Exercice 1

Approche en mécanique classique

- ♣ Dans une volume $a\Sigma$, on a une charge $+e$ et une charge $-e$, comme celle-ci sont réparties uniformément. Les densités de charges sont donc respectivement $\rho_+ = e/(a\Sigma)$ et $\rho_- = -e/(a\Sigma)$.
- ♣ Par définition, $\vec{j} = \rho\vec{v}$. Comme seuls les électrons ont une vitesse non nulle, $\vec{j} = -v'\rho_- = -ev'/(a\Sigma)$. Et donc $I = \oiint_\Sigma \mathrm{d}\vec{S}\vec{j} = -ev'/a$.
- ♣ $\rho_{tot} = \rho_+ + \rho_- = 0$ donc $\vec{E} = 0$.
- ♣ Avec le théorème d'Ampère appliqué uniquement en dehors du fil, on trouve :

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e_\theta}$$

(le signe - provient du fait que le sens du courant est opposé à celui des électrons) La force qui s'exerce sur la charge q est donc :

$$\vec{F} = -\frac{qv\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e_r}$$

Approche en mécanique relativiste

- ♣ Ainsi, en se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$, la charge $+q$ voit dans son référentiel la distance entre atomes réduite d'un facteur $\gamma_+ = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ et la distance entre électrons de conduction d'un facteur $\gamma_- = 1/\sqrt{1 - (v - v')^2/c^2}$. On trouve donc que :

$$\rho_+ = \frac{e}{a\Sigma}\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\rho_- = \frac{e}{a\Sigma}\frac{1}{\sqrt{1 - (v - v')^2/c^2}}$$

Attention, l'hypothèse que la vitesse relative des électrons par rapport à la charge q est $v' - v$ est une approximation. En mécanique relativiste, la vitesse relative serait :

$$v_{e_-/q} = \frac{v' - v}{1 - \frac{vv'}{c^2}} \tag{1}$$

- ♣ On trouve facilement avec le théorème dee Gauss que :

$$\vec{E} = \frac{\Sigma(\rho_+ + \rho_-)}{2\pi r\epsilon}$$

- ♣ En développant à l'ordre 2, on trouve :

$$\rho_+ + \rho_- \approx \frac{e}{a\Sigma}\frac{vv'}{c^2}$$

On trouve alors que :

$$\vec{E} = -\frac{I\mu_0 v}{2\pi r}\vec{e_r}$$

La force de Lorentz associée est donc :

$$\vec{F} = -\frac{qI\mu_0 v}{2\pi r}\vec{e_r}$$

Cette expression est identique à celle trouvée par le calcul du champ magnétique en mécanique classique. Le champ magnétique est-il est une approximation à l'ordre 2 de la force de Coulomb ?

Exercice 3

♠ On raisonne sur un ensemble d'électrons. On considère les évènements ayant eu lieu à partir de $t = 0$. Il faut calculer d'abord le nombre d'électrons ayant subi une collision entre t et $t + dt$. Ce nombre est $N(t) - N(t + dt) = N(t)/\tau$. On a donc $N(t) = N_0 \exp(-t/\tau)$. Pour un électron donné, la probabilité de ne pas subir de collision est donc $P(t) = N(t)/N_0$.

♠ Soit N_0 le nombre total d'électrons. Entre t et $t + dt$, il y a eu dtN_0/τ qui ont subi une collision. La quantité de mouvement de tous ces électrons est donc perdue. D'autre part, entre t et $t + dt$ chaque électron est soumis à la force $\vec{F}(t)$, faisant changer la quantité de mouvement totale de $N_0 F(t)dt$. Finalement, il vient :

$$\vec{P}(t + dt) = \vec{P}(t) - \frac{dt}{\tau}\vec{P}(t) + N_0\vec{F}dt \tag{2}$$

♠ On en déduit la vitesse moyenne d'un électron, définie par $\vec{v}(t) = \vec{P}/(mN_0)$:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{v}}{\gamma} + \vec{F}(t)$$

où $\gamma = m/\tau$.

♠ La force subie par les électrons est la force de Lorentz : $\vec{F} = -eE_0 \exp(-i\omega t)$. L'équation précédente devient :

$$-i\omega\vec{v} = -\frac{e}{m}\vec{E_0} - \frac{\vec{v}}{\tau}$$

On en déduit :

$$\vec{v} = \frac{e\tau}{m}\frac{E_0}{i\omega\tau - 1}$$

En introduisant la conductivité γ, $\vec{j} = \gamma\vec{E}$, où $\vec{j} = -ne\vec{v}$, on trouve :

$$\gamma(\omega) = \frac{ne^2\tau}{m}\frac{1}{1 - i\omega\tau}$$

♠ Dans un métal, qui est un réseau cristallin, il y a typiquement un électron tous les Angstrom, soit tous les 10^{-10}m. On obtient des densités typiques de 10^{30} atomes par m^3.

