

# Exercices de colle - seconde année de CPGE - MP/PC/PSI

Matthieu Santin

21 janvier 2026



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Électronique</b>	<b>1</b>
1.1	Générateur de triangles (Mines-Ponts PSI 2022) . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Puissance électrique en régime sinusoïdal</b>	<b>5</b>
2.1	Puissance absorbée par une installation . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Magnétostatique</b>	<b>9</b>
3.1	Champ magnétique dans un cylindre parcouru par un courant orthoradial . . . .	10
<b>4</b>	<b>Induction</b>	<b>13</b>
4.1	Chauffage par induction . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Ferromagnétisme</b>	<b>17</b>
5.1	Matériau ferromagnétique . . . . .	18
<b>6</b>	<b>Conversion électromécanique</b>	<b>21</b>
6.1	Moteur synchrone . . . . .	22
6.2	Alternateur synchrone (Centrale PSI 2021) . . . . .	26
6.3	Moteur à courant continu . . . . .	27
<b>7</b>	<b>Mécanique des fluides</b>	<b>31</b>
7.1	Écoulement bidimensionnel . . . . .	32
7.2	Pompe dans une nappe phréatique . . . . .	33
7.3	Bassin à débordement . . . . .	36
7.4	Vidange d'un réservoir d'huile . . . . .	39
7.5	Écoulement d'un fluide en pente . . . . .	42
7.6	Boîte automatique . . . . .	45
7.7	Augmenter la vitesse du jet d'eau à la sortie d'un tuyau ( <i>PSI</i> ) . . . . .	48
7.8	Écoulement de Poiseuille cylindrique . . . . .	51
7.9	Lancer de javelot ( <i>PSI</i> ) . . . . .	54
<b>8</b>	<b>Ondes sonores</b>	<b>57</b>
8.1	Impédance acoustique . . . . .	58
8.2	Onde acoustique guidée (Mines-Ponts PSI 2021) . . . . .	60

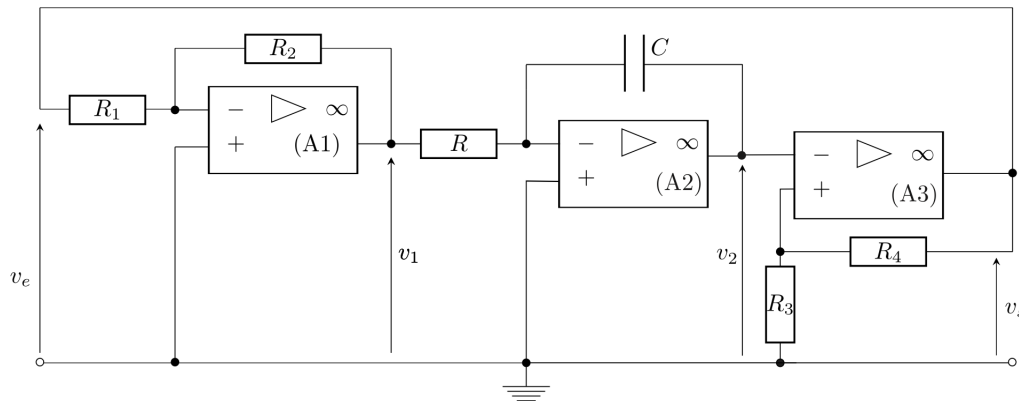


Chapitre 1

Électronique

## 1.1 Générateur de triangles (Mines-Ponts PSI 2022)

On considère un générateur de triangles ci-dessous :



Les trois ALI, nommés respectivement, (A1), (A2) et (A3) sont supposés idéaux. On note  $\pm V_{sat}$  la tension de saturation des ALI.

1. Après avoir rappelé la définition d'un ALI idéal, indiquer ceux qui fonctionnent en régime linéaire.
2. Etablir la relation entre  $v_e(t)$  et  $v_1(t)$ , puis entre  $v_1(t)$  et  $v_2(t)$ .
3. Déterminer la valeur de  $v_s$  selon le sens de variation de  $v_2$ , puis représenter graphiquement ces variations en reportant  $v_s$  en ordonnée et  $v_2$  en abscisse. On fera apparaître les valeurs remarquables.
4. A partir des questions précédentes, en déduire quelle tension une fonction triangulaire périodique du temps.
5. Déterminer les variations de  $v_2$  et  $v_s$  en fonction du temps. Représenter ces variations sur un même graphe. Calculer sa période  $T$  en fonction de  $R$ ,  $C$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  et  $R_4$ .

**Corrigé :**

1. Pour un ALI idéal : les courants  $i_+$  et  $i_-$  sont nuls, la tension de sortie  $v_s$  et l'intensité  $i_s$  de sortie sont indépendantes ; la tension de sortie est limitée à  $\pm V_{sat}$ . Dans le cas d'un fonctionnement en régime linéaire, on a  $\varepsilon = v_+ - v_- = 0$ . Compte tenu des rétroactions, les ALI 1 et 2 sont en régime linéaire et le 3 en saturation (rétroaction sur la borne +).
2. Une simple loi des noeuds permet de trouver :

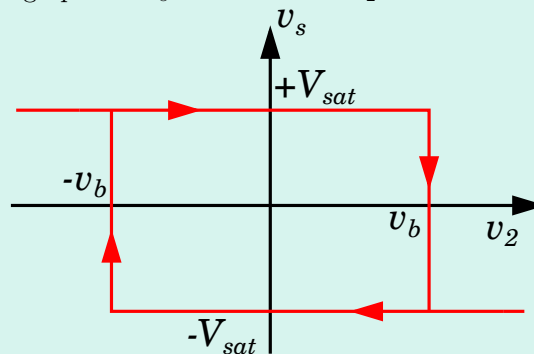
$$v_1 = -\frac{R_2}{R_1}v_e$$

et :

$$v_2 = -\frac{1}{jRC\omega}v_1$$

3. On a affaire au comparateur à hystérésis. L'ALI fonctionnant en régime non linéaire, il faut comparer les tensions d'entrée  $v_+ = \pm V_{sat}R_3/(R_3 + R_4)$  et  $v_- = v_2$ . On appellera  $v_b = V_{sat}R_3/(R_3 + R_4)$  la tension de basculement.
  - Supposons dans un premier temps que  $v_s = +V_{sat}$  et  $v_2 < v_+ = v_b$ . La condition  $v_+ > v_-$  est vérifiée, l'ALI est stable quelque soit la valeur de  $v_2$  (tant qu'elle est inférieure à  $v_b$ ).
  - On augmente  $v_2$  jusqu'à atteindre  $v_b$ . A ce moment-là,  $v_+ < v_-$ , l'ALI bascule à  $v_s = -V_{sat}$  et  $v_+ = -v_b$ . Comme  $v_2 > v_b$ , la situation est stable quelque soit la valeur de  $v_2$  (tant qu'elle est supérieure à  $-v_b$ ).
  - On diminue  $v_2$  jusqu'à atteindre  $-v_b$ . A ce moment-là,  $v_+ > v_-$ , l'ALI bascule à  $v_s = +V_{sat}$  et  $v_+ = v_b$ . On se retrouve à la situation de départ.

