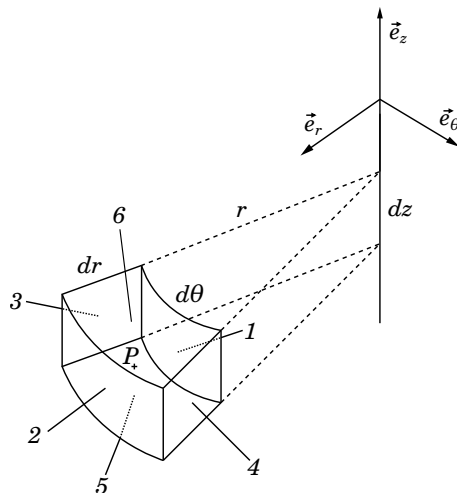


Flux et divergence en coordonnées cylindriques

On s'intéresse à l'écoulement d'un fluide incompressible en utilisant la description lagrangienne. On considère un volume $d\tau$ élémentaire, situé en $P = (r, \theta, z)$ en coordonnées cylindriques. Chaque face de ce volume est indexé de 1 à 6, comme indiqué sur le schéma ci-dessous.



Le champ de vitesse en tout point P est noté $\vec{v}(r, \theta, z)$. On admet que le débit volumique ϕ_v d'un fluide à travers une surface Σ est :

$$\phi_v = \iint_{\Sigma} d\vec{S} \cdot \vec{v} \quad (1)$$

Plus précisément, c'est la somme sur la surface Σ des flux (ou débits volumiques) élémentaires $d\phi_v = d\vec{S} \cdot \vec{v}$.

- * Rappeler ce que sont les descriptions lagrangienne et eulérienne d'un fluide en écoulement.
- * Calculer les flux élémentaires $d\phi_{v,i}$ sur chaque face du volume élémentaire $d\tau$, $i \in \{1; 6\}$.
- * En déduire la relation :

$$\sum_{i=1}^6 d\phi_{v,i} = \text{div}(\vec{v}) d\tau$$

Cela vous rappelle-t-il un théorème ?

- * On suppose désormais que l'écoulement est radial et qu'il ne dépend que de r : $\vec{v} = v(r)\vec{e}_r$. De plus, on suppose que l'écoulement est incompressible, c'est-à-dire que pour tout volume V ne contenant pas l'axe Oz , le débit de fluide entrant dans V est égal au débit de fluide sortant. En déduire que le champ de vitesse s'écrit $\vec{v} = \frac{A}{r}\vec{e}_r$, où A est constante.
- * On s'intéresse au volume V délimitant un cylindre coaxial à l'axe Oz , de hauteur h , de rayon R . En considérant le champ de vitesse radial de la question précédente, calculer le débit volumique ϕ_v s'écoulant à travers les parois de ce cylindre en utilisant la définition du débit donné avec la formule 1. Est-ce compatible avec le théorème de Green-Ostrogradski ?

Données

Divergence en coordonnée cylindrique d'un vecteur \vec{A} :

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Théorème de Green-Ostrogradski :

$$\iiint_V \text{div}(\vec{A}) d\tau = \oint_{\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

Structure de l'atmosphère

La troposphère constitue la partie basse de l'atmosphère dans laquelle nous vivons, du niveau de la mer jusqu'à une altitude comprise entre 8 et 15km. On peut considérer la troposphère comme un gaz parfait de coefficient thermodynamique $\gamma = 7/5$, de masse molaire $M = 28.965\text{g.mol}^{-1}$, soumis à la gravitation terrestre, modélisée par l'accélération de la pesanteur $g = 9.81\text{m.s}^{-2}$ supposée constante avec l'altitude. L'altitude sera représentée par la variable z . La pression au niveau de la mer $z = 0$ est $P_0 = 10^5\text{Pa}$ et la température est $T_0 = 293\text{K}$. On souhaite connaître l'évolution de la pression P et de la température T avec l'altitude.

- △ A partir d'un bilan de force, démontrer la relation fondamentale de la statique des fluides pour l'atmosphère :

$$\vec{\text{grad}}(P) - \rho \vec{g} = \vec{0}$$

où ρ est la densité massique de l'atmosphère.

