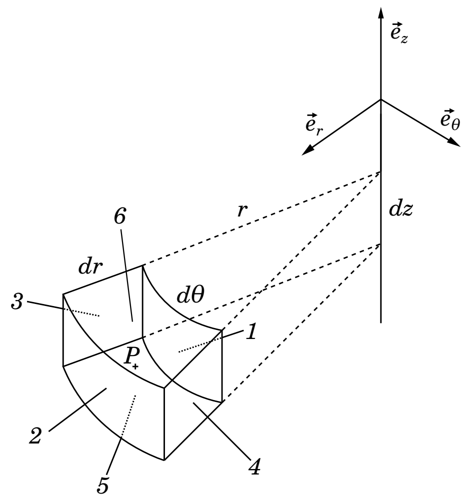
Flux et divergence en coordonnées cylindriques ● ○ ○

On s'intéresse à l'écoulement d'un fluide incompressible en utilisant la description langrangienne. On considère un volume $d\tau$ élémentaire, situé en $P = (r, \theta, z)$ en coordonnées cylindriques. Chaque face de ce volume est indexé de 1 à 6, comme indiqué sur le schéma ci-dessous.



Le champ de vitesse en tout point P est noté $\vec{v}(r, \theta, z)$. On admet que le débit volumique ϕ_v d'un fluide à travers une surface Σ est :

$$\phi_v = \iint_{\Sigma} d\vec{S} \cdot \vec{v} \tag{1}$$

Plus précisément, c'est la somme sur la surface Σ des flux (ou débits volumiques) élémentaires $d\phi_v = d\vec{S} \cdot \vec{v}$.

* Rappeler ce que sont les descriptions langrangienne et eulérienne d'un fluide en écoulement.
* Calculer les flux élémentaires $d\phi_{v,i}$ sur chaque face du volume élémentaire $d\tau$, $i \in \{1; 6\}$.
* En déduire la relation :

  $$\sum_{i=1}^{6} d\phi_{v,i} = \mathbf{div}(\vec{v}) d\tau$$

  Cela vous rappelle t-il un théorème ?
* On suppose désormais que l'écoulement est radial et qu'il ne dépend que de r : $\vec{v} = v(r)\vec{e}_r$. De plus, on suppose que l'écoulement est incompressible, c'est-à-dire que pour tout volume V ne contenant pas l'axe Oz, le débit de fluide entrant dans V est égal au débit de fluide sortant.

  En déduire que le champ de vitesse s'écrit $\vec{v} = \frac{A}{r}\vec{e}_r$, où A est constante.
* On s'intéresse au volume V délimitant un cylindre coaxial à l'axe Oz, de hauteur h, de rayon R. En considérant le champ de vitesse radial de la question précédente, calculer le débit volumique ϕ_v s'écoulant à travers les parois de ce cylindre en utilisant la définition du débit donné avec la formule 1. Est-ce compatible avec le théorème de Green-Ostrogradski ?

Données
Divergence en coordonnée cylindrique d'un vecteur $\vec{A}$:

$$\mathbf{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Théoèreme de Green-Ostrogradski :

$$\iiint_V \mathbf{div}(\vec{A})\, \mathrm{d}\tau = \oiint_{\Sigma} \overrightarrow{A} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}$$

Embouteille sur une autoroute

Sur une autoroute à 3 voies, la circulation est fluide, les véhicules se répartissent sur les 3 voies, se suivent sur chaque voie à 200m d'écart et se déplacent à $v_0 = 30 m.s^{-1}$ en moyenne. Un bouchon routier se forme subitement au point kilométrique D. Dans le bouchon, les véhicules sont à l'arrêt à raison d'un véhicule dans un espace de 10m de long en moyenne. Déterminer la vitesse du front du bouchon.

Forme d'une coulée d'huile ● ○ ○

Un bidon d'huile est muni d'une ouverture circulaire de rayon R et de centre O, à travers laquelle l'huile tombe et s'écoule en régime permanent. On définit l'axe vertical Oz dirigé vers le bas et on note $\vec{g} = g\vec{e}_z$ l'accélération de la pesanteur, la masse volumique de l'huile μ, et le débit massique sortant D. A la côte z, la vitesse du fluide $\vec{v} = v(z)\vec{e}_z$ est supposée uniforme. A l'ouverture en $z = 0$, l'huile a une vitesse v_0. Une fois sortie, la vitesse de l'huile $v(z)$ est prise égale à celle qu'aurait une bille en chute libre sans frottement lachée en $z = 0$ avec une vitesse v_0.

- $\curlyvee$ Donner l'expression de v_0 en fonction de μ, D et R.
- $\curlyvee$ Etablir l'expression de $v(z)$.
- $\curlyvee$ Déterminer le rayon $r(z)$ du filet d'huile à la côté z. On pourra simplifier l'expression finale en supposant $v_0 \simeq 0$.
- $\curlyvee$ Calculer le terme $\vec{v} \cdot \mathbf{grad}(\vec{v})$. Que représente t-il (on rappelle que l'écoulement est stationnaire) ? En déduire la vitesse $\vec{V}$ d'une particule de poussière contenue dans l'huile lors de l'écoulement. Préciser ce que sont les descrptions lagrangiennes et eulériennes d'un fluide.
- $\curlyvee$ Le bidon est à une hauteur H du sol. On referme rapidement l'ouverture du bidon. Quelle est la masse d'huile qui reste à s'écouler sur le sol ?

