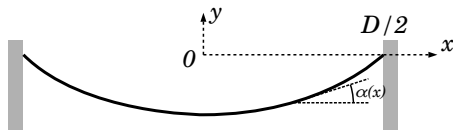


Etude d'une corde statique suspendue

On considère une corde suspendue entre deux points fixes de même hauteur $y = 0$, situés à $x = -D/2$ et $x = +D/2$. La corde a une masse volumique μ et on note $y(x)$ sa hauteur à l'abscisse x . La corde est, statique, n'est soumise qu'à la pesanteur \vec{g} et à sa tension $T(x)$.

On considère le cas général, c'est-à-dire le cas où l'angle α (défini entre la tangente de la corde et l'horizontale) n'est pas nécessairement petit. On notera respectivement T_0 et α_0 la tension de la corde et l'angle α en $x = -D/2$.



- ★ En appliquant une première fois le principe fondamental de la statique sur un élément de corde de longueur dl , montrer que $T(x) \cdot \cos(\alpha(x)) = T_0 \cdot \cos(\alpha_0)$.
- ★ En appliquant une seconde fois le principe fondamental de la statique, montrer que $y(x)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{l_c} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

On explicitera l'expression de l_c , dont on précisera la dimension.

- ★ Résoudre cette équation différentielle. Trouver la solution à l'aide des conditions aux limites. On donne : $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \text{argsh}(x)$
- ★ Montrer que le poids total de la corde s'écrit :

$$P = 2\mu g l_c \times \text{sh}\left(\frac{D}{2l_c}\right)$$

- ★ Expliciter l'expression de la tension $T(x)$ le long de la corde. A quelle endroit est-elle maximale ? Minimale ? Comparer avec le poids de la corde.
- ★ Exprimer la longueur L et la *flèche* h (la hauteur entre le point le plus haut et le plus bas) de la chaîne en fonction du paramètre l_c . Comment connaître alors la tension dans une chaîne suspendue simplement à partir d'une photographie de celle-ci et de sa masse linéique ?

Etude d'un instrument à corde

On considère une corde d'un instrument de musique fixée entre deux points de même hauteur $y = 0$, situés à $x = 0$ et $x = D$. On note $y(x)$ son écart par rapport à l'horizontale (l'axe Ox) à l'abscisse x . La corde a une masse volumique μ et est tendue à une tension T_0 à ses extrémités, suffisamment forte pour que la pesanteur puisse être négligée et que l'écart y reste très petit devant la longueur L de la corde. On négligera par ailleurs les frottements lorsque la corde vibre.

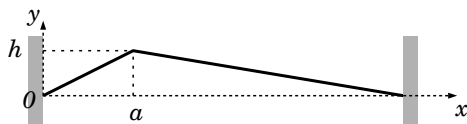
On s'intéresse à la dynamique de la corde, en particulier aux fréquences qui seront générées lorsqu'elle sera soumise à une excitation par le musicien.

- A l'aide des hypothèses données et en utilisant le principe fondamental de la dynamique, montrer que la tension est constante le long de la corde, puis établir une équation différentielle sur $y(x, t)$. On fera intervenir une célérité c que l'on explicitera.
- Quelles sont les solutions générales de cette équation ? Commenter.
- On s'intéresse aux solutions de l'équation s'écrivant sous la forme $y(x, t) = F(x)G(t)$. Comment s'appelle ce type d'onde ? Obtenir de nouvelles équations différentielles sur F et G . Combien y a-t-il de constantes d'intégration ?
- Montrer que la solution générale sur y s'écrit alors :

$$y(x, t) = \sum_n [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \cdot \sin(k_n x)$$

où A_n et B_n sont des constantes. Expliciter l'expression de k_n .

- On excite la corde avec une excitation dessinée ci-dessous. Donner l'expression de $y(x, t)$ dans ce cas-là.



On rappelle la relation suivante :

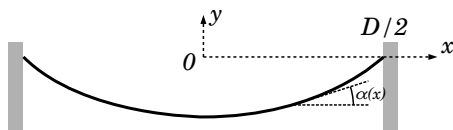
$$\int_0^1 du \times \sin(n\pi u) \times \sin(m\pi u) = \frac{\delta_{nm}}{2}$$

où $\delta_{nm} = 1$ si $n = m$ et $\delta_{nm} = 0$ si $n \neq m$.