- △ Pour déterminer l'évolution de la pression et de la température avec l'altitude, on suppose qu'un volume V d'air subit une transformation adiabatique réversible lorsqu'il change d'altitude. Montrer alors que la pression P et la densité ρ de l'air sont alors reliées par :

$$\rho = \frac{MP_0}{RT_0} \left(\frac{P}{P_0} \right)^{1/\gamma}$$

- △ En déduire l'évolution de la pression avec l'altitude $P(z)$, de la densité $\rho(z)$ puis celle de la température $T(z)$. Commenter en mettant en évidence une altitude caractéristique H , et calculer sa valeur numérique. Dans ce modèle, quelle est alors l'épaisseur de l'atmosphère ?
- △ De combien chute la température lorsqu'on monte à 1000m d'altitude d'après ce modèle ? Quelle est la pression et la densité de l'air au sommet de l'Everest (8848m) ?
- △ En réalité, le gradient de température diminue de $7.7 \cdot 10^{-3}\text{K.m}^{-1}$. Cela s'explique par le fait que une transformation thermodynamique dans l'atmosphère (comme évoqué ci-dessus) n'est pas parfaitement adiabatique, et peut être modélisée par un coefficient thermodynamique $\gamma_{eff} \neq \gamma$. Calculer γ_{eff} .
- △ Comparer le modèle précédent (appelé modèle polytropique de l'atmosphère) avec celui de l'atmosphère isotherme.

Exercice 1

On s'intéresse à l'écoulement stationnaire, incompressible d'un fluide de masse volumique ρ et de viscosité η autour d'une sphère de rayon R . La vitesse de l'écoulement loin de la sphère est $v_\infty \vec{e}_z$. On adoptera les coordonnées sphériques d'axe Oz , O étant le centre de la sphère.

- On suppose que l'écoulement permet de négliger le terme convectif de l'équation de Navier-Stokes devant le terme diffusif. Comment s'écrit alors cette équation ?
- On suppose que la vitesse est telle que : $\vec{rot}(\vec{rot}(\vec{v})) = \frac{3v_\infty R}{r^3} (\cos \theta \vec{e}_r + \frac{1}{2} \sin \theta \vec{e}_\theta)$. Quelle est la résultante des forces de pression sur la sphère ?
- Quelle est la résultante des actions de cisaillement sur la sphère ? On donne $(\frac{\partial v_\theta}{\partial r})_{r=R} = \frac{3v_\infty}{2R} \sin \theta$.
- Trouver la force de trainée s'exerçant sur la sphère.

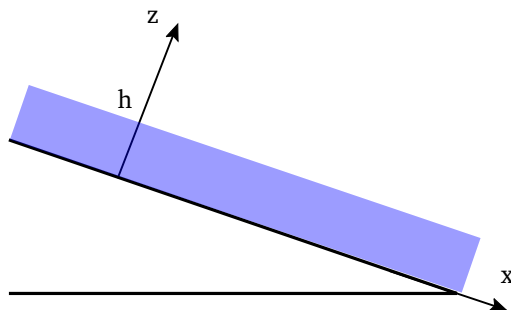
On donne :

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \quad (2)$$

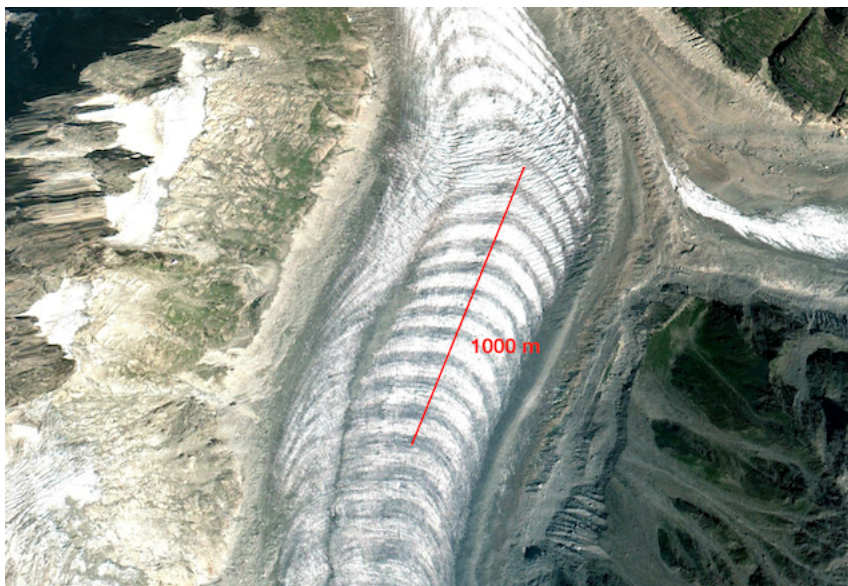
$$\vec{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \quad (3)$$