Correction - Forme d'une coulée d'huile

- On a tout simplement $v_0 = D/(\pi R^2\mu$.
- On utilise le théorème de Bernouilli (ou le fait que c'est une chute libre, comme dit dans l'énoncé, ce qui revient au même) :

$$\frac{v_0^2}{2} - \frac{v^2(z)}{2} = -gz$$

  donc $v(z) = \sqrt{v_0^2 + 2gz}$.
- Conservation du débit : $D = \mu v(z)\pi r^2(z)$, donc :

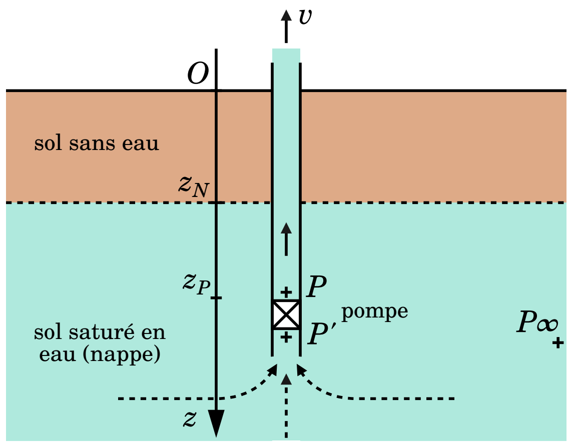
$$\begin{aligned} r(z) &= \sqrt{\frac{D}{\mu\pi\sqrt{v_0^2 + 2gz}}} \\ &\simeq \sqrt{\frac{D}{\mu\pi\sqrt{2g}}} z^{-\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

- Le terme se résume ici à : $\vec{v} \cdot \mathbf{grad}(\vec{v}) = v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = g$. Il représente l'accélération convective, c'est-à-dire à un changement du champ de vitesse dans l'espace, qui est non-nulle malgré le caractère permanent de l'écoulement. L'accélération $\dot{V}(t)$ de la particule de poussière correspond à l'altitude z à ce terme d'accélération convective. Il s'agit tout simplement d'une chute libre (aussi).
- La masse d'huile qui continue à se répandre est celle contenue dans la colonne en chute de hauteur H. Elle correspond à :

$$\begin{aligned} M &= \int_0^H dz \mu\pi r^2(z) \\ &= \frac{D}{\sqrt{2g}} \int_0^H dz z^{-\frac{1}{2}} \\ &= D\sqrt{\frac{2H}{g}} \end{aligned}$$

Pompe dans une nappe phréatique

Une nappe phréatique est une réserve d'eau contenue dans les porosités du sol (par exemple dans les interstices de grain de sable). Elle se remplit au gré des précipatations jusqu'à une profondeur minimale de $z_N = 20m$, et on admet que la pression de l'eau dans la nappe est équivalente à celle dans une étendue d'eau de masse volumique ρ à l'air libre dont la surface serait située en z_N.



Au fond d'un forage de rayon a et de profondeur $z_P = 40m$, une pompe de puissance $\dot{w}$ est immergée dans la nappe phréatique, pour remonter l'eau à la surface (où la pression est P_0) dans un réseau de distribution. La pompe génère une différence de pression $\Delta P = P_P - P_{P'}$ entre les profondeurs z_P et $z_{P'}$ et est supposée avoir une hauteur négligeable ($z_P \simeq z_{P'}$). Dans le forage, l'écoulement de l'eau est supposé parfait, et à la vitesse v. On souhaite connaitre le lien entre le débit D à la sortie du forage et la surpression ΔP fournie par la pompe. On prendra l'axe z comme indiqué sur le schéma, avec z croissant avec la profondeur.

- ⊛ On considère un point P_∞ dans la nappe phréatique loin du forage. Pourquoi la vitesse de l'eau est négligeable à ce point, même lorsque la pompe est en fonctionnement ? En déduire le champ de pression $P(z)$ loin du forage.
- ⊛ Pourquoi ne place t-on pas plutôt une pompe aspirante à la surface ?
- ⊛ En appliquant judicieusement le théorème de Bernoulli, obtenir une relation entre la surpression ΔP, la profondeur z_N de la nappe et la vitesse v.
- ⊛ Quelle surpression $\Delta P = P_{min}$ doit fournir la pompe pour faire remonter l'eau jusqu'à la surface ? En déduire le débit D, en fonction de ΔP et P_{min} dans le cas où $\Delta P > P_{min}$.
- ⊛ A l'aide d'un bilan d'énergie mécanique, montrer que la puissance fournie par la pompe s'écrit $\dot{w} = \Delta P \times D$.
- ⊛ La surpression ΔP étant fixée par construction, déterminer comment varie la puissance $\dot{w}$ en fonction du débit D.

En réalité, l'écoulement dans la nappe (avant l'arrivée dans le forage) n'est pas parfait, et il existe une résistance hydraulique R_h entrainant une chute de pression donnée par $P_\infty - P_{P'} = R_h \times D$, où P_∞ est la pression d'un point situé à l'horizontale de P', très loin du forage.

- ⊛ Donner la nouvelle relation entre le débit D et la surpression ΔP. Quelle est la puissance perdue par cette résistance hydraulique ? On simplifiera dans le cas où la chute de pression $R_h D$ est faible.

Correction - Pompe dans une nappe phréatique

- On considère un point P_∞ dans la nappe phréatique loin du forage. Pourquoi la vitesse de l'eau est négligeable à ce point, même lorsque la pompe est en fonctionnement ? En déduire le champ de pression $P(z)$ loin du forage.

  La surface par laquelle circule l'eau au point P_∞ est considérablement plus grande qu'au niveau du forage (proportionnelle en $1/r^2$). Avec la conservation du débit, la vitesse est nécessairement bien inférieure qu'au niveau du forage. On peut donc appliquer le théorème de la statique des fluides, et on trouve que :

  $$P(z) = P_0 + \rho g(z - z_N)$$

  On rappelle que dans la nappe, la pression P_0 se situe en z_N.

- La hauteur entre la nappe et la surface est de 20m, il faut donc une pression de 2 bar pour la faire remonter jusqu'à la surface. Une pompe aspirante ne peut retirer que la pression P_0=1 bar. Elle ne pourra pas remonter l'eau !

