Exercice 1

- Avec les hypothèses : $\eta\Delta\vec{v} = \vec{grad}P$. On néglige la variation due à la gravité à l'échelle de la taille de la sphère.
- On cherche à connaitre le champ de pression pour connaitre la résultante des forces. Liquide incompressible donc $div\vec{v} = 0$ et donc $\vec{rot}(\vec{rot}(\vec{v})) = \vec{grad}(div\vec{v}) - \Delta\vec{v} = -\Delta\vec{v}$, donc le gradient de pression vaut l'opposé l'expression de la vitesse donné plus haut.

  En choisissant une projection sur $\vec{e_r}$ ou $\vec{e_\theta}$ (ce qui revient au même) :

  $$\frac{\partial P}{\partial r} = 3\eta\frac{Rv_\infty}{r^3}\cos\theta$$

  $$P = -3\eta\frac{Rv_\infty}{2r^2}\cos\theta + P_\infty$$

  En notant P_∞ la pression qui est dans le liquide loin de la sphère.

  La résultante des forces de pression, selon l'axe $\vec{e_z}$, est $F_{p,z} = -P(M)d\vec{S}\vec{e_z}$. Alors :

  $$F_{p,z} = -\iint P_\infty R^2 d\varphi\sin\theta d\theta\cos\theta + \iint 3\eta\frac{Rv_\infty}{2R^2}\cos^2\theta\sin\theta R^2 d\theta d\varphi$$

  $\boxed{\text{On trouve alors : } F_{p,z} = 2\pi\eta v_\infty R}$

- La force de cisaillement correspond à la force de frottement due à la viscosité du fluide. Pour un élément de surface $d\vec{S}$ de la sphère, celle-ci s'écrit :

  $$d\vec{F_c} = \eta dS\frac{\partial v}{\partial r}\vec{e_\theta}$$

  La projection suivant $\vec{e_z}$ nous donne alors :

  $$\boxed{F_{c,z} = \iint \eta\frac{\partial v}{\partial r}R^2\sin\theta d\theta d\varphi\sin\theta = \iint \eta\frac{3}{2}Rv_\infty\sin^3\theta d\theta d\varphi = 4\pi\eta Rv_\infty}$$

  L'intégrale sur θ vaut $4/3$.

- La force de trainée est la somme des deux forces précédentes. On a donc : $F_z = 6\pi\eta Rv_\infty$.

Exercice 2

1 - Comme l'écoulement est lent, et invariant selon x et y : l'écoulement ne dépend que de z. De plus, comme il est incompressible, $div(\vec{v}) = 0$, donc $v_z = cste = 0$, car la vitesse doit être nécessairement nulle en $z = 0$. L'écoulement est donc laminaire et est dirigé selon $\vec{e_z}$ (c'est une hypothèse, on suppose qu'il est dans le sens de la descente) : $\vec{v}(x, y, z) = v(z)\vec{e_z}$.

NB : avec un tel profil de vitesse, $(\vec{v}\cdot\vec{grad})\vec{v}$ est identiquement nul, mais on peut directement le négliger ce terme avec l'hypothèse de l'énoncé (écoulement lent et très visqueux).

L'équation de Navier-Stokes, avec les hypothèses de l'énoncé, devient :

$$0 = \eta\Delta\vec{v} + \rho\vec{g} - \vec{grad}(P)$$

En projetant, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \vec{e_x} & : & \eta\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \rho g \sin\alpha - \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \vec{e_z} & : & -\rho g \cos\alpha - \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \tag{1}$$

En intégrant selon $\vec{e_z}$ et avec la condition au limite $P(x, z = h) = P_0$, on obtient :

$$P(x, z) = P_0 + \rho g \cos\alpha(h - z)$$

En intégrant selon $\vec{e_x}$, avec la condition aux limites $\frac{\partial v}{\partial z}_{z=h} = 0$ (il n'y a pas de forces de cisaillement à l'interface air/fluide) devient alors :

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\rho g}{\eta} \sin\alpha(h - z)$$

En intégrant une nouvelle fois, avec la condition aux limites $v(z = 0) = 0$ (continuité de la vitesse avec le support) :

$$\boxed{v(z) = \frac{\rho g}{\eta} \sin\alpha z \left(h - \frac{z}{2}\right)}$$

Le profil de vitesse est parabolique.

2 - Le débit s'écrit, en prenant comme section un carré de largeur $L \gg h$ pour que les hypothèses de l'énoncé soient valables :

$$D = \int_{y=0}^{L} dy \int_{z=0}^{h} dz \cdot v(z)$$

En intégrant, on obtient :

$$\boxed{D = \frac{\rho g}{3\eta} \sin\alpha L h^3}$$

3 - La glace a une densité de 900kg.m^3. La vitesse proposée est la vitesse maximale de la glace, car c'est celle en surface. On a donc $\eta \simeq 7.1 \cdot 10^{12}\text{Pa.s}$.

On obtient donc, sur une année : $V = D\Delta t \simeq 4,73 \cdot 10^6\text{m}^3$, soit 4250 tonnes chaque année.