♠ La résistivité statique correspond à une fréquence qui tend vers 0, cad :

$$\rho = \frac{1}{\gamma} = \frac{m}{ne^2\tau}$$

On trouve donc $\tau \simeq 10^{-14}$s.

Exercice 4

♡ Résistance classique d'un cylindre : $R = L/(\gamma\pi a^2)$.

♡ Isolons le câble arrivant en A. Par symétrie, le courant partira dans tous les directions. La densité de courant va s'écrire en un point M :

$$\vec{j_A} = \frac{I}{2\pi e}\frac{\vec{e_r}}{\|\vec{AM}\|}$$

On effectue le même raisonnement pour B. La densité de courant totale est alors :

$$\vec{j} = \frac{I}{2\pi e}\left[\frac{\vec{e_r}}{\|\vec{AM}\|} - \frac{\vec{e_r}}{\|\vec{BM}\|}\right]$$

♡ En intégrant la relation $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ le long du chemin AB, dont la coordonnée sera donnée par x, en faisant varier x de a à $d-a$ (pour éviter une divergence de la densité de courant) :

$$\int_a^{d-a} dx j(x) = \frac{I}{2\pi e} \int_a^{d-a} dx \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) = \gamma \int_a^{d-a} dx E = \gamma \int_a^{d-a} dx \frac{dV}{dx}$$

On trouve alors :

$$\Delta V = \frac{I}{\pi e \gamma} \log \left(\frac{d-a}{a} \right)$$

♡ En se plaçant en coordonnées sphériques, on a :

$$\vec{j} = \frac{I}{2\pi} \left[\frac{\vec{e_r}}{\|\vec{AM}\|^2} - \frac{\vec{e_r}}{\|\vec{BM}\|^2} \right]$$

Attention, il y a un facteur 2 par rapport à la surface d'une sphère car il s'agit de demi-sphères. On trouve alors :

$$\Delta V = \frac{I}{\pi \gamma} \frac{d}{a(d-a)}$$

Exercice 5

♢ Les lignes de champs sont radiales cad $\vec{j} = j(r)\vec{e_r}$. On a donc :

$$\vec{j}(r) = \frac{I}{2\pi r^2} \vec{e_r}$$

On en déduit :

$$\mathrm{d}V = -E(r) dr = \frac{-I}{2\pi r^2 \gamma} dr$$

Par intégration, on trouve :

$$V(r) = \frac{I}{2\pi r \gamma}$$

♢ Le potentiel de l'hémisphère est donc simplement :

$$U = \frac{I}{2\pi a \gamma}$$

La résistance est donc tout simplement $R = \frac{1}{2\pi a \gamma}$. On trouve qu'elle ne dépasse pas 30Ω si $a > 53$cm.

♢ La tension de pas vaut, si $d = 1$m :

$$V_p(r) = V(r) - V(r+d) = \frac{I}{2\pi \gamma r (r+d)}$$

On trouve que $V_p(10m) = 7,2kV$ et $V_p(100m) = 79V$

♢ Le courant qui traverse la personne est $i = V_p/R$. On trouve i(10)=2,9A et i(100)=32mA.

Câble coaxial

- ♡ Le courant circulant dans l'âme est $I = 2\pi a j_{s,a}$. De même, la charge totale est $Q = 2\pi a l \sigma_a$. On a forcément $I = 2\pi b j_{s,b}$. De même, la charge totale est $Q = 2\pi b l \sigma_b$ par conservation de la charge et du courant.

- ♡ Les symétries et les invariances donnent $\vec{E} = E(r)\vec{e_r}$. Avec le théorème de Gauss appliqué sur un cylindre de rayon r, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} r < a & : & \vec{E} = \vec{0} \\ a < r < b & : & \vec{E} = \frac{\sigma_a a}{\varepsilon_0 r}\vec{e_r} \\ r > b & : & \vec{E} = \vec{0} \end{array} \right.$$

- ♡ On en déduit le potentiel entre les deux conducteurs :

$$V = \frac{\sigma_a a}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{Q}{2\pi l \varepsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

  La capacité par unité de longueur est donc :

$$c = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

- ♡ Les symétries et les invariances donnent $\vec{B} = B(r)\vec{e_\theta}$. Avec le théorème de d'Ampère appliqué sur un cercle de rayon r, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} r < a & : & \vec{B} = \vec{0} \\ a < r < b & : & \vec{B} = \frac{\mu_0 j_{s,a} a}{r}\vec{e_\theta} \\ r > b & : & \vec{B} = \vec{0} \end{array} \right.$$

- ♡ Le flux du champ $\vec{B}$ se calcule sur la surface rectangulaire comprises entre a et b, de longueur l avec $\vec{e_\theta}$ comme vecteur normal. On trouve alors :

$$\Phi_B = \frac{L\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

  On a donc :

$$l = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

- ♡ On trouve que $l \times c = \varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$. Cela correspond à l'inverse du carré de la vitesse de la lumière, qui est la vitesse de propagation dans le câble coaxial.