- On suppose que le point P_∞ se situe à la même pronfondeur que P (pour simplifier mais ça revient au même). Entre P_∞ et P' Bernoulli s'écrit donc :

  $$P_{P'} + \rho\frac{v^2}{2} = P(z_\infty) = P_0 + \rho g(z_{P'} - z_N)$$

  D'autre part, entre P et la surface :

  $$P_P + \rho\frac{v^2}{2} - \rho g z_P = P_0 + \rho\frac{v^2}{2}$$

  Et en utilisant $\Delta P = P - P'$ et en soustrayant les deux lignes précédentes :

  $$\Delta P - \rho g z_P = \rho\frac{v^2}{2} - \rho g(z_{P'} - z_N)$$

  On en déduit donc :

  $$\Delta P = \rho\frac{v^2}{2} + \rho g z_N$$

  La pompe doit fournir un supplément de pression $\rho g z_N$ pour monter l'eau à la surface, puis $\rho\frac{v^2}{2}$ pour lui faire acquérir de la vitesse.

- De la question précédente, pour $v = 0$: $\Delta P = P_{min} = \rho g z_N$. On a alors :

  $$D = \pi a^2\sqrt{\frac{2(\Delta P - P_{min})}{\rho}}$$

- On considère un volume de contrôle ouvert V^* entre les points P et P', ainsi qu'une masse dm entrant en P à l'instant t et resortant en P' à l'instant $t + dt$. L'énergie mécanique du système $V_C; dm$, qui est un système fermé s'écrit :

  $$E(t) = E_{V^*} - \rho g z_P + \frac{1}{2}dmv^2$$
  $$E(t + dt) = E_{V^*} - \rho g z_P + \frac{1}{2}dmv^2$$

Donc, ayant $z_C \simeq z_B$, on a $E(t+dt) - E(t) = 0$. D'autre part, la variation d'énergie cinétique correspond au travail des forces de pression et de la pompe durant dt :

$$E(t+dt) - E(t) = 0 = \dot{w}dt + P_P \pi a^2 v dt - P_{P'} \pi a^2 v dt$$

On trouve donc la relation voulue (comme $D = \pi a^2 v$) :

$$\dot{w} = D\Delta P$$

⊛ En utilisant les résultats précédents :

$$\dot{w} = \pi a^2 \Delta P \sqrt{\frac{2(\Delta P - P_{min})}{\rho}}$$

C'est une courbe en $\sim \Delta P^{3/2}$ qui démarre à P_{min}.

⊛ Il suffit de réappliquer le théorème de Bernoulli en ajoutant la chute de pression dans la nappe (c'est incorrect de l'appliquer tel quel mais c'est juste quand même) :

$$P_{P'} + \rho \frac{v^2}{2} + R_h D = P_0 + \rho g (z_{P'} - z_N)$$

On trouve donc :

$$D = \pi a^2 \sqrt{\frac{2(\Delta P - P_{min} - R_h D)}{\rho}}$$

Pour isoler D, il faut résoudre l'équation du second ordre en D. On trouve après résolution :

$$D = \frac{\pi^2 a^4}{\rho} \left(\sqrt{R^2 + \frac{\rho(\Delta P - P_{min})}{\pi^2 a^4}} - R \right)$$

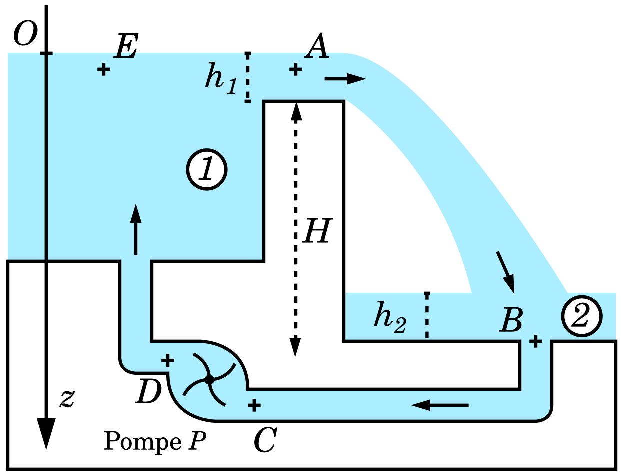
On retrouve bien le résultat précédent lorsque $R = 0$. La puissance perdue est alors :

$$\dot{w}_P = \pi a^2 \Delta P \sqrt{\frac{2(\Delta P - P_{min})}{\rho}} - \Delta P \frac{\pi^2 a^4}{\rho} \left(\sqrt{R^2 + \frac{\rho(\Delta P - P_{min})}{\pi^2 a^4}} - R \right)$$

Il faut ensuite simplifier en faisant un d.l. en R. Bon courage.

Bassin à débordement

On s'intéresse à un bassin à débordement comme schématisé sur la figure ci-dessous. Deux bassins, notés 1 et 2, (carrés de côté L) sont situés l'un à coté de l'autre, séparé par un mur de hauteur H. Le niveau d'eau du bassin 1 se situe à un niveau h_1 au-dessus du haut du mur de séparation (de largeur L), l'eau déborde et s'écoule ainsi dans le bassin 2, où le niveau de l'eau est h_2.



Une pompe, située dans une canalisation de rayon $a \ll L$, refoule ensuite l'eau du bassin 2 dans le bassin 1 pour que l'eau reste en circuit fermé. La pompe de puissance $\dot{w}$ génère une surpression $\Delta P = P_D - P_C$ entre son entrée et sa sortie, et on supposera sa hauteur négligeable ($z_C \simeq z_D$). On prendra l'axe z comme indiqué sur le schéma, avec z croissant avec la profondeur et on notera ρ la masse volumique de l'eau et P_0 la pression atmosphérique.

- ⊛ L'écoulement est supposé parfait entre les lignes de courant BC, DE etEA. Peut-on faire cette hypothèse sur les trajets AB et CD ? Conclure sur quels trajets il est possible d'appliquer le théorème de Bernoulli.

- ⊛ Déterminer les pressions $P_1(z)$ et $P_2(z)$ dans les bassins 1 et 2. On supposera que le champ de vitesse est négligeable dans les bassins, ceux-ci étant larges.

