

Exercice 1

Transfert d'une fusée d'une orbite terrestre à l'orbite lunaire

- ♣ Il faut calculer la force de poussée due à l'éjection de gaz. Dans le repère inertiel de la fusée à la vitesse V à l'instant t , le système gaz + fusée de masse M a une vitesse nulle. Dans le même repère, à $t + dt$, une masse dm de gaz a été éjectée avec une vitesse v_e et la fusée a acquis un supplément de vitesse dV .

Comme on suppose le système isolé, la conservation de la quantité de mouvement donne : $(M(t) - dm)dV = dm v_e$, cad la quantité de mouvement due à l'éjection des gaz $dm v_e$ est égale à l'accroissement quantité de mouvement de la fusée $(M(t) - dm)dV$. Attention dm correspond à la quantité de gaz éjectée durant dt .

$$\text{Donc à l'ordre 1 : } M_f(t)dV = v_e dm$$

(Classique de la poussée d'une fusée : $M(t) \frac{d}{dt} V(t) = v_e \frac{dm}{dt}$ On a donc cette équation :

$$\frac{DV}{v_e} = \frac{dm}{M_0 + m}$$

où dm la quantité d'ergols consommée (éjectée), et donc m est la quantité totale d'ergols éjectée à l'instant t . En intégrant donc cette équation avec v variant de v à $v + \Delta V$, et m de 0 à m_0 (il s'agit bien du gaz éjecté !), on obtient :

$$\frac{\Delta V}{v_e} = \int_0^{m_0} \frac{dm}{M_0 + m} = \ln \left(\frac{M_0 + m_0}{M_0} \right)$$

$$\Delta V = v_e \ln \left(\frac{M_0 + m_0}{M_0} \right) \quad (1)$$

- ♣ Que ce soit à l'accélération ou la décélération, il faut une quantité ΔV de vitesse à modifier (dans le sens du mouvement pour l'accélération, l'inverse pour la décélération). Attention ! Lors de la phase d'accélération, il faut prendre en compte la masse d'ergol qui servira pour la décélération. On peut écrire la masse totale comme $m_0 = m_1 + m_2$, où m_1 est la masse nécessaire à l'accélération et m_2 pour la décélération.

Pour l'accélération, on peut considérer que la masse de la fusée est $M_1 = M_0 + m_2$ (on garde en réserve m_2). Alors en utilisant l'équation de Tsiolkovski :

$$m_1 = (M_0 + m_2) \left(\exp \left(\frac{\Delta}{v_e} \right) - 1 \right) \quad (2)$$

Même chose pour la décélération, sauf qu'il ne reste plus d'ergol à la fin :

$$m_2 = M_0 \left(\exp \left(\frac{\Delta}{v_e} \right) - 1 \right) \quad (3)$$

On trouve $m_2 = 10t$ et $m_1 = 20t$ soit $40t$ au total pour la lune. Pour Mars, on a $m_2 = 18t$ et $m_1 = 53t$ soit $81t$. ça augmente exponentiellement !

Condition de décollage d'une fusée

♣ On reprend le bilan de quantité de mouvement, en ajoutant la gravitation :

$$P(t + dt) - P(t) = F_{grav}.dt = -M_f(t)gdt \quad (4)$$

Or ces quantités de mouvement s'écrivent $P(t) = M_f(t)V(t)$ et $P(t + dt) = (M_f(t) - dm)V(t + dt) - v_e dm$. On a donc :

$$M_f(t) \frac{dV}{dt} dt - v_e dm = -M_f(t)gdt \quad (5)$$

C'est à dire :

$$M_f(t) \frac{dV}{dt} = -M_f(t)g + v_e D_m \quad (6)$$

La fusée décolle uniquement si son accélération à $t = 0$ est positive, cad si : $M_f(t = 0)g = (M_0 + m_0)g < v_e D_m$, cad :

$$D_m > \frac{g}{v_e} (M_0 + m_0) \quad (7)$$

♣ Le débit est constant, donc $M_f(t) = M_0 + m_0 - D_m t$. Alors :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{D_m v_e}{M_0 + m_0 - D_m t} - g \quad (8)$$

L'intégration donne :

$$V(t) = u \ln \left(\frac{M_0 + m_0}{M_0 + m_0 - D_m t} \right) - gt \quad (9)$$

