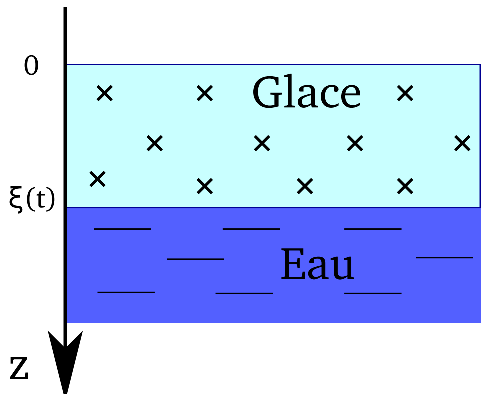
# Lac gelé

On s'intéresse à la glaciation d'un lac, et plus particulièrement de l'évolution au cours du temps de l'épaisseur de glace, notée $\xi(t)$, qui se forme à sa surface. L'interface entre l'atmosphère et la surface du lac se situe en $z = 0$ et on considère qu'à $t = 0$, le lac est encore libre de glace $\xi(t = 0) = 0$. On suppose que l'atmosphère est à la température constante $T_A = 263$ K et que l'eau située sous la glace du lac est à la température de fusion $T_F$=273 K.




Lors de la formation de la glace à l'interface $z = \xi(t)$, l'énergie thermique dégagée par la solidification de l'eau est évacuée à travers la glace jusqu'à l'atmosphère. On supposera que ce tranfert est instantané, ce qui revient à supposer que la glace a une capacité calorifique $c_g$ négligeable (hypothèse des régimes quasi-stationnaire).

D'autre part, les échanges thermiques entre l'atmosphère et la glace de la surface du lac sont modélisés par la loi de Newton :

$$\vec{j}_a = -h(T_0(t) - T_A)\vec{e}_z$$

où $\vec{j}_a$ est la densité surfacique de flux thermique entre la glace et l'atmosphère, $T_0(t)$ est la température de la glace en $z = 0$ et $h$ une constante égale à 42 W.m$^{-2}$.K$^{-1}$. Autrement dit, la surface du lac ne se thermalise pas instantanément avec l'atmosphère.

On note par ailleurs $\rho_g = 990$kg.m$^{-3}$ la masse volumique de la glace, $\lambda = 2,1$ W.m$^{-1}$.K$^{-1}$ et la chaleur latente massique de fusion de l'eau $l_f = 335$ kJ.kg$^{-1}$.

- Donner le profil de température $T(z, t)$ dans la glace en fonction de $T_0(t)$, $T_F$, $\xi(t)$ et $z$.
- En déduire la température de surface $T_0(t)$ en fonction de l'épaisseur de glace $\xi(t)$, et $h$, $T_A$, $T_F$, $\lambda$.
- En faisant un bilan d'énergie sur le front de glaciation en $z = \xi(t)$, établir une relation entre $\xi(t)$ et $\dot{\xi}(t)$. En déduire l'équation différentielle suivante :

$$\left(1 + \frac{\xi(t)}{l_0}\right)\dot{\xi}(t) = v_0$$

  Préciser l'expression de $l_0$ et $v_0$.
- Donner une estimation numérique de $l_0$ et de $v_0$. En déduire un temps caractéristique $\tau_0$ dont on donnera aussi une estimation numérique.
- Déterminer l'évolution de $\xi(t)$ puis de $T_0(t)$ et donner l'allure de leur courbe. Combien de temps faut-il pour que 5 cm de glace ne se forment ?

## Transfert thermique et entropie

On considère une barre métallique conductrice de section $S$, de longueur $L$, de résistivité électrique $\rho$ et de conductivité thermique $\lambda$. On suppose que ces extrémités sont maintenues aux températures $T_1$ et $T_2$ grâce à des thermostats, et que les parois extérieures sont calorifugées sur toute la longueur du barreau. En régime permanent, elle est parcourue par un courant $I$.