- ⊛ En déduire la vitesse de l'eau $v(z)$ au niveau du débordement (à la verticale du point A), puis le débit D en fonction de h_1.

- ⊛ En appliquant judicieusement le thérème de Bernoulli sur différents trajets, expliciter une relation entre ΔP et les hauteurs h_1, h_2 et H. Quelle surpression ΔP_{min} minimale doit fournir la pompe pour monter le niveau de l'eau du bassin 1 jusqu'à $z = h_1$?

- ⊛ A l'aide d'un bilan d'énergie mécanique, montrer que la puissance fournie par la pompe s'écrit $\dot{w} = \Delta P \times D$.

- ⊛ Pourquoi la somme $h_1 + h_2$ est une constante (de h_1 et h_2) ? En déduire la puissance $\dot{w}$ que doit fournir la pompe pour que l'eau atteigne une hauteur h_1 au-dessus du mur.

Correction - Bassin à débordement

- Sur le trajet AB, l'écoulement est nécessairement turbulent pour que l'énergie cinétique de la chute soit dissipée (la vitesse en entrée de la canalisation $v_B = D/\pi a^2$ est indépendante de la vitesse de chute $\simeq \sqrt{2gH}$ puisque H et la section a peuvent être choisis indépendamment).

  Sur le trajet CD, la pompe est là et génère aussi des turbulences ainsi que de l'énergie mécanique : Bernoulli n'est pas applicable.

- On applique la loi de la statique des fluide $P_1(z)$ et $P_2(z)$ dans les bassins 1 et 2 :

$$P_1(z) = P_0 + \rho g z, \quad z \in \text{bassin1}$$
$$P_2(z) = P_0 + \rho g(z - (H + h_1)), \quad z \in [H + h_1 - h_2, H + h_1], \text{bassin2}$$

- On applique Bernoulli entre le point A, d'altitude z au niveau du débordement, et le point E, situé à la même profondeur z, mais en plein dans le bassin. La pression en A est celle de l'atmosphère, puisqu'il n'y a rien pour retenir l'eau (pas de paroi). La vitesse en E est nulle, car on considère que la vitesse est négligeable dans les bassins. Enfin, $P_E = P_1(z)$.

$$\frac{\rho}{2} v_A^2 + P_0 = P_1(z)$$

  Donc, on retrouve le grand classique :

$$v(z) = \sqrt{2gz}$$

  Le débit est alors :

$$\begin{aligned} D =& L \int_0^z \sqrt{2gz} dz \\ =& \frac{2\sqrt{2g}}{3} L h_1^{3/2} \end{aligned}$$

- La vitesse dans la canalisation est notée $v_c = D/\pi a^2$ par conservation du débit. **Attention : l'axe des z est orienté vers le bas : il y a un signe - devant les termes en $\rho g z$.** En appliquant une premièr efois Bernoulli entre la surface du bassin 2 et le point B :

$$P_B - \rho g h_2 + \frac{\rho}{2} v^2 = P_0$$

  Puis entre les trajets BC et CD on a les relations :

$$P_B + \frac{\rho}{2} v^2 - \rho g z_B = P_C + \frac{\rho}{2} v^2 - \rho g z_C$$
$$P_D = P_C + \Delta P$$

  Enfin, on applique Bernoulli entre D et le point E :

$$P_D + \frac{\rho}{2} v^2 - \rho g z_C = P_E - \rho g z_E = P_0$$

  car $P_E = P_0 - \rho g z_E$. On en déduit donc que (avec $z_B = H + h_1$) :

$$\Delta P = \rho g (H + h_1 - h_2)$$

  On retrouve bien le cas statique : la vitesse n'intervient pas dans notre circuit. C'est normal : l'énergie cinétique acquise en entrant dans B retourne sous forme de pression en sortant en arrivant dans le bassin 1.

  Dans le cas $h_1 = 0$, l'eau se situe à ras bord mais ne coule pas encore. On a donc $\Delta P_{min} = \rho g (H - h_2)$.

⊛ On considère un volume de contrôle ouvert V^* entre les points C et D, ainsi qu'une masse dm entrant en C à l'instant t et resortant en D à l'instant $t+dt$. L'énergie mécanique du système $V_C; dm$, qui est un système fermé s'écrit :

$$
\begin{aligned}
E(t) &= E_{V^*} - \rho g z_C + \frac{1}{2} dm v^2 \\
E(t+dt) &= E_{V^*} - \rho g z_D + \frac{1}{2} dm v^2
\end{aligned}
$$

Donc, ayant $z_C \simeq z_B$, on a $E(t+dt) - E(t) = 0$. D'autre part, la variation d'énergie cinétique correspond au travail des forces de pression et de la pompe durant dt :

$$E(t+dt) - E(t) = 0 = \dot{w}dt + P_C \pi a^2 v dt - P_D \pi a^2 v dt$$

On trouve donc la relation voulue (comme $D = \pi a^2 v$) :

$$\dot{w} = D \Delta P$$

⊛ La quantité $L^2 \times (h_1 + h_2) = V$ représente le volume total du bassin, qui est constant, comme l'eau s'écoule en cycle fermé. Avec les relations précédentes :

$$
\begin{aligned}
\dot{w} &= \rho g (H + h_1 - h_2) \frac{2\sqrt{2g}}{3} L h_1^{3/2} \\
&= \rho g (H' + 2h_1) \frac{2\sqrt{2g}}{3} L h_1^{3/2}
\end{aligned}
$$

avec $H' = H - V/L^2$. Seule solution : résolution graphique ou numérique.

Résistance autour d'une bille ● ● ○

On s'intéresse à l'écoulement stationnaire, incompressible d'un fluide de masse volumique ρ et de viscosité η autour d'une sphère de rayon R. La vitesse de l'écoulement loin de la sphère est $v_\infty \vec{e_z}$. On adoptera les coordonnées sphériques d'axe Oz, O étant le centre le centre de la sphère.

