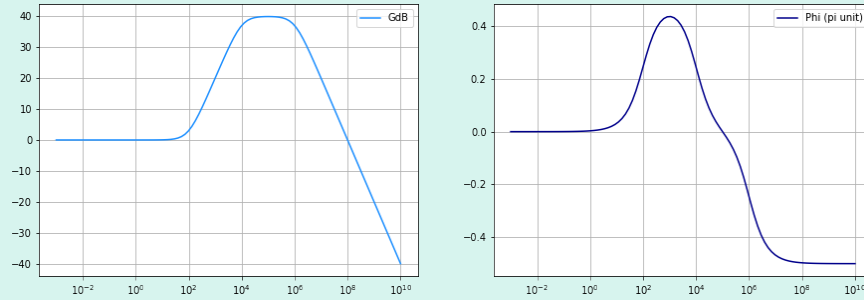
1. Fonction de transfert :

$$H = \frac{u_s}{u_e} = \frac{R_1 + R_2}{R} \frac{1 + j \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} (C_1 + C_2) \omega}{(1 + j R_1 C_1 \omega)(1 + j R_2 C_2 \omega)} = H_0 \frac{1 + j \omega / \omega_0}{(1 + j \omega / \omega_1)(1 + j \omega / \omega_2)} \quad (1.4)$$

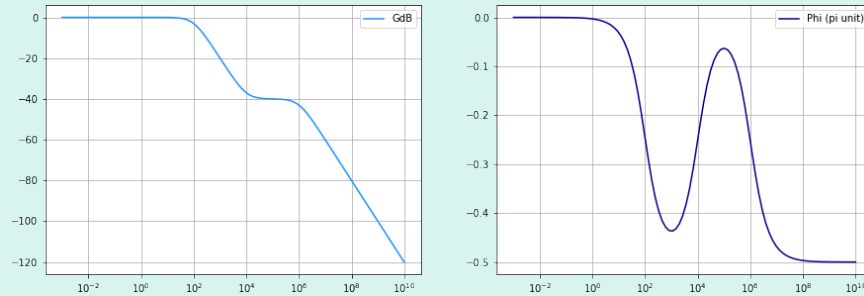
donc  $H_0 = \frac{R_1 + R_2}{R}$ ,  $\omega_0 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)}$ ,  $\omega_1 = 1/R_1 C_1$  et  $\omega_2 = 1/R_2 C_2$

2. Diagramme de Bode : on décompose en somme des diagrammes de Bode des différents produits.

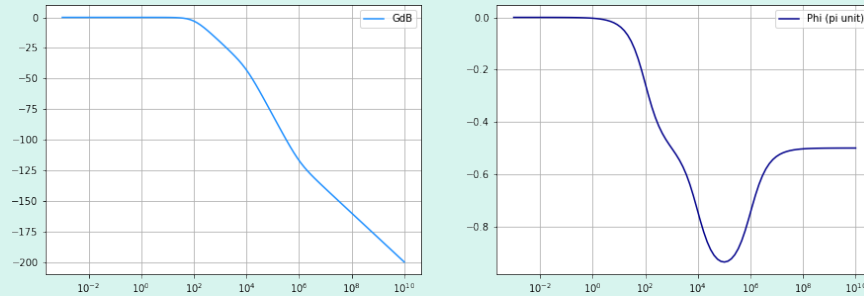
**Cas  $\omega_0 < \omega_1 < \omega_2$  :**



**Cas  $\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$  :**



**Cas  $\omega_1 < \omega_2 < \omega_0$  :**



3. Comme  $\omega_0 = \omega_1 = \omega_2$  et  $H_0 = 2$ , la fonction de transfert se simplifie en :

$$H = \frac{2}{(1 + j \omega / \omega_0)} \quad (1.5)$$

C'est un filtre passe-bas d'ordre 1.

4. Le signal d'entrée est un signal crête (pair, avec les cosinus) : on reconnaît la décroissance typique en  $1/n$  avec les  $n$  impairs seulement. Les coefficients de Fourier sont :

$$\begin{cases} C_n &= \frac{4U_0}{\pi} \frac{1}{2(p+1)} \\ \varphi_n &= -\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (1.6)$$

On rappelle l'écriture de la décomposition de Fourier :

$$U_e(t) = \sum_{p=0}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \quad (1.7)$$

La fonction de transfert, dans le cas où  $\omega \gg \omega_0$ , peut se simplifier en  $H \simeq \frac{2\omega_0}{j\omega}$ . Les coefficients de Fourier du signal de sortie sont alors :

$$\begin{cases} C'_n &= \frac{4U_0}{\pi} \frac{1}{2(p+1)} \times |H(2(p+1)\omega)| \\ \varphi'_n &= -\frac{\pi}{2} + \mathbf{arg} \left( \frac{2\omega_0}{j\omega} \right) \end{cases} \quad (1.8)$$

On obtient donc :

$$\begin{cases} C'_n &= \frac{4U_0}{\pi} \frac{2}{(2(p+1))^2} \frac{\omega_0}{\omega} \\ \varphi'_n &= -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (1.9)$$

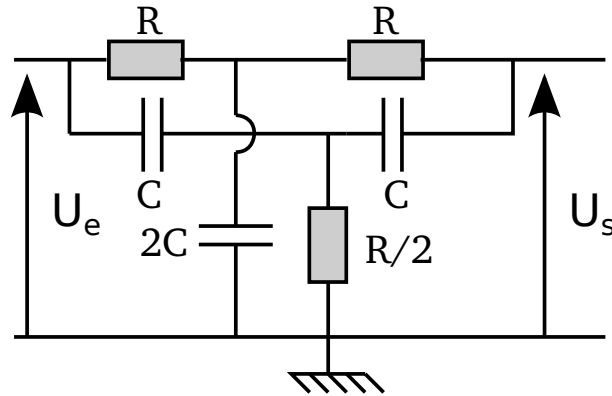
Le signal de sortie est donc :

$$U_s(t) = \frac{2U_0}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \cos(2(p+1)\omega t - \pi) \quad (1.10)$$

On reconnaît la décroissance en  $1/n^2$  typique d'un signal triangulaire. C'est normal : le filtre se comporte ici comme un intégrateur.

### 1.3 Filtre passif • • • •

On considère le filtre suivant :



- ♠ Quel est le comportement de ce filtre à basse et haute fréquence ?
- ♠ Montrer que la fonction de transfert peut s'écrire sous la forme :

$$H(x) = \frac{1 + (jx)^2}{1 + 4jx + (jx)^2} \quad (1.11)$$

où  $x = \omega/\omega_0$  avec  $\omega_0$  une pulsation que l'on déterminera. Tracer le diagramme de Bode correspondant.

- ♠ Déterminer la bande "coupante"  $\Delta\omega$ , cad la plage de pulsations  $\Delta\omega$  pour lesquelles  $G^{dB}(\omega) \leq G_{max}^{dB} - 3$ . On rappelle que  $20 \log(\sqrt{2}) \simeq 3$ .
- ♠ On envoie le signal  $U_e(t) = U_0 \cos^3(\omega t)$  en entrée, avec  $\omega = \omega_0/3$ . Déterminer le signal de sortie  $U_s(t)$ . Tracer schématiquement les signaux.

**Corrigé :**

Le courant de sortie est supposé nul.

1. Comportement : BF,  $u_e = u_s$  et HF,  $u_e = u_s$ , c'est un filtre coupe-bande (l'inverse d'un passe-bande, qui ne laisse rien passer à BF et HF). En BF, le circuit est "flottant", cad il n'est plus connecté à la masse. Comme l'intensité de sortie est considérée comme nulle, la chute de tension aux bornes des résistances est nulle.
2. Pour la fonction de transfert, on fait une loi des nœuds en A (entre les 2 résistances du haut), en B (entre les 2 caps du milieu) et à la sortie :

$$\begin{cases} \frac{u_e - u_A}{R} + \frac{u_s - u_A}{R} - 2jC\omega u_A = 0 \\ jC\omega(u_e - u_B) + jC\omega(u_s - u_B) - \frac{2}{R}u_B = 0 \\ \frac{u_A - u_s}{R} + jC\omega(u_B - u_s) = 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

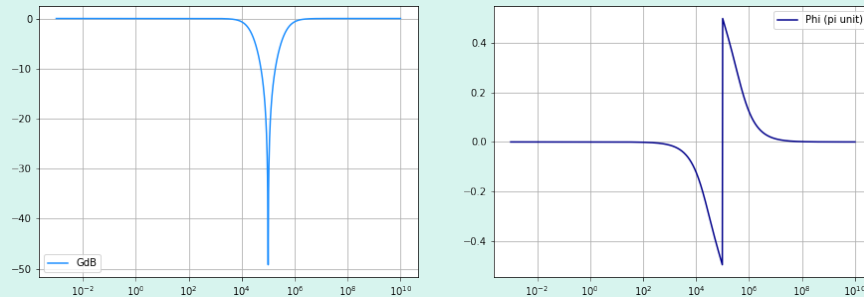
Avec les deux premières lignes, on trouve :

$$\begin{cases} u_A = \frac{u_e + u_s}{2(1 + jRC\omega)} \\ u_B = \frac{u_e + u_s}{2(1 + 1/jRC\omega)} \end{cases} \quad (1.13)$$

On trouve alors en réinjectant dans la dernière équation :

$$H = \frac{1 + (jRC\omega)^2}{1 + 4jRC\omega + (jRC\omega)^2} \quad (1.14)$$

Diagramme de Bode : Diagramme asymptotique :  $\forall \omega, H = 0$  et pour  $\omega = \omega_0 = 1/RC$ , dirac à "l'envers" avec  $H = -\infty$ . C'est bien un coupe-bande.



3. Pour la bande-coupante, on cherche les  $\omega$  de telle sorte que :

$$G_{DB} = -20 \log \left( \frac{|1 - x^2|}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + 16x^2}} \right) = -20 \log \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \simeq 3 \quad (1.15)$$

en posant  $x = RC\omega$ . On tombe alors sur l'équation  $(1 - x^2)^2 = 16x^2$ , et en enlevant le carré :

$$x^2 \pm 4x - 1 = 0 \quad (1.16)$$

Avec le signe  $\pm$ , il y a 4 solutions possibles (2 par équations, qui ont 2 solutions chacune).

Les seules solutions positives sont  $\omega_{\pm} = \frac{\pm 2 + \sqrt{5}}{RC}$ .

4. On peut montrer facilement que le signal d'entrée peut s'écrire sous la forme :

$$U_e(t) = \frac{1}{4} (3 \cos(\omega t) + \cos(3\omega t)) \quad (1.17)$$

On a donc deux harmoniques, à  $\omega$  et  $3\omega$ , soit :

$$\begin{cases} C_1 &= \frac{3}{4}, & \varphi_1 = 0 \\ C_3 &= \frac{1}{4}, & \varphi_3 = 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

Ces harmoniques deviennent après sortie du filtre :

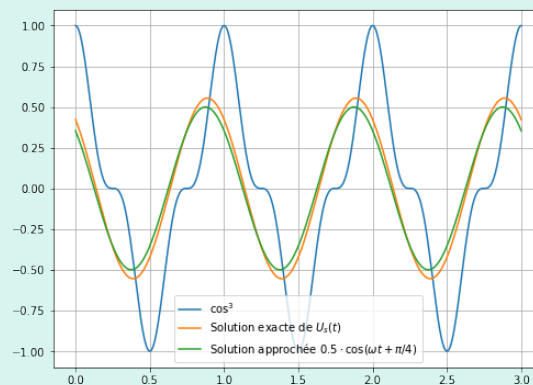
$$\begin{cases} C_1 &= \frac{3}{4} \times |H(\omega)|, & \varphi_1 = 0 + \mathbf{arg}(H(\omega)) \\ C_3 &= \frac{1}{4} \times |H(3\omega)|, & \varphi_3 = 0 + \mathbf{arg}(H(3\omega)) \end{cases} \quad (1.19)$$

Comme  $|H(3\omega)| = |H(\omega_0)| = 0$ , l'harmonique 3 n'a aucune contribution. Dès lors, pur la première harmonique  $x = \omega/\omega_0 = 1/3$  :

$$\begin{cases} C_1 &= \frac{3}{4} \times \left| \frac{1 - \frac{1}{9}}{1 + j\frac{4}{3} - \frac{1}{9}} \right| = \frac{4}{\sqrt{52}} \simeq \frac{1}{2} \\ \varphi_1 &= -\mathbf{arg}\left(1 + j\frac{4}{3} - \frac{1}{9}\right) = \arctan\left(\frac{27}{32}\right) \simeq \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (1.20)$$

En très grosse approximation, on peut donc dire que :

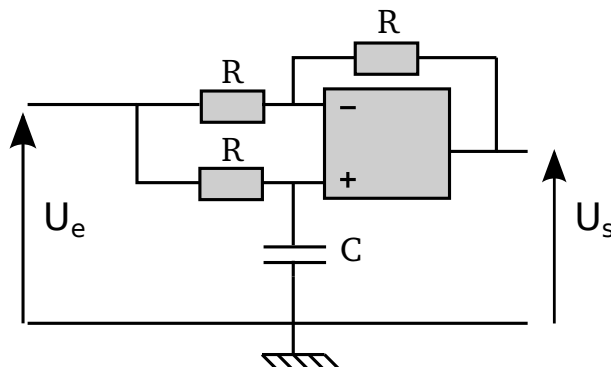
$$U_s(t) \simeq \frac{1}{2} \cos(\omega t + \pi/4) \quad (1.21)$$



## 1.4 Filtre avec ALI ●●○

Dans tout l'exercice, les ALI seront supposés idéaux.

1. Explicitez la fonction de transfert de ce filtre, puis calculez son gain et sa phase. On notera  $\omega_0$  sa pulsation caractéristique. Quel est son rôle ?



2. On exprime le signal d'entrée  $U_e$  par sa transformée de Fourier :

$$U_e(t) = \sum_n C_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \quad (1.22)$$

Déterminer l'expression du signal  $U_s$  de sortie sous la forme d'une transformée de Fourier, en fonction des coefficients  $C_n$  et des caractéristiques du circuit.

3. Pour quelles conditions sur le circuit et le signal d'entrée trouve-t-on que le circuit retarde un signal périodique sans le déformer, c'est-à-dire que  $U_s(t) = U_e(t - \tau)$  ? Exprimez alors ce retard  $\tau$  en fonction de  $R$  et  $C$ .
4. On envoie en entrée le signal suivant :

$$U_e(t) = U_0 \cos^3(\omega t) \quad (1.23)$$

Décrire l'effet du filtre sur ce signal pour  $\omega = \frac{\omega_0}{3}$  et  $\omega = 10^{-2}\omega_0$ , et donner l'allure du signal de sortie. On donne  $\arctan(1/3) \simeq \pi/10$ .

5. On suppose le condensateur déchargé à  $t = 0$ . On envoie un échelon de tension  $E$  en entrée. Quelle est la sortie ? Commenter.

**Corrigé :**

1.  $H = \frac{1-jRC\omega}{1+jRC\omega}$ . On remarque que  $|H| = 1$ , mais que  $\varphi = -2 \arctan(RC\omega) = -2 \arctan(\omega/\omega_0)$ , avec  $\omega_0 = 1/RC$ . On peut écrire alors  $H$  sous la forme :

$$H = e^{-2j \arctan(RC\omega)} \quad (1.24)$$

C'est un filtre déphaseur.

2. On part de la décomposition de Fourier d'un signal (quelconque) d'entrée :

$$U_e(t) = \sum_n C_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \quad (1.25)$$

Après le passage dans le filtre, le signal de sortie :

$$\begin{aligned} U_s(t) &= \sum_n C_n |H(n\omega)| \cos(n\omega t + \varphi_n + \arg(H(n\omega))) \\ &= \sum_n C_n \cos(n\omega t + \varphi_n - 2 \arctan(RCn\omega)) \end{aligned} \quad (1.26)$$

3. pour obtenir une forme retardée comme proposée dans l'énoncé, il faut factoriser par le  $n\omega$  compris dans le arctan. On le linéarise dans le cas où  $RCn\omega \ll 1$ , cad  $\omega \ll \omega_0$  avec  $1/\tau = 1/2RC$ .

Dans ce cas-là :

$$\begin{aligned} U_s(t) &= \sum_n C_n \cos(n\omega t + \varphi_n - 2RCn\omega) \\ &= \sum_n C_n \cos(n\omega(t - \tau) + \varphi_n) \\ &= U_e(t - \tau) \end{aligned} \quad (1.27)$$

Il faut donc que  $\omega \ll 1/RC$ , avec toutes les harmoniques qui valident cette condition (ex : signal triangulaire, avec une décroissance rapide de l'amplitude des harmoniques).

4. On décompose le signal en une série de cosinus :  $\cos^3(\omega t) = \frac{1}{4}(3 \cos(\omega t) + \cos(3\omega t))$ . Le signal de sortie sera donc :

$$U_s(t) = \frac{1}{4} [3 \cos(\omega t - 2 \arctan(\omega/\omega_0)) + \cos(3\omega t - 2 \arctan(3\omega/\omega_0))] \quad (1.28)$$

Pour  $\omega = \frac{\omega_0}{3}$ , on a :

$$\begin{aligned} U_s(t) &= \frac{3}{4} \cos(\omega t - 2 \arctan(1/3)) + \frac{1}{4} \cos(3\omega t - 2 \arctan(1)) \\ &\simeq \frac{3}{4} \cos(\omega t - \pi/5) + \frac{1}{4} \cos(3\omega t - \pi/2) \end{aligned} \quad (1.29)$$

Pour  $\omega = 10^{-2}\omega_0$ , on a la condition  $\omega \ll \omega_0$ , avec un retard de phase  $\varphi = 2 \cdot 10^{-2}$ .

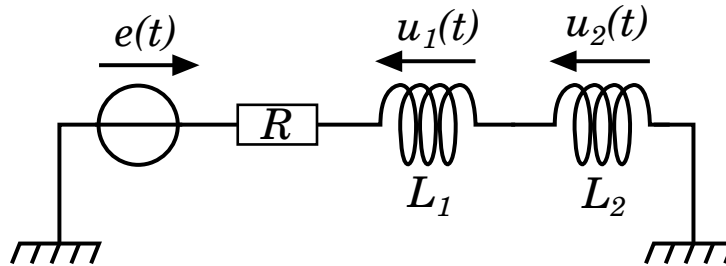
5. Pour  $t < 0$ , le condensateur est déchargé donc  $u_e(t) = u_s(t) = 0$ . Pour  $t \geq 0$ , le condensateur se charge donc  $u_-(t) = E(1 - e^{-t/RC})$ , et alors :

$$u_s(t) = 2E(1 - e^{-t/RC}) - E \quad (1.30)$$

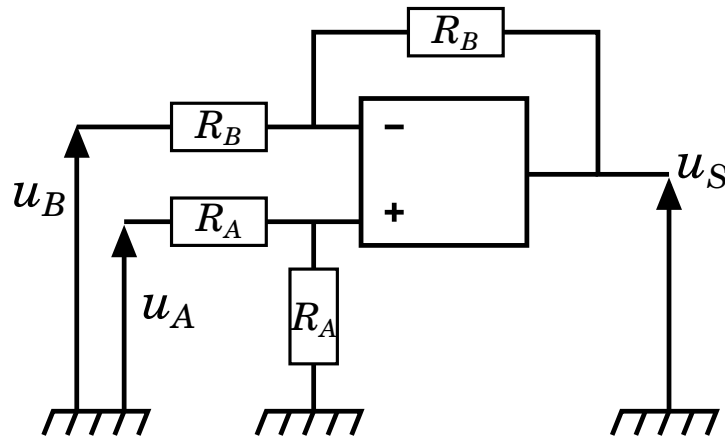
Le signal finit bien par "redevenir" celui d'entrée (car  $H = 1$ ) mais un retard. Attention, ici c'est une transformation de Fourier et non une série de Fourier qu'il faut opérer.

## 1.5 Etude de deux bobines d'électroaimant

On considère un électroaimant constitué de deux bobines  $L_1$  et  $L_2$ , couplées selon la relation  $L_1 = L_e + \delta L$  et  $L_2 = L_e - \delta L$ , avec  $\delta L \ll L_e$ . L'électroaimant, alimenté par une tension  $e(t) = E \cos(\omega t)$ , peut être modélisé comme une résistance  $R$  en série avec les deux bobines :



1. Pour connaître la position de l'électroaimant, on souhaite connaître  $\delta L$  en utilisant les tensions  $u_1$  et  $u_2$  aux bornes des bobines  $L_1$  et  $L_2$ .  
Déterminer les tensions  $u_1$  et  $u_2$  en fonction de  $e(t)$ ,  $R$ ,  $L_1$  et  $L_2$ .
2. Pour accéder à  $\delta L$ , on utilise le montage soustracteur suivant :



- (a) Déterminer la tension  $u_s$  de sortie en fonction de  $u_A$  et  $u_B$  et montrer qu'il s'agit d'un montage soustracteur.
- (b) Comment relier le montage soustracteur à l'électroaimant de sorte à avoir  $u_s = u_1 - u_2$  (c'est-à-dire  $u_A = u_1$  et  $u_B = u_2$ ) ? Préciser comment choisir les résistances  $R_A$  et  $R_B$ .
- (c) On suppose que le montage précédent est réalisé, c'est-à-dire que  $u_s = u_1 - u_2$ . Exprimer alors la fonction de transfert  $H$  de l'ensemble sous la forme :

$$H(\omega) = \frac{u_s}{e} = H_0 \frac{j\omega/\omega_0}{1 + j\omega/\omega_0}$$

où  $\omega_0$  et  $H_0$  sont des fonctions de  $L_e$ ,  $R$  et  $\delta\omega$ .

- (d) Tracer le diagramme de Bode de  $H(\omega)$ . De quel type de filtre s'agit-il ? Dans quel gamme de fréquence doit-on se placer pour avoir une sortie indépendante de la fréquence et proportionnel à  $\delta L$  ?