- ▷ Déterminer le profil de température $T(x)$ dans la barre, où $x$ est l'abcsisse le long de celui-ci.
- ▷ A quelle condition la température passe par un maximum ?
- ▷ Calculer l'entropie $s_c$ créée par unité de temps et de volume dans la barre à une abscisse $x$. Commenter.

On coupe désormais le courant dans la barre ($I = 0$), puis une fois le nouveau régime permanent établi, on l'isole totalement des thermostats.

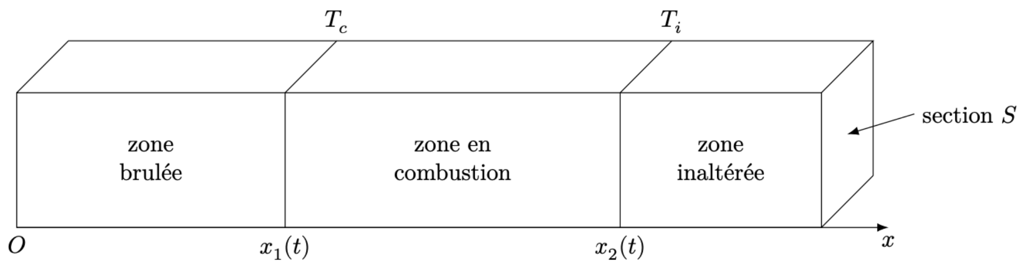
- ▷ Obtenir le nouveau profil de température juste avant que les deux thermostats soient retirés de la barre.
- ▷ Une fois les thermostats enlevés, quelle sera la température finale $T_\infty$ de la barre après avoir suffisament attendu ? En déduire la variation d'entropie de la barre.

## Combustion d'une poutre de bois

On considère une poutre en bois homogène de section carrée $S$ et de longueur $L$ rentrant en combustion à l'instant $t = 0$ en $x = 0$. On cherche à comprendre la progression de la combustion le long de la poutre, en supposant que celle-ci est uniquement dûe à la diffusion de la chaleur dans le bois. A l'instant $t$, on distingue la combustion en 3 zones distinctes :

- une zone brulée, située entre $x = 0$ et $x_1(t)$, à la température uniforme $T_c = 720$ K dite de combustion ;
- une zone dans laquelle s'effectue la combustion, située entre $x_1(t)$ et $x_2(t)$, dégageant une puissance thermique massique $P_c = 4,0 \times 10^3$ W.kg$^{-1}$ ;
- et une zone inaltérée, où le bois est encore intact, située entre $x_2(t)$ et $L$

La température $T(x,t)$ dans la zone en combustion et celle de la zone inaltérée augmentent par diffusion au cours du temps jusqu'à atteindre les températures de combustion $T_c$ et d'inflammation du bois $T_i$ =520 K, conduisant à l'avancement des frontières $x_1(t)$ et $x_2(t)$ au cours du temps. Ainsi, tant que la poutre n'a pas fini de bruler, on a toujours $T(x_1(t),t) = T_c$ et $T(x_2(t),t) = T_i$. D'autre part, loin du front de combustion $x_1(t)$, la température de la poutre est $T_\infty = 320$ K.




On considère enfin que le bois brulé, en combustion ou inaltéré est un même matériau homogène, de capacité calorfique massique à pression constante $c_p = 2,0 \times 10^3$ J.K$^{-1}$.kg$^{-1}$, de diffusivité thermique $D = 1,0 \times 10^{-7}$m$^2$.s$^{-1}$ et de masse volumique $\mu = 850$kg.m$^{-3}$.

- ⋈ En effectuant un bilan d'enthalpie sur un élément de bois compris entre $x$ et $x + dx$ dans la zone en combustion, montrer que la température vérifie l'équation suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \kappa$$

  Préciser l'expression de $\kappa$.

- ⋈ De même, trouver l'équation vérifiée par $T$ dans la zone brulée et inaltérée.

