Machines de Carnot et de Stirling

On considère une machine thermodynamique effectuant les transformations suivantes, sur un gaz parfait contenant n moles :

- $A \rightarrow B$: compression isotherme, réversible à la température T_f (contact avec une source froide)
- $B \rightarrow C$: compression adiabatique, réversible
- $C \rightarrow D$: détente isotherme, réversible à la température T_c (contact avec une source chaude)
- $D \rightarrow A$: détente adiabatique, réversible

Ce cycle est appelé cycle de Carnot, qui permet en théorie, d'obtenir un rendement maximal. On supposera que le rapport des volumes $V_A/V_B = 10$. Questions :

♣ Tracer le cycle dans un diagramme de Clapeyron. Ce cycle est-il moteur ou récepteur ? Justifier.

♣ Déterminer, pour chaque transformation, ΔU, W, et Q.

♣ En déduire le rendement théorique.

On s'intéresse au cycle de Stirling, dans lequel les transformations $B \rightarrow C$ et $D \rightarrow A$ sont désormais des isochores au contact respectivement de la source chaude et source froide. Les autres transformations sont les mêmes. Le cycle de Stirling a l'avantage de pouvoir être réalisable en pratique sur des dispositifs appelés *moteurs de Stirling*, contrairement au cycle de Carnot, théorique.

♠ Mêmes questions que pour le cycle de Carnot ci-dessus. Quel est le rendement théorique ? Montrer qu'il est nécessairement inférieur au rendement de Carnot.

♠ Montrer que l'on peut récupérer une partie d ela chaleur lors du cycle pour atteindre le rendement de Carnot.

♠ On suppose qu'une voiture normale est mue par le moteur étudié jusque-là. En supposant que la chaleur apportée par la source chaude est créée par de la combustion d'essence, de pouvoir calorifique de 35 475kJ.L^{-1}. Estimer la quantité d'essence injectée à chaque cycle ? Combien vaut alors T_c ?

Cycle de Beau de Rochas

Les moteurs à essence équipant la plupart des véhicules terrestres sont des machines thermodynamiques constitués de un ou plusieurs cylindres, dans lequels un piston fait subir sur n moles de gaz parfait le cycle suivant (dit de Beau de Rochas) :

$A \to B$: compression adiabatique, réversible du volume V_A au volume V_B : le mélange d'air et essence est comprimé ;

$B \to C$: échauffement isochore en contact de la source chaude, en pratique il s'agit de la combustion très rapide de l'essence ;

$C \to D$: détente adiabatique, réversible du volume V_B au volume $V_C = V_A$: les gaz de combustion "poussent" le cylindre en fournissant du travail ;

$D \to A$: refroidissement isochore en contact de la source froide : les gaz issus de combustion sont évacués et remplacés par par un mélange d'air frais et d'essence.

Ce cycle de fonctionnement a l'avantage de pouvoir faire varier la puissance rapidement en faisant varier à la demande la quantité de chaleur Q_c apportée par l'essence lors de la transformation $B \to C$, mais au détriment du rendement. On souhaite montrer que le rendement η de ce cycle est nécessairement inférieur au rendement de Carnot η_C.

♣ Décrire ce cycle dans un diagramme de Clapeyron et justifier qu'il est moteur.

♣ Déterminer, pour chaque transformation, ΔU, W, et Q en fonction de températures T_A, T_B, T_C et T_D atteintes aux moments A, B, C et D.

♣ Déterminer les tempratures T_B, T_C et T_D en fonction de T_A. Quel paramètre doit-on introduire pour calculer T_C ?

♣ Calculer son rendement η en fonction de $a = V_A/V_B$ et γ.

♣ Rappeler le rendement de Carnot η_C et montrer que celui-ci est nécessairement supérieur au rendement η de ce cycle.

♣ On suppose que ce moteur sert à mouvoir une voiture individuelle. En supposant que la chaleur apportée par la source chaude est créée par de la combustion d'essence, de pouvoir calorifique de 35 475kJ.L^{-1}; estimer le volume d'essence injecté à chaque cycle. Combien vaut alors T_c ?