Exercice 2

On considère un fluide d'épaisseur h s'écoulant lentement sur un plan infini incliné d'un angle α par rapport à la verticale. Le fluide a une forte viscosité η et une masse volumique ρ , et il est soumis à la gravité. On est en régime permanent, et on suppose que la vitesse selon \vec{e}_y est nulle.



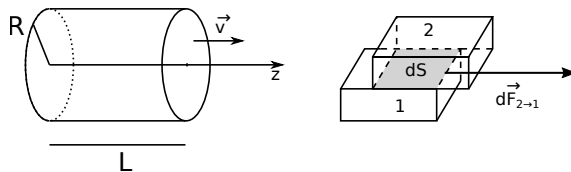
- Ecrire le bilan des forces volumiques s'exerçant sur un volume de fluide situé au point $M = (x, y, z)$.
- Montrer que $\vec{v}(x, y, z) = v(z)\vec{e}_x$. Quel est le profil de vitesse dans le fluide ?
- En déduire le débit linéique (le débit par unité de longueur selon l'axe y).
- On souhaite avoir un ordre de grandeur de la viscosité d'un glacier. Pour cela, dispose d'image satellite du glacier du Tacul, situé sur la face nord du Mont Blanc. Chaque "rayure" correspond à une année. Estimer sa viscosité.



- En reprenant la première figure, on place désormais une plaque au dessus du liquide, au niveau de $z = h$. Que deviennent les conditions aux limites ? Trouver le nouveau profil de vitesse. Comment s'appelle ce type d'écoulement ?

Exercice 3

On étudie un écoulement permanent d'un fluide incompressible de masse volumique μ , dans un tuyau cylindrique horizontal d'axe Oz , de rayon R , et de longueur L (schéma de gauche). Le champ de pression appliqué le long du tube est noté $P(r, z)$. Par invariance, le champ de vitesse est supposé ne dépendre que de r et z , et est dirigé selon \vec{e}_z . Il est noté $\vec{u} = u(r, z)\vec{e}_z$. On définit la vitesse de cisaillement par la quantité $\dot{\gamma} = -\frac{du}{dr}$.



On définit la force surfacique de viscosité $\vec{\tau}$, ou contrainte de cisaillement, entre deux couches adjacentes de fluide, la quantité : $\vec{\tau} = \frac{d\vec{F}}{dS}$. où $d\vec{F}$ est la force qui s'exerce mutuellement entre les couches adjacentes, et dS la surface élémentaire de contact entre ces deux surfaces (schéma de droite).

- ★ Quelle est la relation entre la force de viscosité $\vec{\tau}$ et le champ de vitesse u dans le cas d'un fluide classique (vu en cours), dit newtonien ? On pourra dans cette question se placer en coordonnées cartésiennes.

Fluide de Bingham

Un fluide est dit de Bingham si les contraintes de cisaillements entre les couches obéissent à une loi de seuil :

$$\begin{cases} \tau > \tau_s & : \quad \tau = \tau_s + \eta\dot{\gamma} \\ \tau < \tau_s & : \quad \dot{\gamma} = 0 \end{cases}$$

On supposera que le fluide que l'on étudie obéit à une telle loi.

- ★ Quel est la différence entre un fluide classique et un fluide de Bingham ?
- ★ Montrer que \vec{u} ne dépend que de r . En négligeant les actions de la pesanteur, déterminer la relation suivante :

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau)}{\partial r} = 0$$

- ★ Établir la relation :

$$\tau(r) = \tau_s \frac{r}{R_s}$$

où R_s est le rayon de seuil, défini par $R_s = 2\tau_s L / \Delta P$, en notant $\Delta P = P(0) - P(L)$ la chute de pression entre l'entrée et la sortie du tuyau. Quel est le signe de ΔP ?