**Corrigé :**

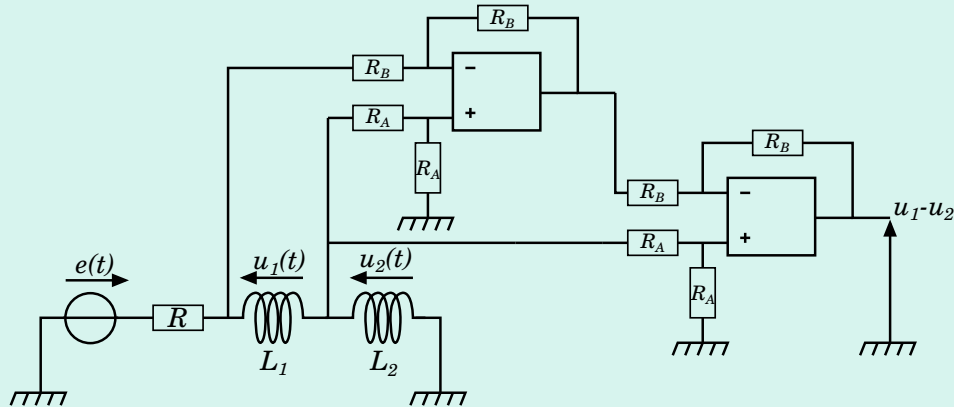
1. On commence par  $u_2$ , qui est le plus simple à calculer (pont-diviseur) :

$$u_2 = \frac{jL_2\omega}{j(L_1 + L_2)\omega + R} e$$

Pour  $u_1$ , il faut tenir compte qu'il s'agit de la tension aux bornes de la bobines (et non par rapport à la masse). Le pont diviseur donne donc :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{jL_1\omega}{jL_1\omega + R} (e - u_2) \\ &= \frac{jL_1\omega}{jL_1\omega + R} \times \frac{jL_1\omega + R}{j(L_1 + L_2)\omega + R} e \\ &= \frac{jL_1\omega}{j(L_1 + L_2)\omega + R} e \end{aligned}$$

2. (a) Une loi des noeuds à l'entrée + donne :  $u_A = 2u_+$ , à l'entrée - :  $u_s + u_B = 2u_-$ . On a donc  $u_s = u_1 - u_2$ .
- (b) Il faut prendre au garde que les tensions  $u_1$  et  $u_2$  sont prises aux bornes des bobines et non par rapport à la masse, contrairement aux tensions du soustracteur. Il faut réaliser le montage suivant pour avoir la tension  $u_1 - u_2$  à la sortie du montage :



D'autre part, pour éviter que la mesure des tensions ne perturbe le circuit de l'électroaimant, on prend les résistances  $R_A$  et  $R_B$  très grandes devant  $R$ ,  $L_1\omega$  et  $L_2\omega$ .

- (c) On a :

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{u_1 - u_2}{e} \\ &= \frac{j(L_1 - L_2)\omega}{j(L_1 + L_2)\omega + R} \\ &= \frac{L_1 - L_2}{L_1 + L_2} \frac{j\omega(L_1 + L_2)/R}{1 + j\omega(L_1 + L_2)/R} \end{aligned}$$

On a donc  $\omega_0 = (L_1 + L_2)/R = 2L_e/R$  et  $H_0 = (L_1 - L_2)/(L_1 + L_2) = \delta L/L_e$ .

- (d) Filtre passe-haut (cf diagramme de Bode du cours). On doit se placer dans une gamme de fréquence  $\omega \gg \omega_0$ , à ce moment là  $H \simeq \delta L/L_e$ .

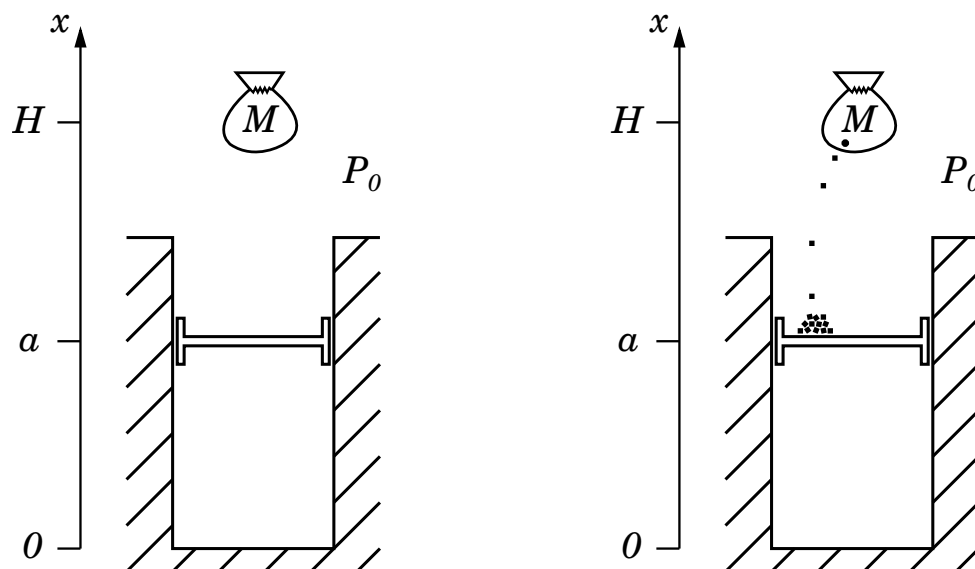


## Chapitre 2

# Thermodynamique (sup)

## 2.1 Chute d'une masse sur un piston •••○

On considère un gaz parfait, de coefficient  $\gamma$ , à la température  $T_0$ , contenu dans un cylindre de section  $S$  surmonté d'un piston, situé à une hauteur  $a$  par rapport au fond du dispositif. Le piston, de masse négligeable, peut coulisser sans frottement et toutes les parois sont isolées thermiquement de l'extérieur, où la pression et la température sont respectivement  $P_0$  et  $T_0$ . Le champ de gravitation est modélisé par la constante d'accélération  $g$ .



Au dessus du piston, à une altitude  $H$  (repérée par rapport au fond du cylindre), se trouve un sac de sable de masse totale  $M$ . On souhaite étudier dans un premier temps le cas où le sac de sable tombe d'un bloc sur le piston (schéma de gauche), et puis la situation où la totalité du sable se déverse grain par grain sur le piston (schéma de droite).

1. Dans ce cas-là, on considère que le sac de sable tombe d'un bloc sur le piston.
  - (a) A quel type de transformation a-t-on affaire dans ce cas-là ? Décrire qualitativement ce qu'il se passe.
  - (b) Calculer la hauteur  $x$  finale du piston après le retour à l'équilibre.
  - (c) En déduire qu'il existe une hauteur  $H_c$  critique à laquelle le piston remonte, à la suite du choc, à la même hauteur initiale  $a$ . Donner son expression et décrire qualitativement ce qu'il se passe si  $H < H_c$  ou  $H > H_c$ .
2. On suppose désormais que le sac est percé d'un petit trou, laissant sortir les grains de sables les uns après les autres.
  - (a) A quel type de transformation a-t-on affaire dans ce cas-là ? Quelle différence avec le cas précédent ?
  - (b) Quel est le déplacement  $dx$  du piston après la chute d'un grain de sable de masse  $dm$  ?
  - (c) Calculer la hauteur  $x$  finale du piston une fois tout le sable tombé dessus. Comparer cette expression avec celle trouvée précédemment et commenter.

**Corrigé :**

1. (a) C'est une transformation brutale. Les paramètres du gaz dans le cylindre ne sont pas définis durant cette transformation ; on ne peut considérer que les états initiaux et finaux. Il va y avoir échauffement du gaz car l'énergie potentielle de la masse sera transférée sous forme de chaleur, ainsi que sous le travail des forces de pression extérieure.
- (b) Etat initial du gaz :  $(P, T, V) = (P_0, T_0, aS)$ . Etat final :  $(P, T, V) = (P_f, T_f, xS)$  (3 inconnues, il faut donc trois équations). L'équilibre mécanique implique :  $P_f = P_0 + Mg/S$ . L'équation des gaz parfait et le premier principe permettent d'obtenir deux autres équations indépendantes.

Le premier principe appliqué au système masse  $M$  ; gaz donne :

$$\Delta U + \Delta E_p = W$$

$$\frac{nR}{\gamma - 1}(T_f - T_0) + Mg(x - H) = -P_0S(x - a)$$

On précise que la variation d'énergie interne de la masse  $M$  et d'énergie potentielle du gaz sont négligeable. D'autre part,  $Q = 0$  car pas d'échange thermique avec l'extérieur. Enfin, le travail de pression se fait à **pression extérieure constante**  $P_0$  donc  $W = -P_0S(x - a)$ . En utilisant la loi des GP, on trouve :

$$x(P_0S + Mg) = \frac{\gamma - 1}{\gamma}MgH + P_0Sa$$

- (c) On a retour à la hauteur initiale si  $x = A$ , alors  $H_c = \frac{\gamma}{\gamma - 1}a$ . Si  $H < H_c$ , le piston s'enfonce plus bas que  $a$  : l'énergie du choc ne dégage pas assez d'énergie thermique pour soulever le poids du sac. Si  $H > H_c$ , le piston s'élève par rapport à  $a$ .
2. (a) C'est une transformation que l'on peut considérer comme infiniment lente, donc réversible : chaque grain de sable faisant que très légèrement bouger le piston. Les paramètres du gaz sont constamment définis.
- (b) On utilise le même raisonnement que précédemment. On considère une transformation  $(T, P, V) \rightarrow (T + dT, P + dP, V + dV)$  après la chute d'un grain de sable de masse  $dm$ . On a :  $dP = gdm/S$  (équilibre des pressions) et  $dV = Sdx$ . Premier principe :

$$\frac{nRdT}{\gamma - 1} + dm g(x - H) = -P_0Sdx$$

Or la loi des gaz parfaits donne :

$$\begin{aligned} (P + dP)(V + dV) &= nr(T + dT) \\ \Rightarrow P_0Sdx + dm g x &= nRdT \end{aligned}$$

(ce qui revient différencier cette loi). On a donc :

$$P_0Sdx = dm g \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma} H - x \right)$$

*NB* : on retrouve bien le résultat de la question précédente, avec  $dx$  positif ou négatif si  $H$  supérieur ou inférieur à  $H_c$ .

- (c) Il faut intégrer la relation précédente. En posant la variable intermédiaire  $u = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{x}{H}$ , on trouve :

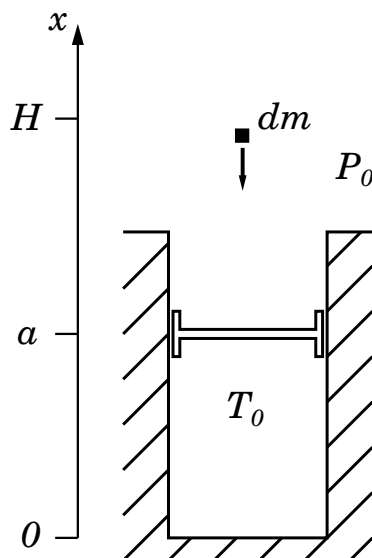
$$\int_{\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{a}{H}}^{\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{x}{H}} \frac{du}{1 - u} = \frac{Mg}{P_0S}$$

On trouve alors :

$$x = \frac{\gamma - 1}{\gamma} H \left( 1 - e^{-\frac{Mg}{P_0 S}} \right) + a e^{-\frac{Mg}{P_0 S}}$$

## 2.2 Entropie d'une chute libre ●●●○

On considère un gaz parfait, de coefficient  $\gamma$ , à la température  $T_0$ , contenu dans un cylindre de section  $S$  surmonté d'un piston, situé à une hauteur  $a$  par rapport au fond du dispositif. Le piston, de masse négligeable, peut coulisser sans frottement et toutes les parois sont isolées thermiquement de l'extérieur, où la pression et la température sont respectivement  $P_0$  et  $T_0$ . Le champ de gravitation est modélisé par la constante d'accélération  $g$ .



On fait tomber un grain de sable de masse  $dm$  sur le cylindre, d'une hauteur  $H$ .

1. A quel type de transformation a-t-on affaire ?
2. Quel est le déplacement  $dx$  du piston après la chute d'un grain de sable de masse  $dm$  ?
3. En déduire la variation d'entropie du gaz  $dS_g$  lors de cette transformation. On rappelle que, pour un gaz parfait de  $n$  moles, la variation d'entropie lors d'une transformation élémentaire s'écrit :

$$dS = \frac{nR}{\gamma - 1} \left( \frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} \right)$$

4. En déduire que l'entropie créée par la chute d'une masse  $M$  d'une hauteur  $H$  à la température  $T_0$  s'écrit :

$$s_c = \frac{MgH}{T_0}$$

**Corrigé :**

1. Cf exercice précédent. C'est une transformation que l'on peut considérer comme infiniment lente, donc réversible : chaque grain de sable faisant que très légèrement bouger le piston. Les paramètres du gaz sont constamment définis.
2. Cf exercice précédent :

$$P_0 S dx = dm g \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma} H - x \right)$$

3. Avec la formule donnée :

$$\begin{aligned} dS_g &= \frac{nR}{\gamma - 1} \left( \frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} \right) \\ &= \frac{nR}{\gamma - 1} \left( \frac{dm g}{S P_0} + \gamma \frac{dx}{x} \right) \\ &= dm \frac{nR g}{(S P_0)} \left( \frac{H}{x} - 1 \right) \end{aligned}$$

Or,  $nR/P_0 = V_0/T_0 = Sx/T_0$ , donc :

$$dS_g = dm \frac{g}{T_0} (x - H)$$

Pour une masse  $M$  au lieu de  $dm$ , on obtient le résultat escompté.

4. La variation d'entropie du système gaz ;  $M$  s'écrit :

$$dS = dS_g + dS_M = \delta s_c + \delta s_e$$

Comme il n'y a pas de transferts thermiques,  $\delta s_e = 0$ . D'autre part, l'entropie de la masse  $M$  ne change pas car il reste à température constante. Lors de cette transformation on a donc :

$$s_c = \frac{MgH}{T_0}$$



## 2.3 Machine de Stirling ●●○○

On considère une machine thermodynamique, constituée d'un cylindre dans lequel coulisse un piston, qui effectue les transformations suivantes sur  $n$  moles gaz parfait de coefficient  $\gamma$  :

$A \rightarrow B$  : compression isotherme du volume  $V_A$  au volume  $V_B$ , réversible, à la température  $T_f$  (contact avec une source froide) ;

$B \rightarrow C$  : échauffement isochore ;

$C \rightarrow D$  : détente isotherme de  $V_B$  à  $V_A$ , réversible à la température  $T_c$  (contact avec une source chaude) ;

$D \rightarrow A$  : refroidissement isochore.

Le cycle de Stirling a l'avantage de pouvoir être réalisable en pratique sur des dispositifs appelés *moteurs de Stirling*, contrairement au cycle de Carnot, théorique.

1. Décrire ce cycle dans un diagramme de Clapeyron ( $P, V$ ) et justifier qu'il est moteur.
2. Déterminer, pour chaque transformation,  $\Delta U$ ,  $W$ , et  $Q$  en fonction de températures de la source chaude et de la source froide et du rapport de compression  $a = V_A/V_B$ .
3. Calculer son rendement  $\eta$ , et montrer qu'il est nécessairement inférieur au rendement de Carnot  $\eta_C$ .
4. Avec un système appelé régénérateur, il est possible de stocker momentanément la chaleur évacuée de  $D \rightarrow A$ , pour la retransférer durant la transformation  $B \rightarrow C$ . Calculer le rendement  $\eta'$  avec ce dispositif.

**Corrigé :**

1. Facile à représenter. Le cycle est moteur car il tourne dans le sens horaire donc l'intégrale  $W = -\oint P dV < 0$
2. Pour le calcul du travail pour une transformation isotherme, on a :

$$W = - \int_i^f P dV = nRT \ln \left( \frac{V_i}{V_f} \right)$$

Transformation	$\Delta U$	$W$	$Q$
$A \rightarrow B$	0	$nRT_f \ln a$	$-nRT_f \ln a$
$B \rightarrow C$	$\frac{nR}{\gamma-1}(T_c - T_f)$	0	$\frac{nR}{\gamma-1}(T_c - T_f)$
$C \rightarrow D$	0	$-nRT_c \ln a$	$nRT_c \ln a$
$D \rightarrow A$	$-\frac{nR}{\gamma-1}(T_c - T_f)$	0	$-\frac{nR}{\gamma-1}(T_c - T_f)$

3. La chaleur apportée par source chaude est  $Q_c = Q_{C \rightarrow D} + Q_{B \rightarrow C}$ . Le rendement  $\eta$  est donc

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{-W}{Q_c} = \frac{nR(T_c - T_f) \ln a}{\frac{nR}{\gamma-1}(T_c - T_f) + nRT_c \ln a} \\ &= \frac{T_c - T_f}{T_c + \frac{T_c - T_f}{\ln(a)(\gamma-1)}} \end{aligned}$$

Or le rendement de Carnot est  $\eta_C = \frac{T_c - T_f}{T_c}$  : ce dernier est supérieur car le dénominateur de la fraction est inférieur.

4. Dans ce cas-là, le rendement devient :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{-W}{Q_c - Q_{B \rightarrow C}} = \frac{nR(T_c - T_f) \ln a}{nRT_c \ln a} \\ &= \frac{T_c - T_f}{T_c} \\ &= \eta_C \end{aligned}$$

## 2.4 Cycle de Beau de Rochas ••○○

Les moteurs à essence équipant la plupart des véhicules terrestres sont des machines thermodynamiques généralement constitués de plusieurs cylindres, dans lesquels un piston fait subir sur  $n$  moles de gaz parfait le cycle suivant (dit de Beau de Rochas) :

- $A \rightarrow B$  : compression adiabatique, réversible du volume  $V_A$  au volume  $V_B$  : le mélange d'air frais et essence est comprimé ;
- $B \rightarrow C$  : échauffement isochore en contact de la source chaude, en pratique il s'agit de la combustion très rapide de l'essence dégageant une chaleur  $Q_c$  ;
- $C \rightarrow D$  : détente adiabatique, réversible du volume  $V_B$  au volume  $V_C = V_A$  : les gaz de combustion "poussent" le cylindre en fournissant du travail ;
- $D \rightarrow A$  : refroidissement isochore en contact de la source froide : les gaz issus de combustion sont évacués et remplacés par un mélange d'air frais et d'essence. Le cycle reprend ensuite.

Ce cycle de fonctionnement a l'avantage de pouvoir faire varier la puissance du moteur très rapidement, car il est facile de contrôler la quantité de chaleur  $Q_c$  apportée par la combustion de l'essence lors de la transformation  $B \rightarrow C$ . On souhaite montrer que cet avantage pratique se fait néanmoins au détriment du rendement  $\eta$ , qui est nécessairement inférieur au rendement de Carnot  $\eta_C$ .

1. Décrire ce cycle dans un diagramme de Clapeyron ( $P, V$ ) et justifier qu'il est moteur.
2. Déterminer, pour chaque transformation,  $\Delta U$ ,  $W$ , et  $Q$  en fonction de températures  $T_A$ ,  $T_B$ ,  $T_C$  et  $T_D$  atteintes aux moments  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ .
3. Exprimer les températures  $T_B$ ,  $T_C$  et  $T_D$  à partir de  $T_A = 300\text{K}$ , la température de l'air ambiant, et de  $Q_c$ , la chaleur dégagée par la combustion d'essence. Pour simplifier l'écriture, on pourra utiliser le taux de compression  $a = V_A/V_B$ .
4. Calculer son rendement  $\eta$  en fonction de  $a$  et  $\gamma$ , et montrer qu'il est nécessairement inférieur au rendement de Carnot  $\eta_C$ .

**Corrigé :**

1. Facile à représenter. Le cycle est moteur car il tourne dans le sens horaire donc l'intégrale  $W = -\oint P dV < 0$
2. On peut proposer d'effectuer le calcul suivant pour le calcul du travail :

$$\begin{aligned}
 W &= - \int_i^f P dV = -cste \int_i^f \frac{dV}{V^\gamma} \\
 &= -cste \frac{V_f^{1-\gamma} - V_i^{1-\gamma}}{1-\gamma} \\
 &= \frac{P_f V_f - P_i V_i}{\gamma - 1} \\
 &= \frac{nR}{\gamma - 1} (T_f - T_i)
 \end{aligned}$$

Appliquer le premier principe suffit aussi. On utilise le résultat précédent pour les transformations  $A \rightarrow B$  et  $D \rightarrow A$ . Pour les transformations isochores, on calcule  $\Delta U$  tout simplement pour l'échauffement d'un gaz.

Transformation	$\Delta U$	$W$	$Q$
$A \rightarrow B$	$\frac{nR}{\gamma-1} (T_B - T_A)$	$\frac{nR}{\gamma-1} (T_B - T_A)$	0
$B \rightarrow C$	$\frac{nR}{\gamma-1} (T_C - T_B)$	0	$Q_c = \frac{nR}{\gamma-1} (T_C - T_B)$
$C \rightarrow D$	$\frac{nR}{\gamma-1} (T_D - T_C)$	$\frac{nR}{\gamma-1} (T_D - T_C)$	0
$D \rightarrow A$	$\frac{nR}{\gamma-1} (T_A - T_D)$	0	$Q_f = \frac{nR}{\gamma-1} (T_A - T_D)$

3. On détermine la température à chaque transformation :  
 $A \rightarrow B$  :  $T_B = a^{\gamma-1} T_A$  car compression adiabatique en utilisant  $TV^{\gamma-1} = cste$ .  
 $B \rightarrow C$  :  $T_C = \frac{nR}{\gamma-1} Q_c + T_B$ , d'après le premier principe : on chauffe le gaz en lui apportant  $Q_c$ .  
 $C \rightarrow D$  :  $T_D = T_C / a^{\gamma-1}$  car compression adiabatique.
4. Pour calculer le rendement, il faut expliciter la quantité de chaleur  $Q_c$  issue de la source chaude : il s'agit de  $Q_{AB}$ , car on augmente la pression à volume constant, c'est-à-dire qu'on apporte de la chaleur. Ici, elle est apportée par l'explosion de l'essence. Le travail total sur un cycle, quant à lui, s'écrit :

$$\begin{aligned}
 W &= -\frac{nR}{\gamma-1} (T_B - T_A + T_D - T_C) \\
 &= -\frac{nR}{\gamma-1} (T_D - T_A) + Q_c
 \end{aligned}$$

On a donc :

$$T_D = \frac{\gamma-1}{a^{\gamma-1} nR} Q_c + T_f$$

Donc  $W = Q_c \left(1 - \frac{1}{a^{\gamma-1}}\right)$  et alors :

$$\eta = 1 - \frac{1}{a^{\gamma-1}}$$

Pour comparer avec le rendement de Carnot  $\eta_C = 1 - T_f/T_c$ , il faut expliciter les températures de la source chaude  $T_c$  et froide  $T_f$ . La température de la source chaude est à priori  $T_C$  car le gaz est au maximum de sa température en  $C$ . En effet, comme la transformation  $C \rightarrow D$  est réversible, elle est supposée très lente, donc on peut supposer que le gaz s'est thermalisé à la température de la source chaude en  $C$ .