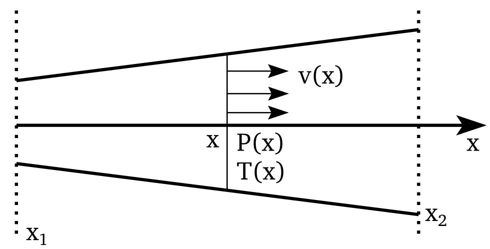
Données : $V_2/V1 = 10$ *et* $\gamma = 1.4$

Exercice 2

On étudie l'écoulement d'un gaz dans un conduit horizontal isolé thermiquement du milieu extérieur. En régime permanent, dans une section droite, les vitesses d'écoulement sont égales et normales à la section. La pression et la température sont supposées indépendantes du temps et uniformes.

On note $H_m(x)$ l'enthalpie molaire du gaz à l'abscisse x et M la masse molaire du gaz.

- A l'aide du premier principe de la thermodynamique, montrer que pour une mole de gaz passant dans le conduit, on peut écrire $H_m(x) + \frac{1}{2}Mv^2(x) = cste$.



Cas d'une tuyère

Le conduit dans lequel s'écoule le gaz est supposé être une tuyère. Après la combustion du carburant, les gaz produits sont supposés être :

- à l'entrée de la tuyère, $x = x_1$: $P_1 = 3$ bars; $T_1 = 300$ K;
- à la sortie de la tuyère, $x = x_2$: $P_2 = 1$ bars; $T_2 = 250$ K.

- En supposant $v(x_1)$ négligeable, calculer $v(x_2)$. On supposera le gaz parfait.

Cas d'une turbine à gaz

On suppose que le gaz est utilisé à la sortie pour actionner une turbine située dans la tuyère. A l'entrée, il a une vitesse v_2, une température T_2 et une pression P_2. A la sortie, la pression et la température sont inchangées, mais la vitesse est nulle.

- Comment est modifiée la relation trouvée dans la première question ?
- Calculer le travail récupéré par la turbine lors du passage d'une mole de gaz.

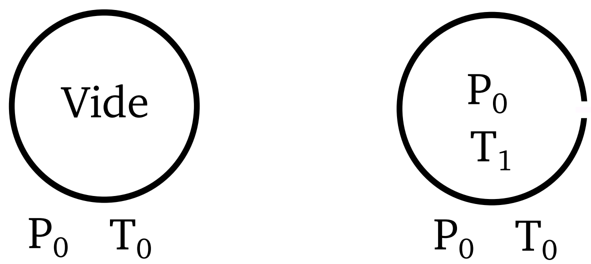
Données : $M = 32 g.mol^{-1}$ *et* $\gamma = 1.4$

Exercice 3

Premier principe

Une ampoule de volume de V_1, dans laquelle règne le vide, est entourée d'air ambiant à la pression $P_0 = 1$atm et à la température $T_0 = 20°C$, qu'on assimile à un gaz parfait de coefficient $\gamma = 1.4$. On perce un petit trou dans l'ampoule, l'air s'y engouffre et au bout d'une durée très courte, la pression dans l'ampoule est égale à la pression ambiante.

Quel est la température T_1 dans l'ampoule une fois celle-ci remplie?



Second principe

Soit un système de volume constant constitué d'un nombre $N >> 1$ de particules en équilibre à la température T et dont chacune peut avoir deux niveau d'énergie E_1 et E_2, avec $E_1 < E_2$.

Soit n_1 le nombre de particules dans l'état d'énergie E_1 et n_2 le nombre de particules dans l'état d'énergie E_2.

On suppose que la répartition des particules se fait selon la loi de Boltzmann :

$$\frac{n_2}{n_1} = exp\left(\frac{E_2 - E_1}{k_b T}\right) \tag{1}$$

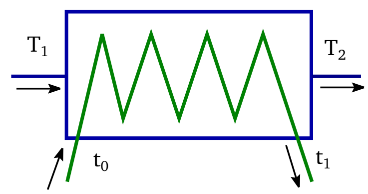
Cette distribution indique que les niveaux ont d'autant plus de chance d'être peuplés qu'ils n'ont pas une énergie élevée. D'autre part plus la température est élevée, plus les niveaux d'énergies élevées pourront être peuplés.