- ★ Pour quelle pression minimale ΔP_{min} commence t-on à voir un écoulement à travers le tube ?
- ★ On suppose que $\Delta P > \Delta P_{min}$. Déterminer le champs de vitesse dans le tube. Tracer son allure et expliquer pourquoi l'écoulement présente une zone dite *bouchon*.

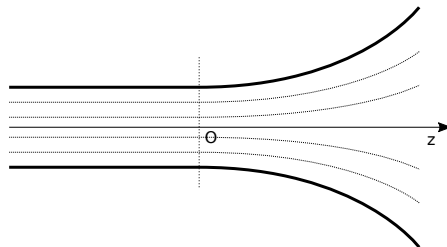
Exercice 4

Tuyau parabolique

Un fluide est en écoulement permanent dans une portion de tube à section parabolique, avec Oz en axe de symétrie. Les lignes de courant s'écoulant dans le tube ont pour équation :

$$\begin{cases} z < 0 & : & r = \lambda a \\ z > 0 & : & r = \lambda \left(a + \frac{z^2}{b} \right) \end{cases}$$

où a est le rayon du tube pour $z < 0$ et b une longueur caractéristique de l'évasement du tube pour $z > 0$ (cf schéma). Le paramètre λ décrit permet de décrire les lignes de courant : chaque ligne de courant est paramétrée par une valeur de λ donné.



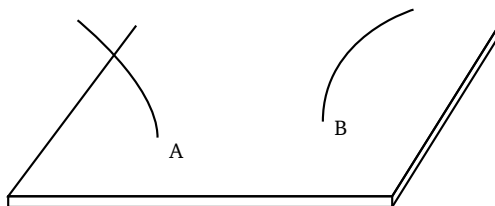
Le fluide est incompressible et la composante axiale de v_z de la vitesse est supposée uniforme sur une section perpendiculaire, cad v_z ne dépend pas de r . On note v_0 la vitesse en O .

- * Déterminez la composante vitesse selon z , v_z en tout point.
- * Déterminez la composante vitesse selon r , v_r en tout point. En déduire l'expression du champ de vitesse \vec{v} .
- * Comment évolue un élément de fluide qui traverse le tuyau ?
- * Un écoulement est dit rotationnel si une particule de fluide ne subit pas de rotation lors de l'écoulement. Est-ce le cas ici ? On pourra le vérifier en calculant $\text{rot}(\vec{v})$: si $\text{rot}(\vec{v}) \neq 0$ alors l'écoulement est irrotationnel. On donne la formule du rotationnel en coordonnées cylindriques ci-dessous.

$$\text{rot} \mathbf{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{u}_z$$

Écoulement entre deux lames

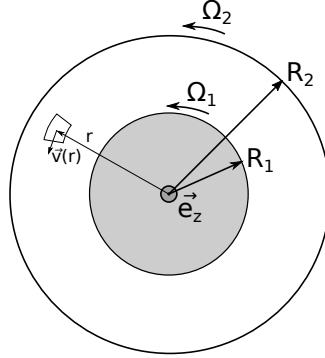
On considère deux plaques infinies de verres séparées d'une épaisseur e où circule un fluide incompressible. Du fluide est injecté à un débit D_e par le tuyau A , et il peut ressortir à travers le tuyau B identique. On suppose que l'écoulement est incompressible et relativement lent.



- 1 - Proposer une solution pour le champ de vitesses en faisant des hypothèses raisonnables.
- 2 - Est-ce un écoulement compressible ?

Exercice 5

On considère un fluide incompressible, de viscosité η contenu entre deux cylindres orientés verticalement, de même axe O_z , et de rayons respectifs R_1 et R_2 (avec $R_1 < R_2$). La hauteur des cylindres L est très grande devant les rayons : $L \gg R_1, R_2$. Les deux cylindres peuvent tourner indépendamment l'un de l'autre autour de l'axe O_z .