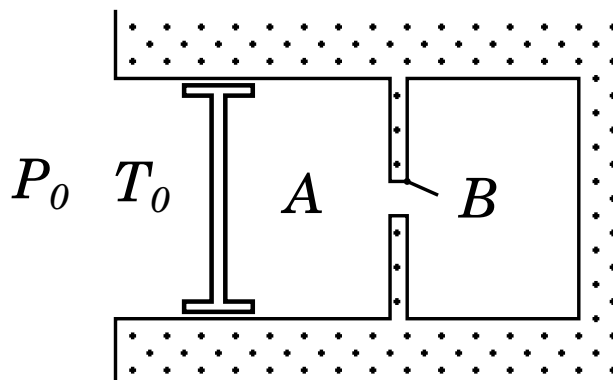
A ce moment là :

$$\begin{aligned}\eta_C &= 1 - \frac{T_A}{T_C} \\ &= 1 - \frac{T_A}{\frac{\gamma-1}{nR}Q_c + a^{\gamma-1}T_A} \\ &= 1 - \frac{1}{\frac{\gamma-1}{nRT_A}Q_c + a^{\gamma-1}} \\ &> 1 - \frac{1}{a^{\gamma-1}} = \eta\end{aligned}$$

On retrouve bien le fait que le rendement de Carnot est supérieur.

## 2.5 Compression brutale • • ○○

On considère le dispositif ci-dessous : un piston pouvant coulisser librement dans un cylindre, tous deux ayant des parois adiabatiques. Une paroi interne sépare les espaces  $A$  et  $B$  est fixe et diatherme et est percée d'un trou fermé par une fenêtre amovible. La pression extérieure est  $P_0 = 1$  bar. Initialement, le volume  $A$  est rempli d'une mole de gaz parfait  $\gamma = 1,4$ , avec une pression  $P_0 = 1$  bar, une température  $T_0 = 300\text{K}$ , tandis que le volume  $B$  est vide.



1. On ouvre la fenêtre. Décrire qualitativement ce qu'il se passe suivant le volume de  $A$  et  $B$ . En déduire l'existence d'un volume critique  $V_C$  pour le volume  $A$ , que l'on ne demande pas de calculer ici.
2. On suppose  $V_A < V_C$ . Déterminez l'état final du gaz : on exprimera  $V_f$  en fonction de  $V_B$ ,  $T_f$  en fonction de  $T_0$  et  $P_f$  en fonction de  $P_0$ . En déduire  $V_C$ .
3. Calculer la création d'entropie. Quelle est la cause de la création d'entropie ? On rappelle que lors d'une transformation  $(P_i, T_i) \rightarrow (P_f, T_f)$  sur  $n$  moles de gaz parfait, on a :

$$\Delta_i^f S = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} \ln \left( \frac{T_f}{T_i} \right) - nR \ln \left( \frac{P_f}{P_i} \right)$$

4. On suppose désormais que  $V_A > V_C$ . Quel est l'état final ?

**Corrigé :**

1. Si  $V_A \gg V_B$ , alors tout le gaz se répartit dans  $B$  sans que le piston ne touche la paroi interne. Inversement, si  $V_A \ll V_B$ , le piston va venir se coller contre la paroi interne et le gaz va intégralement dans  $B$ . Il y a donc une situation intermédiaire "limite" entre les deux où le piston va doucement se coller contre la paroi interne mais avec un équilibre des pressions.
2. Dans ce cas-là, le piston se colle contre la paroi : on a donc  $V_f = V_B$ . Il faut considérer le système gaz+vide dans  $B$  lorsqu'on applique le premier principe, avec donc  $V_i = V_A + V_B$ . Alors, comme la transformation est brutale, on a :

$$\begin{aligned} \frac{nR}{\gamma - 1}(T_f - T_0) &= W \\ &= -P_0(V_f - V_i) \\ &= -P_0 V_A \end{aligned}$$

Avec la loi des gaz parfaits, appliqué sur le gaz contenu en  $A$ , on a  $P_0 V_A = nRT_0$ , on trouve donc :  $T_f = \gamma T_0$  et  $P_f = \gamma P_0 V_A / V_B$ .

Le volume critique est donc lorsqu'il y a équilibre des pressions :  $P_0 = P_f$ , soit  $V_A = V_C = V_B \gamma$ .

3. Il n'y a pas d'échange de chaleur, donc  $S_e = 0$ , alors  $\Delta S = S_c$ . On trouve :

$$S_c = \Delta_i^f S = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} \ln(\gamma) - nR \ln\left(\gamma \frac{V_A}{V_B}\right)$$

L'entropie créée est bien positive, car on a  $V_A < V_C$ . Dans ce cas limite, on a  $S_c = -nR \ln(\gamma - 1) > 0$ .

4. On suppose désormais que  $V_A > V_C$ . Quel est l'état final ?

## 2.6 Compresseur à deux étages ••○○

Pour de nombreux usages, on souhaite obtenir de l'air comprimé, c'est-à-dire de l'air à la température ambiante  $T_0 = 300\text{K}$  mais à une pression  $P_1$  plus élevée que la pression atmosphérique  $P_0 = 1\text{ bar}$ , généralement  $P_1 = 8\text{ bars}$ . On notera  $a = P_1/P_0$  le rapport de compression voulu.

1. On dispose dans un premier temps d'un cylindre muni d'un piston amenant  $n$  moles de gaz parfait (de coefficient  $\gamma$ ) de l'état  $(P_0, T_0)$  à l'état  $(P_1, T_0)$  selon le chemin suivant :  
 $A \rightarrow B$  : compression adiabatique et réversible de  $(P_0, T_0)$  à  $(P_1, T_1)$  ;  
 $B \rightarrow C$  : refroidissement isobare de  $T_1$  à  $T_0$ .  
 Le refroidissement se fait avec une thermalisation avec l'atmosphère ambiant qui reste à  $T_0$ .
  - (a) Représenter la transformation  $(P_0, T_0) \rightarrow (P_1, T_0)$  dans un diagramme de Clapeyron.
  - (b) Calculer le travail  $W$  fourni par le piston durant cette transformation, en fonction de  $P_0$ ,  $V_0$  et de  $a$ .
  - (c) Calculer l'entropie créée  $s_c$  et commenter.
2. On souhaite diminuer le travail  $W$  fourni pour comprimer le gaz. Pour cela, on comprime le gaz en deux temps, en ajoutant un étage de compression (en pratique un second cylindre à la suite du premier). La transformation du gaz est désormais :  
 $A \rightarrow B$  : compression adiabatique et réversible de  $(P_0, T_0)$  à  $(P_i, T_i)$  ;  
 $B \rightarrow C$  : refroidissement isobare de  $T_i$  à  $T_0$  ;  
 $C \rightarrow D$  : compression adiabatique et réversible de  $(P_i, T_0)$  à  $(P_1, T_1)$  ;  
 $D \rightarrow E$  : refroidissement isobare de  $T_1$  à  $T_0$ .
  - (a) Représenter cette nouvelle transformation  $(P_0, T_0) \rightarrow (P_1, T_0)$  dans un diagramme de Clapeyron.
  - (b) Calculer le travail  $W'$  fourni par le piston, en fonction de  $P_0$ ,  $V_0$ ,  $P_1$  et  $P_i$ .
  - (c) Comment doit-on choisir  $P_i$  pour minimiser le travail fourni ? En déduire  $W'$  pour cette valeur de  $P_i$  et montrer que  $W' < W$ .
  - (d) Calculer l'entropie créée  $s'_c$ . Comparer avec  $s_c$  et commenter.
3. Quelle serait la transformation pour que le travail fourni soit minimal ? Justifier à l'aide d'un diagramme de Clapeyron. Pourquoi est-ce difficilement réalisable en pratique ? Calculer alors l'entropie créée.

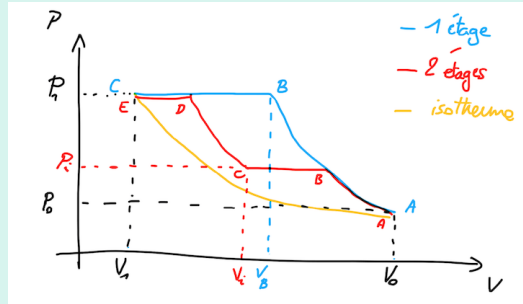
On rappelle que lors d'une transformation  $(P_i, T_i) \rightarrow (P_f, T_f)$  sur  $n$  moles de gaz parfait, on a :

$$\Delta_i^f S = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} \ln \left( \frac{T_f}{T_i} \right) - nR \ln \left( \frac{P_f}{P_i} \right)$$



Corrigé :

1. (a) Pour le diagramme de Clapeyron, on peut passer du volume à la température avec la loi des gaz parfaits.



- (b) Le travail de  $A \rightarrow B$  est  $\frac{nR}{\gamma-1}(T_B - T_0) = \frac{(P_1 V_B - P_0 V_0)}{\gamma-1}$ , et celui de  $B \rightarrow C$  est  $-P_1(V_1 - V_B)$ . En utilisant la loi de Laplace, on a  $V_B = V_0(P_0/P_1)^{1/\gamma}$ . Le travail total est donc :

$$W = \frac{\gamma P_0 V_0}{\gamma - 1} \left( a^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)$$

- (c) On a  $\Delta S = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \ln\left(\frac{T_0}{T_1}\right)$ , car transformation isentropique sur  $AB$  et isobare sur  $BC$ . L'entropie échangée se fait à la température extérieure  $T_0$ , elle s'écrit :

$$\begin{aligned} s_e &= \frac{Q}{T_0} \\ &= \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \frac{T_0 - T_1}{T_0} \end{aligned}$$

car  $Q = \frac{nR\gamma}{\gamma-1}(T_0 - T_1)$  sur  $BC$ . L'entropie créée est donc :

$$\begin{aligned} s_c &= \Delta S - s_e \\ &= \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \left[ \frac{T_1}{T_0} - 1 - \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) \right] \end{aligned}$$

Celle-ci est bien positive car  $x - 1 < \ln x$ . En fonction de  $a$ , elle s'exprime :

$$s_c = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \left[ a^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \ln(a) \right]$$

en utilisant que  $P^{1-\gamma}T^\gamma$  est constant sur  $AB$ .

2. (a) Cf le diagramme à la première question.  
 (b) On additionne les travaux effectués. Comme les transformations  $ABC$  et  $CDE$  sont les mêmes, on peut utiliser les mêmes expression du travail que trouvé précédemment. On obtient :

$$\begin{aligned} W' &= \frac{\gamma P_0 V_0}{\gamma-1} \left[ \left( \frac{P_i}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] + \frac{\gamma P_i V_i}{\gamma-1} \left[ \left( \frac{P_1}{P_i} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \\ &= \frac{\gamma P_0 V_0}{\gamma-1} \left[ \left( \frac{P_i}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \left( \frac{P_1}{P_i} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 2 \right] \end{aligned}$$

- (c) On calcule  $dW'/dP_i = 0$ . Après des calculs plus ou moins laborieux, on trouve  $P_i = \sqrt{P_0 P_1}$ .  
Le travail s'exprime alors :

$$W' = \frac{2\gamma P_0 V_0}{\gamma - 1} \left( a^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right)$$

En posant  $x = a^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}$ , on a :

$$\begin{aligned} W - W' &= \frac{\gamma P_0 V_0}{\gamma - 1} (x^2 - 1 - 2(x - 1)) \\ &= \frac{\gamma P_0 V_0}{\gamma - 1} (x^2 - 2x + 1) \\ &= \frac{\gamma P_0 V_0}{\gamma - 1} (x - 1)^2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

Le travail est donc inférieur lorsque le compresseur a deux étages.

- (d) Avec un calcul similaire à celui du travail (il y a le log en plus), on trouve :

$$s_c = \frac{2nR\gamma}{\gamma - 1} \left[ a^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 - \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \ln(a) \right]$$

Pour montrer que l'entropie créée est alors inférieure à la précédente, même raisonnement que la question précédente, en posant  $x = a^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}$  :

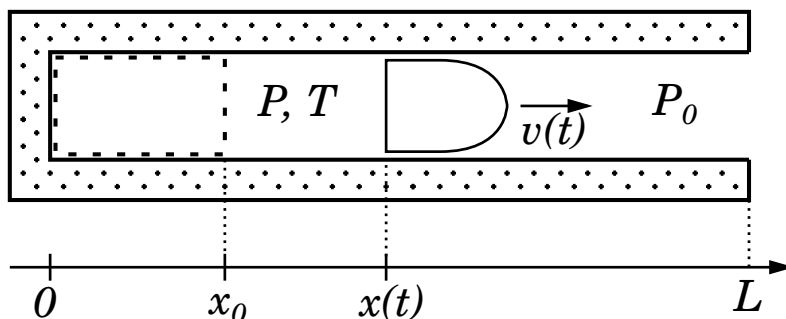
$$\begin{aligned} s'_c - s_c &= \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} (x^2 - 1 - 2(x - 1)) \\ &= \frac{\gamma nR}{\gamma - 1} (x - 1)^2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

3. Comme on souhaite augmenter la pression tout en finissant à la même température, on peut imaginer vers cela avec une isotherme. Un diagramme de Claperon permet rapidement de voir que la travail à fournir est plus faible que les transformations précédentes. Difficile à réaliser en pratique car une compression adiabatique réversible est beaucoup plus rapide qu'une thermalisation isotherme.

L'entropie créée dans ce cas-là est nulle, car l'entropie échangée est égale à la variation d'entropie.

## 2.7 Puissance d'une arme à feu • • • •

On considère le canon d'une arme à feu, constitué d'un tube de diamètre  $d$  et de longueur  $L$ , dans lequel peut glisser sans frottement une balle (le projectile). Au coup de feu, la poudre contenue dans le volume  $Sx_0$  (en pointillé) explose et dégage instantanément une énergie  $Q$ . La balle, de masse  $m$ , initialement emboîtée sur la cartouche en  $x_0$ , est alors propulsée dans le canon, dont les parois sont supposées adiabatiques.



On pourra modéliser le mélange d'air et de gaz issu de la combustion comme un gaz parfait de coefficient  $\gamma$ , à la pression  $P$  et à la température  $T$  lorsque le projectile est à l'abscisse  $x$ . Pour le calibre 5.56 OTAN, on donne :  $Q \approx 5000$  J,  $x_0 = 110$  mm et  $d = 5,56$  mm.

1. Estimer la pression  $P_1$  juste après la combustion et montrer que pour des valeurs raisonnables de  $L$ , la pression atmosphérique  $P_0$  est toujours négligeable devant  $P$ .
2. Montrer que la vitesse de la balle en sortie de canon s'écrit :

$$v_m = \sqrt{\frac{2Q}{m}} \sqrt{1 - \left(\frac{L}{x_0}\right)^{1-\gamma}}$$

3. Calculer la pression  $P_m$  et la température  $T_m$  du gaz lorsque la balle sort du canon. Commenter.



## Chapitre 3

# Thermodynamique (spé)

### 3.1 Premier principe sur un fluide en écoulement stationnaire

● ○ ○ ○

Préciser les hypothèses et établir l'expression générale du premier principe pour un fluide en écoulement stationnaire à travers une machine quelconque sous la forme (les grandeurs thermodynamiques massiques sont en minuscule) :

$$\Delta(h + e_p + e_c) = w_u + q$$

Préciser la signification physique de chacun des termes et son unité. Même question, en faisant apparaître le débit massique du fluide  $D_m$  :

$$D_m \Delta(h + e_p + e_c) = P_u + P_{th}$$

### 3.2 Second principe sur un fluide en écoulement stationnaire ●○○○

Préciser les hypothèses et établir l'expression générale du second principe pour un fluide en écoulement stationnaire à travers une machine quelconque sous la forme (les grandeurs thermodynamiques massiques sont en minuscule) :

$$\Delta s = s_{ech} + s_{cre}$$

Préciser la signification physique de chacun des termes et son unité. Même question, en faisant apparaître le débit massique du fluide  $D_m$  :

$$D_m \Delta s = \dot{S}_{ech} + \dot{S}_{cre}$$

### 3.3 Pompe de relevage ●○○○

Une pompe de relevage est une machine remontant un fluide de masse volumique  $\rho$  d'un dénivelé  $h$ . On supposera que les sections d'entrée et de sortie du fluide sont identiques.

1. Préciser les hypothèses et établir l'expression générale du premier principe pour un fluide en écoulement stationnaire à travers une machine quelconque sous la forme (les grandeurs thermodynamiques massiques sont en minuscule) :

$$\Delta(h + e_p + e_c) = w_u + q$$

Préciser la signification physique de chacun des termes et son unité.

2. Même question, en faisant apparaître le débit massique du fluide  $D_m$  :

$$D_m \Delta(h + e_p + e_c) = P_u + P_{th}$$

3. Lors du passage dans la machine, y a-t-il variation d'énergie cinétique, potentielle ou thermique ?
4. Exprimer la puissance de la pompe  $p$  pour relever le fluide avec un débit massique  $d$ .
5. Rappeler les densités typiques d'un gaz et d'un liquide. Ce type de machine est-il couramment utilisé pour relever des gaz ou des liquides ?



Corrigé :

1. Il n'y a uniquement que de la variation d'énergie potentielle ; les sections d'entrée et de sortie étant identiques, il n'y a pas de variation d'énergie cinétique ; une pompe ne chauffe pas, donc pas de variation de température.
2. On applique le premier principe industriel :

$$dgh = p$$

3. Densité d'une phase condensée :  $\rho \simeq 1 - 8 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ , d'un gaz :  $\rho \simeq 1 \times \text{kg/m}^3$ . On l'utilise pour les liquides.

### 3.4 Écoulement d'un torrent

Un torrent s'écoule sur une montagne sur un dénivelé de 1000m, du fait de sa viscosité et des turbulences, la vitesse reste constante lors de son trajet. Pour simplifier, on suppose que l'écoulement est adiabatique car suffisamment rapide pour pouvoir négliger les transferts thermiques.

1. (a) Calculer l'échauffement de l'eau lors de sa descente. La capacité calorifique de l'eau est  $c_P = 4\text{kJ/K/kg}$ .
2. On souhaite comparer de ce qui, entre l'air et l'eau, s'échauffe le plus lors de la descente en montagne. On suppose aussi qu'un écoulement d'air descend sur le même dénivelé de manière adiabatique et réversible.
  - (a) Montrer que la variation d'enthalpie massique de l'air peut s'écrire :

$$\Delta h = \frac{\gamma R}{M(\gamma - 1)} \Delta T$$

où  $M = 29\text{g/mol}$  est la masse molaire de l'air.

- (b) Comparer avec la différence de température de l'air entre le haut et le bas de la montagne. Qui s'échauffe le plus entre l'eau et l'air ?
  - (c) Quelle est la variation d'entropie massique de cet écoulement d'air ?

**Corrigé :**

1. On applique le premier principe industriel :  $c_p \Delta T + g \Delta z = 0$ . On trouve que  $\Delta T = 0,25$  K, ce qui est très faible : l'eau ne s'échauffe que très peu.
2. On rappelle que la variation d'entropie de  $n$  moles de gaz s'écrit  $\Delta H = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \Delta T$

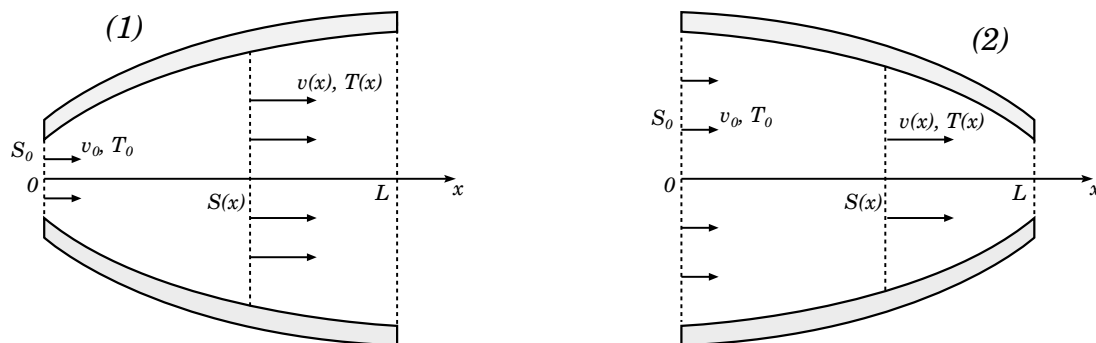
### 3.5 Compresseur

Un compresseur augmente la pression d'un gaz parfait arrivant au débit massique  $d_m$  de  $P_1$  à  $P_2$ , on notera  $a = P_2/P_1$  le taux de compression. La section dans laquelle circule le gaz est supposé constante. On suppose dans un premier temps que la compression est adiabatique et réversible.

1. (a) Citer deux exemples d'objet utilisant un compresseur à flux continu.  
(b) Quelle est la température  $T_2$  du gaz en sortie du compresseur ?  
(c) En déduire le travail massique  $w_u$  nécessaire pour comprimer ce gaz. Exprimer aussi la puissance  $p_u$  de ce compresseur.
2. On suppose désormais que les pertes thermiques sont importantes : la compression n'est plus adiabatique, elle est isotherme.  
(a) Quelle est le travail massique  $w_u$  nécessaire pour comprimer ce gaz dans ce cas-là ? En déduire la chaleur massique  $q$  perdue par le gaz.  
(b) Calculer la variation d'entropie massique  $\Delta s$  du gaz lors de la compression.

### 3.6 Tuyère

Une tuyère est un dispositif utilisé dans l'aérospatiale, dans laquelle un gaz chaud issu d'une combustion est accéléré en se refroidissant : elle convertit l'énergie thermique du gaz en énergie cinétique, servant à la propulsion d'un engin. Une tuyère (représentée ci-dessous, avec un profil divergent (1) et un profil convergent (2)) est un conduit de symétrie de révolution selon l'axe  $Ox$ , de section variable ( $S(x)$  à l'abscisse  $x$ ), dont les parois sont calorifugées, sans aucune pièce mécanique à l'intérieur.