Il faut garder à l'esprit que ce sont des ordre de grandeurs, car nous n'avons pas pris en compte les conditions aux limites sur les bords (en y) du canal d'écoulement du glacier, et que la vitesse est elle aussi un ordre de grandeur.

4 - Les conditions aux limites deviennent alors $v(z = 0) = v(z = h) = 0$, mais on a plus la condition sur la dérivée première de la vitesse. La vitesse s'écrit : $v(z) = -\frac{\rho g}{2\eta} \sin\alpha z^2 + a + b$ Avec les conditions aux limites, on trouve $b = 0$ et $a = \frac{\rho g}{2\eta} \sin\alpha h$.

$$\boxed{v(z) = \frac{\rho g}{2\eta} \sin\alpha z\,(h - z)}$$

C'est un écoulement de Poiseuille.

Exercice 3

1 - Dans l'énoncé, le problème est dit invariant en θ donc la vitesse ne dépend pas de θ. D'autre part l'équation de conservation s'écrit, comme le fluide est incompressible : $div(\vec{v}) = 0$, cad $\partial u_z/\partial z = 0$, cad u_z ne dépend pas de z. Finalement, $\vec{u}$ ne dépend que de r.

On effectue un bilan de force sur un petit volume en coordonnées cylindrique au point $M(r, \theta, z)$. On projette directement selon z :

$$r d\theta dr P(z) - r d\theta dr P(z + dz) - \eta\tau(r + dr)(r + dr)d\theta dz + \eta\tau(r)r d\theta dz = 0 \tag{2}$$

Attention, la définition de τ implique qu'il est opposé à la variation spatiale de la vitesse. Il y a donc un signe - par rapport aux force classique de cisaillement. On obtient la relation voulue :

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial(r\tau)}{\partial r} = 0}$$

2 - On commence à intégrer selon z. Étant donné que u ne dépend pas de z, $\dot{\gamma}$ non plus, et τ non plus. Dès lors :

$$\int_0^L dz P(z) = P(L) - P(0) = -\Delta P = -\frac{L}{r}\frac{\partial r\tau}{\partial r}$$

On obtient donc : $\Delta P = \frac{L}{r}\frac{\partial r\tau}{\partial r}$. On intègre désormais sur r, et on trouve la relation demandée. Attention, durant le calcul, on intègre un r^2 qui fait aparaître un facteur $1/2$.

3 - Pour qu'il y ait écoulement, il faut qu'il existe une valeur de r telle que $\tau > \tau_s$ (car sinon $\dot{\gamma} = 0$). La plus grande valeur de r est le rayon R, on doit alors nécessairement avoir $R > R_s$ pour espérer voir un écoulement. On a alors $\tau_s = \tau_s R/R_s$.

Cela correspond à une pression minimum de $\Delta P_{min} = \frac{2\tau_s L}{R}$.

4 - Comme $\Delta P > \Delta P_{min}$, on a forcément $R > R_s$. Donc pour $r > R_s$:

$$-\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\tau_s}{\eta}\left(\frac{r}{R_s} - 1\right)$$

On trouve donc pour $r > R_s$:

$$u(r) = \frac{\Delta P}{4L\eta}(R + r - 2R_s)(R - r)$$

Pour $r < r_s$, on a $\dot{\gamma} = 0$ donc :

$$u(r) = u(R_s) = \frac{\Delta P}{4L\eta}(R - R_s)^2$$

Pour visualiser, l'effet, bouchon, il suffit de tracer la courbe de $u(r)$ en fonction de r.

Exercice 4

1 - Il y a deux cas :

$z < 0$: Avec l'équation d'incompressibilité $div(\vec{v}) = 0$, on trouve $\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$. Comme dans cette partie, les lignes de courants sont parallèle à l'axe Oz, la vitesse es tnécessairement selon e_z donc l'équation de conservation devient $\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$, don c$v_z = cste = v_0$. Finalement,

$$\vec{v} = v_0\vec{e_z}$$

$z > 0$: La conservation du débit impose que pour toute section du tube, on ait $\iint d\vec{S}\vec{v} = \pi r^2 v_z(r,z) = cste$, car v ne dépend pas de r. En l'occurrence, pour $z = 0$, on a $\pi r^2 v_z(r,z) = \pi\lambda^2 a^2 v_0$. On a donc :

$$v_z(r,z) = \frac{a^2}{\left(a + \frac{z^2}{b}\right)^2}v_0$$

Les lignes de courant sont définies par $\vec{v}\wedge\vec{dl}$. Comme $\vec{dl} = dr\vec{e_r} + dz\vec{e_z}$, donc on a :

$$v_r dz - v_z dr = 0 \Longrightarrow \frac{v_r}{v_z} = \frac{\partial r}{\partial z}$$

On trouve alors :

$$\boxed{\vec{v} = \frac{a^2}{\left(a + \frac{z^2}{b}\right)^2}v_0\vec{e_z} + \frac{2rz}{ab\left(1 + \frac{z^2}{ab}\right)^3}v_0\vec{e_r}}$$

On peut vérifier que l'écoulement est bien incompressible.