Cela permet de tracer le graphe de  $v_s$  en fonction de  $v_2$  :



4. L'ALI A3 est en régime saturé ; la tension  $v_s$  est nécessairement un créneau au cours du temps  $\pm V_{sat}$ , donc  $v_e$  aussi. L'ALI A1 étant un simple amplificateur,  $v_1$  est aussi une fonction créneau périodique du temps. Ainsi, seule la tension à la sortie de l'ALI A2 peut être triangulaire ; de plus, il s'agit d'un intégrateur, le signal  $v_2$  est l'intégrale au cours du temps de  $V_1$  (qui est un créneau), c'est donc bien un signal triangle périodique du temps.
5. Pour trouver la période du signal, on suppose que l'ALI A3 vient de basculer à  $-V_{sat}$  à  $t = 0$ , donc  $v_2(0) = +v_b = +V_{sat}R_3/(R_3 + R_4)$  et  $v_s(0) = -V_{sat}$ . Tant que A3 n'a pas basculé, on a donc  $v_1(t > 0) = \frac{R_2}{R_1}V_{sat}$ . Ensuite,  $v_2$  s'écrit :

$$\begin{aligned} v_2(t) &= -\frac{1}{RC} \int_0^t dt v_1(t) \\ &= -\frac{R_2}{R_1 RC} V_{sat} \times t + v_2(0) \\ &= -\frac{R_2}{R_1 RC} V_{sat} \times t + V_{sat} \frac{R_3}{R_3 + R_4} \end{aligned}$$

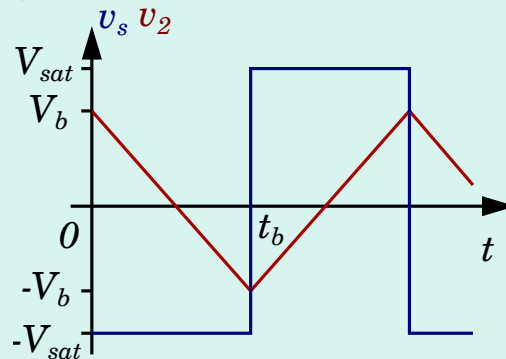
La tension  $v_2$  décroît donc linéairement au cours du temps, jusqu'à atteindre à  $t = t_b$  la condition de basculement  $v_2(t_b) = -v_b = -V_{sat}R_3/(R_3 + R_4)$ , qu'on trouve à l'aide de l'expression précédente :

$$t_b = \frac{2R_3R_1RC}{R_2(R_3 + R_4)}$$

Pour  $t > t_b$ , on a donc  $v_s = +V_{sat}$  et  $v_2$  s'écrit alors :

$$\begin{aligned} v_2(t > t_b) &= -\frac{1}{RC} \int_{t_b}^t dt v_1(t) \\ &= +\frac{R_2}{R_1RC} V_{sat} \times t + v_2(t_b) \\ &= -\frac{R_2}{R_1RC} V_{sat} \times t - V_{sat} \frac{R_3}{R_3 + R_4} \end{aligned}$$

La tension  $v_2$  croît alors linéairement, jusqu'à atteindre de nouveau la condition de basculement,  $v_2(t_b) = -v_b$ , à  $t = 2t_b$ , à partir de laquelle on se retrouve de nouveau dans la situation initiale  $v_s = -V_{sat}$ , donc  $v_2 = +v_b$ .



On en déduit donc facilement la période  $T$  :

$$T = 2t_b = \frac{4R_3R_1RC}{R_2(R_3 + R_4)}$$

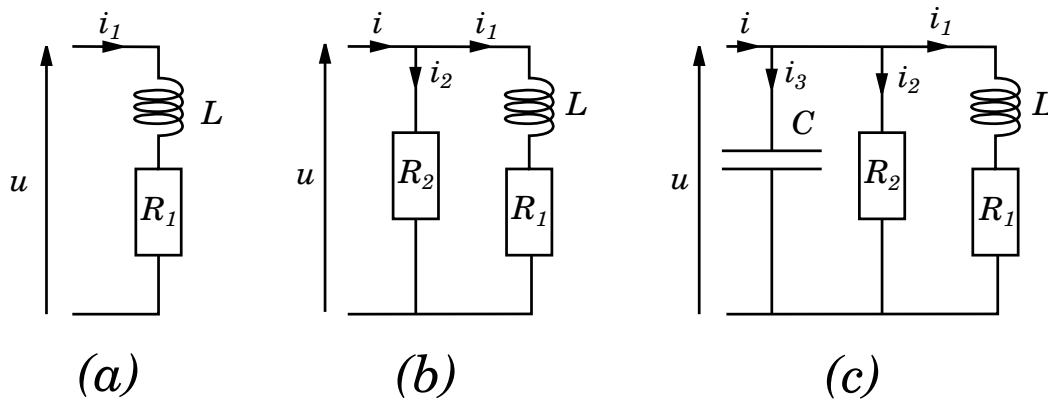


## Chapitre 2

# Puissance électrique en régime sinusoïdal

## 2.1 Puissance absorbée par une installation

Une installation électrique, constituée de nombreuses machines tournantes, équivalente à une résistance et une bobine en série ( $R_1, L_1$ ), est alimentée par la tension du réseau de valeur efficace  $U = 220\text{V}$  à la fréquence  $f = 50\text{Hz}$ .



1. *Schéma (a)* : L'installation est de type inductif, qui consomme une puissance  $P_1 = 2,0\text{kW}$  et est parcourue par un courant d'intensité efficace  $I_1 = 18,2\text{A}$ . En déduire les valeurs de  $R_1$  et l'inductance  $L$ . Calculer le facteur de puissance  $\cos(\varphi_1)$ .
2. *Schéma (b)* : Un radiateur est ajouté à l'installation, équivalent à une résistance  $R_2$  en parallèle consommant une puissance  $P_2 = 1,0\text{kW}$ . Calculer les valeurs efficaces  $I$ ,  $I_1$ , et  $I_2$ , la puissance  $P$  et le facteur de puissance  $\cos(\varphi_2)$ .
3. *Schéma (c)* : on veut rendre égal à 1 le facteur de puissance  $\cos(\varphi)$  de l'installation. Pourquoi le distributeur d'électricité impose cette condition ? Quelle valeur de capacité  $C$  doit-on placer en parallèle ?

**Corrigé :**

1. On définit l'origine des phases par la tension :  $u = \sqrt{2}U \cos(\omega t)$ , le courant  $i_1$  étant en déphasage de  $\varphi$  par rapport à  $u$  :  $i_1(t) = \sqrt{2}I_1 \cos(\omega t \varphi_1)$ . On sait que la puissance est, en moyenne, uniquement dissipée dans la résistance :  $P = R_1 I_1^2$ . On en déduit donc  $R_1 = 6,04\Omega$ .