Les gaz issus de la combustion, de capacité calorifique  $c_P$ , sont, en  $x = 0$ , à la température  $T_0$  et à la vitesse  $v_0$ . On note  $T(x)$  et  $v(x)$  la température et la vitesse du gaz à l'abscisse  $x$ . On formule les hypothèses suivantes :

- Le gaz est très chaud à l'entrée de la tuyère et sa vitesse faible, c'est-à-dire que  $\frac{1}{2}v_0^2 \ll c_P T_0$  ;
- La section  $S(x)$  varie lentement de sorte que la vitesse du gaz est orthogonale en tout point de la section  $S(x)$  ;
- La vitesse du gaz est toujours inférieure à celle du son.

A partir de ces hypothèses, la tuyère doit-elle avoir un profil divergent (1) ou convergent (2) pour que les gaz soient accélérés ?

**Corrigé :**

Il faut déterminer la température et la vitesse dans la tuyère. Le premier principe industriel s'écrit :

$$\frac{1}{2}v^2(x) + c_P T(x) = \frac{1}{2}v_0^2 + c_P T_0$$

Pour obtenir une nouvelle équation sur  $T$ , on peut utiliser la loi de Laplace, qui s'écrit :

$$T(x)\rho(x)^{1-\gamma} = T_0\rho_0^{1-\gamma}$$

où  $\rho$  est la masse volumique du gaz. Avec la conservation du débit massique, on obtient une dernière équation :

$$D_m = \rho(x)v(x)S(x) = \rho_0 v_0 S_0$$

En injectant dans l'équation du premier principe, on obtient :

$$\frac{1}{2}v^2(x) + c_P T_0 \left( \frac{v(x)S(x)}{v_0 S_0} \right)^{1-\gamma} = \frac{1}{2}v_0^2 + c_P T_0$$

On introduit la quantité  $u(x) = v(x)/v_0$ ,  $\sigma(x) = S(x)/S_0$  et  $\eta_0 = 2c_P T_0/v_0^2$ . D'après les hypothèses de l'énoncé,  $\eta_0 \ll 1$ . Alors :

$$u^{\gamma+1}(x) + \eta_0 \sigma^{1-\gamma}(x) = (1 + \eta_0) u^{\gamma-1}(x)$$

On a donc une équation permettant de connaître directement la vitesse en fonction de la section, même s'il faut tout de même un petit coup de main numérique pour avoir le profil exact. Néanmoins, on peut ruser pour savoir s'il faut un profil divergent ou convergent, en dérivant cette équation :

$$(\gamma + 1)u'(x)u^\gamma(x) + (1 - \gamma)\eta_0\sigma'(x)\sigma^{-\gamma}(x) = (1 + \eta_0)(\gamma - 1)u'(x)u^{\gamma-2}(x)$$

Et alors :

$$u'(x) = \frac{1}{(\gamma + 1)u^\gamma(x) - (1 + \eta_0)(\gamma - 1)u^{\gamma-2}(x)} \times (\gamma - 1)\eta_0\sigma^{-\gamma}(x) \times \sigma'(x)$$

Il faut étudier le signe du dénominateur de la fraction. On peut le factoriser par  $(\gamma + 1)u^{\gamma-2}(x)$  pour obtenir :

$$u^2(x) - (1 + \eta_0)\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} = \frac{2}{v_0^2} \left[ \frac{1}{2}v^2(x) - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left( \frac{1}{2}v_0^2 + c_P T_0 \right) \right] < 0$$

Ce terme est négatif car  $c_P T_0 \gg \frac{1}{2}v_0^2$ , *a fortiori*, même avec le facteur  $\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \simeq 0,17$ , tant que le gaz n'a pas encore accéléré, le terme thermique reste supérieur. Il faut donc que la dérivée  $\sigma'(x) < 0$  pour que  $u'(x) > 0$  : les gaz accélèrent.

**Turbine à gaz****Echangeur**

### 3.7 Formation du brouillard • ○ ○

On considère un gaz parfait de coefficient  $\gamma$  contenu dans un cylindre de section  $S$  orienté verticalement. L'altitude le long de ce cylindre est notée  $z$ , et on note  $g$  l'accélération de la pesanteur supposée uniforme le long du cylindre. Le gaz est soumis à un mouvement ascendant dans le cylindre en se déplaçant à la vitesse notée  $c$ . Les parois du cylindre ne permettent pas de transfert thermique. L'écoulement est de plus supposé stationnaire.

On note  $T_0$ ,  $P_0$  et  $c_0$  la température, la pression et la vitesse du gaz à l'altitude  $z = 0$  et  $T(z)$ ,  $P(z)$  et  $c(z)$  ces trois grandeurs à l'altitude  $z$ . De la même manière, on introduit  $h_{m,0}$  et  $h_m(z)$  l'enthalpie massique du gaz à l'altitude  $z = 0$  et  $z$ .

1. (a) En utilisant le premier principe industriel appliqué au gaz dans le cylindre entre les altitudes  $z = 0$  et  $z$ , trouver une relation entre  $h_{m,0}$ ,  $h_m(z)$ ,  $c_0$ ,  $c(z)$  et  $z$ .
- (b) Pour simplifier le problème, on considère que la vitesse du gaz est quasi-nulle, de sorte à ce que  $c_0 = c(z) = 0$ . Montrer que la température obéit alors à la loi suivante :

$$T(z) = T_0 \left(1 - \frac{z}{H}\right)$$

Expliciter  $H$  en fonction de  $\gamma$ ,  $g$  et la masse molaire du gaz  $M$ . Donner une estimation numérique.

2. On considère que le gaz étudié est de l'air humide, subissant une ascension verticale, lente et isentropique dans ce cylindre. La vapeur d'eau contenue en faible quantité dans l'air se comporte comme un gaz parfait. La pression de vapeur saturante de l'eau, notée  $P_s$  et exprimée en Pa est une fonction de  $T$  suivant la loi empirique suivante :

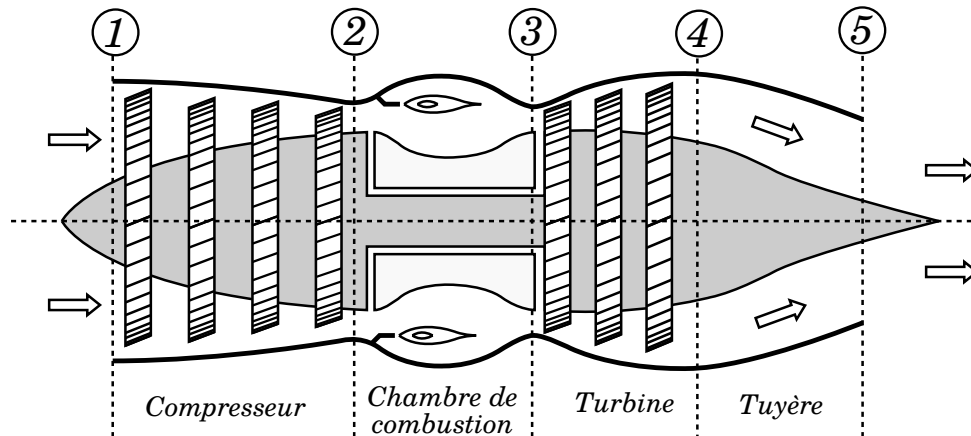
$$\ln(P_s(T)) = a - \frac{b}{T}$$

- (a) Soit  $\varphi$  la fraction molaire de vapeur d'eau contenue dans une masse d'air ascendante. Après avoir explicité la pression  $P(z)$  dans la colonne, déterminer la pression partielle  $P_e(z)$  de cette vapeur.
- (b) A quelle altitude, notée  $z_1$ , peut-on avoir le changement d'état liquide-vapeur ? On pourra supposer que  $z \ll H$ .
- (c) Justifier que les reliefs sont propices à l'apparition du brouillard.

### 3.8 Etude d'un turboréacteur ••○○

Un turboréacteur est un moteur thermique équipant les avions dits à *réaction*, schématisé ci-dessous. Le fonctionnement général est le suivant : un turbine aspire et comprime l'air en amont du réacteur (étape 1 → 2), qui est ensuite chauffé par la combustion du kérosène dans la chambre de combustion (étape 2 → 3). Les gaz de combustion sont alors détendus (3 → 4) à travers une turbine dont l'arbre est commun avec celui du compresseur, puis ces gaz sont finalement évacués par la tuyère (4 → 5), en accélérant fortement, fournissant la poussée requise.

Le but de l'exercice est de calculer la vitesse de sortie  $c_5$  des gaz de combustion, fournissant la poussée à l'aéronef.



On formule les hypothèses suivantes pour les différentes transformations :

- 1 → 2 : Compresseur, compression adiabatique réversible au taux de compression  $a = P_2/P_1 = 26$  ;
- 2 → 3 : Chambre de combustion, le gaz est chauffé jusqu'à  $T_3 = 1450\text{K}$  de manière isobare ;
- 3 → 4 : Détente adiabatique réversible du gaz de  $P_3$  et  $P_4$  à travers la turbine ;
- 5 → 6 : Détente adiabatique réversible du gaz de  $P_4$  et  $P_5$  dans la tuyère.

On supposera que le régime est stationnaire, que l'énergie potentielle de pesanteur du fluide est négligeable dans toutes les étapes. L'énergie cinétique sera aussi négligée dans toutes les étapes, sauf à la sortie de la tuyère (en 5) où le gaz est très fortement accéléré. On négligera tout frottement mécanique. Les pressions en entrée et en sortie sont  $P_1 = P_5 = 1\text{ bar}$  et la température en entrée est  $T_1 = 288\text{K}$ . On note  $C_p$  la capacité thermique massique de l'air.

1. En utilisant un bilan de masse et d'énergie, montrer que le travail massique utile reçu par le gaz lors d'une transformation de l'état  $i$  à  $j$  (sauf pour  $2 \rightarrow 3$ , dans la chambre de combustion) est donné par :

$$w_{i \rightarrow j} = C_p(T_j - T_i) + \frac{1}{2}(c_j^2 - c_i^2)$$

2. Donner une relation entre  $P_i$ ,  $P_j$ ,  $T_i$ ,  $T_j$  et  $\gamma$  (sauf pour  $2 \rightarrow 3$ ).
3. En exploitant le couplage mécanique entre la turbine et le compresseur, établir les expressions littérales et les valeurs numériques des températures  $T_2$ ,  $T_4$  et de la pression  $P_4$  en sortie de turbine.
4. En déduire la vitesse  $c_5$  à la sortie du réacteur.
5. (*PSI*, *PC*) En déduire la poussée du réacteur en kN.

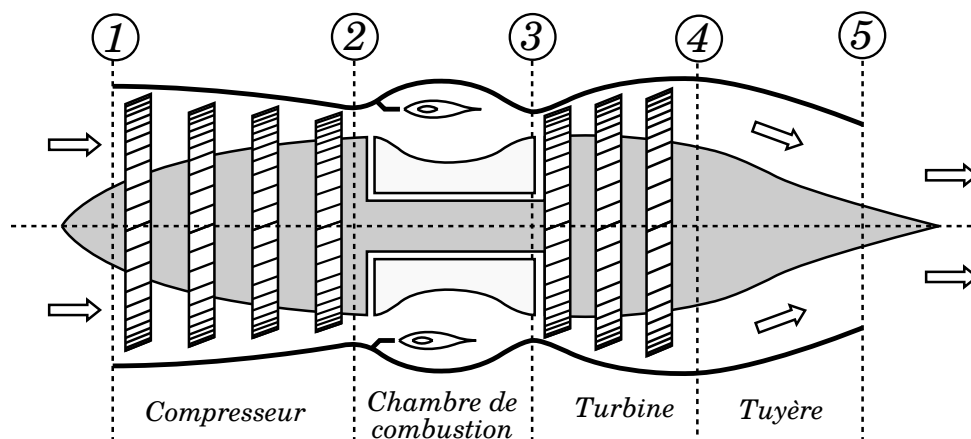
Données :  $C_p = 1,0 \times 10^3 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ,  $\gamma = 1,4$



### 3.9 Etude d'un turboréacteur ••••

Un turboréacteur est un moteur thermique équipant les avions dits à *réaction*, schématisé ci-dessous. Le fonctionnement général est le suivant : un turbine aspire et comprime l'air en amont du réacteur (étape  $1 \rightarrow 2$ ), qui est ensuite chauffé par la combustion du kérosène dans la chambre de combustion (étape  $2 \rightarrow 3$ ). Les gaz de combustion sont alors détendus ( $3 \rightarrow 4$ ) à travers une turbine dont l'arbre est commun avec celui du compresseur, puis ces gaz sont finalement évacués par la tuyère ( $4 \rightarrow 5$ ), en accélérant fortement, fournissant la poussée requise.

Le but de l'exercice est de calculer la vitesse de sortie  $c_5$  des gaz de combustion, fournissant la poussée à l'aéronef.



On formule les hypothèses suivantes pour les différentes transformations :

- $1 \rightarrow 2$  : Compresseur, compression adiabatique réversible au taux de compression  $a = P_2/P_1 = 26$ ;
- $2 \rightarrow 3$  : Chambre de combustion, le gaz est chauffé jusqu'à  $T_3 = 1450\text{K}$  de manière isobare ;
- $3 \rightarrow 4$  : Détente adiabatique réversible du gaz de  $P_3$  et  $P_4$  à travers la turbine ;
- $5 \rightarrow 6$  : Détente adiabatique réversible du gaz de  $P_4$  et  $P_5$  dans la tuyère.

On supposera que le régime est stationnaire, que l'énergie potentielle de pesanteur du fluide est négligeable dans toutes les étapes. L'énergie cinétique sera aussi négligée dans toutes les étapes, sauf à la sortie de la tuyère (en 5) où le gaz est très fortement accéléré. On négligera tout frottement mécanique. Les pressions en entrée et en sortie sont  $P_1 = P_5 = 1 \text{ bar}$  et la température en entrée est  $T_1 = 288\text{K}$ . On rappelle que la masse molaire de l'air est  $M = 29\text{g.mol}^{-1}$ .

Calculer la vitesse d'éjection  $c_5$  des gaz à la sortie de la tuyère et en déduire la poussée que peut fournir ce turboréacteur.

Corrigé :

1. Il s'agit simplement de la démonstration du premier principe industriel appliqué sur une transformation  $i \rightarrow j$  (à demander dans la question).
2. On utilise la loi de Laplace, valide pour toutes les transformations sauf lors de la combustion (l'hypothèse adiabatique n'est plus valide) :

$$\begin{aligned}P_1^{1-\gamma} T_1^\gamma &= P_2^{1-\gamma} T_2^\gamma \\P_3^{1-\gamma} T_3^\gamma &= P_4^{1-\gamma} T_4^\gamma \\P_4^{1-\gamma} T_4^\gamma &= P_5^{1-\gamma} T_5^\gamma\end{aligned}$$

3. Avec le rapport de compression  $a$  :

$$\begin{aligned}T_2 &= T_1 a^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \\&= 731\text{K}\end{aligned}$$

Ensuite, on utilise le couplage mécanique de l'arbre entre la turbine et le compresseur :  $w_{1 \rightarrow 2} = C_p(T_2 - T_1) = -w_{3 \rightarrow 4} = C_p(T_4 - T_3)$  On a alors :

$$\begin{aligned}T_4 &= T_3 - (T_2 - T_1) \\&= T_3 - T_1 \left( a^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) \\&= 907\text{K}\end{aligned}$$

Pour la pression  $P_4$ , on utilise la transformation isobare dans la chambre de combustion :

$$\begin{aligned}P_4 &= P_3 \left( \frac{T_3}{T_4} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \\&= a P_1 \left( \frac{T_3}{T_4} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \\&= 6,5\text{bars}\end{aligned}$$

Et enfin pour  $T_5$  :

$$\begin{aligned}T_5 &= T_4 \left( \frac{P_4}{P_5} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \\&= T_3 a^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \\&= 532\text{K}\end{aligned}$$

4. Avec le premier principe industriel, on a :

$$\begin{aligned}c_5 &= \sqrt{2C_p(T_4 - T_5)} \\&= 866\text{m.s}^{-1}\end{aligned}$$

## Chapitre 4

# Diffusion

## 4.1 Petits et gros mammifères ••○○

Les mammifères sont des animaux à sang chaud, dont la chaleur est produite par le fonctionnement du métabolisme, qui dégage une puissance thermique  $p_{th}$  par unité de volume. Cette puissance et la circulation sanguine permettent de maintenir une température  $T_1$  à peu près uniforme et constante à l'intérieur du corps. Pour se prémunir contre les variations de température extérieure, les mammifères peuvent avoir une couche d'isolant (fourrure ou graisse) autour de leur corps. On souhaite connaître la variation de cette épaisseur en fonction de la taille des mammifères.

Pour simplifier, on considère que les mammifères sont des animaux sphériques de rayon  $R$  recouverts d'une couche d'isolant d'épaisseur  $e$  de capacité calorifique  $c$ , de masse volumique  $\rho$  et de conductivité thermique  $\lambda$ . On notera  $T(r)$  et  $\vec{j}(r)$  le champ de température et le vecteur densité volumique de puissance en coordonnées sphériques,  $r$  étant le rayon par rapport au centre de l'animal.

1. La température extérieure étant  $T_0$  et celle dans le mammifère étant maintenue dans tout son métabolisme à  $T_1$ , écrire les deux conditions aux limites vérifiées par la température.
2. En faisant un bilan d'énergie entre deux sphères concentriques de rayon  $r$  et  $r + dr$  situées dans la couche d'isolant, montrer la relation suivante :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j_r) = -\rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

3. Après avoir rappelé la loi de Fourier, montrer alors que la température vérifie, dans la couche d'isolant, la relation suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c_p r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

Comment s'appelle cette équation ?

4. On se place en régime permanent. Résoudre cette équation avec les conditions aux limites.
5. On introduit  $\Phi = 4\pi r^2 j_r(r)$ . Que représente cette quantité ? Dépend-elle de  $r$  ? Montrer que  $\Phi = 4/3\pi R^3 p_{th}$ . En déduire :

$$\frac{R^3 p_{th}}{3} = \frac{\lambda(R+e)}{e} (T_1 - T_0)$$

6. En déduire une expression du rapport de l'épaisseur de fourrure sur la taille de l'animal  $e/R$ . Pourquoi les gros mammifères résistent-ils mieux au froid ?

**Corrigé :**

1. On a simplement  $T_0 = T(R)$  et  $T_1 = T(R + e)$ .
2. On effectue un bilan d'enthalpie entre  $r$  et  $r + dr$  :

$$r^2 dr 4\pi \times \mu c_p \times [T(r, t + dt) - T(r, t)] = \\ r^2 4\pi \times j(r, t) dt - (r + dr)^2 4\pi \times j(r + dr, t) dt$$

On a donc :

$$r^2 \mu c_p \times \frac{\partial T}{\partial t}(r, t) = \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j(r, t))$$

Et alors, avec la loi de Fourier  $j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}$  :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\mu c_p r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

3. La solution est  $T(r) = A/r + B$ . On trouve :

$$T(r) = \frac{R(R + e)}{re} (T_1 - T_0) + \frac{R + e}{e} T_0 - T_1 \frac{R}{e}$$

4. On introduit  $\Phi = 4\pi r^2 j_r(r)$ . Il s'agit du flux thermique (une puissance) à travers toute sphère de rayon  $r$  autour du mamifère. Comme l'énergie se conserve, elle ne dépend pas de  $r$  :  $\Phi(r) = 4\pi \times j(r) \times r^2 = 4\pi \lambda \frac{R(R+e)}{e} (T_1 - T_0)$ . La puissance dégagée par le mamifère est tout simplement  $4/3\pi R^3 p_{th}$ , elle correspond à la puissance thermique passant par la sphère de rayon  $R$ , donc  $\Phi = 4/3\pi R^3 p_{th}$ . On trouve donc :

$$\frac{R^2 p_{th}}{3} = \frac{\lambda(R + e)}{e} (T_1 - T_0)$$

5. On trouve :

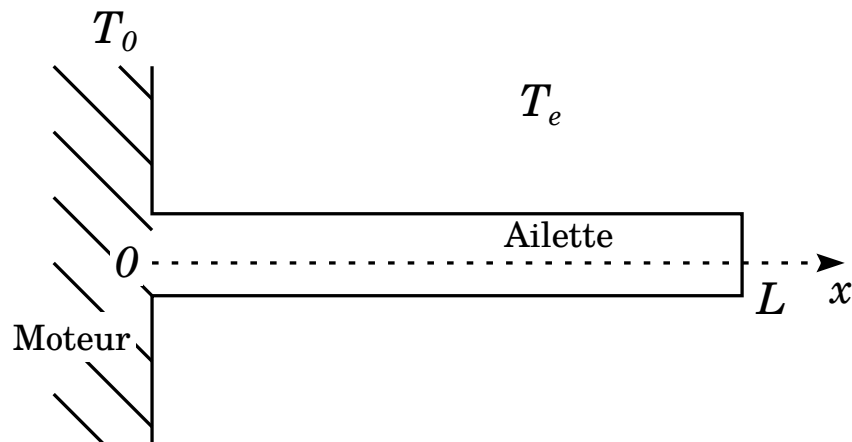
$$\frac{e}{R} = \frac{1}{\frac{R^2 p_{th}}{3\lambda(T_1 - T_0)} - 1}$$

Ce rapport diminue d'autant plus que la taille de l'animal augmente.

## 4.2 Ailettes de refroidissement • • ○ ○

Certains moteurs à essence utilisent des ailettes métalliques pour évacuer leur chaleur avec l'air ambiant (on parle de refroidissement à air). Si ce système est beaucoup plus simple qu'un refroidissement liquide, la puissance de refroidissement est limitée et donc celle du moteur aussi.

On modélise cette ailette de refroidissement comme un cylindre d'axe  $Ox$ , de longueur  $L$ , de rayon  $R$  constitué d'un matériau de conductivité  $\lambda$ , en contact avec l'air extérieur de température  $T_e$ . En  $x = 0$ , l'ailette est en équilibre thermique avec le moteur à la température  $T_0$ .



Pour une section de l'ailette de surface  $\sigma$ , à la température  $T$ , en contact avec l'air à  $T_e$ , évacue sa puissance thermique suivant la loi de Newton  $P_s = h(T - T_e)\sigma$ .