On définit la force surfacique de viscosité $\vec{\sigma}$, ou contrainte de cisaillement, entre deux couches élémentaires adjacentes de fluide, la quantité : $\vec{\sigma} = \frac{d\vec{F}}{dS}$, où $d\vec{F}$ est la force qui s'exerce mutuellement entre les couches adjacentes, et dS la surface élémentaire de contact entre ces deux surfaces. L'expression en coordonnées cylindrique de sa composante selon \vec{e}_θ s'écrit :

$$\sigma_\theta(r, \theta, z) = \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right)$$

Il est possible de démontrer que, dans le cadre de ce problème, les autres composantes de $\vec{\sigma}$ sont nulles : $\sigma_r = \sigma_z = 0$. Nous l'admettrons pour la suite du problème.

L'écoulement est supposé permanent. On suppose aussi que $v_z = 0$.

- ♣ Quel est le nombre de Reynolds de cet écoulement ? En déduire le type d'écoulement. *Données* : $R_1 = 40\text{cm}$, $R_2 = 60\text{cm}$, $\Omega_1 \simeq \Omega_2 = 1\text{rad.s}^{-1}$, $\rho = 960\text{kg.m}^{-3}$ et $\eta = 120\text{ SI}$.
- ♣ A partir des invariances du problèmes, montrer que v ne dépend que de r . En s'appuyant sur un bilan de matière, retrouver l'expression de l'équation de conservation de la masse (ou du débit) et en déduire que le champ de vitesse s'écrit $\vec{v} = v_\theta(r)\vec{e}_\theta$.
- ♣ En faisant un bilan des moments sur un élément de fluide selon \vec{e}_z , montrer que la vitesse vérifie la relation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) = 0$$

Pourquoi les forces de pression n'interviennent-elles pas ?

- ♣ Le cylindre de rayon R_1 (resp. R_2) tourne à la vitesse angulaire Ω_1 (resp. Ω_2). En déduire l'expression du champs de vitesse.
- ♣ On suppose que le cylindre intérieur (de rayon R_1) est maintenu fixe (cad $\Omega_1 = 0$) à l'aide d'un ressort de torsion qui exerce un moment $\vec{M} = k\theta\vec{e}_z$. Le cylindre extérieur tourne toujours à la vitesse Ω_2 . De quel angle θ tourne le ressort ? A quel quantité physique a t-on alors accès ?
- ♣ En étant toujours dans la situation $\Omega_1 = 0$, calculer la puissance mécanique dissipée dans le fluide.

NB :

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Exercice 6

Une tornade assimilée à un écoulement parfait, permanent, incompressible de l'air, de masse volumique $\mu = 1.3\text{kg.m}^{-3}$, est caractérisé par un vecteur tourbillon $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_z$, supposé uniforme à l'intérieur de la tornade ($r \leq a$) et nul à l'extérieur de la tornade. Cette dernière est modélisée par un cylindre d'axe (Oz) et de rayon $a = 50\text{m}$. On se place en coordonnées cylindriques.

- 1 - Donnez une expression intégrale de la vitesse \vec{v} (on ne cherche pas à calculer cette intégrale à ce stage de l'exercice). A quel problème électrostatique la tornade est-elle assimilable ?
- 2 - On se limite à des mouvements de l'air définis par $\vec{v} = v(r)\vec{u}_\theta$. Donner l'allure de $v(r)$.
- 3 - Calculer le champ de pression. On rappelle que :

$$(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}})\vec{v} = \vec{\text{grad}}(v^2/2) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$$

- 4 - Quelle est la vitesse maximale théorique que peut avoir une tornade ? Est-ce physiquement possible ?
- 4 - Un toit de masse surfacique de 100kg.m^{-2} , simplement posé et horizontal, peut être soulevé au passage de la tornade ? On suppose que la vitesse maximale de la tornade est $v_{max} = 180\text{km.h}^{-1}$.

On donne :

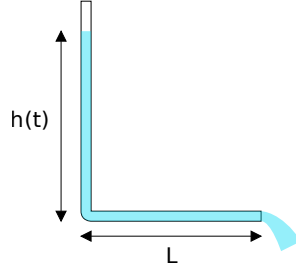
$$\text{div}\vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\text{grad}}U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z$$

Exercice 7

Le tube en "L" suivant a une section constante s , mais dont les dimensions longitudinales sont très grande devant le diamètre, on pourra considérer que l'écoulement est unidimensionnel. Le liquide est supposé idéal et incompressible.