- Déterminez la différentielle de l'énergie interne du système en fonction de n_1 et $E_2 - E_1$.
- On rappelle que l'entropie peut s'écrire comme $S = k_B \ln \Omega$, où Ω est le nombre de configurations possibles pour le système. Exprimez S en fonction de N et n_1. On utilisera la formule de Stirling $\ln(N!) = N\ln(N)$ valable pour $N >> 1$.
- Exprimez la différentielle de S en fonction de T, Δ et n_1.
- Montrez que l'on retrouve l'identité thermodynamique : $dU = TdS$

Exercice 4

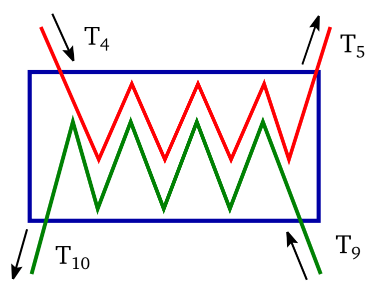
Dans tout le problème, les échanges de travail et de chaleur seront toujours considérés du point de vue du gaz.

- On considère le réfrigérant représenté ci-dessous, qu'on suppose parfaitement calorifugé. Le gaz, de chaleur massique c_p est refroidi à pression constante, de la température T_2 à la température T_3, au moyen d'un circuit d'eau (de chaleur massique c constante), qui, elle, est réchauffée de t_0 à t_1.



  Le débit massique du gaz étant imposé, déterminer le débit massique D nécessaire du circuit d'eau de refroidissement.

- On considère maintenant un échangeur de chaleur représenté ci-dessous. Il comporte deux canalisations dans lesquelles le même gaz circule avec le même débit mais dans des sens opposés. Les températures d'entrées, supposées connues, seront notées T_4 et T_9 et les température de sorties respectives T_5 et T_{10}. Dans chaque canalisation, la pression est constante. On suppose



  d'abord réversible les transformations subies par le gaz dans chaque canalisation. En utilisant les fonctions enthalpie et entropie, écrire les relations reliant T_5 et T_{10} à T_4 et T_9.

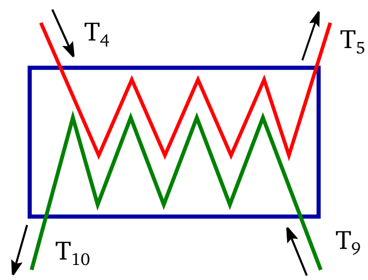
  En déduire les solutions physiquement acceptables pour T_5 et T_{10}.

  Si les transformations sont en fait irréversibles, quel les inégalités satisfaites par T_5 et T_{10}, si l'on suppose $T_4 > T_9$?

- On définit l'efficacité comme étant : $e = \frac{T_5 - T4}{T_9 - T4}$ en considérant la canalisation 4-5. Montrer qu'on obtient la même efficacité en considérant la canalisation 9-10.

Echangeur à gaz

On considère un échangeur de chaleur représenté sur le schéma ci-dessous. Il comporte deux canalisations dans lesquelles le même gaz (supposé parfait) circule avec le même débit mais dans des sens opposés. Les températures d'entrées, supposées connues, seront notées T_4 et T_9 et les températures de sorties respectives T_5 et T_{10}. Dans chaque canalisation, la pression est constante.



- Démontrer l'expression du premier principe de la thermodynamique appliqué sur un fluide en écoulement.
- Montrer alors que les températures vérifient la relation suivante :

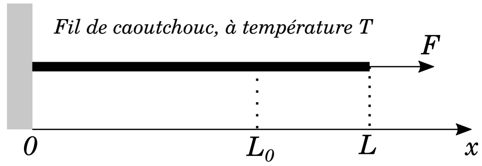
  $$T_{10} + T_5 = T_4 + T_9$$

  Commenter cette relation.
- Démontrer l'expression du second principe de la thermodynamique appliqué sur un fluide en écoulement.
- En supposant que toutes les transformations à l'intérieur des canalisations sont adiabatiques et réversibles, montrer que :

  $$T_5 \times T_{10} = T_4 \times T_9$$

  On admettra que la variation de l'entropie d'une mole de gaz parfait lors d'une transformation isobare s'écrit $\Delta_1^2 S = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \ln \frac{T_2}{T_1}$
- Quelles sont les solutions physiquement acceptables pour les températures de sortie ?