2 - Les lignes de courant s'écartent lors du passage dans la zone parabolique, l'élément de fluide se déforme de sorte à être plus fin pour respecter la conservation de la masse.

3 -

$$\vec{\Omega} = \vec{rot}(\vec{v}) = \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} = \frac{1 - 5z^2/ab}{(1 + z^2/ab)^4}\frac{2rv_0}{ab}\vec{e_\theta} \neq 0$$

Écoulement entre deux plaques

On peut raisonner en superposant les deux champs de vitesse comme en électromagnétisme.

Il faut séparer le ln en deux parties pour distinguer les deux vecteurs directeurs correspondant à l'écoulement. On introduit alors r_0 une longueur intermédiaire.

$$\vec{grad}(\phi) = av_0\left(\vec{grad}\ln\frac{r_1}{r_0} - \vec{grad}\ln\frac{r_2}{r_0}\right)$$

On trouve :

$$\vec{v} = av_0\left(\frac{\vec{e_{r_A}}}{r_A} - \frac{\vec{e_{r_B}}}{r_B}\right)$$

Le champs de vitesse créé par la source en A, à une distance r_A de cette source peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{v_A} = v_A(r_A, z)\vec{e_{r_A}}$$

En effet, par invariance, $\vec{v_A}$ ne peut dépendre de θ. D'autre part, comme l'écoulement est lent, il ne pourra être dirigé que selon $\vec{e_{r_A}}$.

Avec la conservation du débit, on a :

$$D_e = 2\pi r_A \int_{-e/2}^{e/2} dzv(r_A, z)$$

En notant $v_{moy} = \frac{1}{e}\int_{-e/2}^{e/2} dzv(r, z)$, qui correspond à la vitesse moyenne entre les deux plaques, on obtient :

$$\vec{v_{moy}}(r_A) = \frac{D_e}{2\pi re}\vec{e_{r_A}}$$

La vitesse décroit en $1/r_A$. S'il n'ya pas de viscosité, on a bien $v_{moy} = v$.

Même chose pour la source en B :

$$\vec{v_{moy}}(r_B) = -\frac{D_e}{2\pi re}\vec{e_{r_B}}$$

Au final :

$$\vec{v_{moy}} = \frac{D_e}{2\pi e}\left(\frac{1}{r_A}\vec{e_{r_A}} - \frac{1}{r_B}\vec{e_{r_B}}\right)$$

Les champs de vitesses sont à divergence nulle donc incompressibles.

Exercice 5

1 - Il y a invariance selon θ et selon z, mais aussi selon t (écoulement permanent). $\vec{v}$ ne dépend donc que de r.

2 - Le bilan de matière donne :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Les deux derniers termes de l'équation sont nuls à cause des invariances. En intégrant le premier terme, on trouve $v_r = \frac{cste}{r}$. Comme $v_r(R_1) = 0$ par conservation du débit, $\forall r, v_r = 0$.

La vitesse ne dépend donc que de r et a une composante uniquement selon $\vec{e_\theta}$ (d'après l'énoncé, $v_z = 0$).

3 - Le plus simple est de faire un bilan des moments selon $\vec{e_z}$ à un élément de fluide (en coordonnées cylindriques) qui est un anneau (ou tore) compris entre r et $r+dr$, d'épaisseur dz. Les forces visqueuses s'appliquent orthoradialement alors sur les surfaces internes et externe.

Le moment total exercé doit être nul de sorte que :

$$2\pi r dz \sigma_\theta(r) \times r - 2\pi(r+dr)dz\sigma_\theta(r+dr) \times (r+dr) = 0$$

cad : $r^2\sigma_\theta(r) - (r+dr)^2\sigma_\theta(r+dr) = 0$. On en déduit que $\frac{\partial}{\partial r}r^2\sigma_\theta = 0$.

D'autre part, $\sigma_\theta = \eta\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right) = \eta r \frac{\partial}{\partial r}\frac{v_\theta}{r}$. On trouve le résultant voulu :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3 \frac{\partial}{\partial r}\frac{v_\theta}{r}\right) = 0}$$

4 - On intègre la relaiton précédente et on trouve :

$$v_\theta = \frac{A}{r} + Br$$

Les conditions aux limites sont : $v_\theta(r = R_{1,2}) = R_{1,2}\Omega_{1,2}$. On obtient alors :

$$\boxed{v_\theta = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2)R_2^2 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\frac{1}{r}}$$

5 - Le couple exercé par le cylindre de rayon R_1 s'exprime comme la résultantes des contraintes de cisaillement dues à la viscosité :

$$M_\eta(R_1) = \iint R_1 d\theta dz R_1 \sigma_\theta(R_1) = 2\pi R_1^2 L \sigma_\theta(R_1)$$

Or, $\sigma_\theta(R_1) = -2B\eta/R_1^2$ donc on trouve que :

$$\boxed{M_\eta(R_1) = 4\pi\eta\frac{(\Omega_1 - \Omega_2)R_2^2 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}}$$

L'angle du ressort est donc : $\theta = M_\eta(R_1)/k$. On peut donc mesurer la viscosité du fluide.