Dans l'état initial, la hauteur du liquide est h_0 et l'extrémité inférieure est bouchée. On ouvre le bouchon à $t = 0$.



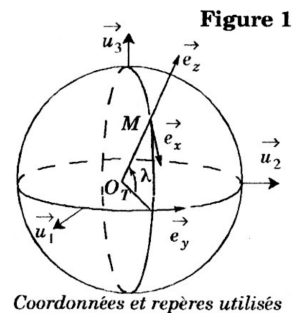
- 1 - Déterminez la vitesse d'éjection v en fonction la hauteur h . Examiner le cas où $L \rightarrow 0$.
- 2 - Exprimer la pression $P(M, t)$ en tout point en fonction de P_{atm} , ρ , g , L et $h(t)$. En quel point est-elle maximale ?

Exercice 8

On considère la Terre comme une sphère de rayon R_T et de centre O_T . Le repère $R_G = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est fixe et est considéré comme galiléen, avec \vec{u}_3 parallèle à l'axe Nord-Sud. Pour tout point M de latitude λ de la surface, on associe le repère $R_T = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Ce repère R_T est donc en rotation $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_3$ par rapport à R_G .

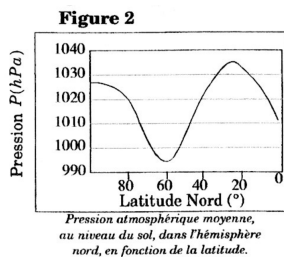
On note \vec{g} le champ de pesanteur terrestre. L'atmosphère est considéré comme une fine couche d'air, qui est un gaz parfait de masse molaire M , de masse volumique ρ , et dont les écoulements sont considérés comme parfaits. On notera $v(x, y, z)$ le champ des vitesses dans R_T , $P(x, y, z)$ le champ de pression.

On cherche à étudier les vents dominants à la surface du globe, cad on se limite aux écoulements de grande échelle, réguliers dans le temps (stationnaires).



Coordonnées et repères utilisés

- ♣ Le référentiel R_T n'étant pas galiléen, on admet que les forces volumiques d'inertie se réduisent au terme de Coriolis, qui s'écrit : $f_{vol,C} = -2\rho\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$. Comment s'écrit la relation fondamentale de la dynamique ?
- ♣ En faisant l'hypothèse que l'atmosphère est isotherme, et en supposant que l'air est à l'équilibre (cad dans fixe par rapport à R_T), estimer l'épaisseur de l'atmosphère. On notera $P_{eq}(x, y, z)$ la pression correspondante. Que peut-on en déduire sur la partie verticale de la vitesse $v_z = \vec{v} \cdot \vec{e}_z$?
- ♣ En notant $p(x, y, z) = P(x, y, z) - P_{eq}(x, y, z)$, trouver la nouvelle relation vérifiée par \vec{v} et $p(x, y, z)$
- ♣ On appelle nombre de Rossby (noté Ro) d'un écoulement le rapport entre le terme d'accélération particulaire et l'accélération liée à la force de Coriolis. Estimer Ro pour des mouvements atmosphériques où la vitesse typique est $U \simeq 10 \text{ m.s}^{-1}$ et d'extension $L \simeq 1000 \text{ km}$. Simplifier l'équation trouvée à la première question.
- ♣ Établir alors l'expression du champs de vitesse \vec{v} . Pourquoi seule la composante horizontale de $\vec{\text{grad}}(p)$ intervient dans l'expression de \vec{v} ?
- ♣ La figure ci dessous donne la valeur moyenne de la pression atmosphérique P au niveau du sol, le long d'un méridien quelconque. En déduire l'allure de la circulation des vents sur le globe, en fonction de la latitude λ .



- ♣ Estimer la valeur typique de la vitesse des vents dominants en Europe.

Données : $R_T = 6370 \text{ km}$, $\Omega = 2\pi/86164 \text{ rad.s}^{-1}$, $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$.