Exercice 5



On considère un fil de caoutchouc décrit par les variables d'état suivantes : sa longueur L, sa température T et F la force appliquée dessus. On le modélise à travers une équation d'état de la forme :

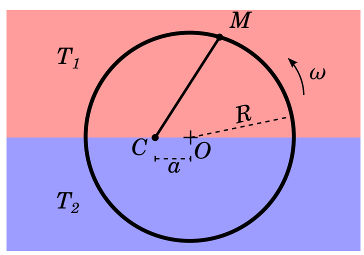
$$F(L,T) = F_0 + \rho(L - L_0) + \sigma(T - T_0) \tag{2}$$

où ρ et σ sont des constantes positives et les grandeurs indicées par "0" sont des grandeurs intrinsèques au fil. D'autre part, on admet que l'énergie interne du fil s'écrit :

$$U(L,T) = C_L(T - T_0) + (F_0 - \sigma T_0)(L - L_0) + \frac{\rho}{2}(L - L_0)^2 + U_0 \tag{3}$$

où C_L est une constante.

On attache désormais le fil de caoutchouc en CM, où le cercle de centre O et de rayon $OM = R$ tourne à la vitesse angulaire ω. On a $CO = a \ll R$. Le cercle est plongé à son diamètre entre deux source de chaleurs à températures T_1 et T_2 (avec $T_1 > T_2$) :



En tournant dans le sens de rotation indiqué sur le schéma, le fil subit les transformations successives suivantes :

$A \to B$: Une transformation isotherme à T_1 lorsque le fil est dans la demi-partie supérieure (rouge)

$B \to C$: Lorsque le fil passe à l'horizontale (longueur $R - a$), il passe instantanément de T_1 à T_2

$C \to D$: Une transformation isotherme à T_2 lorsque le fil est dans la demi-partie inférieure (bleue)

$D \to A$: Lorsque le fil passe à l'horizontale (longueur $R + a$), il passe instantanément de T_2 à T_1

Questions :

- ♠ Par analogie avec le travail des forces de pression d'un gaz parfait ($P, V \leftarrow F, L$), montrer que le travail reçu par l'élastique sur une transformation $A \to B$ s'écrit $W = \int_A^B dL \cdot F$.
- ♠ Décrire le cycle dans un diagramme de Clapeyron (F, L).
- ♠ Calculer les divers échanges mécaniques et thermiques au cours de ce cycle.
- ♠ Le cycle proposé est-il moteur ? Calculer son rendement.

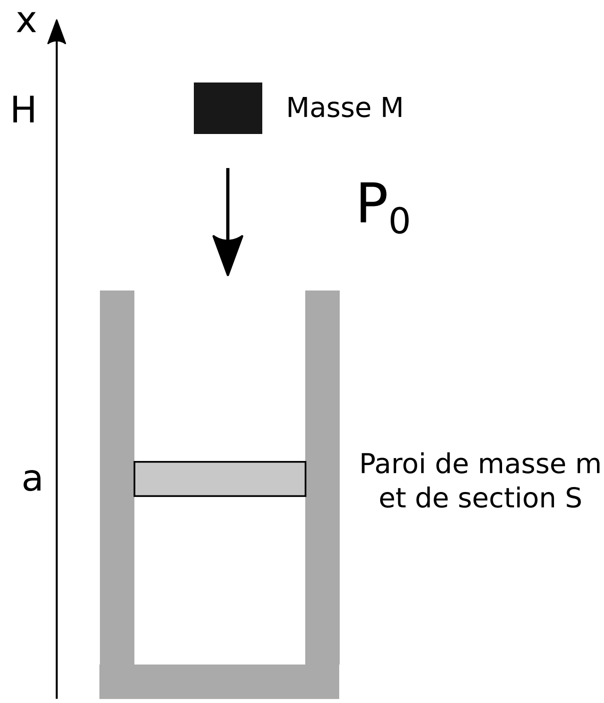
Exercice 6

On considère un cylindre rempli d'un gaz parfait à la température T_1, à la pression P_1 et un volume $V_1 = aS$, où a est la hauteur et S la section.

Le cylindre est surmonté d'un piston, de masse m, libre de coulisser sans frottement. La pression à l'extérieur du dispositif est P_0.

Les parois du cylindre et du piston sont considérées comme athermane : il n'y a aucun échange thermique avec l'extérieur.

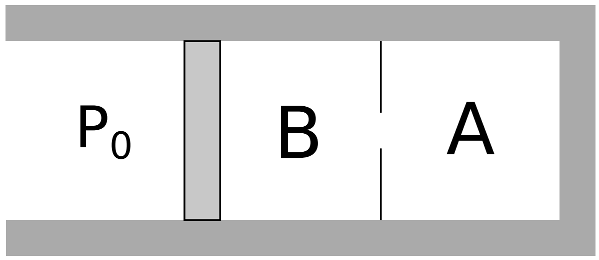
A un certain moment, on fait tomber une masse M sur le piston d'une hauteur H. Après quelques oscillations, le piston retourne à un nouvel équilibre.