- On suppose que l'écoulement permet de négliger le terme convectif de l'équation de Navier-Stokes devant le terme diffusif. Comment s'écrit alors cette équation ?
- On suppose que la vitesse est telle que : $\vec{rot}(\vec{rot}(\vec{v})) = \frac{3v_\infty R}{r^3}\left(\cos\theta \vec{e_r} + \frac{1}{2}\sin\theta \vec{e_\theta}\right)$. Quelle est la résultante des forces de pression sur la sphère ?
- Quelle est la résultante des actions de cisaillement sur la sphère ? On donne $\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)_{r=R} = \frac{3v_\infty}{2R}\sin\theta$.
- Trouver la force de trainée s'exerçant sur la sphère.

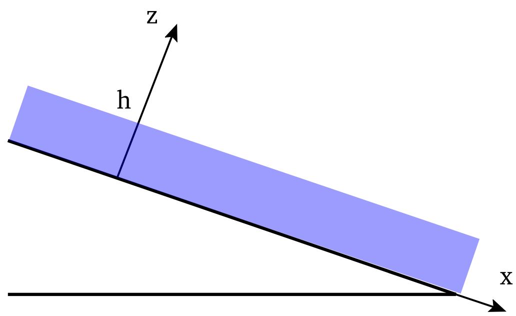
On donne :

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} \tag{2}$$

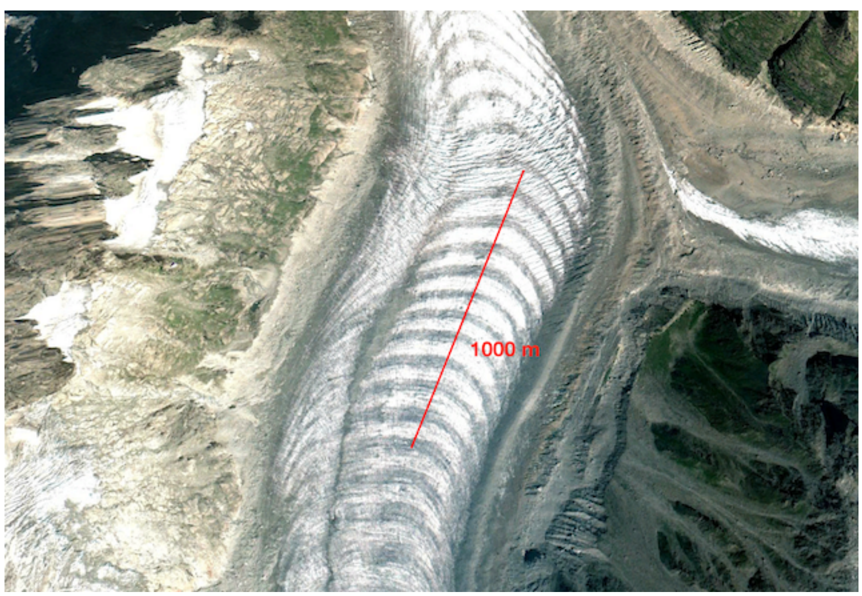
$$\vec{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\vec{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\vec{e_\varphi} \tag{3}$$

Ecoulement d'un fluide en pente ● ○ ○

On considère un fluide d'épaisseur h s'écoulant lentement sur un plan infini incliné d'un angle α par rapport à la verticale. Le fluide a une forte viscosité η et une masse volumique ρ, et il est soumis à la gravité. On est en régime permanent, et on suppose que la vitesse selon $\vec{e}_y$ est nulle.



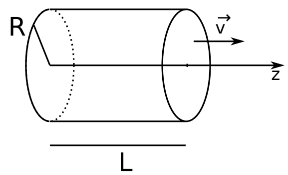
- Ecrire le bilan des forces volumiques s'exerçant sur un volume de fluide situé au point $M = (x, y, z)$.
- Montrer que $\vec{v}(x, y, z) = v(z)\vec{e_x}$. Quel est le profil de vitesse dans le fluide ?
- En déduire le débit linéique (le débit par unité de longueur selon l'axe y).
- On souhaite avoir un ordre de grandeur de la viscosité d'un glacier. Pour cela, dispose d'image satellite du glacier du Tacul, situé sur la face nord du Mont Blanc. Chaque "rayure" correspond à une année. Estimer sa viscosité.

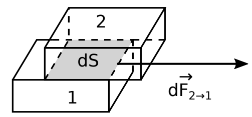


- En reprenant la première figure, on place désormais une plaque au dessus du liquide, au niveau de $z = h$. Que deviennent les conditions aux limites ? Trouver le nouveau profil de vitesse. Comment s'appelle se type d'écoulement ?

Exercice 3

On étudie un écoulement permanent d'un fluide incompressible de masse volumique μ, dans un tuyau cylindrique horizontal d'axe Oz, de rayon R, et de longueur L (schéma de gauche). Le champ de pression appliqué le long du tube est noté $P(r, z)$. Par invariance, le champ de vitesse est supposé ne dépendre que de r et z, et est dirigé selon $\vec{e_z}$. Il est noté $\vec{u} = u(r, z)\vec{e_z}$. On définit la vitesse de cisaillement par la quantité $\dot{\gamma} = -\frac{du}{dr}$.





On définit la force surfacique de viscosité $\vec{\tau}$, ou contrainte de cisaillement, entre deux couches adjacentes de fluide, la quantité : $\vec{\tau} = \frac{d\vec{F}}{dS}$. où $d\vec{F}$ est la force qui s'exerce mutuellement entre les couches adjacentes, et dS la surface élémentaire de contact entre ces deux surfaces (schéma de droite).

★ Quelle est la relation entre la force de viscosité $\vec{\tau}$ et le champ de vitesse u dans le cas d'un fluide classique (vu en cours), dit newtonien ? On pourra dans cette question se placer en coordonnées cartésiennes.

Fluide de Bingham

Un fluide est dit de Bingham si les contraintes de cisaillements entre les couches obéissent à une loi de seuil :

$$\begin{cases} \tau > \tau_s & : \quad \tau = \tau_s + \eta\dot{\gamma} \\ \tau < \tau_s & : \quad \dot{\gamma} = 0 \end{cases}$$

On supposera que le fluide que l'on étudie obéit à une telle loi.

