Exercice 1

- Avec les hypothèses : $\eta\Delta\vec{v} = \vec{grad}P$. On néglige la variation due à la gravité à l'échelle de la taille de la sphère.

- On cherche à connaitre le champ de pression pour connaitre la résultante des forces. Liquide incompressible donc $div\vec{v} = 0$ et donc $\vec{rot}(\vec{rot}(\vec{v})) = \vec{grad}(div\vec{v}) - \Delta\vec{v} = -\Delta\vec{v}$, donc le gradient de pression vaut l'opposé l'expression de la vitesse donné plus haut.

  En choisissant une projection sur $\vec{e_r}$ ou $\vec{e_\theta}$ (ce qui revient au même) :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 3\eta\frac{Rv_\infty}{r^3}\cos\theta \tag{1}$$

$$P = -3\eta\frac{Rv_\infty}{2r^2}\cos\theta + P_\infty \tag{2}$$

  En notant P_∞ la pression qui est dans le liquide loin de la sphère.

  La résultante des forces de pression, selon l'axe $\vec{e_z}$, est $F_{p,z} = -P(M)d\vec{S}\vec{e_z}$. Alors :

$$F_{p,z} = -\iint P_\infty R^2 d\varphi\sin\theta d\theta\cos\theta + \iint 3\eta\frac{Rv_\infty}{2R^2}\cos^2\theta\sin\theta R^2 d\theta d\varphi \tag{3}$$

  On trouve alors : $F_{p,z} = 2\pi\eta v_\infty R$

- La force de cisaillement correspond à la force de frottement due à la viscosité du fluide. Pour un élément de surface $d\vec{S}$ de la sphère, celle-ci s'écrit :

$$d\vec{F_c} = \eta dS\frac{\partial v}{\partial r}\vec{e_\theta} \tag{4}$$

  La projection suivant $\vec{e_z}$ nous donne alors :

$$F_{c,z} = \iint \eta\frac{\partial v}{\partial r}R^2\sin\theta d\theta d\varphi\sin\theta = \iint \eta\frac{3}{2}Rv_\infty\sin^3\theta d\theta d\varphi = 4\pi\eta Rv_\infty \tag{5}$$

  L'intégrale sur θ vaut $4/3$.

- La force de trainée est la somme des deux forces précédentes. On a donc : $F_z = 6\pi\eta Rv_\infty$.

Exercice 2

1 - On suppose que le champ de vitesse est uniquement selon $\vec{e_z}$. Comme le fluide est incompressible,