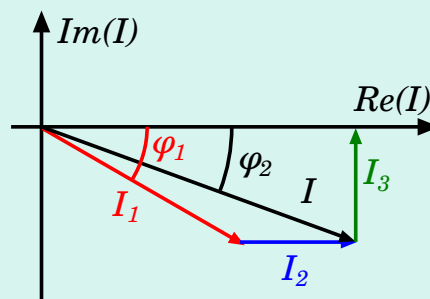
D'autre part,  $\underline{i}_1 = (R_1 + jL_1\omega)\underline{u}$ , donc, en prenant le module :

$$L_1 = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{U^2}{I_1^2} - R_1^2} = 33\text{mH}$$

Pour le facteur de puissance, on utilise simplement la formule  $P_1 = UI_1 \cos(\varphi_1)$ , on trouve  $\cos(\varphi_1) = 0,50$  (donc  $\varphi_1 = \pi/3$ ).

2. Dans la branche où circule  $i_2$ , il n'y a pas de déphasage comme il n'y a ni inductance, ni capacité. On a donc  $I_2 = P_2/U = 4,55\text{A}$ .

Pour trouver les autres grandeurs, on s'appuie sur un diagramme de Fresnel, qui simplifie l'analyse :



L'intensité efficace  $I_1 = 18,2\text{A}$  reste inchangée, étant donné qu'elle est alimentée par la même tension. Avec le diagramme de Fresnel, on en déduit l'intensité  $I$  :

$$I = \sqrt{(I_1 \cos(\varphi_1) + I_2)^2 + I_1^2 \sin(\varphi_1)^2} = 20,9\text{A}$$

Avec le diagramme de Fresnel, on trouve le facteur de puissance :

$$\cos(\varphi_2) = \frac{I_1 \cos(\varphi_1) + I_2}{I} = 0,65$$

La puissance est tout simplement la somme des deux puissances dissipée dans les résistances :  $P = 3,0\text{kW}$ .

3. Le distributeur impose cette condition afin de minimiser l'intensité efficace dans le réseau à puissance fixée. En effet, les lignes électriques ayant une résistance faible mais non nulle, à puissance consommée chez l'utilisateur, un facteur de puissance faible engendrera une intensité élevée dans le réseau et une dissipation d'autant plus importante.

Pour mettre le facteur de puissance égal à 1, il faut que le courant  $I_3$  "remonte" le courant total de sorte à ce qu'il ait une partie imaginaire nulle (cf schéma ci-dessus). On doit donc avoir :

$$I_3 = I_1 \sin(\varphi_1) = UC\omega$$

On trouve donc :

$$C = \frac{I_1 \sin(\varphi_1)}{U\omega} = 2,3 \times 10^{-4}\text{F}$$



## Chapitre 3

# Magnétostatique

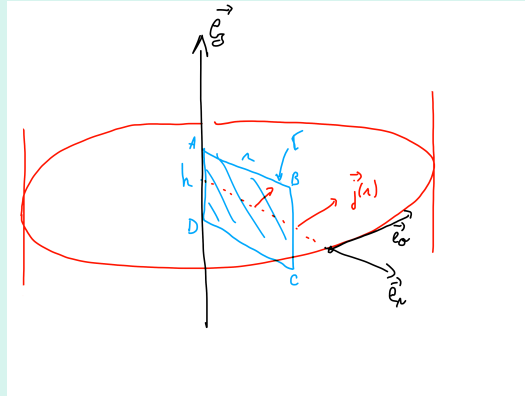
### 3.1 Champ magnétique dans un cylindre parcouru par un courant orthoradial

On considère un cylindre conducteur de rayon  $a$  et de longueur  $L \gg a$  selon l'axe  $O_z$ , dans lequel circule une densité volumique de courant  $\vec{j}(r) = j_0 \frac{r}{a} \vec{e}_\theta$ .

1. A l'aide des symétries et invariances, expliciter la dépendance spatiale et la direction du champ magnétique.
2. Déterminer l'expression du champ magnétique  $\vec{B}(r)$  en fonction de la valeur du champ magnétique en  $r = 0$ .
3. Quel est l'expression du champ magnétique  $\vec{B}(r)$  si on impose un champ extérieur  $\vec{B}_{ext}$  de sorte à ce que  $\vec{B}(r = a) = \vec{0}$ ? Quelle est alors la valeur de  $\vec{B}_{ext}$ ?

Corrigé :

1. Invariance : le champ ne dépend que de  $r$ . Symétrie : le plan  $(\vec{e}_r; \vec{e}_\theta)$  est plan de symétrie de la distribution de courant donc  $\vec{B}$  est suivant  $\vec{e}_z$ .
2. On calcule la circulation de  $\vec{B}$  sur le contour  $\Gamma$  :



$$\oint_{\Gamma} d\vec{l} \cdot \vec{B} = \int_B^C dz \times B(r) + \int_D^A dz \times B(0) \\ = -hB(r) + hB(0)$$

D'après le théorème d'Ampère, pour  $r < a$  :

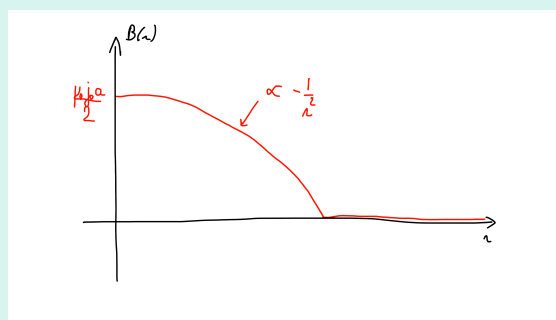
$$-hB(r) + hB(0) = \mu_0 j_0 h \frac{r^2}{2a} \quad (3.1)$$

Donc :

$$B(r) = B(0) - \mu_0 j_0 \frac{r^2}{2a}$$

Pour  $r > a$  :

$$B(r) = B(0) - \mu_0 j_0 \frac{a}{2}$$



3. On ajoute un champ magnétique extérieur  $\vec{B}_{ext}$ , nécessairement selon  $\vec{e}_z$  :

$$B(r) = B(0) - \mu_0 j_0 \frac{r^2}{2a} + B_{ext}$$

Si  $B(r = a) = 0$  alors  $B_{ext} = -B(0) + \mu_0 j_0 \frac{a}{2}$  et alors :