1. En faisant un bilan d'énergie, déterminer en régime permanent l'équation différentielle vérifiée par la température  $T(x)$ .
2. Donner l'expression de la température, si l'on suppose  $L$  suffisamment long (devant quoi ?)
3. Déterminer la puissance thermique évacuée par l'ailette.
4. Que devient cette étude si  $L$  n'est pas suffisamment grand ? Déterminer les nouvelles conditions aux limites.

**Corrigé :**

1. On trouve :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{2h}{\lambda R}(T(x) - T_e)$$

2. On introduit  $\delta = \sqrt{\lambda R/2h}$ . Les solutions sont  $T(x) = Ae^{x/\delta} + Be^{-x/\delta} + T_e$ . Si  $L \gg \delta$ , alors  $A = 0$ . On trouve nécessairement  $B = T_0 - T_e$ .

3. La puissance évacuée entre les tranches situées en  $x$  et  $x + dx$  est :

$$\begin{aligned} dP &= 2\pi R dx (T(x) - T_e) \\ &= \pi R dx (T_0 - T_e) e^{-x/\delta} \end{aligned}$$

La puissance totale évacuée est donc :

$$\begin{aligned} P &= \int_0^L \pi R dx (T_0 - T_e) e^{-x/\delta} \\ &= \pi R \sqrt{2h\lambda R} (T_0 - T_e) \end{aligned}$$

4. La condition à la limite  $A = 0$  n'est plus valide, on garde la solution générale. Il faut utiliser la continuité du flux thermique en  $x = L$ . On a alors :

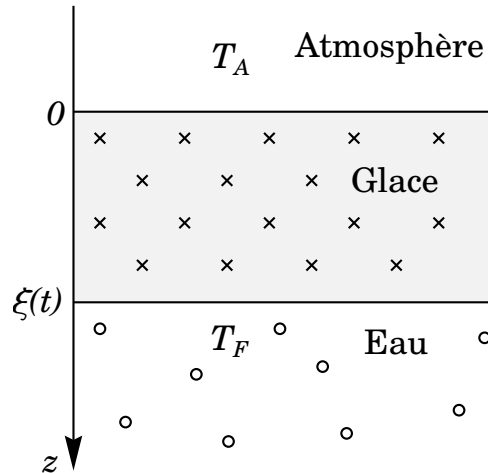
$$\begin{aligned} T_1 &= A + B + T_e \\ \Phi &= -\lambda \pi R^2 \frac{dT}{dx}(L) = h \pi R^2 (T(L) - T_e) \end{aligned}$$

Ces deux conditions réunies, on trouve (après calculs) :

$$\begin{aligned} A &= \frac{(T_1 - T_e) \left(1 - \frac{\lambda}{h\delta}\right)}{\left(1 - \frac{\lambda}{h\delta}\right) - \left(1 + \frac{\lambda}{h\delta}\right) e^{2L\delta}} \\ B &= \frac{(T_1 - T_e) \left(1 + \frac{\lambda}{h\delta}\right)}{\left(1 + \frac{\lambda}{h\delta}\right) - \left(1 - \frac{\lambda}{h\delta}\right) e^{-2L\delta}} \end{aligned}$$

### 4.3 Lac gelé ●●●●

On s'intéresse à la glaciation d'un lac, et plus particulièrement de l'évolution au cours du temps de l'épaisseur de glace, notée  $\xi(t)$ , qui se forme à sa surface. L'interface entre l'atmosphère et la surface du lac se situe en  $z = 0$  et on considère qu'à  $t = 0$ , le lac est encore libre de glace  $\xi(t = 0) = 0$ . On suppose que l'atmosphère est à la température constante  $T_A = 263$  K et que l'eau située sous la glace du lac est à la température de fusion  $T_F = 273$  K.



Lors de la formation de la glace à l'interface  $z = \xi(t)$ , l'énergie thermique dégagée par la solidification de l'eau est évacuée à travers la glace jusqu'à l'atmosphère. On supposera que ce transfert est instantané, ce qui revient à supposer que la glace a une capacité calorifique  $c_g$  négligeable (hypothèse des régimes quasi-stationnaire).

D'autre part, les échanges thermiques entre l'atmosphère et la glace de la surface du lac sont modélisés par la loi de Newton :

$$\vec{j}_a = -h(T_0(t) - T_A)\vec{e}_z$$

où  $\vec{j}_a$  est la densité surfacique de flux thermique entre la glace et l'atmosphère,  $T_0(t)$  est la température de la glace en  $z = 0$  et  $h$  une constante égale à  $42 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ . Autrement dit, la surface du lac ne se thermalise pas instantanément avec l'atmosphère.

On note par ailleurs  $\rho_g = 990 \text{ kg.m}^{-3}$  la masse volumique de la glace,  $\lambda = 2,1 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  et la chaleur latente massique de fusion de l'eau  $l_f = 335 \text{ kJ.kg}^{-1}$ .

1. Donner le profil de température  $T(z, t)$  dans la glace en fonction de  $T_0(t)$ ,  $T_F$ ,  $\xi(t)$  et  $z$ .
2. En déduire la température de surface  $T_0(t)$  en fonction de l'épaisseur de glace  $\xi(t)$ , et  $h$ ,  $T_A$ ,  $T_F$ ,  $\lambda$ .
3. En faisant un bilan d'énergie sur le front de glaciation en  $z = \xi(t)$ , établir une relation entre  $\xi(t)$  et  $\dot{\xi}(t)$ . En déduire l'équation différentielle suivante :

$$\left(1 + \frac{\xi(t)}{l_0}\right) \xi(t) = v_0$$

Préciser l'expression de  $l_0$  et  $v_0$ .

4. Donner une estimation numérique de  $l_0$  et de  $v_0$ . En déduire un temps caractéristique  $\tau_0$  dont on donnera aussi une estimation numérique.
5. Déterminer l'évolution de  $\xi(t)$  puis de  $T_0(t)$  et donner l'allure de leur courbe. Combien de temps faut-il pour que 5 cm de glace ne se forment ?



**Corrigé :**

1. En redémontrant l'équation de la chaleur, on trouverait :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\rho c_g}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} \simeq 0$$

car  $c_g \simeq 0$  dans le cadre de l'ARQS. On a alors :

$$T(z) = \frac{T_F - T_0(t)}{\xi(t)} z + T_0(t)$$

2. Par conservation de l'énergie, la densité de flux thermique dans la glace  $j_g(z, t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}$  est égale à la densité de flux thermique à l'interface  $j_a$  donné par la loi de Newton :

$$\begin{aligned} j_g(z=0, t) &= j_a \\ \Rightarrow -\frac{\lambda}{\xi(t)} (T_F - T_0(t)) &= -h(T_A - T_0(t)) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$T_0(t) = \frac{T_F + \frac{h\xi(t)}{\lambda} T_A}{1 + \frac{h\xi(t)}{\lambda}}$$

3. On considère un volume d'eau  $dV = S \times dz$  se transformant en glace durant un temps  $dt$ . Comme le front de glace avance à la vitesse  $\dot{\xi}$ , on a  $dz = \dot{\xi} dt$ . Ce volume dégage une énergie  $dQ = l_f \rho_g \dot{\xi} dt S$  lors de sa transformation, qui est évacuée à travers le flux thermique dans la glace  $dQ = -S dt \times j_g(z = \xi, t)$ . Le signe  $-$  correspond au fait que l'énergie est évacuée vers l'atmosphère, donc selon  $-\vec{e}_z$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\xi(t)} (T_F - T_0(t)) &= l_f \rho_g \dot{\xi}(t) \\ \Rightarrow T_F - \frac{T_F + \frac{h\xi(t)}{\lambda} T_A}{1 + \frac{h\xi(t)}{\lambda}} &= \frac{l_f \rho_g}{\lambda} \xi(t) \dot{\xi}(t) \\ \Rightarrow \frac{h}{l_f \rho_g} (T_F - T_A) &= \left( 1 + \frac{h}{\lambda} \xi(t) \right) \dot{\xi}(t) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\left( 1 + \frac{\xi(t)}{l_0} \right) \dot{\xi}(t) = v_0$$

Avec  $l_0 = \frac{\lambda}{h}$  et  $v_0 = \frac{h}{l_f \rho_g} (T_F - T_A)$ . On peut vérifier l'homogénéité, qui est bien respectée. On remarque par ailleurs que  $v_0 = \dot{\xi}(t=0)$ , qui correspond à la vitesse d'avancée du front de glace au début de la glaciation.

4.  $l_0 = 0,05m$  et de  $v_0 = 1,27 \cdot 10^{-6}m/s$ . On définit un temps caractéristique  $\tau_0$  comme tout simplement  $\tau_0 = l_0/v_0 = 39 \cdot 10^3s$ .
5. On intègre la relation précédente :

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{l_0}{2} \frac{d}{dt} \left( 1 + \frac{\xi(t)}{l_0} \right)^2 \\ \Rightarrow \frac{2t}{\tau_0} &= \left( 1 + \frac{\xi(t)}{l_0} \right)^2 + C \end{aligned}$$

En tenant compte des conditions initiales,  $\xi(0) = 0$ , on trouve  $C = -1$ . Donc, en résolvant l'équation du second degré et en prenant la racine positive, on obtient :

$$\xi(t) = l_0 \left( \sqrt{1 + \frac{2t}{\tau_0}} - 1 \right)$$

Et de même :

$$T_0(t) = T_A + \frac{T_F - T_A}{\sqrt{1 + \frac{2t}{\tau_0}}}$$

Pour qu'il y ait 5 cm de glace, soit une épaisseur  $\xi(t) = l_0$ , il faut un temps  $t = \frac{3}{2}\tau_0 \simeq 59 \cdot 10^3 \text{s}$ , soit environ 16h30. Cela montre bien que la vitesse de glaciation diminue, si elle se maintenait à  $v_0$ , il faudrait un temps  $\tau_0$  pour geler ces 5cm, soit environ 11h.

## 4.4 Transfert thermique et entropie ●●○○

On considère une barre métallique conductrice de section  $S$ , de longueur  $L$ , de résistivité électrique  $\rho$  et de conductivité thermique  $\lambda$ . On suppose que ces extrémités sont maintenues aux températures  $T_1$  et  $T_2$  grâce à des thermostats, et que les parois extérieures sont calorifugées sur toute la longueur du barreau. En régime permanent, elle est parcourue par un courant  $I$ .

1. (a) Justifier que  $p_{vol} = \rho I^2 / S^2$
- (b) Montrer que la température vérifie l'équation :

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -p_{vol}$$

Préciser l'expression de  $p_{vol}$  en fonction des données de l'énoncé.

- (c) Déterminer le profil de température  $T(x)$  dans la barre, où  $x$  est l'abscisse le long de celui-ci.
  - (d) A quelle condition la température passe par un maximum ?
  - (e) Calculer l'entropie  $s_c$  créée par unité de temps et de volume dans la barre à une abscisse  $x$ . Commenter.
2. On coupe désormais le courant dans la barre ( $I = 0$ ), puis une fois le nouveau régime permanent établi, on l'isole totalement des thermostats.
    - (a) Obtenir le nouveau profil de température juste avant que les deux thermostats soient retirés de la barre.
    - (b) Une fois les thermostats enlevés, quelle sera la température finale  $T_\infty$  de la barre après avoir suffisamment attendu ? En déduire la variation d'entropie de la barre.

## 4.5 Transfert thermique et entropie ●●●○

On considère une barre métallique conductrice de section  $S$ , de longueur  $L$ , de résistivité électrique  $\rho$  et de conductivité thermique  $\lambda$ . On suppose que ces extrémités sont maintenues aux températures  $T_1$  et  $T_2$  grâce à des thermostats, et que les parois extérieures sont calorifugées sur toute la longueur du barreau. En régime permanent, elle est parcourue par un courant  $I$ .

1. (a) Déterminer le profil de température  $T(x)$  dans la barre, où  $x$  est l'abscisse le long de celui-ci.  
(b) A quelle condition la température passe par un maximum ?  
(c) Calculer l'entropie  $s_c$  créée par unité de temps et de volume dans la barre à une abscisse  $x$ . Commenter.
2. On coupe désormais le courant dans la barre ( $I = 0$ ), puis une fois le nouveau régime permanent établi, on l'isole totalement des thermostats.  
(a) Obtenir le nouveau profil de température juste avant que les deux thermostats soient retirés de la barre.  
(b) Une fois les thermostats enlevés, quelle sera la température finale  $T_\infty$  de la barre après avoir suffisamment attendu ? En déduire la variation d'entropie de la barre.

**Corrigé :**

1. (a) Il faut d'abord obtenir l'équation de la chaleur lorsqu'une source de chaleur est présente dans le volume. L'équation de conservation (qui n'en est plus une !) devient :

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x} + p_{vol}$$

où  $p_{vol} = \rho I^2 / S^2$  est la puissance volumique dissipée par effet Joule. L'équation de la chaleur devient donc :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{p_{vol}}{c\rho}$$

En régime permanent :

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -p_{vol}$$

En intégrant, on obtient :

$$T(x) = -\frac{p_{vol}x^2}{2\lambda} + Ax + B$$

Avec les CL  $T(0) = T_1$  et  $T(L) = T_2$ , on trouve :

$$T(x) = \frac{p_{vol}}{2\lambda}x(L-x) + \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1$$

- (b) Il y a plusieurs façon de répondre à la question. Je préfère utiliser la condition où  $T'(L) = 0$ , cad que la puissance électrique chauffe suffisamment pour tordre la courbe de température de sorte à ce que la dérivée deviennent nulle en  $x = L$  (en considérant que  $T_2 > T_1$ ). Comme on a :

$$T'(x) = \frac{p_{vol}}{2\lambda}(L-2x) + \frac{T_2 - T_1}{L}$$

La condition  $T'(L) = 0$  donne alors :

$$p_{vol} = 2\lambda \frac{T_2 - T_1}{L^2}$$

- (c) On effectue un bilan d'entropie sur le système constitué d'une tranche de barre entre  $x$  et  $x + dx$  du barreau durant un temps  $dt$  :

$$dS = \delta s_e(x) - \delta s_e(x + dx) + \delta s_c$$

Il s'agit, pour l'entropie échangée, du même raisonnement que dans le cas d'une machine thermique avec deux sources extérieures, un échange d'entropie en  $x$  et un autre en  $x + dx$ .  $\delta s_c$  est l'entropie créée durant  $dt$

En RP,  $dS = 0$  et  $\delta s_e(x) = \frac{\delta Q(x)}{T(x)} = S dt \frac{j(x)}{T(x)}$ . Alors :

$$\begin{aligned} S dt \frac{j(x)}{T(x)} - S dt \frac{j(x+dx)}{T(x+dx)} + \delta s_c &= 0 \\ \delta s_c &= -S \lambda dt \left( \frac{1}{T(x+dx)} \frac{\partial T}{\partial x}(x+dx) \right) + S \lambda dt \left( \frac{1}{T(x)} \frac{\partial T}{\partial x}(x) \right) \\ \frac{\delta s_c}{S dx dt} &= -\lambda \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{T(x)} \frac{\partial T}{\partial x} \right) = -\frac{\lambda}{T(x)} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\lambda}{T^2(x)} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 \end{aligned}$$

L'entropie créée par unité de volume et de temps est donc :

$$\frac{s_{c,vol}}{dt} = \frac{\rho I^2}{S^2 T} + \frac{\lambda}{T^2(x)} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 > 0$$

Le premier terme correspond à l'entropie créée par effet Joule, le second par les transferts thermiques.

2. (a) On peut réutiliser les résultats de la question précédente, pour  $I = 0$  :

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$$

- (b) Il y a plusieurs façon de calculer la température finale. Pour ma part, j'utilise la conservation de l'énergie thermique  $U$  de la barre lors de la transformation. Comme celle-ci est totalement isolée, on a :  $U(t = 0) = U_\infty = SL\mu c T_\infty$  où  $\mu$  est la masse volumique de la barre. Or, l'énergie interne à  $t = 0$  est la somme de toutes les énergies internes du barreau d'épaisseurs  $dx$  :

$$\begin{aligned} U(t = 0) &= c\mu S \int_0^L dx T(x) \\ &= c\mu S L \frac{T_1 + T_2}{2} \end{aligned}$$

donc  $T_\infty = \frac{T_1 + T_2}{2}$ , on trouve bien que la température finale correspond à la moyenne des températures extrêmes. Pour le calcul de l'entropie, on se base sur la variation d'entropie d'un solide lors d'une transformation d'une température à une autre. Plus précisément, un élément  $Sdx$  de la barre à l'abscisse  $x$  passe de la température  $T(x)$  à  $T_\infty$ . Sa variation d'entropie est donc :

$$\Delta(\delta S) = \mu c S dx \ln \left( \frac{T_\infty}{T(x)} \right)$$

Donc pour l'ensemble de la barre :

$$\begin{aligned} \Delta S &= -\mu c S \int_0^L dx \ln \left( \frac{T(x)}{T_\infty} \right) \\ &= -\mu c S \frac{L}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} dT \ln \left( \frac{T}{T_\infty} \right) \end{aligned}$$

Finalement :

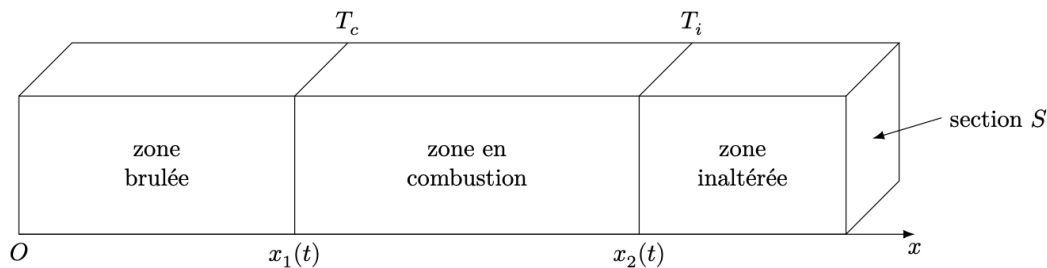
$$\Delta S = Mc \left( 1 + \frac{T_1}{T_2 - T_1} \ln \left( \frac{2T_1}{T_1 + T_2} \right) - \frac{T_2}{T_2 - T_1} \ln \left( \frac{2T_2}{T_1 + T_2} \right) \right)$$

## 4.6 Combustion d'une poutre de bois ●●●○

On considère une poutre en bois homogène de section carrée  $S$  et de longueur  $L$  rentrant en combustion à l'instant  $t = 0$  en  $x = 0$ . On cherche à comprendre la progression de la combustion le long de la poutre, en supposant que celle-ci est uniquement due à la diffusion de la chaleur dans le bois. A l'instant  $t$ , on distingue la combustion en 3 zones distinctes :

- une zone brûlée, située entre  $x = 0$  et  $x_1(t)$ , à la température uniforme  $T_c = 720$  K dite de combustion ;
- une zone dans laquelle s'effectue la combustion, située entre  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$ , dégageant une puissance thermique massique  $P_c = 4,0 \times 10^3$  W.kg<sup>-1</sup> ;
- et une zone inaltérée, où le bois est encore intact, située entre  $x_2(t)$  et  $L$

La température  $T(x, t)$  dans la zone en combustion et celle de la zone inaltérée augmentent par diffusion au cours du temps jusqu'à atteindre les températures de combustion  $T_c$  et d'inflammation du bois  $T_i = 520$  K, conduisant à l'avancement des frontières  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  au cours du temps. Ainsi, tant que la poutre n'a pas fini de brûler, on a toujours  $T(x_1(t), t) = T_c$  et  $T(x_2(t), t) = T_i$ . D'autre part, loin du front de combustion  $x_1(t)$ , la température de la poutre est  $T_\infty = 320$  K.



On considère enfin que le bois brûlé, en combustion ou inaltéré est un même matériau homogène, de capacité calorifique massique à pression constante  $c_p = 2,0 \times 10^3$  J.K<sup>-1</sup>.kg<sup>-1</sup>, de diffusivité thermique  $D = 1,0 \times 10^{-7}$  m<sup>2</sup>.s<sup>-1</sup> et de masse volumique  $\mu = 850$  kg.m<sup>-3</sup>.

- (a) En effectuant un bilan d'enthalpie sur un élément de bois compris entre  $x$  et  $x + dx$  dans la zone en combustion, montrer que la température vérifie l'équation suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \kappa$$

Préciser l'expression de  $\kappa$ .

- (b) De même, trouver l'équation vérifiée par  $T$  dans la zone brûlée et inaltérée.
- On se propose de résoudre les équations précédentes sous forme d'une onde se propageant dans la poutre. On pose  $u = x - ct$  où  $c$  est une constante positive et on effectue le changement de variable  $T(x, t) = \theta(u)$ .
    - (a) Que représente physiquement  $c$  ?
    - (b) Déterminer les équations différentielles régissant la fonction  $\theta(u)$  dans les trois zones, puis montrer que les solutions peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \theta(u) = a_1 & \text{pour } u < u_1 \\ \theta(u) = a_2 + b_2 \exp\left(-\frac{c}{D}u\right) - \frac{\kappa}{c}u & \text{pour } u_1 < u < u_2 \\ \theta(u) = a_3 + b_3 \exp\left(-\frac{c}{D}u\right) & u_2 < u \end{cases}$$

- (c) Déterminer les expressions de  $a_1$  et de  $a_3$  avec les données de l'énoncé, puis expliciter les conditions permettant de trouver  $a_2$ ,  $b_2$  et  $b_3$  (on ne cherchera pas à obtenir leur expression).
- (d) Tracer l'allure de la courbe  $\theta(u)$ . Commenter.

## 4.7 Température dans une planète naine ●●○○

On s'intéresse au profil de température au sein d'une planète naine, faisant 100 km de rayon. On suppose qu'elle est intégralement constituée de roches proches du granit (conductivité thermique  $\lambda = 3,5 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ , masse volumique  $\mu = 2700 \text{ kg.m}^{-3}$  et capacité calorifique massique  $c_p = 790 \text{ J.K}^{-1}.\text{s}^{-1}$ ), sans activité géologique, c'est-à-dire que l'astre est figé, sans convection possible à l'intérieur. Il existe de surcroît une activité radioactive due à la présence de thorium  $^{232}\text{Th}$ , masse molaire  $M = 232 \text{ g.mol}^{-1}$  uniformément réparti dans le volume, dont la désintégration dégage une énergie  $\varepsilon = 5,6 \times 10^{-12} \text{ J}$ , avec une demi-vie de  $\tau = 14 \times 10^{10}$  années.

