Réflexion d'une onde électromagnétique sur des plans métalliques en incidence oblique

On considère une onde plane progressive se propageant dans le vide, selon le vecteur d'onde $\vec{k} = k\cos\theta\vec{u_x} + k\sin\theta\vec{u_y}$ et à la pulsation ω. Elle arrive sur un plan métallique infiniment conducteur situé sur le demi-espace $x > 0$. On notera $\vec{E_i}$ et $\vec{B_i}$ respectivement le champ électrique et le champ magnétique incidents. Le champ électrique est polarisé rectilignement selon Oz et son amplitude est E_0.

- ♡ Retrouver l'équation de propagation des champs électrique et magnétique. Quelle est la relation de dispersion associée ?
- ♡ Expliciter les expressions des champs $\vec{E_i}$ et $\vec{B_i}$.

En arrivant sur l'interface, les relations de passage du champ électromagnétique imposent l'apparition d'une onde réfléchie, dont on notera $\vec{E_r}$ et $\vec{B_r}$ les champ électrique et magnétique. On supposera que $\vec{E_r}$ s'écrit sous la forme :

$$\vec{E_r} = \vec{E_0'}\exp(i\vec{k_r}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

- ♡ Que valent les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ à l'intérieur de la plaque ? Justifier.
- ♡ En utilisant les relations de passage, écrire $\vec{E_r}$ en fonction de E_0, k, ω et θ et démontrer la loi de Descartes sur la réflexion d'une onde électromagnétique. En déduire l'expression du champ magnétique réfléchi, $\vec{B_r}$.
- ♡ Quelle est alors l'expression du champ électrique $\vec{E}$ résultant pour $x < 0$? De quel type d'onde s'agit-il ?
- ♡ On place une seconde plaque métallique en $x = -L$. Montrer que la présence de la seconde plaque impose une discrétisation du spectre, c'est-à-dire que seules des fréquences ω discrètes peuvent se propager pour un angle θ donné. Tracer les valeurs prises par ω en fonction de θ.
- ♡ Quelle est la valeur minimale que peut prendre ω ? Justifier.
- ♡ Démontrer que $k_y = \vec{k}\cdot\vec{u_y}$ vérifie l'équation dite de dispersion des modes d'une onde transverse électrique :

$$k_y^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \tag{1}$$

- ♡ Quel est le courant surfacique à la surface de la plaque ?
- ♡ Calculer l'expression du champ magnétique résultant $\vec{B}$ entre les deux plaques et en déduire l'expression du vecteur de Poyting. Commenter.

Propagation d'une onde radio dans un plasma en présence d'un champ magnétique longitudinal

Le plasma ionosphérique est assimilé à un milieu conducteur ionisé de temps de relaxation infini, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de collisions. Le plasma est supposé neutre et sa densité électronique est n_0. On tient compte ici du champ magnétostatique terrestre désigné par $\vec{B}_{ext} = B_{ext}\vec{u_z}$, dirigé selon la direction de propagation Oz d'une OPPM électromagnétique de pulsation ω, dont le champ est représenté par :

$$(\vec{E}, \vec{B}) = (\vec{E}_0, \vec{B}_0) \exp[j(\omega t - kz)]$$

On note $\omega_p = \sqrt{n_0 e^2 / m\varepsilon_0}$ la pulsation de plasma du milieu et $\omega_c = eB_{ext}/m$ la pulsation cyclotron.

♠ Montrer que le champ magnétique terrestre intervient dans la conduction électrique du milieu, qui peut être représenté par une relation linéaire :

$$\vec{j} = [\gamma]\,\vec{E}$$

où $[\gamma]$ est une matrice de conductivité complexe, à exprimer en fonction de ω, ω_c et ω_p.

Une onde est polarisée circulairement lorsque les composantes transverses sont déphasées de $\pm\pi/2$, c'est-à-dire dans notre cas, en notation réelle :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)\vec{e_x} \pm E_0 \sin(\omega t - kz)\vec{e_y} \tag{2}$$

Un signe "+" correspond à une onde polarisée circulairement "gauche" et le signe "-" à une onde polarisée circulaire "droite". On cherche à comprendre la propagation de ces ondes dans le plasma.

♠ Pourquoi appelle t-on cette polarisation "circulaire" ?

♠ Montrer que l'étude de la propagation des OPPM électromagnétiques peut être ramenée à celle d'ondes polarisées circulairement qui satisfont des relations de dispersion à préciser.

On appelle permittivité relative d'un milieu la quantité complexe ε_r que l'on peut définir ici à travers la relation $k^2 = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 = \varepsilon_r \omega^2 / c^2$.