★ Quel est la différence entre un fluide classique et un fluide de Bingham ?

★ Montrer que $\vec{u}$ ne dépend que de r. En négligeant les actions de la pesanteur, déterminer la relation suivante :

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial(r\tau)}{\partial r} = 0$$

★ Établir la relation :

$$\tau(r) = \tau_s \frac{r}{R_s}$$

où R_s est le rayon de seuil, défini par $R_s = 2\tau_s L/\Delta P$, en notant $\Delta P = P(0) - P(L)$ la chute de pression entre l'entrée et la sortie du tuyau. Quel est le signe de ΔP ?

★ Pour quelle pression minimale ΔP_{min} commence t-on à voir un écoulement à travers le tube ?

★ On suppose que $\Delta P > \Delta P_{min}$. Déterminer le champs de vitesse dans le tube. Tracer son allure et expliquer pourquoi l'écoulement présente une zone dite *bouchon*.

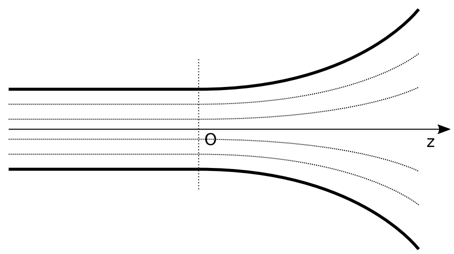
Exercice 4

Tuyau parabolique

Un fluide est en écoulement permanent dans une portion de tube à section parabolique, avec Oz en axe de symétrie. Les lignes de courant s'écoulant dans le tube ont pour équation :

$$\begin{cases} z < 0 \quad : & r = \lambda a \\ z > 0 \quad : & r = \lambda \left(a + \frac{z^2}{b} \right) \end{cases}$$

où a est le rayon du tube pour $z < 0$ et b une longueur caractrsitique de l'évasement du tube pour $z > 0$ (cf schéma). Le paramètre λ décrit permet de décrire les lignes de courant : chaque ligne de courant est paramétrée par une valeur de λ donné.



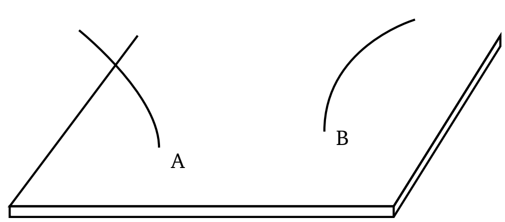
Le fluide est incompressible et la composante axiale de v_z de la vitesse est supposée uniforme sur une section perpendiculaire, cad v_z ne dépend pas de r. On note v_0 la vitesse en O.

* Déterminez la composante vitesse selon z, v_z en tout point.
* Déterminez la composante vitesse selon r, v_r en tout point. En déduire l'expression du champ de vitesse $\vec{v}$.
* Comment évolue un élément de fluide qui traverse le tuyau ?
* Un écoulement est dit rotationnel si une particule de fluide ne subit pas de rotation lors de l'écoulement. Est-ce le cas ici ? On pourra le vérifier en calculant $\tilde{\text{rot}}(\vec{v})$: si $\tilde{\text{rot}}(\vec{v}) \neq 0$ alors l'écoulement est irrotationnel. On donne la formule du rotationnel en coodronnées cylindrique ci-dessous.

$$\mathbf{rotA} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \mathrm{A}_z}{\partial \theta} - \frac{\partial \mathrm{A}_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{u_r} + \left(\frac{\partial \mathrm{A}_r}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{A}_z}{\partial r} \right) \mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r}(r\mathrm{A}_\theta) - \frac{\partial \mathrm{A}_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{u_z}$$

Écoulement entre deux lames

On considère deux plaques infinies de verres séparées d'une épaisseur e où circule un fluide incompressible. Du fluide est injecté à un débit D_e par le tuyau A, et il peut ressortir à travers le tuyau B identique. On suppose que l'écoulement est incomprésible et relativement lent.

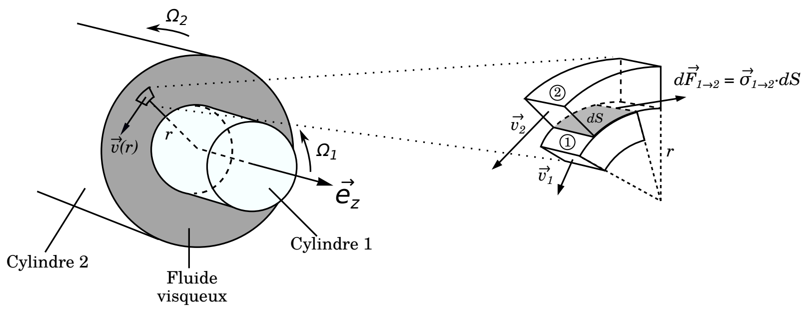


1 - Proposer une solution pour le champ de vitesses en faisant des hypothèses raisonnables.

2 - Est-ce un écoulement compressible ?

Boîte automatique • • •

On s'intéresse au convertisseur de couple d'une boite automatique d'un véhicule, qui permet de se passer d'un embrayage. On le modélise comme un système de deux cylindres de même axe $\vec{e}_z$, et de rayons respectifs R_1 et R_2, de longueur L, où se trouve un fluide de viscosité η élevée (*schéma de gauche*). Le moteur (respectivement l'arbre de transmission) est solidaire du cylindre 1 (resp. 2) et tourne à la vitesse Ω_1 (resp. Ω_2). Lorsque le moteur fournit un couple Γ_1 au cylindre 1, il entraîne le fluide situé entre R_1 et R_2, qui entraîne à son tour le cylindre 2. On souhaite étudier le fonctionnement du dispositif, et pour cela, on se placera en coordonnées cylindriques.