Étude d'une corde

On considère une corde suspendue entre deux points fixes de même hauteur $y = 0$, situés à $x = -D/2$ et $x = +D/2$. La corde a une masse volumique μ et on note $y(x)$ sa hauteur à l'abscisse x .

Cas statique La corde est supposée dans un premier temps statique. On considère le cas général, c'est-à-dire le cas où l'angle α (défini entre la tangente de la corde et l'horizontale) n'est pas nécessairement petit. On notera respectivement T_0 et α_0 la tension de la corde et l'angle α en $x = -D/2$.



- ★ En appliquant une première fois le principe fondamental de la statique sur un élément de corde de longueur dl , montrer que $T(x) \cdot \cos(\alpha(x)) = T_0 \cdot \cos(\alpha_0)$.
- ★ En appliquant une seconde fois le principe fondamental de la statique, montrer que $y(x)$ vérifie l'équation différentielle :

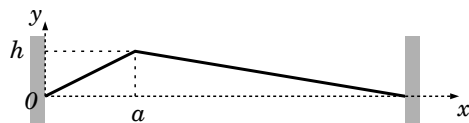
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{l_c} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}$$

On explicitera l'expression de l_c , dont on précisera la dimension.

- ★ Résoudre cette équation différentielle. Trouver la solution à l'aide des conditions aux limites. On donne : $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{argsh}(x)$
- ★ Expliciter la tension verticale $T(x) \cdot \sin(\alpha(x))$ le long de la corde. A quelle endroit est-elle maximale ? Minimale ? Commenter.
- ★ Exprimer la longueur L et la *flèche* h (la hauteur entre le point le plus haut et le plus bas) de la chaîne en fonction du paramètre l_c . Comment connaître alors la tension dans une chaîne suspendue simplement à partir d'une photographie de celle-ci et de sa masse linéique ?

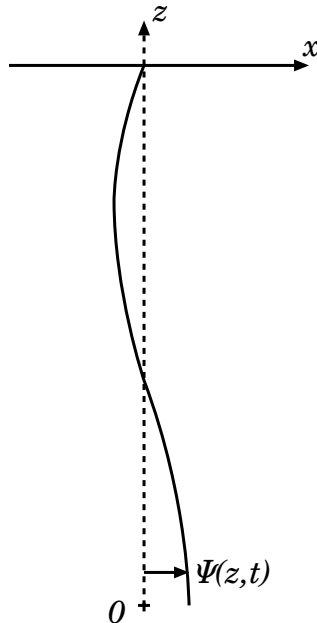
Cas dynamique On considère maintenant que la corde est fortement tendue ($\alpha \ll 1$, $l_c \rightarrow \infty$) mais qu'elle n'est plus statique. On cherche à comprendre sa dynamique. On négligera les frottements.

- ◇ Déterminer l'équation régissant $y(x, t)$ le long de la corde avec $\alpha \ll 1$. Comment s'appelle cette équation ? Quelles sont ses solutions ? Commenter.
- ◇ Sachant que la corde est ancrée en $x = 0$ et $x = L$, donner l'expression générale de $y(x, t)$ dans le cas de solutions stationnaires.
- ◇ On excite la corde avec une excitation dessinée ci-dessous. Donner l'expression de $y(x, t)$ dans ce cas-là.



Corde pendue verticalement

On considère une corde attachée au plafond à un point fixe et laissée verticalement à elle-même dans le vide. On prendra pour origine $z = 0$ le bout de la corde. Elle n'est soumise qu'à la gravité. On notera $\Psi(z, t)$ l'écart de la corde à la verticale à la hauteur z à l'instant t , que l'on supposera très petit par rapport à la longueur L de la corde.