La vitesse, à l'épuisement des réservoir, correspond à la situation où la masse m_0 a été totalement éjectée, cad $m_0 = D_m \Delta t$ (avec Δt le temps de combustion jusqu'à épuisement). On a alors :

$$V(\Delta t) = u \ln \left(\frac{M_0 + m_0}{M_0} \right) - g \frac{m_0}{D_m} \quad (10)$$

Pour l'altitude, on intègre la vitesse au cours du temps, sachant que $\int_1^x \ln x dx = x(-1 + \ln x) + 1$:

$$z(t) = u \frac{M_0 + m_0}{D_m} \left[\left(\frac{M_0 + m_0 - D_m t}{D_m} \right) \left(-1 + \ln \frac{M_0 + m_0 - D_m t}{D_m} \right) + 1 \right] - \frac{1}{2} g t^2 \quad (11)$$

Lorsque le combustible sera totalement utilisé, l'altitude sera :

$$z(t) = u \frac{M_0 + m_0}{D_m} \left[\left(\frac{M_0}{D_m} \right) \left(-1 + \ln \frac{M_0}{D_m} \right) + 1 \right] - \frac{1}{2} g \left(\frac{m_0}{D_m} \right)^2 \quad (12)$$

Exercice 2

- ♠ On considère le système fermé constitué à t de la masse d'eau en contact avec la turbine et d'une masse dm_1 d'eau entrant sur la turbine à la vitesse \vec{v}_1 mais pas encore en contact avec elle. A $t + dt$, ce système correspond à la masse d'eau en contact avec la turbine (qui n'a pas changé) et une masse dm_2 qui sort de la turbine à la vitesse \vec{v}_2 . Par conservation du débit, on a forcément $dm_1 = dm_2 = dm$.

Le moment cinétique à t est $M(t) = J\omega(t) + dmav_1$, celui à $t + dt$ est $M(t + dt) = J\omega(t + dt) + dmav_2$. Le bilan de moment cinétique donne (comme le rotor exerce un couple résistif $-\Gamma$:

$$\frac{dM}{dt} = J\frac{d\omega}{dt} + D_m a(v_2 - v_1) = -\Gamma$$

On fait la même chose avec un bilan d'énergie cinétique : $E_C(t) = \frac{1}{2}J\omega^2(t) + \frac{1}{2}dmv_1^2$ et $E_C(t + dt) = \frac{1}{2}J\omega^2(t + dt) + \frac{1}{2}dmv_2^2$. Le rotor exerce une puissance $-\Gamma\omega$. Le bilan donne alors :

$$\frac{dE_C}{dt} = J\omega\frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{2}D_m a(v_2^2 - v_1^2) = -\Gamma\omega$$

- ♠ Il faut éliminer v_2 (v_1 est connu). On trouve d'abord avec les deux équations $v_1 + v_2 = 2a\omega$. On trouve alors finalement

$$J\frac{d\omega}{dt} - 2D_m a(v_1 - a\omega) + \Gamma = 0$$

En régime permanent, on a $\omega_P = \frac{v_1}{a} \left[1 - \frac{\Gamma}{2D_m av_1} \right]$. Le mouvement est possible uniquement si Γ reste inférieure à $2D_m av_1$, cad si la force nécessaire pour entrainer la roue est atteinte.

- ♠ La puissance reçue par la turbine s'écrit $P = \omega_P \Gamma = \frac{v_1 \Gamma}{a} \left[1 - \frac{\Gamma}{2D_m av_1} \right]$. C'est une fonction parabolique qui s'annule pour $\Gamma = 0$ et $\Gamma = 2D_m av_1$.

Elle est donc maximale pour $\Gamma_m = D_m av_1$, correspondant à une $\omega_P = \frac{v_1}{2a}$.

Pour cette valeur de Γ et ω , on peut montrer que la vitesse v_2 est nécessairement nulle. Toute l'énergie cinétique du flux incident est transmise à la turbine.

- ♠ Pour $\Gamma_m = D_m av_1$ et $\omega_P = \frac{v_1}{2a}$, l'équation différentielle obtenue devient :

$$J\frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega - \omega_P}{\tau} = 0$$

avec $\tau = \frac{J}{2a^2 D_m}$, qui est la durée caractéristique d'établissement du régime permanent. La solution est alors :

$$\omega(t) = \omega_P \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \right)$$

- ♠ Le barrage est une retenue d'eau dont la pression est P_0 en haut, $P_0 + \rho g \Delta z$ en bas. Avec Bernoulli, on peut en déduire que la vitesse de l'eau à la sortie du barrage (qui est mise à la pression P_0 atmosphérique) est $v_1 = \sqrt{2\rho \Delta z} = 44 \text{ m.s}^{-1}$.

