Exercice 1

- Avec les hypothèses : $\eta\Delta\vec{v} = \vec{grad}P$. On néglige la variation due à la gravité à l'échelle de la taille de la sphère.

- On cherche à connaitre le champ de pression pour connaitre la résultante des forces. Liquide incompressible donc $div\vec{v} = 0$ et donc $\vec{rot}(\vec{rot}(\vec{v})) = \vec{grad}(div\vec{v}) - \Delta\vec{v} = -\Delta\vec{v}$, donc le gradient de pression vaut l'opposé l'expression de la vitesse donné plus haut.

  En choisissant une projection sur $\vec{e_r}$ ou $\vec{e_\theta}$ (ce qui revient au même) :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 3\eta\frac{Rv_\infty}{r^3}\cos\theta$$

$$P = -3\eta\frac{Rv_\infty}{2r^2}\cos\theta + P_\infty$$

  En notant P_∞ la pression qui est dans le liquide loin de la sphère.

  La résultante des forces de pression, selon l'axe $\vec{e_z}$, est $F_{p,z} = -P(M)d\vec{S}\vec{e_z}$. Alors :

$$F_{p,z} = -\iint P_\infty R^2 d\varphi \sin\theta d\theta \cos\theta + \iint 3\eta\frac{Rv_\infty}{2R^2}\cos^2\theta\sin\theta R^2 d\theta d\varphi$$

  $\boxed{\text{On trouve alors : } F_{p,z} = 2\pi\eta v_\infty R}$

- La force de cisaillement correspond à la force de frottement due à la viscosité du fluide. Pour un élément de surface $d\vec{S}$ de la sphère, celle-ci s'écrit :

$$d\vec{F_c} = \eta dS\frac{\partial v}{\partial r}\vec{e_\theta}$$

  La projection suivant $\vec{e_z}$ nous donne alors :

$$\boxed{F_{c,z} = \iint \eta\frac{\partial v}{\partial r}R^2\sin\theta d\theta d\varphi \sin\theta = \iint \eta\frac{3}{2}Rv_\infty \sin^3\theta d\theta d\varphi = 4\pi\eta R v_\infty}$$

  L'intégrale sur θ vaut $4/3$.

- La force de trainée est la somme des deux forces précédentes. On a donc : $F_z = 6\pi\eta R v_\infty$.

Exercice 2

1 - Comme l'écoulement est lent, et invariant selon x et y : l'écoulement ne dépend que de z. De plus, comme il est incompressible, $div(\vec{v}) = 0$, donc $v_z = cste = 0$, car la vitesse doit être nécessairement nulle en $z = 0$. L'écoulement est donc laminaire et est dirigé selon $\vec{e_z}$ (c'est une hypothèse, on suppose qu'il est dans le sens de la descente) : $\vec{v}(x,y,z) = v(z)\vec{e_z}$.

NB : avec un tel profil de vitesse, $(\vec{v}\cdot\vec{grad})\vec{v}$ est identiquement nul, mais on peut directement le négliger ce terme avec l'hypothèse de l'énoncé (écoulement lent et très visqueux).

L'équation de Navier-Stokes, avec les hypothèses de l'énoncé, devient :

$$0 = \eta\Delta\vec{v} + \rho\vec{g} - \vec{grad}(P)$$

En projetant, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcc} \vec{e_x} & : & \eta\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\rho g\sin\alpha-\frac{\partial P}{\partial x}=0 \\ \vec{e_z} & : & -\rho g\cos\alpha-\frac{\partial P}{\partial z}=0 \end{array}\right. \tag{1}$$

En intégrant selon $\vec{e_z}$ et avec la condition au limite $P(x,z=h)=P_0$, on obtient :

$$P(x,z)=P_0+\rho g\cos\alpha(h-z)$$

En intégrant selon $\vec{e_x}$, avec la condition aux limites $\frac{\partial v}{\partial z}_{z=h}=0$ (il n'y a pas de forces de cisaillement à l'interface air/fluide) devient alors :

$$\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\rho g}{\eta}\sin\alpha(h-z)$$

En intégrant une nouvelle fois, avec la condition aux limites $v(z=0)=0$ (continuité de la vitesse avec le support) :

$$\boxed{v(z)=\frac{\rho g}{\eta}\sin\alpha z\left(h-\frac{z}{2}\right)}$$

Le profil de vitesse est parabolique.

2 - Le débit s'écrit, en prenant comme section un carré de largeur $L \gg h$ pour que les hypothèses de l'énoncé soient valables :

$$D=\int_{y=0}^{L}dy\int_{z=0}^{h}dz\cdot v(z)$$

En intégrant, on obtient :

$$\boxed{D=\frac{\rho g}{3\eta}\sin\alpha L h^3}$$

3 - La glace a une densité de 900kg.m^3. La vitesse proposée est la vitesse maximale de la glace, car c'est celle en surface. On a donc $\eta\simeq 7.1\cdot 10^{12}\text{Pa.s}$.

On obtient donc, sur une année : $V=D\Delta t\simeq 4,73\cdot 10^6\text{m}^3$, soit 4250 tonnes chaque année.

Il faut garder à l'esprit que ce sont des ordre de grandeurs, car nous n'avons pas pris en compte les conditions aux limites sur les bords (en y) du canal d'écoulement du glacier, et que la vitesse est elle aussi un ordre de grandeur.

4 - Les conditions aux limites deviennent alors $v(z=0)=v(z=h)=0$, mais on a plus la condition sur la dérivée première de la vitesse. La vitesse s'écrit : $v(z)=-\frac{\rho g}{2\eta}\sin\alpha z^2+a+b$ Avec les conditions aux limites, on trouve $b=0$ et $a=\frac{\rho g}{2\eta}\sin\alpha h$.

$$\boxed{v(z)=\frac{\rho g}{2\eta}\sin\alpha z\,(h-z)}$$

C'est un écoulement de Poiseuille.