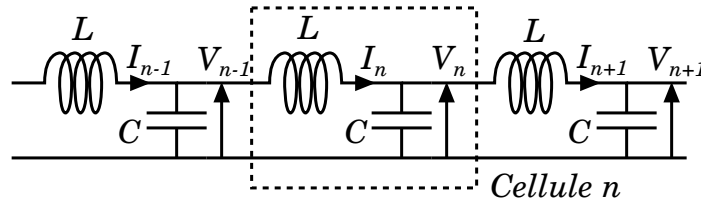
- * En appliquant le principe fondamental de la dynamique, trouver une équation différentielle en $\Psi(z, t)$.

On cherche des solutions sous la forme $\Psi(z, t) = \alpha(z) \cos(\omega t) + \beta(z) \sin(\omega t)$.

- * Comment s'appellent ce type de solutions ? Déterminer l'équation différentielle vérifiée par α et β .
- * En posant $Z = \frac{z\omega^2}{g}$, trouver un nouveau système d'équation différentielle en $A(Z) = \alpha(z)/\alpha(0)$.
- * On cherche la solution sous la forme d'une série entière $A(Z) = \sum_k A_k Z^k$. Déterminer les coefficients K .
- * Comment pourrait-on trouver une relation de dispersion $\omega(k)$?

Propagation sur une ligne électrique

On considère une ligne électrique composée d'une suite de cellules identiques, constituées d'une inductance L et d'une capacité C comme indiqué sur le schéma ci-dessous. Dans la cellule n , on note V_n la tension aux bornes de la capacité et I_n le courant traversant l'inductance.



- ♠ En établissant des relations entre les courants et les tensions des cellules $n-1$, n et $n+1$, montrer que la tension V_n vérifie la relation suivante :

$$\frac{d^2 V_n}{dt^2} = \omega_0^2 (V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n) \quad (1)$$

On précisera l'expression de ω_0 .

- ♠ A quoi correspond la quantité $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C V_n^2 + \frac{1}{2} L I_n^2 \right)$? L'exprimer en fonction de $i_n \times V_{n-1}$ et $i_{n+1} \times V_n$. Interpréter ce résultat.

On cherche une solution sinusoïdale pour $V_n(t)$ de l'équation 4 (on prendra la notation complexe $V_n(t) = A_n \exp(j\omega t)$) de sorte à ce que l'effet après le passage dans une cellule soit un déphasage α fixé : $V_{n+1} = V_n \exp(-j\alpha)$, avec $\alpha > 0$.

- ♠ Quelle est la signification de la grandeur α en terme de propagation ? Exprimer A_n en fonction de A_0 , n et α . En déduire une relation de "dispersion" entre ω et α .
- ♠ Montrer que ces solutions n'existent que si ω est inférieur à une certaine fréquence ω_c , que l'on exprimera. Si cette condition est vérifiée, pourquoi peut-on parler de propagation de la phase ? Préciser la "vitesse" de propagation v_φ correspondante.
- ♠ On suppose maintenant que $\omega \ll \omega_c$. En explicitant α en fonction de ω , exprimer v_φ . Que constate-t-on ? En déduire l'effet d'une cellule sur un signal électrique, composé de fréquence suffisamment basses, se traduit par un retard temporel τ que l'on exprimera en fonction de ω_0 . Application numérique : $C = 10\text{nF}$ et $L = 25\mu\text{H}$, calculer ω_0 et τ . Combien de cellules doit-on mettre pour obtenir un retard de 0.1ms ?
- ♠ On se place dans le cas où $\omega < \omega_c$ et $\alpha > 0$. Rappeler la définition et l'interprétation de la vitesse de groupe. En donner l'expression en fonction de ω_0 et α et donner son allure de son graphe en fonction de α . Que se passe-t-il pour $\alpha = \pi$?
- ♠ En notation complexe, l'intensité I_n est de la forme $I_n(t) = B_n \exp(j\omega t)$. Exprimer B_n en fonction de A_n , L , ω_0 et α . Calculer la moyenne temporelle de l'énergie de la cellule n $E = \langle \frac{1}{2} C V_n^2 + \frac{1}{2} L I_n^2 \rangle$, ainsi que celle de la puissance P reçue de la cellule $n-1$. En déduire le rapport P/E . Commenter.