La puissance que l'on peut obtenir est donc $P_m = \Gamma_P \omega_P = \frac{D_m v_1^2}{2} = \frac{\rho D_v v_1^2}{2} = 98 \text{MW}$. Avec le rendement d'alternateur, on obtient 88MW.

On retrouve aisément ce calcul en disant que la puissance d'une chute d'eau tombant d'une hauteur de 100m avec un débit de $100 \text{s}^3/\text{s}$ correspond à une puissance de $P = D_v \rho \Delta z g$

- ♠ On suppose que toute la pluie tombée en France et qui ruisselle peut être utilisée pour des barrages hydroélectriques. Cela représente un débit de $30\% \times 6,43 \cdot 10^{11} = 1,92 \cdot 10^{11} \text{m}^3/\text{an}$, à une altitude de 342m. Avec un rendement de 90%, on peut donc en retirer une énergie de 161TWh sur l'année.

C'est plus que la production actuelle actuelle, mais on suppose de manière très optimiste qu'on peut récupérer l'énergie hydraulique de sur toute la France, ce qui est une hypothèse très ardue.

D'autre part, cette production est très faible dans la consommation totale française.

Exercice 3

- ♣ La conservation du débit donne $v_e S_e = v_1 S = v_2 S = v_s S_s$, donc $v_1 = v_2$. Dans le cas d'une éolienne, l'hélice prend de l'énergie au fluide, il ralentit, donc $S_s > S_e$. Pour une hélice motrice, c'est l'inverse donc $S_s < S_e$.
- ♣ Le théorème de Bernoulli donne $2P_0 + \rho v_e^2 = 2P_1 + \rho v_1^2$ et $2P_2 + \rho v_2^2 = 2P_0 + \rho v_s^2$. On pourrait penser écrire $2P_0 + \rho v_e^2 = 2P_0 + \rho v_s^2$, ce qui conduit à $v_e = v_s$ (il ne se passe rien). Or on ne peut pas appliquer Bernoulli car l'écoulement est très turbulent dans la zone (2) ! D'autre part, l'hélice ajoute ou prend du travail donc il n'y a plus conservation de l'énergie (ce que traduit Bernoulli). Donc on a bien $v_s \neq v_e$.
- ♣ On considère comme système fermé à t le fluide compris dans la zone (2) avec une masse dm d'air juste avant et qui rentre dans la zone. A $t + dt$, ce système correspond à la masse d'air dans la zone (3) plus la masse dm qui est sortie de la zone.
Alors $p(t) = p_2 + dm v_1$ et $p(t + dt) = p_2 + dm v_2$. Comme $v_1 = v_2$ à cause de la conservation du débit, on trouve que $\frac{dp}{dt} = 0$. Or, les forces qui s'exercent sur l'air sont celles de pression et de l'hélice. On a alors :

$$0 = S(P_1 - P_2) + F$$

Avec les relations de Bernoulli, on obtient :

$$F = \frac{1}{2} \rho S (v_s^2 - v_e^2)$$

- ♣ On applique le théorème fondamental de la dynamique sur l'ensemble du tube. On a alors, en l'appliquant au système fermé contenu dans le tube d'air complet avec une petite masse $dm = \rho dV = \rho v_e dt S_e$: $P(t) = P_1 + P_2 + P_3 + \rho v_e S_e dt v_e$ et $P(t + dt) = P_1 + P_2 + P_3 + \rho v_s S_s dt v_s$. La pression P_0 s'applique *uniformément* sur l'ensemble du tube : elle ne contribue pas à la variation de quantité de mouvement.

$$F = \rho S v_1 (v_s - v_e)$$

On trouve alors :

$$v_1 = v_2 = \frac{v_e + v_s}{2}$$

- ♣ On applique le théorème de l'énergie cinétique sur l'ensemble du tube. Raisonement similaire à la question précédente : $E_C(t) = E_C1 + E_C2 + E_C3 + \rho v_e S_e dt v_e^2$ et $P(t + dt) = P_1 + P_2 + P_3 + \rho v_s S_s dt v_s^2$. Comme les forces de pressions ne travaillent pas, on a :

$$P = \frac{1}{2} \rho S v_1 (v_s^2 - v_e^2) = F v_1$$

- ♣ La puissance peut s'écrire sous la forme :

$$P = \frac{1}{4} \rho S (v_e + v_s) (v_s^2 - v_e^2)$$

La puissance incidente du vent est fixée : on ne la choisit pas. Par contre on peut régler la force F du récepteur de sorte à choisir v_s qui maximisera P . Il faut étudier P en fonction de v_s :

$$\frac{dP}{dv_s} = \frac{1}{4} \rho S [2v_s^2 v_e - v_e^3 + v_s^3 - v_e^2 v_s]$$