Étude d'un colloïde

- ♡ Le milieu est composé de cations et d'anions à la même densité :

$$\rho = eN_+ - eN_- = -2eN_0 \sinh\left(\frac{eV}{k_B T}\right)$$

  Lorsque $eV \ll k_B T$, on a alors :

$$\rho \simeq -2N_0 \frac{eV}{k_B T}$$

♡ Avec les rotations et les symétries, on montre facilement que $\vec{E} = E(r)\vec{e_r}$. On applique le théorème de Gauss sur un volume compris entre r et $r + dr$:

$$-4\pi r^2 E(r) - 4\pi(r + \mathrm{d}r)^2 E(r + \mathrm{d}r) = \frac{4\pi r^2 \,\mathrm{d}r \rho}{\varepsilon}$$

On trouve donc :

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{\rho}{\epsilon} = 0$$

Cette éuation correspond à l'équation de Maxwell-Gauss : $\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$ (qui correspond à l'équation de Poisson avec le potentiel).

♡ On remplace ρ par l'expression trouvée plus haut. On obtient :

$$\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}r^2} - \frac{2N_0 e^2}{k_B T \varepsilon} U = 0$$

On pose $\lambda^2 = \frac{k_B T \varepsilon}{2N_0 e^2}$. C'est une longueur caractéristique de la décroissance du potentiel. Dans de l'eau pure, le pH est égal à 7 donc $N_0 = 10^{-7}$mol/L$= 10^{19}$part.m^{-3}, soit $\lambda = 1\mu$m.

En résolvant l'équation, on trouve $U(r) = A\exp(-r/\lambda) + B\exp(r/\lambda)$. La condition aux limites $V(r \longrightarrow \infty) \longrightarrow 0$ impose $B = 0$. On a alors :

$$V(r) = \frac{A}{r}\exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right)$$

♡ L'expression du champ est :

$$\vec{E} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\vec{e_r} = A\frac{\exp(-r/\lambda)}{r^2}\left(1 + \frac{r}{\lambda}\right)\vec{e_r}$$

S'il n'y avait pas d'ions, on devrait retrouver l'expression du champ d'une particule ponctuelle de charge Q. Or l'absence d'ions correspond à $\lambda = \infty$, c'est-à-dire qu'il n'y a plus d'écrantage. On doit nécessairement retrouver $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}\vec{e_r}$.

D'autre part, pour $r = r_0$, l'expression du champ *avec* ou *sans* ions autour est la même (car on est collé à la surface de la particule). Donc :

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} = A\frac{\exp(-r_0/\lambda)}{r^2}\left(1 + \frac{r_0}{\lambda}\right)$$

On a alors :

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}\frac{1}{1 + \frac{r_0}{\lambda}}\exp\left(-\frac{r - r_0}{\lambda}\right)$$

La densité de charge est proportionnelle à l'opposé du potentiel :

$$\rho(r) = -\frac{2N_0 e Q}{4\pi k_B T \epsilon r^2}\frac{1}{1 + \frac{r_0}{\lambda}}\exp\left(-\frac{r - r_0}{\lambda}\right)$$

Condensateur Terre-ionosphère

♣ Les symétries et les invariances donnent $\vec{E} = E(r)\vec{e_r}$. Avec le théorème de Gauss appliqué sur une sphère de rayon r, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ccc} r < R & : & \vec{E} = \vec{0} \\ R < r < R + z_0 & : & \vec{E} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r} \\ r > R + z_0 & : & \vec{E} = \vec{0} \end{array}\right.$$

♣ Le potentiel se retrouve grâce à l'équation $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -E(r)$. On a donc :

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + A$$

Comme le potentiel est nul en $z = 0$ (cad en $r = R$) :

$$V = V(R + z_0) - V(0) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R + z_0}\right)$$

On trouve une capacité équivalente de :

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 R(R + z_0)}{z_0} \simeq \frac{4\pi\varepsilon_0 R^2}{z_0}$$

L'approximation est la formule d'un condensateur plan. de surface $4\pi R^2$. L'énergie électrostatique est $W_{el} = \frac{1}{2}CV^2$. Enfin on peut dire dans cette approximation que $\vec{E} \simeq \frac{V}{z_0}\vec{e_r}$. On trouve $C = 6,7 \cdot 10^{-2}$F, $W_{el} = 4,3 \cdot 10^9$J et $E = 6$V/m.

♣ Toujours dans l'analogie avec le condensateur plan, $\vec{E} = \sigma/\varepsilon\vec{e_r}$. On trouve donc $\sigma = 5,3 \cdot 10^{-11}$C.m^{-2} et $Q = 4\pi R^2\sigma = 24 \cdot 10^3$C.

♣ On peut dire que $E \simeq V/z_1$, où z_1 est l'altitude des nuages. En ordre de grandeur, on a $Z_1 = 1$km, donc $V_1 \simeq 10^8$V.