1. (a) La concentration massique de thorium étant de l'ordre de 10 parties par million (ppm), estimer la puissance volumique  $P_r$  due à la désintégration du thorium.
- (b) Le problème étant supposé à symétrie sphérique, effectuer un bilan d'enthalpie entre deux couches adjacentes de roche de rayon  $r$  et  $r + dr$  et montrer que la température vérifie l'équation suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{D}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \kappa$$

Préciser l'expression de  $\kappa$  et de  $D$ .

- (c) Montrer que l'on peut se placer dans le régime quasi stationnaire  $T(r, t) \simeq T(r)$ , c'est-à-dire que l'activité nucléaire varie très lentement par rapport au temps caractéristique  $\tau_d$  de diffusion thermique.
  - (d) Exprimer l'expression du champ de température  $T(r)$  à l'aide de deux constantes d'intégration. Montrer que l'une d'entre elle est nécessairement nulle.
2. La planète perd de l'énergie thermique par rayonnement, qui part dans l'espace depuis sa surface. La puissance thermique associée à ce rayonnement suit la loi de Stefan-Boltzmann  $\phi = \sigma T_s^4$ , où  $\phi$  est la puissance rayonnée par unité de surface à la surface de la planète,  $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$  une constante et  $T_s$  la température à la surface de l'astre.
  - (a) En utilisant la loi de Stefan-Boltzmann, déterminer la seconde constante d'intégration et donner l'expression de la température  $T(r)$ .
  - (b) Donner la valeur de la température au centre de la planète et à la surface.

On donne, pour les coordonnées sphériques :  $\vec{\text{grad}} f \cdot \vec{e}_r = \frac{\partial f}{\partial r}$



**Corrigé :**

1. (a) La concentration de thorium est de  $c = 10 \times 10^{-6} \times \mu = 27 \text{ g.m}^{-3}$ , soit une quantité  $n = cN_A/M = 7,00 \times 10^{22}$  atomes de thorium par  $\text{m}^3$ . La puissance peut être estimée par l'énergie  $\varepsilon$  d'une désintégration divisée par le temps de demi-vie  $\tau$  (ce qui correspond peu ou prou à l'activité nucléaire, un facteur  $\ln 2$  près), soit  $P_r = \frac{\varepsilon n}{\tau} = 8,90 \times 10^{-8} \text{ W.m}^{-3}$ .

- (b) On effectue un bilan d'enthalpie entre  $r$  et  $r + dr$  :

$$r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi \times \mu c_p \times [T(r, t + dt) - T(r, t)] = \\ r^2 \sin \theta d\theta d\phi \times j(r, t) dt - (r + dr)^2 \sin \theta d\theta d\phi \times j(r + dr, t) dt + P_r dt r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$$

On a donc :

$$r^2 \mu c_p \times \frac{\partial T}{\partial t}(r, t) = \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j(r, t)) + r^2 \times P_r$$

Et alors, avec la loi de Fourier  $j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}$  :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{D}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \kappa$$

Avec  $\kappa = P_r/(\mu c_p)$  et de  $D = \lambda/(\mu c_p)$ .

- (c) Le temps caractéristique de diffusion thermique est estimé comme  $\tau_d \simeq L^2/D = L^2 \mu c_p/\lambda = 6,09 \times 10^{15} \text{ s}$ , soit 0,19 milliard d'années. C'est long mais toujours bien inférieur à 14 milliards d'années, qui est le temps caractéristique de décroissance radioactive du thorium. La planète a donc le temps d'être à tout instant thermalisée avec l'extérieur.
- (d) On peut donc estimer que le terme  $\partial T/\partial t$  est nul. L'équation de diffusion devient :

$$\frac{D}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -\kappa$$

L'intégration fait apparaître deux constantes d'intégration,  $A$  et  $B$  :

$$T(r) = -\frac{\kappa}{6D} r^2 - \frac{A}{r} + B$$

La température étant définie en tout point de la planète, y compris en  $r = 0$ , on a nécessairement  $A = 0$ .

2. (a) La loi de Stefan-Boltzmann donne une seconde CL :  $j(r = R) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}(r = R) = \sigma T^4(r = R)$ . On a donc :

$$\lambda \frac{\kappa}{3D} R = \sigma \left( B - \frac{\kappa}{6D} R^2 \right)^4$$

et donc :

$$B = \sqrt[4]{\frac{P_r R}{3\sigma}} + \frac{\kappa}{6D} R^2$$

Finalement :

$$T(r) = \frac{\kappa}{6D} (R^2 - r^2) + \sqrt[4]{\frac{P_r R}{3\sigma}}$$

- (b) Pour  $T(0) = \sqrt[4]{\frac{P_r R}{3\sigma}} + \frac{\kappa}{6D} R^2 \simeq 63 \text{ K}$  et  $T(R) = \sqrt[4]{\frac{P_r R}{3\sigma}} \simeq 20 \text{ K}$ .

## 4.8 Une tente au soleil ●●●●

Un campeur se trouve allongé dans sa tente canadienne. Le soleil se lève et éclaire une des faces de la tente, mais pas l'autre. Pour se refroidir, est-ce une bonne idée pour notre campeur de se mettre en position assise ?



## 4.9 Diffusion de particules dans un récipient en rotation •••○

Des particules de masse  $m$ , de rayon  $a$  et de masse volumique  $\rho_p$  sont en suspension dans un solvant de masse volumique  $\rho_s$  et de viscosité  $\eta$ , contenu dans un récipient. Elles subissent par ailleurs une force de frottement fluide  $-6\pi\eta a\vec{v}$  lorsqu'elles sont en mouvement à la vitesse moyenne  $\vec{v}$ . Le coefficient de diffusion de ces particules dans le solvant est noté  $D$ .

1. (a) En régime permanent, établir la vitesse moyenne d'une particule isolée qui sédimente, soumise à son poids, à la poussée d'Archimède et à la force de frottement fluide. On introduira la masse effective  $m^* = m \left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_p}\right)$ . Quel est le flux de particules  $\vec{j}_s$  associé à cette sédimentation ?
- (b) Ce flux de sédimentation est compensée par le phénomène de diffusion. Expliquer le phénomène.
- (c) En faisant un bilan de particules sur un volume élémentaire, montrer que la concentration de particule  $c$  est reliée à  $\vec{j}_s$  et au flux de particule  $\vec{j}_D$  dû à la diffusion par la relation suivante :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\text{div}(\vec{j}_D + \vec{j}_s)$$

- (d) En déduire la concentration de particule  $c(z)$  dans le récipient en régime permanent.
2. On fait tourner désormais le récipient à une vitesse angulaire  $\omega$ , soumettant les particules à une force centrifuge  $\vec{f}_r = m\omega^2 r \vec{e}_r$ . On néglige désormais le poids des particules.
- (a) Montrer que la concentration en particules vérifient l'équation suivante :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( D \frac{\partial c}{\partial r} - sr\omega^2 c(r) \right) \right)$$

Préciser l'expression de  $s$ .

- (b) En déduire la concentration de particules en régime permanent.

Corrigé :

1. (a) La poussée d'Archimède est définie comme :

$$\vec{\pi} = \rho_s \frac{m}{\rho_p} g \vec{e}_z$$

Elle est égale au poids du volume de solvant déplacé et est opposée à la gravitation. Le bilan des forces devient en régime permanent, appliqué sur une particule :

$$\vec{0} = \vec{\pi} - mg\vec{e}_z - 6\pi\eta a\vec{v}$$

La vitesse moyenne qui en résulte est donc :

$$\vec{v} = -\frac{mg}{6\pi\eta a} \left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_p}\right) \vec{e}_z = -\frac{m^*g}{6\pi\eta a} \vec{e}_z$$

On trouve bien que la particule tombe (respectivement remonte) si sa masse volumique est supérieure à celle du solvant (respectivement inférieure). Le flux associé de particules est  $\vec{j}_s = c \times \vec{v}$ .

- (b) Si on regardait le phénomène sans diffusion, toutes les particules tomberaient au fond du récipient et s'agglutineraient. Or, au fur et à mesure qu'elles tombent, leur concentration  $c(z)$  augmente, générant un courant de diffusion  $\vec{j}_D = -D\text{grad}(c)$  opposé qui fait "remonter" les particules. Un équilibre s'établit.
- (c) On refait le bilan élémentaire du flux de particule sur un volume élémentaire, en ajoutant le courant  $\vec{j}_s$ . On trouve alors facilement :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\text{div}(\vec{j}_D + \vec{j}_s)$$

- (d) En régime permanent :

$$\text{div}(\vec{j}_D + \vec{j}_s) = 0$$

Comme les flux ne sont que selon  $\vec{e}_z$ , en intégrant par rapport à  $z$ , on a  $\vec{j}_D + \vec{j}_s = A$ . En  $z = 0$ , au fond du récipient, le flux total est nécessairement nul car les particules ne peuvent pas traverser le récipient. Donc :

$$\vec{j}_D + \vec{j}_s = 0$$

Et alors :

$$\begin{aligned} c(z) \frac{m^*g}{6\pi\eta a} &= -D \frac{\partial c}{\partial z} \\ c(z) + L \frac{\partial c}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

avec  $L = \frac{6\pi\eta a D}{m^*g}$ . Et donc :

$$c(z) = c_0 \exp\left[-\frac{z}{L}\right]$$

2. (a) Même raisonnement que précédemment, en remplaçant la force du poids par la force centrifuge. Attention, il y a toujours une poussée d'Archimède ! On trouve que  $\vec{v} = \frac{m^*\omega^2 r}{6\pi\eta a} \vec{e}_r$ . Les particules sont bien ramenées vers l'extérieur si elles sont plus denses que le solvant. Le courant de particules associé est  $j_c = c(r)\vec{v}$ , la concentration ne dépendant que de  $r$  dans ce cas-là.

On trouve ensuite, avec un bilan en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( D \frac{\partial c}{\partial r} - sr\omega^2 c(r) \right) \right)$$

avec  $s = \frac{m^*}{6\pi\eta a}$ .

- (b) Même raisonnement que précédemment, pour trouver que  $D \frac{\partial c}{\partial r} - sr\omega^2 c(r) = 0$ . On trouve alors que :

$$\frac{\partial c}{\partial r} = \frac{r}{L^2} c(r)$$

avec  $L = \sqrt{s\omega^2/D}$ . La solution est :

$$c(r) = c_0 \exp \left[ \frac{r^2}{2L^2} \right]$$

## 4.10 Diffusion à contre-courant ●●●○

Dans un tuyau de section  $S$  circule un solvant à la vitesse  $-v_0\vec{e}_x$ , où  $x$  est l'axe le long du tuyau. En  $x = 0$ , on injecte à travers une petite ouverture un colorant dans le tuyau, avec un débit molaire  $n^*$  (mol.s<sup>-1</sup>). On suppose que le colorant s'homogénéise immédiatement sur toute la section  $S$  du tuyau dès son injection en  $x = 0$ . On remarque que, en plus de s'évacuer avec le solvant vers les  $x$  négatifs, le colorant remonte à contre-courant sur une longueur caractéristique  $L$ . Le coefficient de diffusion du colorant dans le solvant est noté  $D$ .

1. Montrer que la concentration  $c$  de particules de colorant en aval de l'écoulement ( $x < 0$ ) ne dépend de pas  $x$  et s'écrit  $c(x < 0) = c_0 = \frac{N_A n^*}{v_0 S}$ , en notant  $N_A$  le nombre d'Avogadro. En déduire le flux de particule associé  $\vec{j}_c$ .
2. Pourquoi la concentration  $c$  va dépendre de  $x$  en amont de l'écoulement ( $x > 0$ ) ? Quel est le flux de particule  $\vec{j}_D(x)$  associé ?
3. En déduire une équation différentielle sur  $c(x)$ . La résoudre, et en déduire la longueur  $L$  de remontée à contre-courant.

Corrigé :

1. L'énoncé formule deux hypothèses permettant de répondre à la question : a) l'injection de colorant est ponctuelle en  $x = 0$  b) elle est uniforme dans la section en  $x = 0$ . Pour tout  $x > 0$ , on a donc un flux homogène et uniforme de colorant.

Pendant  $dt$ , on a  $dN = N_A n^* dt$  particules de colorant injectées, qui se répartissent sur un volume  $dV = S v_0 dt$ , correspondant au volume balayé par le fluide en écoulement. La concentration en particules est donc :

$$c_0 = \frac{dN}{dV} = \frac{N_A n^*}{v_0 S}$$

Le courant de particules associé est simplement  $\vec{j}_c = -v_0 c_0 \vec{e}_x = \frac{N_A n^*}{S}$ .

2. Si l'on ne considère aucun autre phénomène que ce qui est décrit dans l'énoncé, on passe d'une concentration de colorant  $c_0$  pour  $x < 0$  à une concentration nulle pour  $x \geq 0$ . Il y a donc un gradient infini de concentration en  $x = 0$ , ce qui n'est pas envisageable thermodynamiquement, car il y aurait un courant de diffusion infini en contre courant. On a donc une concentration qui varie en fonction de  $x$  pour la zone  $x > 0$ .

On a alors nécessairement un courant de diffusion  $\vec{j}_D$ , qui sera donné par la Loi de Fick :  $\vec{j}_D = -D \text{grad}(c(x)) = -D \frac{dc}{dx}$ . D'autre part, il y aura toujours le courant de particules emporté dans le sens du courant, donné par  $\vec{j}_c = v_0 c(x)$ .

3. En régime permanent :

$$\text{div}(\vec{j}_c + \vec{j}_D) = 0$$

On peut demander à l'élève de repartir d'un bilan de particules pour démontrer cela. A partir de là, on obtient :

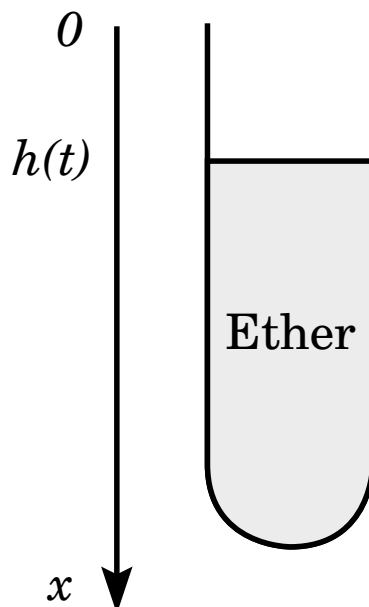
$$-v_0 c(x) - D \frac{dc}{dx} = 0$$

On a alors simplement :

$$c(x) = c_0 e^{-\frac{v_0 x}{D}}$$

### 4.11 Evaporation de l'éther ●●○○

Un tube à essai de section  $S$  est rempli d'éther (masse volumique  $\mu = 626 \text{ kg.m}^{-3}$ , masse molaire  $M = 74 \text{ g.mol}^{-1}$ ), à une distance  $h(t)$  du bord. L'éther étant un liquide très volatile, il s'évapore progressivement de sorte à ce que la hauteur  $h$  augmente. A la surface de l'éther, il y a un équilibre vapeur/liquide à la pression de vapeur saturante de l'éther  $P_{sat} = 0,583 \text{ mbar}$  (à une température  $T = 293\text{K}$  que l'on supposera fixe). Au bord du tube, l'éther est vite dilué dans l'air ambiant et sa concentration est supposée nulle. Sa diffusivité dans l'air est notée  $D = 1,5 \times 10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ .



1. En notant  $c(x)$  la concentration molaire en vapeur d'éther dans le tube entre 0 et  $h(t)$ , retrouver l'équation de diffusion sur  $c(x)$  en supposant la loi de Fick vérifiée.
2. En déduire la concentration de vapeur d'éther  $c(x)$  dans le tube en fonction de  $x$ ,  $h(t)$ ,  $P_{sat}$ ,  $R$  et  $T$ . On supposera qu'on est en régime quasi-stationnaire.
3. Quelle quantité d'éther  $dN$  est évaporée entre  $t$  et  $t + dt$  ?
4. En déduire l'équation différentielle suivante :

$$h\dot{h} = C$$

où  $C$  est une constante que l'on précisera.

5. En déduire un ordre de grandeur du temps d'évaporation de l'éther.



**Corrigé :**

1. Le grand classique :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

2. En RP,  $c(x) = Ax + B$ . Avec les CL :

$$c(x) = \frac{P_{sat}}{RT} \frac{x}{h(t)}$$

3. On a  $dN = \frac{\mu}{M} S(h(t+dt) - h(t))$ . Mais aussi  $dN = -j(x=h(t))S = \frac{P_{sat}}{RT} \frac{D}{h(t)}$

4. On en déduit l'équation :

$$h\dot{h} = \frac{DP_{sat}M}{R\mu}$$

5. En déduire un ordre de grandeur du temps d'évaporation de l'éther.



## Chapitre 5

# Mécanique

## 5.1 Le Petit Prince : satellisation d'une pomme ●●○○

On se place à la surface d'une planète de rayon  $R$  et de champ gravitationnel  $g$ . On envoie une pomme avec une vitesse  $v_0$  purement horizontale et on négligera les frottements de l'air.

1. En supposant la planète localement plane, déterminer la hauteur  $dz$  dont est tombée la pomme après avoir parcouru une longueur  $dx$  dans le plan horizontal.
2. Après une distance horizontale  $dx$ , de combien le sol de la planète est-il descendu ? On pourra utiliser les formules pour les petits angles :  $\tan \theta \simeq \theta$ ,  $\sin \theta \simeq \theta$  et  $\cos \theta \simeq 1 - \theta^2/2$ .
3. En déduire qu'il existe une certaine vitesse  $v_0$  pour laquelle la pomme va revenir à son point de départ.

**Corrigé :**

1. La planète étant supposée parfaitement plane, on peut commencer par calculer l'équation du mouvement de la pomme. Soumise à la seule force de pesanteur, on obtient :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t + x_0 \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + z_0 \end{cases}$$

En supposant que  $x_0$  et  $z_0$  sont les coordonnées de la position initiale. On obtient donc l'équation de la trajectoire :

$$z(x) = -\frac{g(x - x_0)^2}{2v_0^2} + z_0$$

Lorsque la pomme avance de  $dx$  par rapport à sa position initiale  $x_0$ , elle descend de  $z_0$  à  $z_0 + dz$  :

$$z(x_0 + dx) = z_0 + dz = -\frac{gdx^2}{2v_0^2} + z_0$$

Donc  $dz = -\frac{gdx^2}{2v_0^2}$ .

2. Il faut penser à la rotondité de la Terre qui n'est donc pas parfaitement plane localement :  $dh = R - R \cos(d\theta) = R(d\theta)^2/2 = (dx)^2/2R$ .
3. Si la vitesse initiale est suffisamment grande, la chute de la pomme est compensée par le fait que le sol "s'abaisse" en même temps à cause de la rotondité, cad  $dh = -dz$ , soit  $v_0 = \sqrt{gR} = \sqrt{GM_T/R}$ .
4. Si la pomme revient à son point de départ, c'est que la trajectoire est supposée circulaire, avec  $R$  constant. On peut effectuer un PFD sur la pomme en coordonnées cylindriques, et trouver à partir de la projection sur  $\vec{e}_r$  :

$$-mR\dot{\theta}^2 = -\frac{GmM_T}{R^2}$$

Soit  $v_0 = R\dot{\theta} = \sqrt{GM_T/R}$ .

## 5.2 Projectile lancé à la verticale • ○ ○ ○

On tire un petit projectile à la verticale, avec une vitesse initiale  $v_0$ . Le problème est de calculer son altitude  $z$  en fonction du temps, en tenant compte de la gravité et de la résistance de l'air. Comme l'objet est petit, on supposera que la résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse et que la force de résistance est  $m\gamma v$ ,  $m$  étant la masse de l'objet,  $v$  sa vitesse et  $\gamma$  une constante. Nous supposerons que la force de gravité est constante (on néglige sa variation en fonction de l'altitude). On adoptera comme origine la position du tir ( $z = 0$ ) et on supposera que le mouvement ne se produit que dans la direction  $z$ .

1. Soit  $v(t)$  la composante en  $z$  de la vitesse du projectile. Écrivez l'équation différentielle que doit satisfaire  $v(t)$  en fonction du temps, d'après la deuxième loi de Newton.
2. Résoudre cette équation différentielle avec la condition initiale  $v(0) = v_0$ .
3. Exprimer maintenant l'altitude  $z$  en fonction du temps.
4. Calculer l'altitude maximale atteinte par le projectile ( $z_{\max}$ ), en fonction des paramètres  $v_0$ ,  $g$  et  $\gamma$ .
5. Exprimer le résultat de la question précédente ( $z_{\max}$ ) dans les limites de très faible résistance ( $\gamma \rightarrow 0$ ) et de très forte résistance ( $\gamma \rightarrow \infty$ ). Quelles modifications mineures devrait-on apporter à l'équation différentielle trouvée première question pour retrouver ces résultats plus simplement ?

**Corrigé :**

- Rien de bien difficile, en notant  $v = \dot{z}$  :

$$m\dot{v} = -\gamma mv - mg$$

- La solution de cette équation est :

$$v(t) = \left(v_0 + \frac{g}{\gamma}\right) \exp(-\gamma t) - \frac{g}{\gamma}$$

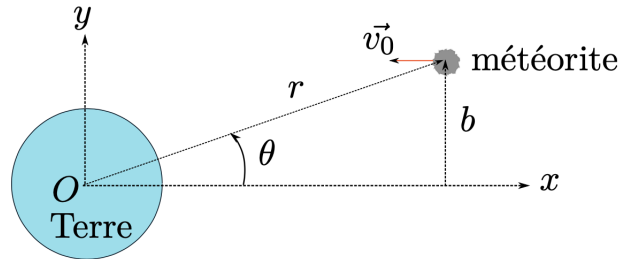
- On intègre l'expression de la vitesse précédente. On trouve :

$$z(t) = \frac{1}{\gamma} \left(v_0 + \frac{g}{\gamma}\right) (1 - \exp(-\gamma t)) - \frac{g}{\gamma} t$$

- L'altitude maximale correspond à l'instant  $t_0$  où la vitesse s'annule :  $v(t_0) = 0$ , soit  $t_0 = \frac{1}{\gamma} \ln\left(\frac{1+v_0\gamma}{g}\right)$ . On a donc :  $z_{\max} = \frac{v_0}{\gamma} - \frac{g}{\gamma^2} \ln\left(1 + \frac{\gamma v_0}{g}\right)$ .
- Dans le cas où  $\gamma \rightarrow 0$ ,  $z_{\max} \rightarrow \frac{v_0}{\gamma} - \frac{g}{\gamma^2} \frac{\gamma v_0}{g} + \frac{g}{2\gamma^2} \frac{\gamma^2 v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{2g}$  en utilisant  $\ln(1+x) \simeq 1+x-x^2/2$ . Cela correspond à une chute libre ne l'absence de frottement.
- Dans le cas où  $\gamma \rightarrow 0$ ,  $z_{\max} \rightarrow \frac{v_0}{\gamma}$

### 5.3 Paramètre d'impact ●●○○

Une météorite arrive depuis l'infini vers la Terre avec une vitesse à l'infini  $\vec{v}_0$ . La Terre a une masse  $M_T$  et un rayon  $R_T$ . On note  $b$  le paramètre d'impact comme indiqué sur la figure ci-dessous. L'objectif de ce problème est de déterminer la valeur minimale de  $b$  pour laquelle la météorite évite la collision avec la Terre.