En posant $x = v_s/v_e$, on résout l'équation du second degré pour trouver la valeur de v_s à laquelle P est maximale. On trouve une solution positive, $x = 1/3$, soit $v_s = v_e/3$. La puissance maximale est donc : $P_{max} = 16/27 \times 1/2 \times \rho S v_e^3$. Dans le cas d'une éolienne, le tube incident n'est pas déformé à l'approche de l'éolienne (puisque c'est celui-ci qui va transmettre son énergie à l'hélice), donc $S = S_e$. De plus, l'énergie cinétique d'un "tube" d'air incident de longueur x à la vitesse v_e est $E_C = 1/2 \times \rho S x v_e^2$, sa puissance est donc $P_e = dE_C/dt = 1/2 \times \rho S v_e^3$. On a donc :

$$\eta = \frac{P_{max}}{P_e} = \frac{16}{27}$$

Exercice 7

- 1 - On a en tout point du tube $v = -\dot{h}$. L'écoulement n'est pas permanent ! Donc :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\rho}{2} \text{grad}(v^2) + \rho \cdot \vec{rot}(\vec{v}) \wedge \vec{v} = \rho \vec{g} - \text{grad}P$$

Soit A et B les points respectivement en haut du liquide et à la sortie du tuyau. On calcule la circulation entre les points A et B pour chaque terme :

$$\int_A^B \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot d\vec{l} = -\ddot{h}(t) \rho (L + h(t))$$

Les termes $\frac{\rho}{2} \text{grad}(v^2)$ et $\rho \cdot \vec{rot}(\vec{v}) \wedge \vec{v}$ sont nuls.

$$\int_A^B \rho \vec{g} d\vec{l} = g\rho h(t)$$

La pression est égale à la pression atmosphérique à l'entrée et à la sortie du tuyau :

$$\int_A^B g \vec{rad}(P) d\vec{l} = P_1 - P_2$$

On en déduit :

$$\ddot{h} = -\frac{gh}{L+h}$$

En multipliant par \dot{h} de chaque côté, on a :

$$\dot{h}\ddot{h} = -g \left(\dot{h} - \frac{L\dot{h}}{L+h} \right)$$

En intégrant, on obtient :

$$\frac{\dot{h}^2}{2} = g(h_0 - h) - gL \ln \left(\frac{h_0 + L}{h + L} \right)$$

On obtient alors :

$$v(h) = \sqrt{2g \left(h_0 - h - L \ln \left(\frac{h_0 + L}{h + L} \right) \right)}$$

Pour $L \longrightarrow 0$, $v^2 \approx 2g(h_0 - h)$. Cela correspond à la colonne de liquide en chute libre.

2 - Dans la branche verticale, pour un point M à une altitude z :

$$\int_A^M \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot d\vec{l} = -\ddot{h}(t)\rho(h(t) - z)$$

$$\int_A^M \rho \vec{g} \cdot d\vec{l} = g\rho(h(t) - z)$$

$$\int_A^M g \vec{rad}(P) \cdot d\vec{l} = P_0 - P(M, t)$$

On a alors :

$$P(M, t) = P_0 + \rho[h(t) - z] [g + \ddot{h}]$$

Soit :

$$P(M, t) = P_0 + \rho g \frac{L[h(t) - z]}{L + h(t)}$$

Dans la branche horizontale, pour un point M à la position x :

$$\int_M^B \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot d\vec{l} = -\ddot{h}(t) \rho (L - x)$$

$$\int_M^B \rho \vec{g} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\int_M^B \text{grad}(P) \cdot d\vec{l} = P(M, t) - P_0$$

On a alors :

$$P(M, t) = P_0 + \rho \ddot{h}(L - x)$$

Soit :

$$P(M, t) = P_0 + \rho g \frac{h(t) [L - x]}{L + h(t)}$$