$$B(r) = \frac{\mu_0 j_0}{2a} (a^2 - r^2)$$





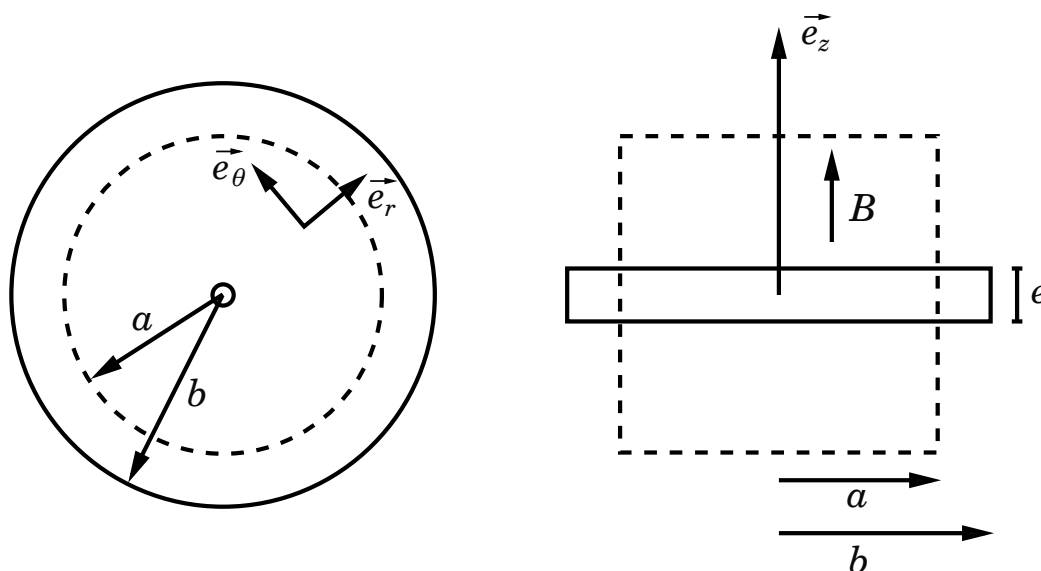
# Chapitre 4

## Induction

## 4.1 Chauffage par induction

Un disque métallique de conductivité  $\sigma$ , d'axe  $Oz$  vertical, de rayon  $b$  et d'épaisseur  $e$  est plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$ , ayant les caractéristiques suivantes :

- il est localisé dans un cylindre d'axe vertical  $Oz$  et de rayon  $a$  ;
- il est uniforme dans le cylindre précédent et nul à l'extérieur de ce cylindre ;
- il est dirigé suivant  $\vec{e}_z$  ;
- il varie au cours du temps selon  $\vec{B} = B_m \cos(\omega t) \vec{e}_z$ .



On admettra par la suite que le champ magnétique induit est négligeable devant le champ magnétique extérieur appliqué.

1. Rappeler l'expression de l'équation de Maxwell-Faraday et justifier l'existence de courants de Foucault dans le cylindre métallique de la forme  $\vec{j} = j(r, t) \vec{e}_\theta$ .
2. A l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday, exprimer  $j(r, t)$  en fonction des données du problème.
3. Quelle est l'expression de la puissance dissipée par effet Joule  $P_{Joule}$  ? Donner sa valeur moyenne  $\langle P_{Joule} \rangle$ .
4. Le champ magnétique utilisé a une pulsation de  $\omega = 1 \times 10^5 \text{ rad.s}^{-1}$  et son intensité de l'ordre de  $10^{-4} \text{ T}$ . On considère une plaque à induction de rayon  $b = 10 \text{ cm}$  et une casserole dont le fond a le même rayon  $a = b = 10 \text{ cm}$ , une épaisseur  $e = 3 \text{ mm}$  et une conductivité  $\sigma = 6,0 \times 10^7 \text{ S.m}^{-1}$ . Déterminer l'ordre de grandeur de la puissance dissipée dans le fond de la casserole.
5. On suppose que le champ magnétique est créé par un solénoïde de  $5 \text{ cm}$  de longueur ayant un enroulement de  $N = 100$  spires. En déduire l'intensité  $I$  le traversant pour produire le champ magnétique de la question précédente.

**Corrigé :**

1. L'équation Faraday s'écrit :  $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$ . Le champ magnétique  $\vec{B}$  étant variable, le terme  $-\partial \vec{B} / \partial t$  est non nul, et on peut appliquer le théorème d'Ampère (avec  $\vec{B} \leftarrow \vec{E}$  et  $\mu_0 \vec{j} \leftarrow -\partial \vec{B} / \partial t$ ). Au vu des symétries du problème, on en conclut naturellement que le champ électrique est sous la forme  $\vec{E} = E(r, t) \vec{e}_\theta$ . Puis par la loi d'Ohm, on en déduit que les courants induits sont de la même forme :  $\vec{j} = j(r, t) \vec{e}_\theta$ .
2. On calcule tout d'abord le champ électrique à l'aide de la circulation de  $\vec{E}$ , sur le contour  $\Gamma$  choisi comme un cercle de centre  $O$  coplanaire au cylindre de rayon  $r$ , délimitant la surface  $\Sigma$  :

$$\oint_{\Gamma} d\vec{l} \cdot \vec{E} = - \iint_{\Sigma} d\vec{S} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

On est obligé de distinguer les cas  $r > a$  et  $r < a$  : Pour  $r < a$  :

$$\begin{aligned} 2\pi r E(r) &= \pi r^2 B_m \omega \\ \Rightarrow E(r) &= \frac{r B_m \omega}{2} \end{aligned}$$

Pour  $r > a$  :

$$\begin{aligned} 2\pi r E(r) &= \pi a^2 B_m \omega \\ \Rightarrow E(r) &= \frac{a^2 B_m \omega}{2r} \end{aligned}$$

La puissance volumique dissipée par effet s'écrit  $p_{vol} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2(r)$ . La puissance totale dissipée sur toute la plaque s'écrit alors :

$$\begin{aligned} P_{vol} &= \iiint_V d\tau p_{vol} \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^e dz \int_0^a r dr \gamma \frac{r^2 B_m^2 \omega^2}{4} + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^e dz \int_a^b r dr \gamma \frac{a^4 B_m^2 \omega^2}{4r^2} \\ &= 2\pi e \gamma B_m^2 \omega^2 \frac{a^4}{16} + 2\pi e \gamma a^4 B_m^2 \omega^2 \frac{1}{4} \ln \left( \frac{b}{a} \right) \\ &= \frac{1}{2} \pi e \gamma a^4 B_m^2 \omega^2 \left[ \frac{1}{4} + \ln \left( \frac{b}{a} \right) \right] \end{aligned}$$

3. En utilisant la formule précédente, on trouve une puissance de l'ordre de  $P = 3769\text{W}$ , ce qui est cohérent avec la puissance maximale des plaques à induction du commerce
4. Le champ créé par un solénoïde est donné par :

$$B = \frac{\mu_0 N I}{L}$$

Pour un champ magnétique de l'ordre de  $10^{-4}\text{T}$ , il faut une intensité  $I \simeq 0,04\text{A}$ .