1. La météorite n'est soumise qu'à la force gravitationnelle de la Terre. Déterminer la nature de sa trajectoire. Montrer que le mouvement est plan et déterminer une relation entre  $r$  et  $\dot{\theta}$ .
2. On note  $N$  le point de la trajectoire où la distance qui sépare la météorite de la Terre est la plus petite. Montrer qu'en  $N$ , la vitesse est uniquement suivant  $\vec{u}_\theta$ . Déterminer une relation entre  $v_N$  au point  $N$ , la distance  $ON$ ,  $b$  et  $v_0$ .
3. En utilisant la conservation de l'énergie, montrer la relation :

$$0 = r_{\min}^2 v_0^2 + 2GM_T r_{\min} - v_0^2 b^2.$$

4. En déduire l'expression minimale  $b_c$  du paramètre d'impact telle que pour  $b < b_c$ , la météorite frappe la Terre et pour  $b > b_c$ , la météorite évite la Terre. On pourra exprimer le résultat en fonction de la vitesse de libération  $v_{\text{lib}}$ .



Corrigé :

1. La météorite n'est soumise qu'à la gravitation, qui est une force centrale. On peut donc utiliser la conservation du moment cinétique (car le moment des forces est nul). Comme le moment se conserve, il est dirigé orthogonalement au plan délimité par  $\vec{r}_0$  et  $\vec{v}_0$  tout le long de la trajectoire. Le mouvement reste donc conscrit à ce plan.

D'autre part, on a par la conservation du moment :

$$\vec{\sigma}_O(M) = m\vec{r} \wedge \vec{v} = -mr_0v_0\sin(\theta_0) = -mbv_0$$

Et d'autre part,  $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ , donc  $\vec{\sigma}_O(M) = r^2\dot{\theta} = -mbv_0$ .

2. La distance  $ON$  entre la météorite et la terre correspond à la coordonnée  $r$ . Lorsque celle-ci est minimale, on a nécessairement  $\dot{r} = 0$ . La vitesse s'exprime donc  $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ .

A ce point, le moment cinétique est  $\vec{\sigma}_O = ON \cdot v_N$ . Par conservation du moment on a alors :

$$ON \cdot v_N = bv_0$$

3. L'énergie potentielle de gravitation s'écrit  $E_p = -GM_Tm/r^2$ . L'énergie mécanique totale du système est égale au point  $N$  et à l'infini (lorsque la météorite arrive à la vitesse  $v_0$ ), alors :

$$\frac{1}{2}mv_N^2 - \frac{GM_Tm}{r_N}$$

$$0 = r_{\min}^2 v_0^2 + 2GM_T r_{\min} - v_0^2 b^2.$$

4. En déduire l'expression minimale  $b_c$  du paramètre d'impact telle que pour  $b < b_c$ , la météorite frappe la Terre et pour  $b > b_c$ , la météorite évite la Terre. On pourra exprimer le résultat en fonction de la vitesse de libération  $v_{\text{lib}}$ .

## 5.4 Piège de Penning • • • ◯

A l'aide d'un dispositif approprié, on crée dans une région de l'espace au voisinage d'un point  $O$  un champ électrique défini en coordonnées carthésiennes par :

$$\vec{E} = \frac{U_0}{2R^2} (-x\vec{e}_x - y\vec{e}_y + 2z\vec{e}_z)$$

Un électron de masse  $m$  et de charge  $e$  se meut dans la région située autour du point  $O$ .

1. Montrer que le point  $O$  est une position d'équilibre pour l'électron. Discuter de la stabilité selon les directions. On introduira  $\omega_z^2 = eU_0/mR^2$ .
2. Pour stabiliser la trajectoire de l'électron, on superpose au champ électrique un champ magnétique uniforme et constant  $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$ . On définit  $\omega_c = eB_0/m$ .
  - (a) Montrer que le mouvement suivant  $\vec{e}_z$  est inchangé.
  - (b) Pour le mouvement dans le plan  $(xOy)$ , montrer que l'électron n'est piégé que si  $B_0$  est supérieur à une certaine valeur  $B_c$ , à déterminer en fonction des données de l'exercice. On utilisera le changement de variable :  $\rho = x + iy$ .
  - (c) Résoudre l'équation en  $\rho$  pour le cas  $B_0 \gg B_c$ , sans chercher à mettre en évidence les constante d'intégration, mais en mettant en évidence deux pulsations, l'une voisine de  $\omega_c$ , notée  $\omega'_c$ , et une autre notée  $\omega_m$ , appelée pulsation magnétique.

**Corrigé :**

1. On applique le principe fondamental de la dynamique à l'électron :

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= e\frac{U_0}{2R^2}x \\ m\ddot{y} &= e\frac{U_0}{2R^2}y \\ m\ddot{z} &= -e\frac{U_0}{R^2}z \end{cases}$$

La position est bien une position de stabilité : les forces appliquées en ce point sont nulles. Néanmoins, ce n'est pas une position stable en  $x$  ou en  $y$  car la solution est exponentielle. Le mouvement est stable uniquement sur  $z$ , avec une pulsation  $\omega_z = eU_0/mR^2$ .

2. (a) Le PFD devient :

$$\begin{cases} \ddot{x} &= \frac{\omega_z^2}{2}x - \omega_c \dot{y} \\ \ddot{y} &= \frac{\omega_z^2}{2}y + \omega_c \dot{x} \\ \ddot{z} &= -\omega_z^2 z \end{cases}$$

Le mouvement selon  $z$  est bien inchangé.

- (b) En multipliant la seconde première ligne par  $i$ , puis en sommant ces deux lignes, on obtient :

$$\ddot{\rho} - \frac{\omega_z^2}{2}\rho - i\omega_c \dot{\rho} = 0$$

Le déterminant de l'équation caractéristique est  $\Delta = 2\omega_z^2 - \omega_c^2$ . Le mouvement est stable uniquement si  $\Delta > 0$ , c'est-à-dire si  $B_0 > B_c = \sqrt{2mU_0/eR^2}$ .

- (c) Les solutions de l'équation caractéristique sont :

$$r = i\frac{\omega_c}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{2\omega_z^2}{\omega_c^2}} \right)$$

Les pulsations caractéristiques sont donc  $\omega_{\pm} = \frac{\omega_c}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{2\omega_z^2}{\omega_c^2}} \right)$ . Dans le cas où  $B_0 \gg B_c$ ,  $\omega_c \gg \omega_z$  et on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \omega_+ &= \frac{\omega_c}{2} \left( 1 + \frac{\omega_z^2}{2\omega_c^2} \right) = \omega'_c \\ \omega_- &= \frac{\omega_z^2}{2\omega_c} = \omega_m \end{aligned}$$

La solution est donc :

$$\rho(t) = Ae^{i\omega'_c t} + Be^{i\omega_m t}$$

L'équation de la trajectoire est donnée par  $x(t) = \text{Re}(\rho(t))$  et  $y(t) = \text{Im}(\rho(t))$ .

## 5.5 Tir à grande distance ●●○○

Dans le jeu *Call of Duty 4 : Modern Warfare*, le joueur prend le rôle d'un tireur d'élite devant abattre une cible située à une distance  $d = 897\text{m}$  à l'aide d'un fusil de précision, qui tire un projectile à une vitesse  $v_0 = 850\text{m.s}^{-1}$ . Le tir s'effectue depuis le dernier étage d'un immeuble d'une hauteur  $H = 30\text{m}$ , la cible se trouvant plein nord par rapport au tireur. La scène se situe en Russie, à une latitude  $\lambda = 45^\circ$ . Le coéquipier du joueur précise, avant le tir, qu'il faut tenir compte de l'effet de Coriolis et l'on souhaite vérifier cette affirmation.

On définit  $R = (O, x, y, z)$  le repère situé au pied de l'immeuble où se trouve le joueur, avec l'axe  $\vec{e}_x$  dirigé vers l'est et l'axe  $\vec{e}_y$  se dirigeant vers le nord. On notera  $\vec{\Omega}_T$  le vecteur rotation de la terre. On supposera que les frottements de l'air sont négligés.

1. Montrer que les équations du mouvement dans le référentiel  $R$  de la balle une fois que le tireur fait feu s'écrivent :

$$\ddot{x} = 2\Omega_T(\sin \lambda \dot{y} - \cos \lambda \dot{z})$$

$$\ddot{y} = -2\Omega_T \sin \lambda \dot{x}$$

$$\ddot{z} = -g + 2\Omega_T \cos \lambda \dot{x}$$

2. Déterminer la solution sur  $x(t)$  sans préciser les variables d'intégration.
3. Donner une estimation du temps de vol avant impact  $t_{\text{impact}}$  puis simplifier les équations du mouvement, les résoudre.
4. Que pensez-vous de l'affirmation du coéquipier ? Quel est l'écart  $\vec{\varepsilon}$  de la balle par rapport à si celle-ci avait une trajectoire parfaitement rectiligne ?

## 5.6 Tir à grande distance • • • •

Dans le jeu *Call of Duty 4 : Modern Warfare*, le joueur prend le rôle d'un tireur d'élite devant abattre une cible située à une distance  $d = 897\text{m}$  à l'aide d'un fusil de précision, qui tire un projectile à une vitesse  $v_0 = 850\text{m.s}^{-1}$ . Le tir s'effectue depuis le dernier étage d'un immeuble d'une hauteur  $H = 30\text{m}$ , la cible se trouvant plein nord par rapport au tireur. La scène se situe en Russie, à une latitude  $\lambda = 45^\circ$ . Le coéquipier du joueur précise, avant le tir, qu'il faut tenir compte de l'effet de Coriolis et l'on souhaite vérifier cette affirmation. On définit  $R = (O, x, y, z)$  le repère situé au pied de l'immeuble où se trouve le joueur, avec l'axe  $\vec{e}_x$  dirigé vers l'est et l'axe  $\vec{e}_y$  se dirigeant vers le nord. On notera  $\vec{\Omega}_T$  le vecteur rotation de la terre. On supposera que les frottements de l'air sont négligés.

Que pensez-vous de l'affirmation du coéquipier ? Quel est l'écart  $\vec{\varepsilon}$  de la balle par rapport à si celle-ci avait une trajectoire parfaitement rectiligne ? On pourra donner une estimation du temps de vol avant impact  $t_{\text{impact}}$  pour simplifier les équations du mouvement.

**Corrigé :**

On note  $R'$  le référentiel du tireur, sur la terre en rotation, et  $R$  le référentiel galiléen, ne tournant pas avec la terre. Le vecteur rotation de  $R'/R$  s'écrit  $\vec{\Omega} = \Omega_T \cdot (\cos \lambda \vec{e}_y + \sin \lambda \vec{e}_z)$  et on note le vecteur vitesse dans  $R'$  :  $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$ . Une fois sortie du canon, la balle est uniquement soumise à la gravité et à la force de Coriolis (la force d'inertie d'entraînement est comprise dans  $g$ ). Cette dernière s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{F}_c &= -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v} \\ &= 2m\Omega_T \begin{vmatrix} \sin \lambda \dot{y} - \cos \lambda \dot{z} \\ -\sin \lambda \dot{x} \\ \cos \lambda \dot{x} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Le PFD donne donc :

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 2\Omega_T(\sin \lambda \dot{y} - \cos \lambda \dot{z}) \\ \ddot{y} &= -2\Omega_T \sin \lambda \dot{x} \\ \ddot{z} &= -g + 2\Omega_T \cos \lambda \dot{x}\end{aligned}$$

Ces équations sont toutes intégrables. On intègre la deuxième et la troisième :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2\Omega_T(\sin \lambda \dot{y} - \cos \lambda \dot{z}) \\ \dot{y} &= -2\Omega_T \sin \lambda x + \dot{y}_0 \\ \dot{z} &= -gt + 2\Omega_T \cos \lambda x + \dot{z}_0\end{aligned}$$

Et on injecte dans la première équation sur  $x$ , et en simplifiant les  $\cos^2 + \sin^2$  :

$$\ddot{x} + 4\Omega_T^2 x = 2\Omega_T(\sin \lambda \dot{y}_0 - \cos \lambda \dot{z}_0) + 2\Omega_T \cos \lambda gt$$

Cette équation est soluble : elle du genre  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = a + bt$ . Néanmoins, la solution homogène en  $\cos$  et  $\sin$  n'est pas très intéressante : la période est celle de la journée terrestre, elle correspond en fait à ce que la balle fasse le tour de la Terre et revienne à sa position... Et en effet, comme  $\Omega_T \simeq 7,2 \times 10^{-7} \text{rad/s}$ , on peut commencer à garder uniquement les termes en  $\Omega_T^2$  d'ordre 1 devant les autres termes. On a donc, après simplification :

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{3}\Omega_T \cos \lambda t^3 + \Omega_T(\sin \lambda \dot{y}_0 - \cos \lambda \dot{z}_0)t^2 + \dot{x}_0 t \\ y(t) &= -\Omega_T \sin \lambda \dot{x}_0 t^2 + \dot{y}_0 t \\ z(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + \Omega_T \cos \lambda \dot{x}_0 t^2 + \dot{z}_0 t + z_0\end{aligned}$$

On a donc les équations du mouvement. Néanmoins, cela reste encore un peu dur de conclure. On peut encore essayer de simplifier certains termes, en utilisant l'estimation du temps de vol et la vitesse initiale. Le temps de vol, estimé à 1s environ, permet de comparer le premier et le deuxième terme dans l'équation sur  $x(t)$  :  $\frac{1}{3}gt^3 \ll \dot{y}_0 t^2$ , durant tout le temps de vol, comme  $\dot{y}_0 \simeq 850$ . D'autre part, comme le tir est dirigé plein nord, on a  $\dot{x}_0 = 0$ . On a alors :

$$\begin{aligned}x(t) &= \Omega_T(\sin \lambda \dot{y}_0 - \cos \lambda \dot{z}_0)t^2 \\ y(t) &= \dot{y}_0 t \\ z(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + \dot{z}_0 t + z_0\end{aligned}$$

Et en notant  $\alpha$  l'angle que fait le tireur entre l'horizontale et la direction du canon (comme il est situé sur un immeuble, il y a un léger dénivelé entre lui et sa cible), on a :

$$\begin{aligned}x(t) &= v_0 \Omega_T \sin(\lambda + \alpha) t^2 \\y(t) &= v_0 \cos(\alpha) t \\z(t) &= -\frac{1}{2} g t^2 - v_0 \sin(\alpha) t + z_0\end{aligned}$$

Finalement, on se retrouve avec globalement une chute libre classique, si ce n'est un terme de déviation uniquement sur  $x$ , vers l'est. Si la balle partait de manière parfaitement rectiligne, sa trajectoire serait (soumise à aucune force) :

$$\begin{aligned}x'(t) &= 0 \\y'(t) &= v_0 \cos(\alpha) t \\z'(t) &= -v_0 \sin(\alpha) t + z_0\end{aligned}$$

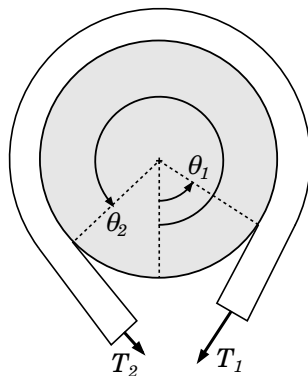
La déviation est donc  $\vec{\varepsilon} = v_0 \Omega_T \sin(\lambda + \alpha) t^2 \vec{e}_x - \frac{1}{2} g t^2 \vec{e}_z$ . Pour un temps de vol d'environ 1 seconde, on trouve que :

$$\vec{\varepsilon} = -0,5 \vec{e}_z + 0,04 \vec{e}_x$$

La balle est déviée de seulement 4cm vers l'est : Coriolis est donc négligeable. Par contre, il faut tenir compte du poids dont l'effet est bien plus marqué.

## 5.7 Frottement d'une corde et d'une poutre en bois ●●○○

Une corde est enroulée autour d'une poutre en bois de section circulaire, de rayon  $R$ , entre les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . Au-delà de ces angles, la corde n'est plus en contact avec le bois et est soumise aux tensions  $T_1$  et  $T_2$  de part et d'autre de ses extrémités. Le coefficient de frottement entre la corde et le bois est  $f = 0,5$ . On note  $T(\theta)$  la tension dans la corde à un angle  $\theta$ , c'est-à-dire la force qui s'exerce au sein de la corde.



1. Montrer que la réaction normale  $dR_N$  de la poutre sur un élément de longueur de corde  $Rd\theta$  vérifie la relation suivante :

$$dR_N + T(\theta)d\theta = 0$$

2. Montrer que la réaction tangentielle  $dR_T$  de la poutre sur un élément de longueur de corde  $Rd\theta$  vérifie la relation suivante :

$$-dR_T + T(\theta + d\theta) - T(\theta) = 0$$

3. En déduire une équation différentielle sur la tension  $T(\theta)$  et l'intégrer.
4. Pour attacher son cheval, un cow-boy enroule tout simplement la longe de son cheval de plusieurs tours autour d'une poutre en bois de section ronde, puis laisse l'extrémité libre, soumise à son propre poids (environ 100g). Combien de tours le cow-boy doit-il effectuer pour qu'il ne puisse pas dérouler la corde ?

*Indications* : la force maximale que peut développer un cheval est équivalente à une tonne ; le coefficient de frottement entre la corde et le bois est  $f = 0,5$ .



## 5.8 Frottement d'une corde et d'une poutre en bois ●●●○

Pour attacher son cheval, un cow-boy enroule tout simplement la longe de son cheval de plusieurs tour autour d'une poutre en bois de section ronde, puis laisse l'extrémité libre, soumise à son propre poids (environ 100g). Combien de tours le cow-boy doit-il effectuer pour qu'il ne puisse pas dérouler la corde ?

*Indications* : la force maximale que peut développer un cheval est équivalente à une tonne ; le coefficient de frottement entre la corde et le bois est  $f = 0,5$ .

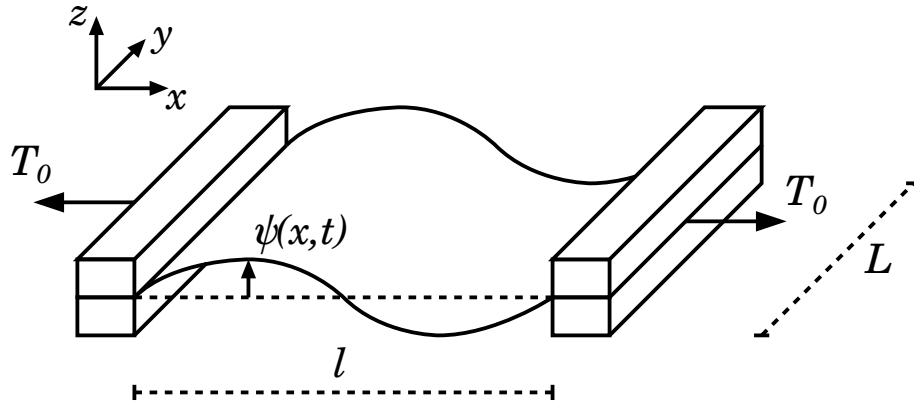


## Chapitre 6

# Ondes mécaniques

## 6.1 Longueur d'un son

Une feuille métallique rectangulaire, de masse surfacique  $\sigma = 7,8 \times 10^{-2} \text{kg.m}^{-2}$ , de dimensions  $l \times L = 2 \times 2 \text{m}$  suivant les axes  $x$  et  $y$ , est fixée sur un support le long des deux côtés de dimension  $L = 2 \text{m}$ . La feuille est tendue entre ces deux supports jusqu'à une tension  $T_0 = 3,0 \times 10^6 \text{N}$  le long de l'axe  $x$ .



Lorsqu'on frappe sur cette plaque, on suppose qu'elle ne peut vibrer que suivant la direction  $x$ . Le son émis se propage à la vitesse  $c_0 = 343 \text{m.s}^{-1}$  dans l'air environnant dont la masse volumique est  $\rho_0 = 1,3 \text{kg.m}^{-3}$ .

On frappe la plaque de sorte à ce que le son atteigne un volume sonore de 70dB à 1m de distance, durant les premiers instants. Estimer le temps au bout duquel le son ne sera plus perceptible.

**Corrigé :**

L'idée est de considérer la vibration mécanique de la feuille s'amortissant en cédant de la puissance sonore à l'air, que l'on peut quantifier à partir du vecteur de Poynting sonore  $\vec{P}_i$ .

On commence par évaluer la fréquence de l'onde :  $f \simeq c/\lambda$ , où  $\lambda \simeq 2l$  est la longueur d'onde du fondamental et  $c$  la vitesse de l'onde mécanique dans la plaque, donnée par  $c = \sqrt{T_0/\mu} = \sqrt{T_0/\sigma L} \simeq 4,3 \times 10^3 \text{m.s}^{-1}$ . La plaque vibre donc à la fréquence  $f \simeq 1,1 \text{kHz}$ , donc la longueur d'onde de l'onde sonore est  $\lambda_0 = c/f_0 \simeq 31 \text{cm}$ . On peut considérer que  $\lambda_0 \ll L$ , l'onde sonore est émise par un plan, donc est une onde "localement" plane.