On se propose de résoudre les équations précédentes sous forme d'une onde se propageant dans la poutre. On pose $u = x - ct$ où $c$ est une constante positive et on effectue le changement de variable $T(x,t) = \theta(u)$.

- ⋈ Que représente physiquement $c$ ?
- ⋈ Déterminer les équations différentielles régissant la fonction $\theta(u)$ dans les trois zones, puis montrer que les solutions peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \theta(u) = a_1 & \text{pour } u < u_1 \\ \theta(u) = a_2 + b_2 \exp\left(-\frac{c}{D}u\right) - \frac{\kappa}{c}u & \text{pour } u_1 < u < u_2 \\ \theta(u) = a_3 + b_3 \exp\left(-\frac{c}{D}u\right) u_2 < u & \end{cases}$$

- ⋈ Déterminer les expressions de $a_1$ et de $a_3$ avec les données de l'énoncé, puis expliciter les conditions permettant de trouver $a_2$, $b_2$ et $b_3$ (on ne cherchera pas à obtenir leur expression).
- ⋈ Tracer l'allure de la courbe $\theta(u)$. Commenter.

## Température dans une planète naine

On s'intéresse au profil de température au sein d'une planête naine, faisant 100 km de rayon. On suppose qu'elle est intégralement constitué de roches proches du granit (conductivité thermique $\lambda = 3,5$ W.m$^{-1}$.K$^{-1}$, masse volumique $\mu = 2700$ kg.m$^{-3}$ et capacité calorifique massique $c_p = 790$ J.K$^{-1}$.s$^{-1}$), sans activité géologique, c'est-à-dire que l'astre est figé, sans convection possible à l'intérieur. Il existe de surcroit une activité radioactive dûe à la présence de thorium 232($^{232}$Th, masse molaire $M = 232$ g.mol$^{-1}$) uniformément réparti dans le volume, dont la désintégration dégage une énergie $\varepsilon = 5,6 \times 10^{-12}$ J, avec une demi-vie de $\tau = 14 \times 10^{10}$ années.

- ◎ La concentration massique de thorium étant de l'ordre de 10 ppm, estimer la puissance volumique $P_r$ due à la désintégration du thorium.
- ◎ Le problème étant supposé à symétrie sphérique, effectuer un bilan d'enthalpie entre deux couches adjacentes de roche de rayon $r$ et $r + dr$ et montrer que la température vérifie l'équation suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{D}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \kappa$$

  Préciser l'expression de $\kappa$ et de $D$.

- ◎ Montrer que l'on peut se placer dans le régime quasi stationnaire $T(r,t) \simeq T(r)$, c'est-à-dire que l'activité nucléaire varie très lentement par rapport au temps caractéristique $\tau_d$ de diffusion thermique.
- ◎ Exprimer l'expression du champ de température $T(r)$ à l'aide de deux constantes d'intégration. Montrer que l'une d'entre elle est nécessairement nulle.

La planète perd de l'énergie thermique par rayonnement, qui part dans l'espace depuis sa surface. La puissance thermique associée à ce rayonnement suit la loi de Stefan-Boltzmann $\phi = \sigma T_s^4$, où $\phi$ est la puissance rayonnée par unité de surface à la surface de la planète, $\sigma = 5,67 \times 10^{-8}$ W.m$^{-2}$.K$^{-4}$ une constante et $T_s$ la température à la surface de l'astre.

- ◎ En utilisant la loi de Stefan-Boltzmann, déterminer la seconde constante d'intégration et donner l'expression de la température $T(r)$.
- ◎ Donner la valeur de la température au centre de la planète et à la surface.

On donne, pour les coordonnées sphériques : $\vec{\mathrm{grad}} f \cdot \vec{e}_r = \frac{\partial f}{\partial r}$

## Une tente au soleil

Un campeur se trouve allongé dans sa tente canadienne. Le soleil se lève et éclaire une des faces de la tente, mais pas l'autre. Pour se refroidir, est-ce une bonne idée pour notre campeur de se mettre en position assise ?