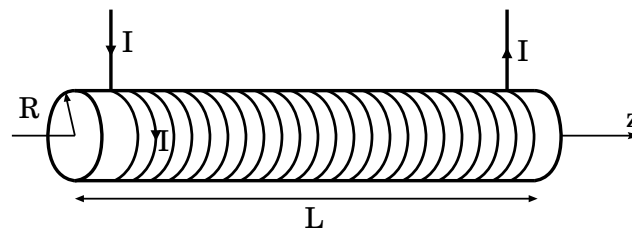


## Chapitre 5

# Ferromagnétisme

## 5.1 Matériau ferromagnétique

Un fil parcouru d'un courant  $I$  est enroulé sur toute la longueur  $L$ , en faisant  $N$  spires, d'un cylindre de rayon  $R \ll L$ , constitué d'un matériau ferromagnétique. On souhaite connaître l'allure des champs  $\vec{H}$ ,  $\vec{M}$  et  $\vec{B}$  le long de l'axe  $z$ . On suppose  $I > 0$  dans un premier temps.



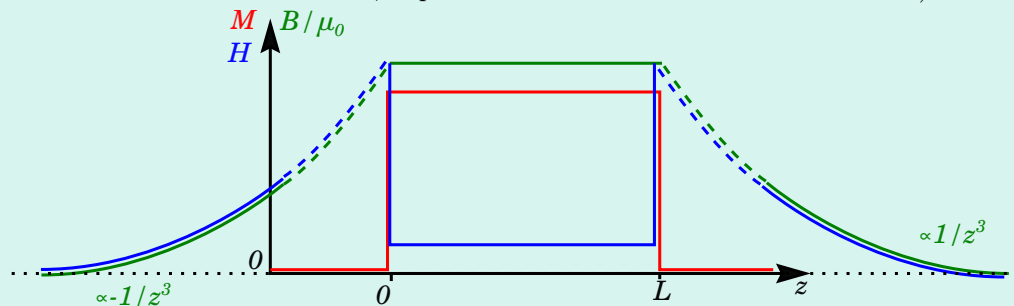
1. Déterminer le champ  $\vec{H}$  dans le solénoïde créé par l'enroulement sur l'axe  $z$ .
2. Comment réagit le matériau ferromagnétique à l'excitation  $\vec{H}$ ? En déduire l'allure du champ d'aimantation  $\vec{M}$  le long de l'axe  $z$ .
3. En déduire l'allure du champ magnétique  $\vec{B}$  le long de l'axe  $z$  dans le matériau, puis loin du solénoïde. En déduire l'allure  $\vec{H}$  sur la totalité de l'axe  $z$ .
4. Quel type de matériau ferromagnétique doit-on avoir pour avoir un champ magnétique  $\vec{B}$  dirigé selon  $+\vec{e}_z$  malgré un courant légèrement négatif  $I < 0$ ? Préciser quantitativement ce que signifie "légèrement". Tracer l'allure des champs  $\vec{H}$ ,  $\vec{M}$  et  $\vec{B}$  sur l'axe  $z$  dans ce cas-là.

Corrigé :

1. Pour tout point  $M$  le long de l'axe  $z$  dans le solénoïde, le plan  $xMy$  est un plan de symétrie (le cylindre pouvant être considéré comme infini), le champ  $\vec{H}$  est donc dirigé selon l'axe  $z$ . On utilise le théorème d'Ampère, en utilisant pour contour un rectangle dont un des côté de longueur  $l$  en confondu avec l'axe  $z$ , et de sorte à ce que le côté parallèle soit en dehors du solénoïde (la largeur du rectangle est donc  $> R$ ). Le champ étant nul à l'extérieur du solénoïde, on obtient :

$$H = \frac{NI}{L}$$

2. Le matériau s'aimante lorsqu'il est soumis à l'excitation  $\vec{H}$  : les moments magnétiques permanents microscopiques du matériau s'orientent dans la direction du champ d'excitation et l'amplifient. Il en résulte que l'aimantation résultante est, pour un matériau ferromagnétique, massive et dépasse de plusieurs ordres de grandeur la valeur de l'excitation (par exemple pour un matériau ferro. linéaire et doux, la perméabilité relative atteint facilement  $10^3$ ).

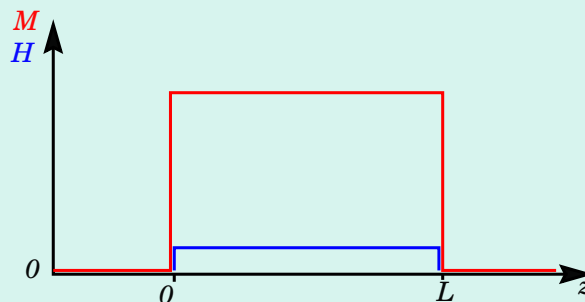


3. Le champ magnétique s'écrit comme l'addition de l'aimantation et de l'excitation magnétique (au facteur  $\mu_0$  près) :  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ . Dans le solénoïde, il suffit de sommer les contributions trouvées précédemment, l'aimantation étant prépondérante, on peut simplement dire que  $\vec{B} = \mu_0\vec{M}$ .

Une fois sorti du solénoïde, on sait que ce dernier peut être vu comme un moment magnétique  $M = NIS = NI\pi R^2$  à très grande distance,  $z \gg L$ . Sur l'axe  $z$ , le champ est alors :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{NI\pi R^2}{z^3} \vec{e}_z$$

Il décroît donc rapidement, en  $1/z^3$ . Entre le solénoïde et  $z \gg L$ , on sait que le champ magnétique doit être nécessairement continu (à cause de  $\text{div} \vec{B} = 0$ ), ce qui permet d'avoir l'allure générale de la courbe ci-dessous :



On en déduit par ailleurs l'allure de l'excitation  $\vec{H}$  : dans le vide, il est égal à  $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$ , donc il épouse la courbe du champ magnétique une fois sorti du solénoïde. Il est discontinu : du fait de la relation  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ , la discontinuité de  $\vec{M}$  impose celle de  $\vec{H}$  pour assurer la continuité du champ magnétique.

4. Quel type de matériau ferromagnétique doit-on avoir pour avoir un champ magnétique  $\vec{B}$  dirigé selon  $+\vec{e}_z$  malgré un courant légèrement négatif  $I < 0$  ? Préciser quantitativement ce que signifie "légèrement". Tracer l'allure des champs  $\vec{H}$ ,  $\vec{M}$  et  $\vec{B}$  sur l'axe  $z$  dans ce cas-là.