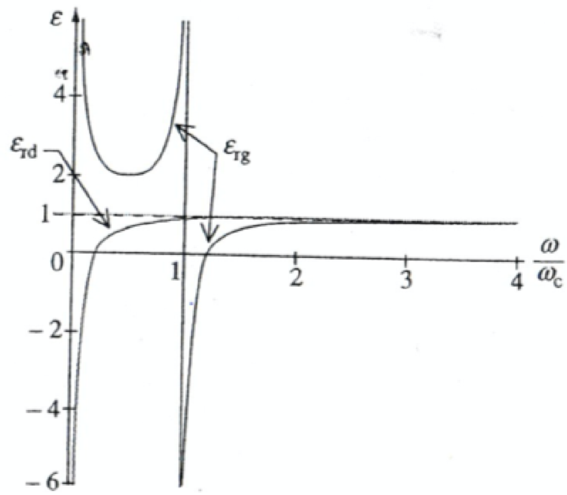
♠ On note ε_{rg} et ε_{rd} les permittivités relatives équivalentes associées respectivement à la propagation des ondes circulaires gauche et des ondes circulaires droites, dont les graphes sont donnés ci-dessous. Donner leur expression. Préciser les domaines du spectre électromagnétique pour lesquels les ondes étudiées se propagent effectivement dans le plasma.

Une onde métrique traverse une épaisseur L de plasma dans les conditions de l'étude effectuée. A l'entrée de la couche de plasma, l'onde est polarisée rectilignement.

♠ Montrer, dans le cas général, qu'un onde polarisée rectilignement peur s'écrire comme la superposition d'une onde polarisée circulaire droite et circulaire gauche.

♠ Justifier alors que l'effet du plasma consiste, aux hautes fréquences, en une rotation de la direction de polarisation de l'onde. Préciser la valeur de cet angle si $L = 1$km et $\lambda_0 = 30$cm.

Données : $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$C, $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$kg, $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$F/m, $n_0 = 10^{12}$m^{-3}, $B_{ext} = 5 \cdot 10^{-5}$T.



ε
4
2
1
0
−2
−4
−6
ε_{rd}
ε_{rg}
1
2
3
4
$\frac{\omega}{\omega_c}$

Ondes électromagnétiques dans un métal conducteur

On s'intéresse à la propagation des ondes électromagnétiques dans un conducteur métallique, en fonction de leur fréquence et des caractéristiques du métal. Plus particulièrement, on souhaite savoir pourquoi un métal est transparent à basse fréquence, mais transparent à partir d'une certaine fréquence.

On considère donc que le demi-espace $z > 0$ est rempli d'un métal, sur lequel arrive une onde plane progressive monochromatique à la fréquence ω et polarisée suivant $\vec{e_x}$.

- ♢ Retrouver l'équation de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide. A l'aide des données de l'énoncé, donner l'expression du champ $\vec{E}$ et du champ $\vec{B}$ pour $z < 0$.

Pour décrire le métal, on adopte un modèle d'électrons libres, de masse m, de charge $-e$ et de densité particulaire N_0, soumis au champ électromagnétique, et subissant des collisions en moyenne au bout d'un temps $\tau = 1/\omega_c$. On modélise alors le comportement des électrons par l'équation de mouvement (aussi appelé modèle de Drude) :

$$m\vec{a} = -e\vec{E} - m\frac{\vec{v}}{\tau} \tag{3}$$

Pour un métal très conducteur, on a $N_0 \simeq 10^{29}\text{m}^{-3}$ et $\tau \simeq 10^{-14}\text{s}$.

- ♢ En utilisant l'équation 3, définir une conductivité du métal γ complexe, lorsqu'il est soumis à une OPPM comme proposé ci-dessus. On fera apparaître la pulsation plasma $\omega_p = \sqrt{N_0 e^2/m\varepsilon_0}$.
- ♢ En utilisant les équations de Maxwell, déterminer la relation de dispersion des OPPM dans le métal.
- ♢ Comparer $\omega_c = 1/\tau$ et ω_p. Justifier de l'existence de 3 régimes de propagation dans le métal que nous allons étudier par la suite.

On se place dans le cas où $\omega \ll \omega_c$.

- ♢ Que devient la relation de dispersion dans ce cas-là ? Trouver les solutions possibles pour k. Faire apparaitre l'expression de la conductivité statique γ_0 en fonction de ω_p, τ et ε_0.
- ♢ Écrire l'expression du champ $\vec{E}$ dans le métal, puis celle du champ $\vec{B}$. Comment appelle t-on ce régime et le phénomène associé ?

On se place dans le cas où $\omega \gg \omega_c$.