- Calculez les paramètres internes du gaz au nouvel équilibre.
- Pour quelle hauteur de chute H_C le piston se retrouve t-il exactement à la même hauteur initiale a ?
- Que se passe t-il si M devient très lourde ?

Exercice 7

On considère le dispositif ci-dessous. Le piston (gris, entouré de noir) et les parois (en gris) sont adiabatiques. La paroi interne séparant les espaces A et B est fixe et diatherme. Elle est percée d'un trou fermé par une fenêtre amovible. La pression extérieure est $P_0 = 1$ bar. Initialement, le volume B est rempli d'une mole de gaz parfait $\gamma = 1,4$, avec une pression $P_0 = 1$ bar, une température $T_0 = 300$K. Le volume A est vide.



- On ouvre la fenêtre. Décrire qualitativement ce qu'il se passe suivant le volume de A. En déduire l'existence d'un volume critique V_C que l'on ne demande pas de calculer ici.
- On suppose $V_A < V_C$. Déterminez l'état final du gaz en fonction de (P_0, V_A, V_B). Calculer la création d'entropie. Quelle est la cause de la création d'entropie ? Déterminez V_C.
- On suppose désormais que $V_A > V_C$. Quel est l'état final ?

Travail maximal de deux réservoirs finis

On considère deux réservoirs A et B remplis du même gaz parfait caractérisé par γ, l'un contenant n_A moles à la température T_A, l'autre n_B moles à la température T_B. Ils sont parfaitements isolés du monde extérieur, mais peuvent échanger de la chaleur avec une machine thermique M, considérée comme parfaite (pas de capacité calorifique propre, pas de d'échange thermique autre qu'avec A et B, aucun frottement). Cette machine peut néanmoins extraire un travail W avec l'extérieur.

- ♦ Quelle est la quantité maximale de travail W que peut extraire la machine M ?

Formation du brouillard

On considère un gaz parfait de coefficient γ contenu dans un cylindre de section S orienté verticalement. L'altitude le long de ce cylindre est notée z, et on note g l'accélération de la pesanteur supposée uniforme le long du cylindre. Le gaz est soumis à un mouvement ascendant dans le cylindre en se déplaçant à la vitesse notée c. Les parois du cylindre ne permettent pas de transfert thermique. L'écoulement est de plus supposé stationnaire.

On note T_0, P_0 et c_0 la température, la pression et la vitesse du gaz à l'altitude $z = 0$ et $T(z)$, $P(z)$ et $c(z)$ ces trois grandeurs à l'altitude z. De la même manière, on introduit $h_{m,0}$ et $h_m(z)$ l'enthalpie massique du gaz à l'altitude $z = 0$ et z.

- △ En utilisant le premier principe industriel appliqué au gaz dans le cylindre entre les altitudes $z = 0$ et z, trouver une relation entre $h_{m,0}$, $h_m(z)$, c_0, $c(z)$ et z.

- △ Pour simplifier le problème, on considère que la vitesse du gaz est quasi-nulle, de sorte à ce que $c_0 = c(z) = 0$. Montrer que la température obéit alors à la loi suivante :

$$T(z) = T_0 \left(1 - \frac{z}{H}\right)$$

  Expliciter H en fonction de γ, g et la masse molaire du gaz M. Donner une estimation numérique.

On considère que le gaz étudié est de l'air humide, subissant une ascension verticale, lente et isentropique dans ce cylindre. La vapeur d'eau contenue en faible quantité dans l'air se comporte comme un gaz parfait. La pression de vapeur saturante de l'eau, notée P_s et exprimée en Pa est une focntion de T suivant la loi empirique suivante :

$$\ln(P_s(T)) = a - \frac{b}{T}$$

- △ Soit φ la fraction molaire de vapeur d'eau contenue dans une masse d'air ascendante. Après avoir explicité la pression $P(z)$ dans la colonne, déterminer la pression partielle $P_e(z)$ de cette vapeur.