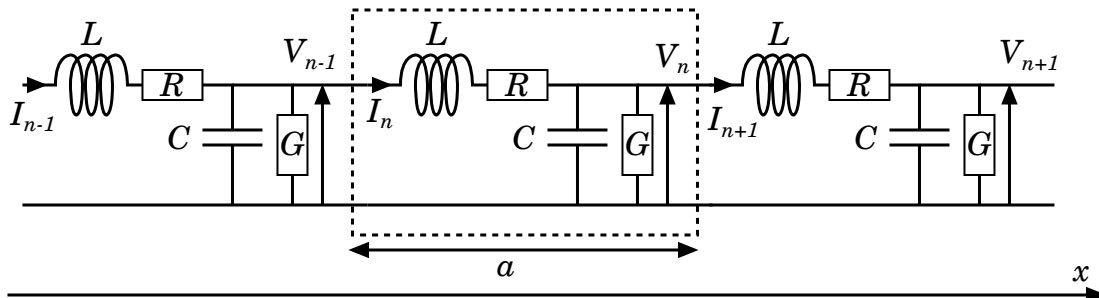
Question supplémentaire

On suppose que l'inductance L et la capacité C sont remplacées respectivement par une inductance linéique Λ et une capacité linéique Γ .

- ♡ En substituant judicieusement l'indice n par la dimension spatiale x le long du câble coaxial, montrer que l'équation 4 devient une équation d'Alembert.
- ♡ Dans ce cas-là, par quelle quantité substituer α ? Sur quel type de solutions sur V retombe-t-on ? Que devient l'équation de dispersion ? Justifier.

Propagation dans une ligne coaxiale dissipative

On considère une ligne électrique composée d'une suite de cellules identiques, chacune constituée d'une inductance L , d'une capacité C , d'une résistance R et d'une conductance G , comme indiqué sur le schéma ci-dessous. Dans la cellule n , on note V_n la tension aux bornes de la capacité et I_n le courant traversant l'inductance. Le câble s'étend sur l'axe x et on suppose que chaque cellule est de longueur a . On souhaite comprendre la propagation des ondes électromagnétique dans cette ligne.



- ♠ En établissant judicieusement des relations entre les courants et les tensions des cellules $n-1$, n et $n+1$, montrer que les tensions V_{n-1} , V_n et V_{n+1} vérifient la relation suivante :

$$\omega_0^2(V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n) = \frac{d^2 V_n}{dt^2} + \alpha \frac{dV_n}{dt} + \beta V_n \quad (2)$$

On précisera l'expression de ω_0 , α et β .

- ♠ Calculer la quantité $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C V_n^2 + \frac{1}{2} L I_n^2 \right)$ en fonction de i_n , i_{n+1} , V_n , V_{n-1} et de R et G . Interpréter physiquement l'ensemble des termes, puis la signification physique de l'équation obtenue.

On souhaite décrire la ligne non plus par le paramètre discret n mais avec le paramètre spatial x , qui est continu. La longueur des cellules étant a , la cellule n se situe à l'abscisse $x = na$, la tension aux bornes du condensateur est $V_n(t) \leftarrow V(x, t)$ et l'intensité à travers la bobine est $I_n(t) \leftarrow I(x, t)$. On suppose de plus que les variations de I et V d'une cellule à l'autre sont très faibles de sorte qu'on peut écrire $a \simeq dx$.

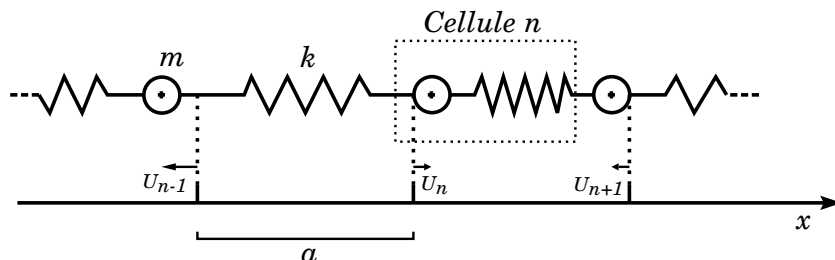
- ♠ Dans cette nouvelle modélisation continue, les caractéristiques du circuit C , L , G et R sont désormais remplacées par respectivement les capacités, inductances, conductances et résistances *linéiques* notées respectivement c , l , g et r . Donner l'expression de c , l , g et r à partir de a et C , L , G et R .
- ♠ Montrer que $V_{n\pm 1}(t) = V(x \pm dx, t)$. A partir de l'équation trouvée dans la première question, en déduire une équation différentielle sur $V(x, t)$.
- ♠ En supposant que le milieu n'est pas dissipatif, quelles seraient les solutions de cette équation différentielle ? On donnera la vitesse de propagation correspondante, notée c_0 .
- ♠ On cherche des solutions propagative du type $V(x, t) = V_0 \exp[j(\omega t - kx)]$. Montrer que la relation dite de dispersion reliant k et ω s'écrit :