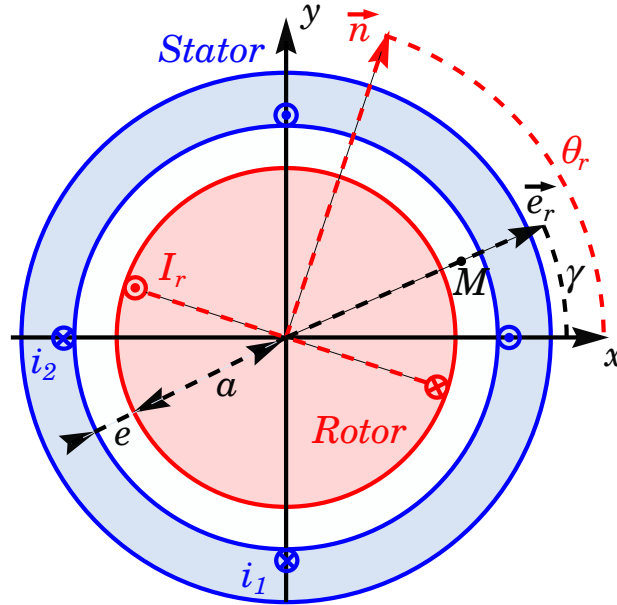


## Chapitre 6

# Conversion électromécanique

## 6.1 Moteur synchrone

On considère une machine synchrone cylindrique de longueur  $h$  selon  $\vec{e}_z$ , dont le rotor (en rouge, de rayon  $a$ ) et le stator (en bleu) sont séparés par l'entrefer d'épaisseur  $e \ll a$  et sont constitués d'un matériau ferromagnétique linéaire de perméabilité relative  $\mu_r$  très grande.



Deux bobinages, décalés de  $\pi/2$ , sont enroulés autour du stator et parcourus par les courants  $i_1(t) = I_s \cos(\omega t)$  et  $i_2(t) = I_s \sin(\omega t)$ . Le bobinage autour du rotor est parcouru par un courant d'intensité constante  $I_r$ . Le rotor peut tourner sans frottement autour de l'axe  $z$  et est repéré par l'angle  $\theta_r$ . Un point  $M$  quelconque de l'entrefer est repéré par l'angle  $\gamma$ .

1. Déterminer le champ magnétique  $\vec{B}_1(M)$  dans l'entrefer créé par le courant  $i_1(t)$ , si l'enroulement est uniquement dans le plan  $yOz$ . Comment modifier cet enroulement de sorte à obtenir un champ magnétique de la forme  $\vec{B}_1(M) = K_s i_1(t) \cos(\gamma) \vec{e}_r$ ? ( $K_s$  est une constante que l'on ne cherchera pas à déterminer).
2. En supposant que l'enroulement parcouru par le courant  $i_2(t)$  est identique à celui parcouru par  $i_1(t)$  mais décalé de  $\pi/2$ , montrer que le champ magnétique créé par le bobinage du stator peut s'écrire :

$$\vec{B}_s(M) = K_s I_s \cos(\omega t - \gamma) \vec{e}_r$$

3. Expliciter le champ magnétique  $\vec{B}_r(M)$  créé par le courant  $I_r$  du rotor, si le bobinage est compris dans le plan de normale  $\vec{n}$ . Comment réaliser un enroulement pour que le champ magnétique puisse s'écrire  $\vec{B}_r(M) = K_r I_r \cos(\gamma - \theta_r) \vec{n}$ ?
4. Montrer que l'énergie magnétique contenue dans l'entrefer s'écrit :

$$E_m = \frac{\pi e h a}{\mu_0} K_s K_r I_s I_r \cos(\omega t - \theta_r) + K$$

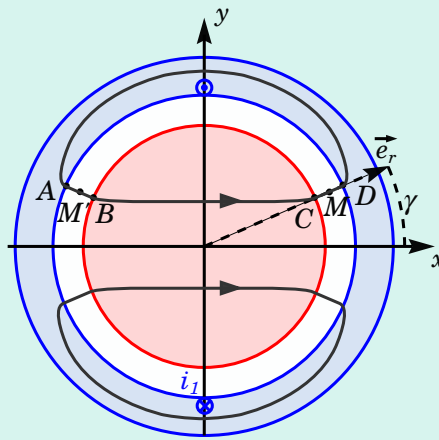
où  $K$  est une constante de  $\theta_r$ .

5. Comment s'exprime le couple électromagnétique  $\Gamma_m$ ? Pourquoi appelle-t-on cette machine "synchrone"? En déduire l'angle  $\alpha = \omega t - \theta_r$  maximisant le couple.

**Corrigé :**

1. On étudie en premier lieu les propriétés du champ magnétique créé par l'enroulement parcouru par le courant  $i_1$  :
  - le plan  $xOy$  est plan d'antisymétrie de la distribution de courant, le champ  $\vec{B}$  est donc contenu dans ce plan (on néglige les effets de bord) ;
  - le matériau ferromagnétique ayant une perméabilité relative infinie, les lignes de champs sont droites et radiales dans l'entrefer. D'autre part, comme  $e \ll a$ , on peut considérer le champ magnétique comme constant dans l'entrefer. On a donc pour  $a < r < a + e$ ,  $\vec{B}(r, \gamma) = B(\gamma)\vec{e}_r$  ;
  - le plan  $xOz$  est un plan d'antisymétrie donc le champ magnétique est symétrique par rapport à ce plan :  $\vec{B}(-\gamma) = \vec{B}(\gamma)$  ;
  - le plan  $yOz$  étant un plan de symétrie, le champ magnétique est antisymétrique par rapport à ce plan, donc  $\vec{B}(\pi - \gamma) = -\vec{B}(\gamma)$ .

On applique le théorème d'Ampère sur le contour représenté en gris (partie supérieure du schéma).



On a donc :

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_B^C \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_D^A \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_1(t)$$

Sur les parcours  $BC$  et  $DA$ , l'excitation est nulle : le matériau ayant une perméabilité magnétique infinie, dans le matériau,  $H = B/\mu_0\mu_r \rightarrow 0$  le champ magnétique étant le même dans le matériau que dans l'entrefer, par conservation du flux.

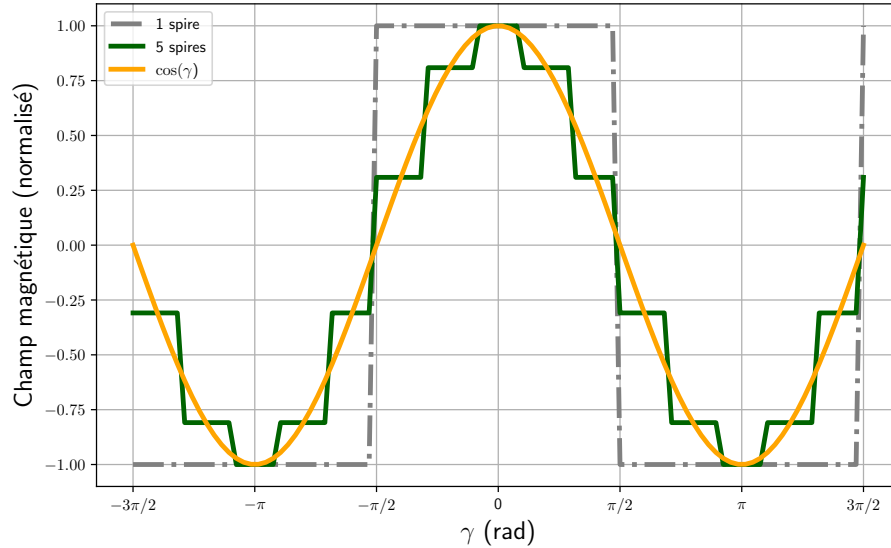
Ainsi :

$$-eH(\pi - \gamma) + eH(-\gamma) = -\frac{eB(\pi - \gamma)}{\mu_0} + \frac{eB(\gamma)}{\mu_0} = i_1(t)$$

En utilisant  $\vec{B}(-\gamma) = \vec{B}(\gamma)$  :

$$\begin{aligned} \gamma \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ , \quad \vec{B}(\gamma) &= \frac{\mu_0 i_1(t)}{2e} \vec{e}_r \\ \gamma \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[ , \quad \vec{B}(\gamma) &= -\frac{\mu_0 i_1(t)}{2e} \vec{e}_r \end{aligned}$$

Le champ magnétique est réparti dans l'entrefer comme représenté par la courbe grise en pointillé ci-dessous :



On obtient donc une fonction créneau paire, de valeur moyenne nulle.