Avec la géométrie du problème, le champ de vitesse de cette onde peut s'écrire :

$$\vec{v}(x, z, t) = \frac{d\psi}{dt} \left( x, t - \frac{z}{c} \right) \vec{e}_z$$

car sur la surface de la feuille (le plan  $z = 0$ ), par conservation du débit,  $\vec{v}(x, z = 0, t) = \frac{d\psi}{dt}(x, t)$  où  $\psi$  représente la hauteur de la vibration de la feuille par rapport à l'équilibre. Le champ de vitesse à une distance  $z$  de la feuille est donc ensuite simplement décalé de  $t - \frac{z}{c}$ .

La puissance propagée par l'onde sonore est donnée par le vecteur de Poynting  $\Pi(\vec{x}) = p\vec{v}$ . En  $z = \psi$ , cette puissance est :

$$\begin{aligned} \Pi(\vec{x}) &= p(x, \psi, t) \vec{v}(x, \psi, t) \\ &= Z_0 v^2(x, \psi, t) \vec{e}_z \\ &= Z_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 \vec{e}_z \end{aligned}$$

La puissance transmise à l'onde sonore est perdue par la plaque. Pour un élément de surface  $dS = dx \times L$  de la feuille, la puissance cédée à l'onde sonore est :

$$\begin{aligned} dP &= -||\Pi(\vec{x})|| dx L \\ &= -Z_0 dx L \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 \\ &= df_{frott.} \frac{d\psi}{dt} \end{aligned}$$

On peut écrire  $dP$  comme la puissance cédée par l'élément de feuille  $dx \times L$  se déplaçant à la vitesse  $\frac{d\psi}{dt}$  par une force de frottement  $df_{frott.} = -Z_0 dx L \frac{d\psi}{dt}(x, t)$  :

On part maintenant sur l'analyse de la feuille. Pour un élément de feuille  $dx \times L$ , on peut appliquer le même raisonnement que pour le cas de la corde vibrante. Le PFD donne alors :

$$\sigma dx L \frac{d^2\psi}{dt^2} = -T(x) \sin \alpha(x) + T(x + dx) \sin \alpha(x + dx) - Z_0 dx L \frac{d\psi}{dt}(x, t)$$

On trouve alors, avec le raisonnement habituel de la corde vibrante :

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{T_0}{\sigma L} \frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{Z_0}{\sigma} \frac{d\psi}{dt}(x, t)$$

On notera  $c^2 = T_0/\sigma L$ . On cherche alors des solutions stationnaires sous la forme  $\psi(x, t) = f(x)g(t)$ . En injectant dans l'équation précédente, et en divisant par  $\psi(x, t)$ , on obtient :

$$\frac{g''(t)}{g(t)} + \frac{Z_0}{\sigma} \frac{g'(t)}{g(t)} = c^2 \frac{f''(x)}{f(x)}$$

La partie gauche de l'équation étant indépendante de  $x$ , on peut résoudre l'équation différentielle sur  $f$ . Avec les conditions aux limites, on trouve  $f(x) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ , avec  $n \in \mathbb{Z}$ . L'équation sur la fonction

$g$  devient :

$$g''(t) + \frac{Z_0}{\sigma} g'(t) + \frac{\pi^2 n^2 c^2}{l^2} = 0$$

La solution générale de cette équation est :

$$g(t) = B \cos(\omega t + \phi) e^{-t/\tau}$$

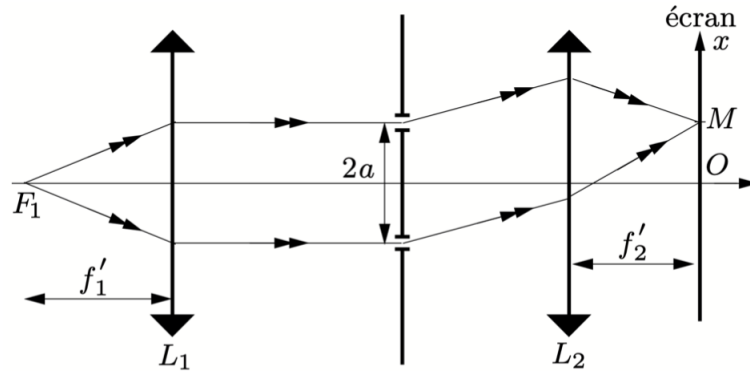
où  $\tau = \frac{\sigma}{2Z_0}$ .

## Chapitre 7

# Optique

## 7.1 Fentes d'Young en montage Fraunhofer • ○ ○

Le schéma ci-dessous représente une expérience d'interférences par trous de Young. La source est ponctuelle, placée en  $F_1$  et monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ . Elle éclaire une lentille  $L_1$ , puis une plaque contenant deux trous séparés d'une distance  $2a$ . On projette l'image sur un écran à travers une lentille  $L_2$ .

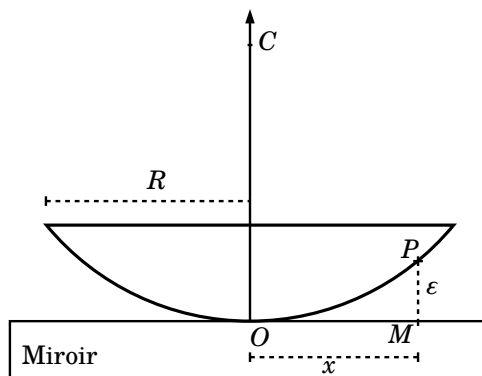


1. Déterminer la différence de marche  $\delta(M)$  pour les deux rayons arrivant en  $M$ , chacun issu d'un trou de la plaque. La distance entre la plaque et l'écran a-t-elle une influence sur  $\delta(M)$  ?
2. En déduire l'intensité sur l'écran  $I(M)$ . Décrire ce que l'on observe sur l'écran.
3. On décale désormais la source  $F_1$  d'une distance  $X$  parallèlement à l'axe  $x$  de l'écran. Que devient  $\delta(M)$  puis l'intensité ?
4. La source  $F_1$  n'est plus monochromatique mais possède une deuxième longueur d'onde  $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$ . A quel distance  $x$  commence-t-on à voir un brouillage des interférences ?



## 7.2 Anneaux de Newton

Une lentille plan-convexe de diamètre  $D = OC$ , fragment d'une bille de verre d'indice  $n$  de rayon  $R$  et de centre  $C$  est posée sur un miroir plan, le contact ponctuel se trouvant en  $O$  (cf figure). On éclaire le dispositif sous incidence normale en lumière monochromatique de longueur d'onde dans le vide  $\lambda$ .



On observe des interférences sur la face sphérique de la lentille et on souhaite comprendre leur origine et en avoir une description détaillée. On supposera dans tout l'exercice que la lentille est mince, c'est-à-dire que  $R \ll D$ .

1. A l'aide d'un schéma précis, décrire le trajet d'un rayon lumineux traversant la lentille au niveau du point  $P$ , se réfléchissant au point  $M$ . Pourquoi voit-on des interférences lumineuses ? On pourra supposer que le rayon n'est pas dévié lorsqu'il sort de la lentille (pourquoi ?).
2. Expliciter la relation entre l'épaisseur  $\varepsilon = PM$  en fonction de  $x = OM$  de la couche d'air au point  $P$ .
3. Montrer que les franges d'interférences sont des cercles concentriques, préciser le rayon de la  $n$ -ième frange brillante et celui de la  $n$ -ième frange sombre, en considérant qu'un point central est une frange et en numérotant du centre vers la périphérie.
4. Décrire ce que l'on observe en lumière blanche.

**Corrigé :**

1. Le rayon arrivant au point  $P$  et se réfléchissant au point  $M$  interfère avec lui-même lorsqu'il est réfléchi sur le miroir. Les interférences étant visibles au niveau de la face sphérique de la lentille, la différence de marche correspond à deux fois l'épaisseur d'air entre la lentille et le miroir (plus le déphasage à la réflexion).
2. L'équation de la surface de la lentille s'écrit  $(\varepsilon - R)^2 + x^2 = R^2$ . On a alors  $\varepsilon = R - \sqrt{R^2 - x^2}$  (car on est côté inférieur du cercle), et comme  $x < D \ll R$ , on a aussi  $\varepsilon \simeq x^2/2R$ .
3. Ce sont des cercles concentriques car la lentille a une symétrie par rotation autour de l'axe  $OC$  (il suffirait de remplacer  $x$  par  $r$  ou  $\sqrt{x^2 + y^2}$ ). La différence de marche correspond à  $\delta = 2\varepsilon$ . Le déphasage total est donc (avec celui du miroir) :

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi\varepsilon}{\lambda} + \pi$$

Pour  $x = 0$ , on a  $\Delta\varphi = \pi$ , et alors  $I = 0$  : on a une frange sombre au centre de la lentille. En notant  $n$  la  $n$ -ième frange sombre on a :  $\Delta\varphi_n = 2n\pi + \pi = \frac{4\pi\varepsilon_n}{\lambda} + \pi$ , donc :

$$x_n = \sqrt{R\lambda n}$$

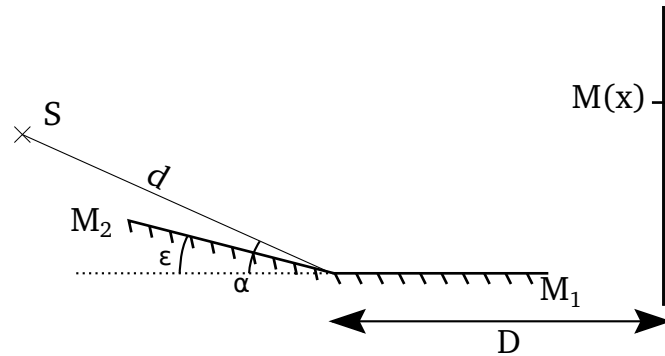
De la même façon, en notant  $p$  les franges brillantes, on a :  $\Delta\varphi_p = 2(p+1)\pi = \frac{4\pi\varepsilon_p}{\lambda} + \pi$ , donc :

$$x_p = \sqrt{R\lambda \left(p + \frac{1}{2}\right)}$$

4. Le centre est une tâche sombre quelque soit la valeur de  $\lambda$ . La plus petite des franges brillantes est celle correspondant au  $\lambda$  le plus petit, donc c'est la couleur bleu/violet. toutes les autres couleurs s'allument ensuite : on a donc des cercles concentriques irisés.

### 7.3 Miroir de Fresnel

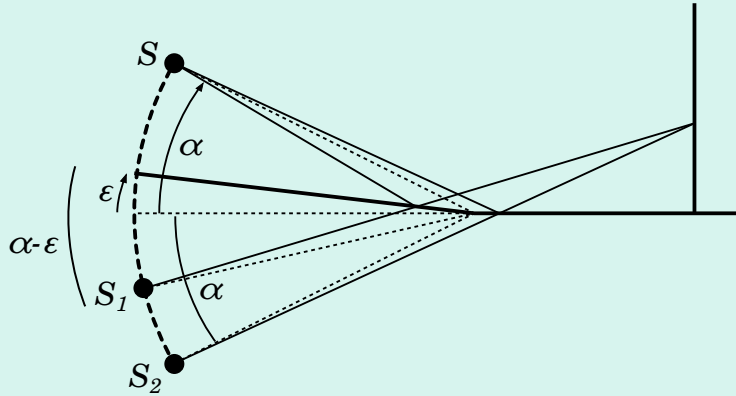
Un dispositif interférentiel est constitué de deux miroirs plans  $M_1$  et  $M_2$  de même surface, faisant entre eux un angle  $\varepsilon$ . Il est éclairé par une fente parallèle à l'arête centrale qui sépare les deux miroirs. La lumière émise par cette fente est supposée monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ . La source  $S$  est placée à une distance  $d$  de l'arête entre les deux miroirs, dans une position repérée par l'angle  $\alpha$  par rapport au plan horizontal. Les angles  $\varepsilon$  et  $\alpha$  sont supposés très petits. On observe l'image issue des miroirs sur un écran placé à une distance  $D$  de l'arête.



1. Montrer que l'on peut mettre en évidence deux sources secondaires  $S_1$  et  $S_2$  correspondant à l'image de la source  $S$  dans chaque miroir et donner leur coordonnées. Construire les rayons issus de  $S$  arrivant en  $M$ .
2. Montrer que l'on peut considérer ce dispositif comme équivalent à des fentes d'Young. Calculer l'intensité  $I$  sur l'écran. En déduire la figure d'interférence.
3. Déterminer l'interfrange.
4. Décrire ce que l'on observe en lumière blanche.

Corrigé :

1.  $S_1$  est le symétrique de  $S$  par rapport au miroir  $M_1$  et  $S_2$  est le symétrique de  $S$  par rapport au miroir  $M_2$ .



Par construction, et en prenant l'origine  $O$  sur l'arête,  $S_1 = (-d \cos \alpha, -d \sin \alpha)$  et  $S_2 = (-d \cos(\alpha - 2\varepsilon), -d \sin(\alpha - 2\varepsilon))$

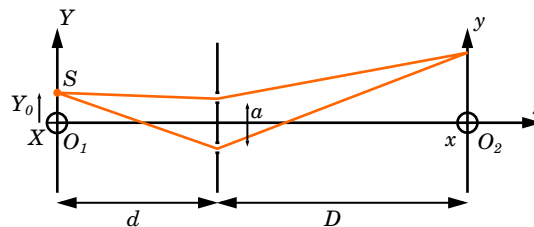
2. On a donc deux sources secondaires cohérentes. On prend directement  $\cos(\alpha) \simeq 1$  et  $\sin \alpha \simeq \alpha$ . Comme  $M = (x + d, y)$ , on peut calculer la différence de marche :

$$\begin{aligned} \delta &= S_1 M - S_2 M \\ &= \sqrt{\text{ff}} \end{aligned}$$

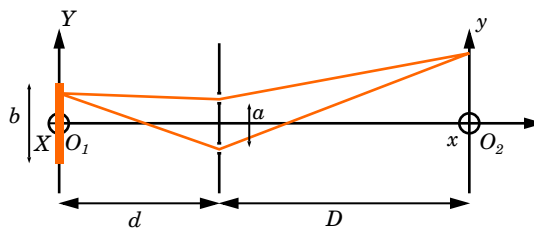
3. Déterminer l'interfrange.
4. Décrire ce que l'on observe en lumière blanche.

## 7.4 Fentes d'Young élargies

On s'intéresse à un dispositif de fente d'Young comme représenté sur le schéma ci-dessous. Une source lumineuse, ponctuelle (d'intensité  $I$ ), monochromatique (longueur d'onde  $\lambda$ ), est située à une distance  $Y$  de l'origine du plan  $(O_1, X, Y)$ . Celui-ci est placé à une distance  $d$  d'un plan opaque sur lequel deux petits trous sont distants de  $a$  suivant l'axe  $Y$ , symétriques par rapport à l'axe  $O_1O_2$ . À une distance  $D$  de ce plan, on observe l'intensité lumineuse sur un écran, repéré par le plan  $(O_2, x, y)$ . On supposera que  $d$  et  $D$  sont grands devant les autres distances.



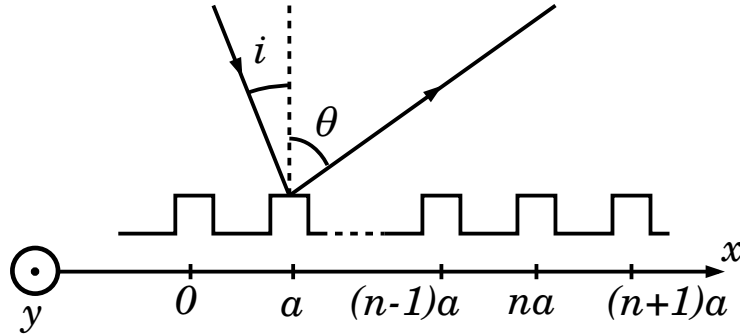
1. (a) Exprimer la différence de marche  $\delta$  pour deux rayons lumineux arrivant au point  $M$  sur l'écran. En déduire l'intensité  $I(x, y)$ .  
 (b) Quelle est l'allure des franges d'interférences ? Comment évoluent celles-ci en fonction de  $Y$  ?
2. On suppose désormais que la source lumineuse n'est plus ponctuelle, mais a une largeur  $b$  (uniquement suivant  $O_1Y$ ) et est placée symétriquement par rapport à l'axe  $O_1O_2$ . La puissance de la source est homogène, c'est-à-dire que tous ses points émettent une intensité par unité de longueur identique.



- (a) Quelle est l'intensité  $dI(x, y)$  sur l'écran dû à un point de la source de largeur  $dy$  situé à une distance  $Y$  ?
- (b) En déduire l'intensité totale  $I(x, y)$  sur l'écran due à la source dans toute sa largeur  $b$ . Pourquoi peut-on simplement sommer la contribution de tous les points de la source ?
- (c) Exprimer le contraste  $C$ .

## 7.5 Réflexion sur un CD

L'information contenue dans un CD (*Compact Disk*) est codée par des gravures micrométriques sur sa surface. Celle-ci est recouverte d'une fine couche métallique, on peut l'assimiler à un réseau par réflexion, comme indiqué sur le schéma ci-dessous. Pour simplifier, on considère le CD comme une succession de  $N \gg 1$  très fines barettes réfléchissantes très longues suivant l'axe  $Oy$ , espacées de  $a$ . Étant très fines, on peut considérer chaque barette comme une source lumineuse ponctuelle suivant l'axe  $Ox$ .



On éclaire le CD avec une onde plane monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ , d'angle d'incidence  $i$ .

1. On souhaite observer les rayons lumineux réfléchis par le CD faisant un angle  $\theta$  avec la normale. Quel dispositif doit-on alors utiliser pour observer une image sur un écran ? Justifier brièvement qu'il va y avoir des interférences, et préciser si celles-ci sont localisées ou non.
2. L'amplitude de l'onde incidente est notée  $\underline{s} = s_0 e^{i\varphi_0}$ , où  $\varphi_0$  est une phase donnée. En déduire l'amplitude issue de la  $n$ -ième barette.
3. En déduire que l'intensité totale  $I$  réfléchie par le CD s'écrit :

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \left( \frac{\pi N a}{\lambda} (\sin \theta + \sin i) \right)}{N^2 \sin^2 \left( \frac{\pi a}{\lambda} (\sin \theta + \sin i) \right)}$$

Préciser l'expression de  $I_0$ .

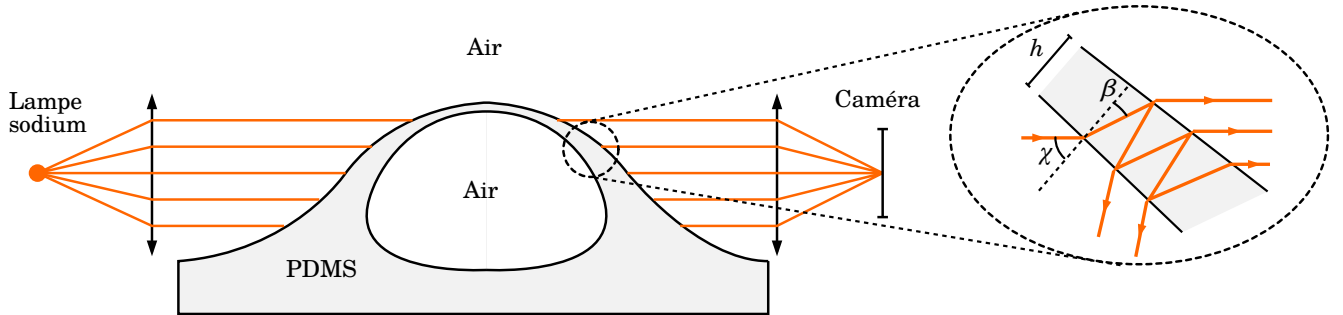
4. Quelle est l'allure de l'intensité lorsque  $N \rightarrow \infty$  ?
5. En déduire que les directions  $\theta_k$  (où  $k$  est un entier) pour lesquelles l'intensité est non nulle correspondent à :

$$\sin \theta_k + \sin i = \frac{k\lambda}{a}$$

6. Calculer pour l'ordre  $k = 1$  les deux extrêmes  $\theta_{min}$  et  $\theta_{max}$  correspondant aux longueurs d'onde extrêmes du spectre visible.

## 7.6 Détermination de l'épaisseur d'une bulle de silicone

Le polydiméthylsiloxane (PDMS) est un fluide extrêmement visqueux : une bulle se formant à sa surface à une durée de vie de plusieurs minutes, avant que le fluide s'écoulant le long de ses parois ne devienne trop fin et éclate. Pour comprendre comment évolue l'épaisseur de la paroi, on éclaire une bulle, considérée comme hémisphérique, à l'aide d'une lampe à sodium placée à la distance focale d'une lentille.



L'onde lumineuse arrivant sur la bulle est donc une onde plane monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 549\text{nm}$ , qui est en partie transmise (avec un coefficient en amplitude  $t$ ) et réfléchi (avec un coefficient  $r$ ) à l'interface entre le PDMS et l'air, d'indices optiques  $n_{PDMS} = 1,4$  et  $n_{air} = 1$ . Le rayon lumineux incident subit ainsi une succession de réflexions/transmissions, créant des interférences que l'on observe à l'aide d'une caméra, située dans l'axe formé par la lampe à sodium et la bulle.



On note  $\underline{s} = s_0 e^{i\varphi_0}$  l'amplitude de l'onde incidente (où  $\varphi_0$  est une phase donnée),  $I_0 = |s_0|^2$  son intensité,  $\chi$  l'angle d'incidence dans l'air et  $\beta$  l'angle d'incidence dans le PDMS en un point donné de la bulle d'épaisseur  $h$ .

1. Exprimer l'amplitude  $\underline{s}_n$  du rayon transmis ayant subi  $n$  réflexions dans la paroi de la bulle avant de ressortir. En déduire l'amplitude totale  $\underline{s}_t$  de l'onde transmise. On admettra que  $r^2 + t^2 = 1$ .
2. En déduire que l'intensité transmise  $I_t = |s_t|^2$  à travers la paroi peut s'écrire :

$$I_t = \frac{I_0}{1 + \frac{4r^2}{1-r^2} \sin^2 \left( \frac{2\pi h \sqrt{n_{PDMS}^2 - n_{air}^2} \sin^2(\chi)}{\lambda} \right)}$$

3. Quelle valeur prend l'angle incident  $\chi$  lorsque le rayon éclaire la bulle sur les bords? Tracer l'allure de  $I_t$  dans cas-là, en admettant que  $r \rightarrow 1$ .
4. Comment en déduire l'épaisseur de la bulle le long de sa paroi? On admettra que la frange la plus proche du sommet correspond à l'ordre 0.





# Appendix

The first appendix text.