$$k^2 = lc\omega^2 - j(lg + rc)\omega - rg \quad (3)$$

- ♠ On suppose que la dissipation est faible, c'est-à-dire que $r \ll l\omega$ et $g \ll c\omega$. En faisant un développement limité à l'ordre 2, écrire k sous la forme $k = k' + jk''$, en précisant les expressions de k' et k'' . Donner alors l'expression de $V(x, t)$ et expliciter une longueur caractéristique δ sur laquelle l'onde se propage. Sous quelle condition la propagation n'est pas dispersive ?

Propagation des ondes sonores dans un solide

Dans un solide, on modélise les atomes du cristal comme une succession de masses m espacées d'une distance a selon l'axe x , et reliées entre elles par un ressort de raideur k . Ce ressort modélise l'interaction électromagnétique entre deux atomes successifs du réseau cristallin. Lorsque le solide est soumis à un choc extérieur, chaque atome s'écarte de sa position d'équilibre. L'écart à la position d'équilibre du n ème atome est noté u_n et F_n la force qu'exerce sur lui l'atome $n + 1$ suivant. On cherche à décrire la propagation de l'onde sonore qui résulte de ce choc.



- ♠ Montrer que la position u_n de l'atome n vérifie la relation suivante :

$$\ddot{u}_n = \omega_0^2(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) \quad (4)$$

On précisera l'expression de ω_0 .

- ♠ Calculer, en fonction de u_n , u_{n-1} , F_n et F_{n-1} , la quantité :

$$\dot{\epsilon}_n = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} k (u_n - u_{n+1})^2 + \frac{1}{2} m \dot{u}_n^2 \right]$$

Interpréter physiquement l'ensemble des termes.

On cherche une solution sinusoïdale pour $u_n(t)$ de l'équation 4 (on prendra la notation complexe $u_n(t) = A_n \exp(j\omega t)$) de sorte à ce que l'effet après le passage sur un atome soit un déphasage α fixé : $u_{n+1} = u_n \exp(-j\alpha)$, avec $\alpha > 0$.

- ♠ Quelle est la signification de la grandeur α en terme de propagation ? Exprimer A_n en fonction de A_0 , n et α . En déduire une relation de "dispersion" entre ω et α .
- ♠ Montrer que ces solutions n'existent que si ω est inférieur à une certaine fréquence ω_c , que l'on exprimera. Si cette condition est vérifiée, pourquoi peut-on parler de propagation de la phase ? Préciser la "vitesse" de propagation v_φ correspondante.
- ♠ On suppose maintenant que $\omega \ll \omega_c$. En explicitant α en fonction de ω , exprimer v_φ . Que constate-t-on ? En déduire l'effet d'un atome sur un signal sonore, composé de fréquence suffisamment basses, se traduit par un retard temporel τ que l'on exprimera en fonction de ω_0 .
- ♠ On se place dans le cas où $\omega < \omega_c$ et $\alpha > 0$. Rappeler la définition et l'interprétation de la vitesse de groupe. En donner l'expression en fonction de ω_0 et α et donner son allure de son graphe en fonction de α .
- ♠ Que se passe-t-il pour $\alpha = \pi$? Commenter. Donner la solution générale de $x_n(t) \forall n$ sachant que $x_0(t) = A_0 \cos(\omega t)$. Calculer la quantité ϵ_n , puis sa dérivée temporelle $\dot{\epsilon}_n$. Commenter.