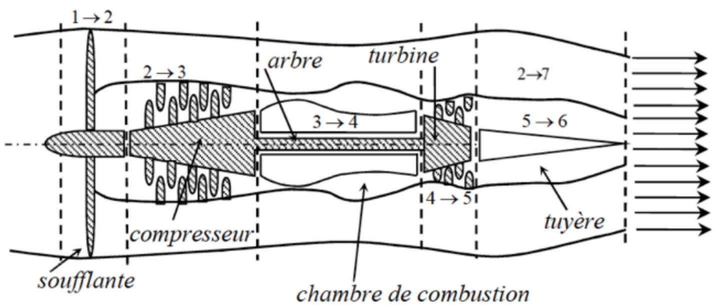
- △ A quelle altitude, notée z_1, peut-on avoir le changement d'état liquide-vapeur ? On pourra supposer que $z \ll H$.

- △ Justifier que les reliefs sont propices à l'apparition du brouillard.

Etude d'un turborécteur

Un turboréacteur est un moteur thermique équipant les avions dits *à réaction*, schématisé ci-dessous. Le fonctionnement général est le suivant : une turbine aspire et comprime l'air en amont du réacteur (soufflante et compresseur, étapes $1 \to 2$ et $2 \to 3$), qui est échauffé par la combustion du kérosène dans la chambre de combustion (étape $\to 4$). Les gaz de combustion sont ensuite détendus ($4 \to 5$) à travers une turbine dont l'arbre est commun avec celui du compresseur et de la soufflante, puis ces gaz sont finalement évacués par la tuyère ($5 \to 6$), en accélérant fortement, fournissant la poussée requise.

Le but de l'exercice est de calculer la vitesse de sortie c_6 des gaz de combustion. On ne s'intéresse ici qu'au flux primaire, circulant dans le compresseur. Le flux dit secondaire, passant de $2 \to 7$ n'est pas étudié ici.



On formule les hypothèses suivantes pour les différentes transformations :

$1 \to 3$: Soufflante et compresseur, compression adiabatique réversible au taux de compression $P_2/P_1 = 2$ puis $P_3/P_2 = 13$;

$3 \to 4$: Chambre de combustion, le gaz est chauffé jusqu'à $T_4 = 1450$K de manière isobare ;

$4 \to 5$: Détente adiabatique réversible du gaz de P_4 et P_5 à travers la turbine ;

$5 \to 6$: Détente adiabatique réversible du gaz de P_5 et P_6 dans la tuyère.

On supposera que le régime est stationnaire, que l'énergie potentielle de pesanteur du fluide est négligeable dans toutes les étapes. L'énergie cinétique sera aussi négligée dans toutes les étapes, sauf à la sortie de la tuyère (en 6) où le gaz est très fortement accéléré. On négligera tout frottement mécanique. Les pressions en entrée et en sortie sont $P_1 = P_6 = 1$ bar et la température en entrée est $T_1 = 288$K. On note C_p la capacité thermique massique de l'air.

★ En s'inspirant de la démonstration du premier principe indutriel, montrer que le travail massique utile reçu par le gaz lors de la trasformation de l'état i à j (sauf pour $3 \to 4$, dans la chambre de combustion) est donné par :

$$w_{i \to j} = C_p(T_j - T_i) + \frac{1}{2}\left(c_j^2 - c_i^2\right)$$

★ Donner une relation entre P_i, P_j, T_i, T_j et γ (sauf pour $3 \to 4$).

★ En exploitant le couplage mécanique entre turbine, compresseur et soufflante, établir les expressions littérales et les valeurs numériques des températures T_2, T_3, T_5 et de la pression P_5 en sortie de turbine.

★ En déduire la vitesse c_6 en sortie de turbine.

Données : $C_p = 1,0 \times 10^3 \text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$, $\gamma = 1,4$

Cuisson du bacon avec un fusil semi-automatique

L'actuel sénateur du Texas, Ted Cruz, a réalisé une vidéo dans laquelle il fait cuire son *bacon* dominical sur le canon de son fusil d'assaut, en tirant plusieurs cartouches. Pour cela, il enroule 4 tranches de bacon sur le canon de son fusil, elles-mêmes enroulées sous du papier aluminium (la cuisson sera considérée comme adiabatique par rapport à l'air ambiant). Combien Ted doit-il tirer de cartouches pour obtenir un bacon bien croquant, c'est-à-dire exposé à une température de 300°C ?

Données :

- Energie de combustion de la poudre : 5700 J
- Pression maximale atteinte dans le canon : 4300 bar
- Volume de la cartouche : 350 mm^3
- Capacité calorifique du canon : 365 $J.K^{-1}$
- Capacité calorifique massique du bacon : 2750 $J.K^{-1}.kg^{-1}$