On rappelle que la force surfacique de viscosité, entre deux couches élémentaires 1 et 2 adjacentes de fluide, s'écrit : $\vec{\sigma}_{1\to 2} = \frac{d\vec{F}_{1\to 2}}{dS}$, où $d\vec{F}_{1\to 2}$ est la force exercée de la couche 1 sur la couche 2, dS étant la surface élémentaire de contact (*schéma de droite*). On admet que son expression en coordonnées cylindriques de sa composante selon $\vec{e_\theta}$ s'écrit :

$$\sigma_\theta(r,\theta,z) = \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right)$$

On admet que les autres composantes de $\vec{\sigma}$ sont nulles ($\sigma_r = \sigma_z = 0$). On suppose par ailleurs que l'écoulement est permanent, que la vitesse ne dépend que de r, et enfin que $v_z = 0$.

★ Quel est le nombre de Reynolds de cet écoulement ? En déduire le type d'écoulement.

★ Montrer que le champ de vitesse est strictement orthoradial : $\vec{v} = v_\theta(r)\vec{e_\theta}$.

★ En faisant un bilan des moments sur un élément de fluide selon $\vec{e_z}$ et en négligeant les forces de pression, montrer que la vitesse vérifie la relation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3 \frac{\partial}{\partial r}\frac{v_\theta}{r}\right) = 0$$

★ A l'aide des conditions aux limites, en déduire l'expression du champ de vitesse $\vec{v}$.

★ Calculer le couple $\Gamma_{1\to 2}$ qu'exercent les forces visqueuses sur le cylindre 2. Comparer avec $\Gamma_{2\to 1}$.

On suppose que le moteur peut asservir son régime moteur de sorte à garder Ω_1 fixé, quelque soit le couple $\Gamma_{1\to 2}$ qu'il délivre.

★ Le véhicule roule à vitesse constante dans une montée, équivalent à un couple résistif $-\Gamma_r$ sur l'arbre de transmission. Déterminer Ω_2 puis le rendement du convertisseur de couple. Quels sont les intérêts et les incovénients d'un convertisseur de couple par rapport à un embrayage classique ?

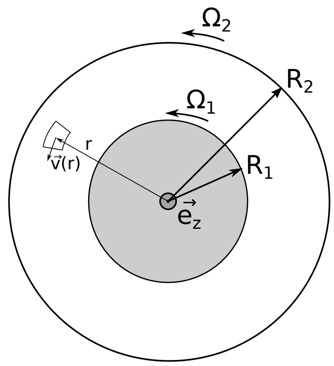
★ Désormais, le véhicule est intialement à l'arrêt, et démarre à pleine puissance sur une route plate à $t = 0$. L'inertie du véhicule est vue au niveau du cylindre 2 comme un moment d'inertie J. Déterminer l'évolution $\Omega_2(t)$.

Données : $R_1 = 295$mm, $R_2 = 300$mm, $L = 500$mm, $\rho = 860$kg.m^{-3} et $\eta = 120$ SI.

$$\mathrm{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Exercice 5

On considère un fluide incompressible, de viscosité η contenu entre deux cylindres orientés verticalement, de même axe O_z, et de rayons respectifs R_1 et R_2 (avec $R_1 < R_2$). La hauteur des cylindres L est très grande devant les rayons : $L \gg R_1, R_2$. Les deux cylindres peuvent tourner indépendamment l'un de l'autre autour de l'axe Oz.



On définit la force surfacique de viscosité $\vec{\sigma}$, ou contrainte de cisaillement, entre deux couches élémentaires adjacentes de fluide, la quantité : $\vec{\sigma} = \frac{d\vec{F}}{dS}$, où $d\vec{F}$ est la force qui s'exerce mutuellement entre les couches adjacentes, et dS la surface élémentaire de contact entre ces deux surfaces. L'expression en coordonnées cylindrique de sa composante selon $\vec{e_\theta}$ s'écrit :

$$\sigma_\theta(r,\theta,z) = \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right)$$

Il est possible de démontrer que, dans le cadre de ce problème, les autres composantes de $\vec{\sigma}$ sont nulles : $\sigma_r = \sigma_z = 0$. Nous l'admettrons pour la suite du problème.

L'écoulement est supposé permanent. On suppose aussi que $v_z = 0$.

- ♣ Quel est le nombre de Reynolds de cet écoulement ? En déduire le type d'écoulement. *Données :* $R_1 = 40\text{cm}$, $R_2 = 60\text{cm}$, $\Omega_1 \simeq \Omega_2 = 1\text{rad.s}^{-1}$, $\rho = 960\text{kg.m}^{-3}$ et $\eta = 120$ SI.
- ♣ A partir des invariances du problèmes, montrer que v ne dépend que de r. En s'appuyant sur un bilan de matière, retrouver l'expression de l'équation de conservation de la masse (ou du débit) et en déduire que le champ de vitesse s'écrit $\vec{v} = v_\theta(r)\vec{e_\theta}$.
- ♣ En faisant un bilan des moments sur un élément de fluide selon $\vec{e_z}$, montrer que la vitesse vérifie la relation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3 \frac{\partial}{\partial r}\frac{v_\theta}{r}\right) = 0$$

  Pourquoi les forces de pression n'interviennent-elles pas ?
- ♣ Le cylindre de rayon R_1 (resp. R_2) tourne à la vitesse angulaire Ω_1 (resp. Ω_2). En déduire l'expression du champs de vitesse.
- ♣ On suppose que le cylindre intérieur (de rayon R_1) est maintenu fixe (cad $\Omega_1 = 0$) à l'aide d'un ressort de torsion qui exerce un moment $\vec{M} = k\theta\vec{e_z}$. Le cylindre extérieur tourne toujours à la vitesse Ω_2. De quel angle θ tourne le ressort ? A quel quantité physique a t-on alors accès ?
- ♣ En étant toujours dans la situation $\Omega_1 = 0$, calculer la puissance mécanique dissipée dans le fluide.