Pour se rapprocher d'un champ variant en  $\cos \gamma$ , on peut ajouter  $N$  enroulements parcourus par  $i_1(t)$  décalés d'un angle  $\theta_k = \frac{\pi}{N} \left(k - \frac{N-1}{2}\right)$ ,  $k \in [0, N-1]$ , avec un nombre d'enroulements proportionnel à  $\propto \cos \theta_k$  (de façon à avoir un champ plus intense pour  $\theta_k = 0$ ). Si  $M$  est le nombre d'enroulements à  $\theta_k = 0$ , le champ magnétique total créé par le courant  $i_1(t)$  s'écrit :

$$\vec{B}_1(\gamma) = \sum_{k=0}^{N-1} M \cos(\theta_k) \vec{B}(\gamma - \theta_k)$$

On peut montrer que cette fonction tend vers  $\cos(\gamma)$  lorsque  $N \rightarrow \infty$  :

$$\vec{B}_1(\gamma) = K_s i_1(t) \cos(\gamma) \vec{e}_r$$

On retrouve sur la courbe verte ci-dessus l'exemple  $N = 5$ , se rapprochant ainsi du  $\cos \gamma$ .

2. Il s'agit de la même question que la précédente, mais tout décalé de  $\pi/2$  :  $\gamma \leftarrow \gamma - \pi/2$  donc :

$$\begin{aligned} \vec{B}_2(\gamma) &= K_s i_2(t) \cos(\gamma - \pi/2) \vec{e}_r \\ &= K_s I_s \sin(\gamma) \vec{e}_r \end{aligned}$$

Le champ total s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \vec{B}_s(\gamma) &= \vec{B}_1(\gamma) + \vec{B}_2(\gamma) \\ &= K_s I_s \cos(\omega t) \cos(\gamma) \vec{e}_r + K_s I_s \sin(\omega t) \sin(\gamma) \vec{e}_r \\ &= K_s I_s \cos(\omega t - \gamma) \vec{e}_r \end{aligned}$$

Il s'agit du champ glissant.

3. Le raisonnement pour établir le champ magnétique créé par les enroulements du rotor est identique à celui pour trouver le champ du stator, avec une translation de l'angle de rotation du rotor  $\theta_r$  :  $\gamma \leftarrow \gamma - \theta_r$ . En effet, le fait que le bobinage se situe sur le rotor et non sur le stator ne change rien au théorème d'Ampère. On a donc :

$$\begin{aligned} \gamma \in \left] -\frac{\pi}{2} - \theta_r, \frac{\pi}{2} - \theta_r \right[ , \quad \vec{B}_r(\gamma) &= \frac{\mu_0 i_1(t)}{2e} \vec{e}_r \\ \gamma \in \left] \frac{\pi}{2} - \theta_r, \frac{3\pi}{2} - \theta_r \right[ , \quad \vec{B}_r(\gamma) &= -\frac{\mu_0 i_1(t)}{2e} \vec{e}_r \end{aligned}$$

Si l'on réalise le même enroulement que dans le cas du stator, on obtient, avec le décalage de  $\theta_r$  :

$$\vec{B}_r(M) = K_r I_r \cos(\gamma - \theta_r) \vec{n}$$

4. L'énergie magnétique contenue dans l'entrefer s'écrit :

$$\begin{aligned} E_m &= \iiint_V dv \frac{B^2}{2\mu_0} \\ &= \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\gamma \int_a^{a+e} r dr \frac{1}{2\mu_0} (B_s^2 + B_r^2 + 2B_s B_r) \\ &= \frac{eah}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} d\gamma (K_s^2 I_s^2 \cos^2(\omega t - \gamma) + K_r^2 I_r^2 \cos^2(\theta_r - \gamma) + 2K_s K_r I_s I_r \cos(\omega t - \gamma) \cos(\theta_r - \gamma)) \\ &= \frac{eah}{2\mu_0} \left( \pi K_s^2 I_s^2 + \pi K_r^2 I_r^2 + \int_0^{2\pi} d\gamma K_s K_r I_s I_r (\cos(\omega t - \theta_r) + \cos(\theta_r + \omega t - 2\gamma)) \right) \\ &= \frac{eah}{2\mu_0} (\pi K_s^2 I_s^2 + \pi K_r^2 I_r^2 + 2\pi K_s K_r I_s I_r \cos(\omega t - \theta_r)) \end{aligned}$$

5. Le couple électromagnétique  $\Gamma_m$  s'exprime comme la dérivée de l'énergie magnétique par rapport à la rotation pièce en mouvement, c'est-à-dire le rotor, dont la rotation est repérée par l'angle  $\theta_r$  :

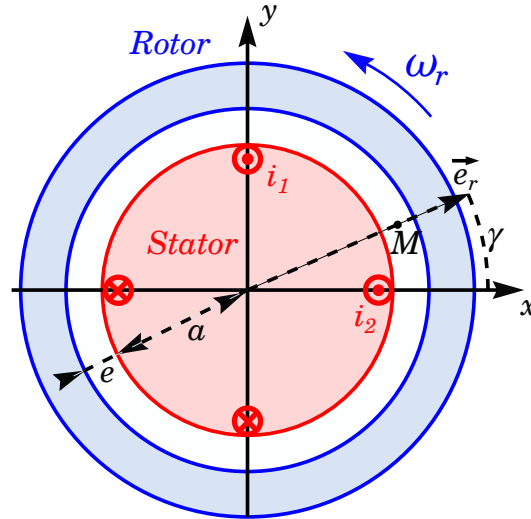
$$\begin{aligned} \Gamma_m &= \frac{\partial E_m}{\partial \theta_r} \\ &= \frac{eah\pi K_s K_r I_s I_r}{\mu_0} \sin(\omega t - \theta_r) \end{aligned}$$

La moyenne temporelle du couple est non nulle uniquement si  $\omega t = \theta_r$ , c'est la condition de synchronisme. Cette machine est un moteur (ou alternateur) uniquement si la vitesse de rotation du rotor est synchronisée avec celle du champ statorique tournant.