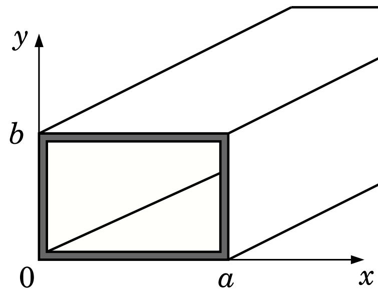
- ♢ Que devient la relation de dispersion dans ce cas-là ? Trouver les solutions possibles pour k.
- ♢ Écrire l'expression du champ $\vec{E}$ dans le métal, puis celle du champ $\vec{B}$. On distinguera les cas $\omega < \omega_p$ et $\omega > \omega_p$. Décrire alors le comportement de l'onde dans ces 2 situations.

Bilan

- ♢ Finalement, résumer les 3 situations rencontrées et justifier les observations décrites dans l'énoncé.
- ♢ Quelle est la différence fondamentale entre un plasma vu en cours et un métal comme décrit ici ?

Guide d'onde métallique

Les guides d'onde sont des dispositifs métalliques creux, généralement à section rectagulaire, permettant de canaliser et de guider des ondes électromagnétiques de grande puissance sur une certaine distance. Ils sont utilisés notamment dans les radars ou sur des micro-ondes.



On considère donc un guide d'onde métallique rectangulaire (largeur a, hauteur h) dans lequel se propage une onde élétromagnétique à la pulsation ω. On suppose que le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E} = f(x,y) \cdot \exp[i(kz - \omega t)]\vec{e}_x$$

Les parois sont de plus supposées infiniment conductrices et l'air à l'intérieur du guide est assimilé au vide. On souhaite comprendre les caractéristiques de la propagation dans le guide par rapport à celle dans le vide.

★ A t-on affaire à une OPPM ? Justifier.

★ A partir des équations de Maxwell, montrer que f ne dépend que de x et retrouver l'équation de propagation vérifiée par $\vec{E}$. En déduire l'équation différentielle vérifiée par f et montrer qu'il existe deux types de solution.

★ A partir des conditions aux limites, montrer qu'il ne peut y avoir qu'un seul type de solution non nulle pour $\vec{E}$ et donner son expression.

★ En déduire une inégalité sur la longueur d'onde λ, puis déterminer la relation de dispersion reliant k et ω. Pourquoi parle t-on de modes ou de quantification ? Pour une fréquence donnée, combien de modes peuvent se propager dans le guide ? Représenter $\vec{E}$ pour les deux premier modes à un instant donné.

★ Donner l'expression du champ magnétique $\vec{B}$.

★ Calculer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ de l'onde. Commenter.

★ Estimer la norme de $\vec{\Pi}$ dans le cas d'un micro-onde domestique.

Réflexion sur un conducteur de conductivité finie

Un milieu conducteur de conductivité $\gamma = 6 \cdot 10^7 \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$ occupe le demi-espace $z > 0$ tandis que de l'air, assimilé au vide, occupe le demi-espace $z < 0$. Une onde électromagnétique incidente plane et monochromatique de pulsation ω se propage dans la direction de l'axe Oz dans l'air. Le champ électrique de cette onde incidente s'écrit :

$$\vec{E}_i = E_{0,i} \exp[i(\omega t - k_i z)]\vec{e}_x$$

A l'interface $z = 0$, elle donne naissance à une onde réfléchie et transmise s'écrivant respectivement $\vec{E}_r = \vec{E}_{0,r} \exp[i(\omega t - k_r z)]$ et $\vec{E}_t = \vec{E}_{0,t} \exp[i(\omega t - k_t z)]$, de même pulsation.

- ♣ Déterminez l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique dans le vide, et en déduire l'expression de k_i et k_r.
- ♣ Quelle équation vérifie le champ électrique à l'intérieur du métal, pour des fréquences que l'on supposera ici inférieures au GHz ? En déduire l'expression de k_t. Commenter.
- ♣ Déterminer l'expression des champ magnétiques $\vec{B}_i$, $\vec{B}_r$ et $\vec{B}_t$ associés.
- ♣ Quelles sont les conditions imposées aux champ électrique et magnétique à l'interface $z = 0$? En déduire les coefficients de réflexion $r = E_{0,r}/E_{0,i}$ et de transmission $t = E_{0,t}/E_{0,i}$.
- ♣ Après avoir déterminé les moyennes temporelles des vecteurs de Poynting $\vec{P}i$ des trois ondes , déterminer le coefficient de réflexion R et de transmission T en énergie. Commenter.
- ♣ Quelle est la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le métal, par unité de surface. Donner une estimation dans le cas où cette plaque est exposée en plein soleil.