  NB :

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Exercice 6

Une tornade assimilée à un écoulement parfait, permanent, incompressible de l'air, de masse volumique $\mu = 1.3\text{kg.m}^{-3}$, est caractérisé par un vecteur tourbillon $\vec{\Omega} = \Omega\vec{u_z}$, supposé uniforme à l'intérieur de la tornade ($r \leq a$) et nul à l'extérieur de la tornade. Cette dernière est modélisée par un cylindre d'axe (Oz) et de rayon $a = 50\text{m}$. On se place en coordonnées cylindriques.

1 - Donnez une expression intégrale de la vitesse $\vec{v}$ (on ne cherche pas à calculer cette intégrale à ce stage de l'exercice). A quel problème électrostatique la tornade est-elle assimilable ?

2 - On se limite à des mouvements de l'air définis par $\vec{v} = v(r)\vec{u_\theta}$. Donner l'allure de $v(r)$.

3 - Calculer le champ de pression. On rappelle que :

$$(\vec{v}.\vec{grad})\vec{v} = \vec{grad}(v^2/2) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$$

4 - Quelle est la vitesse maximale théorique que peut avoir une tornade ? Est-ce physiquement possible ?

4 - Un toit de masse surfacique de 100kg.m^{-2}, simplement posé et horizontal, peut être soulevé au passage de la tornade ? On suppose que la vitesse maximale de la tornade est $v_{max} = 180\text{km.h}^{-1}$.

On donne :

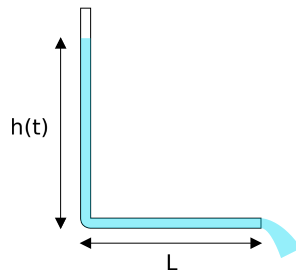
$$div\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{grad}U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e_z}$$

Exercice 7

Le tube en "L" suivant a une section constante s, mais dont les dimensions longitudinales sont très grande devant le diamètre, on pourra considérer que l'écoulement est unidimensionnel. Le liquide est supposé idéal et incompressible.

Dans l'état initial, la hauteur du liquide est h_0 et l'extrémité inférieur est bouchée. On ouvre le bouchon à $t = 0$.



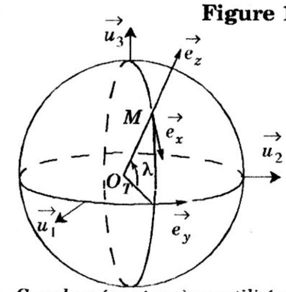
1 - Déterminez la vitesse d'éjection v en fonction la hauteur h. Examiner le cas où $L \longrightarrow 0$.

2 - Exprimer la pression $P(M, t)$ en tout point en fonction de P_{atm}, ρ, g, L et $h(t)$. En quel point est-elle maximale ?

Exercice 8

On considère la Terre comme une sphère de rayon R_T et de centre O_T. Le repère $R_G = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ est fixe et est considéré comme galiléen, avec $\vec{u_3}$ parallèle à l'axe Nord-Sud. Pour tout point M de latitude λ de la surface, on associe le repère $R_T = (\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$. Ce repère R_T est donc en rotation $\vec{\Omega} = \Omega\vec{u_3}$ par rapport à R_G.

Figure 1



Coordonnées et repères utilisés

On note $\vec{g}$ le champ de pesanteur terrestre. L'atmosphère est considéré comme une fine couche d'air, qui est un gaz parfait de masse molaire M, de masse volumique ρ, et dont les écoulements sont considérés comme parfaits. On notera $v(x, y, z)$ le champ des vitesses dans R_T, $P(x, y, z)$ le champ de pression.

On cherche à étudier les vents dominants à la surface du globe, cad on se limite aux écoulements de grande échelle, réguliers dans le temps (stationnaires).

- ♣ Le référentiel R_T n'étant pas galiléen, on admet que les forces volumiques d'inertie se réduisent au terme de Coriolis, qui s'écrit : $f_{vol,C} = -2\rho\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$. Comment s'écrit la relation fondamentale de la dynamique ?

- ♣ En faisant l'hypothèse que l'atmosphère est isotherme, et en supposant que l'air est à l'équilibre (cad dans fixe par rapport à R_T), estimer l'épaisseur de l'atmosphère. On notera $P_{eq}(x, y, z)$ la pression correspondante. Que peut-on en déduire sur la partie verticale de la vitesse $v_z = \vec{v} \cdot \vec{e_z}$?

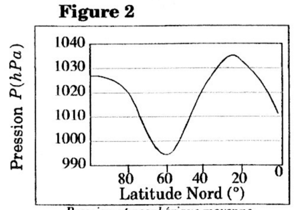
- ♣ En notant $p(x, y, z) = P(x, y, z) - P_{eq}(x, y, z)$, trouver la nouvelle relation vérifiée par $\vec{v}$ et $p(x, y, z)$

- ♣ On appelle nombre de Rossby (noté Ro) d'un écoulement le rapport entre le terme d'accélération particulaire et l'accélération lié à la force de Coriolis. Estimer Ro pour des mouvements atmosphériques où la vitesse typique est $U \simeq 10\text{m.s}^{-1}$ et d'extension $L \simeq 1000\text{km}$. Simplifier l'équation trouvée à la première question.

- ♣ Établir alors l'expression du champs de vitesse $\vec{v}$. Pourquoi seule la composante horizontale de $\vec{grad}(p)$ intervient dans l'expression de $\vec{v}$?

- ♣ La figure ci dessous donne la valeur moyenne de la pression atmosphérique P au niveau du sol, le long d'un méridien quelconque. En déduire l'allure de la circulation des vents sur le globe, en fonction de la latitude λ.

Figure 2



Pression atmosphérique moyenne, au niveau du sol, dans l'hémisphère nord, en fonction de la latitude.

- ♣ Estimer la valeur typique de la vitesse des vents dominants en Europe.

Données : $R_T = 6370\text{km}$, $\Omega = 2\pi/86164\text{rad.s}^{-1}$, $M = 29\text{g.mol}^{-1}$.