L'angle  $\alpha$  représente l'écart entre le champ moyen statorique et le champ moyen rotorique, et est maximal lorsque  $\alpha = \pi/2$ .

## 6.2 Alternateur synchrone (Centrale PSI 2021)

On étudie la production d'énergie électrique par une éolienne au moyen d'un générateur utilisant des aimants permanents. Il est constitué d'un stator (en rouge) intérieur cylindrique de diamètre  $2a$  et de longueur  $L_r$  selon  $\vec{e}_z$ . Le rotor (en bleu) a un diamètre intérieur noté  $2(e + a)$ , avec  $e \ll a$  l'entrefer du dispositif et est en rotation sans frottements autour de l'axe  $\vec{e}_z$ , en notant  $\theta_r$  sa position angulaire.



Le rotor et le stator sont constitués d'un matériau ferromagnétique doux de perméabilité magnétique relative  $\mu_r$  supposée infinie. Un point  $M$  quelconque de l'entrefer est repéré par l'angle  $\gamma$ .

1. On enroule autour du stator un câble parcouru par un courant électrique d'intensité  $i_1$ . Déterminer le champ magnétique  $\vec{B}_1$  créé par cet enroulement.
2. On enroule maintenant un grand nombre de spires, toutes parcourues par  $i_1$ , dans différents plans et on admet qu'une répartition adéquate permet d'obtenir un champ magnétique statorique dans l'entrefer qui varie sinusoidalement avec l'angle  $\gamma$  selon :

$$\vec{B}_1 = \frac{N\mu_0 i_1}{2e} \cos(\gamma) \vec{e}_r$$

Proposer qualitativement comment doit se faire la répartition des enroulements pour arriver à ce champ magnétique.

3. On utilise un enroulement statorique identique au précédent, mais décalé de  $\pi/2$ , et parcouru par  $i_2$ . Expliciter l'expression  $\vec{B}_2$  du champ magnétique créé par cet enroulement.
4. Les courants  $i_1$  et  $i_2$  sont supposé désormais sinusoïdaux :  $i_1(t) = I_0 \cos(\omega t)$  et  $i_2(t) = I_0 \sin(\omega t)$ . Montrer que le champ magnétique total créé par les enroulements statoriques peut s'écrire :

$$\vec{B}_s = \frac{N\mu_0 i_1}{2e} \cos(\omega t - \gamma) \vec{e}_r$$

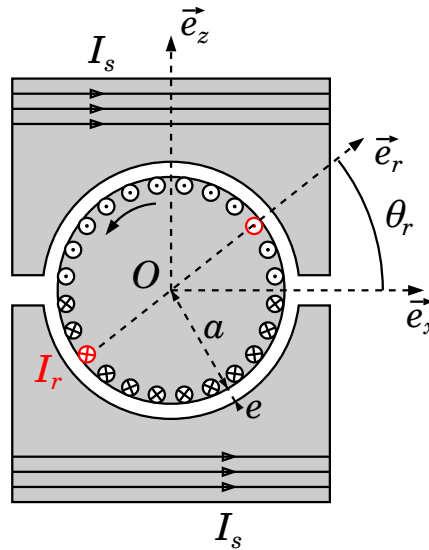
5. On admet que le rotor produit, au moyen d'aimants permanents, un champ magnétique dans l'entrefer qu'on considérera comme solidaire du rotor s'écrivant sous la forme :  $\vec{B}_r = B_r \cos(\gamma - \theta_r) \vec{e}_r$ . Déterminer l'expression de l'énergie magnétique totale dans l'entrefer  $E_m$ .
6. En déduire l'expression du couple  $\Gamma$  exercé sur le rotor.
7. On note  $\alpha = \omega t - \theta_r$ . A quelle condition la moyenne temporelle du couple  $\langle \Gamma \rangle$  est-elle non nulle ? Tracer  $\langle \Gamma \rangle$  en fonction de  $\alpha$ , préciser dans quel régime doit-on se trouver pour être en fonctionnement alternateur stable.

### 6.3 Moteur à courant continu

On considère une machine à courant continu, dont le stator et le rotor, de longueur  $L$  suivant l'axe  $y$ , sont constitués d'un matériau ferromagnétique doux de perméabilité relative  $\mu_r$  infinie.

Le rotor est un cylindre de rayon  $a$  et de longueur  $L$  pouvant tourner librement autour de l'axe  $y$ .  $N$  fils parcourus par une intensité  $I_r$ , parallèles à l'axe  $y$ , sont enroulés autour du rotor. Tous les enroulements sont en série et un système de collecteur permet que le courant  $I_r$  soit dirigé suivant  $+\vec{e}_y$  pour  $z > 0$ , et suivant  $-\vec{e}_y$  pour  $z < 0$ .

Le stator est un parallélépipède évidé de sorte à accueillir le rotor en son sein, entouré de  $N$  enroulements ( $N/2$  sur les parties supérieures et inférieures) contenus dans des plans parallèles à  $(xOy)$  parcourus par un courant continu  $I_s$ . La distance  $e \ll a$  entre le rotor et le stator est appelée entrefer.



1. A l'aide des symétries du problème et des propriétés du matériau ferromagnétique, tracer l'allure des lignes du champ magnétique  $\vec{B}_s$  créé par les enroulements du stator. En déduire que le champ magnétique créé par les enroulements du stator dans l'entrefer peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}\vec{B}_s(\theta_r) &= B_0 \vec{e}_r, \quad \theta_r \in [0, \pi] \\ &= -B_0 \vec{e}_r, \quad \theta_r \in [-\pi, 0]\end{aligned}$$

et expliciter l'expression de  $B_0$ . On rappelle que les lignes de champ sont orthogonales à l'interface dans l'entrefer.

2. On isole l'enroulement repéré par l'angle  $\theta_r$  (en rouge sur le schéma). Quelle force s'applique sur lui ? En déduire le couple  $\Gamma_1$  dû à cet enroulement qui s'exerce sur le rotor.
3. En notant  $n_0 = N/2\pi$  la densité radiale de spires, montrer que le couple total exercé sur le rotor s'écrit  $\Gamma = 2\Phi_0 I_r$ , où  $\Phi_0$  est le flux de  $\vec{B}_s$  à travers une surface que l'on explicitera.
4. Montrer que le flux de  $\vec{B}_s$  à travers l'enroulement repéré par  $\theta_r$  peut s'écrire sous la forme  $\phi = f(\theta_r)\Phi_0$ , où  $f(\theta_r)$  est une fonction décroissante comprise entre -1 et 1. Le rotor tournant à la vitesse  $\Omega$ , quelle est la force électromotrice  $e_1$  créée dans l'enroulement ?
5. En déduire que la force électromotrice totale  $e$  créée par l'ensemble des enroulements en série s'écrit :

$$e = 2\Phi_0 \Omega$$

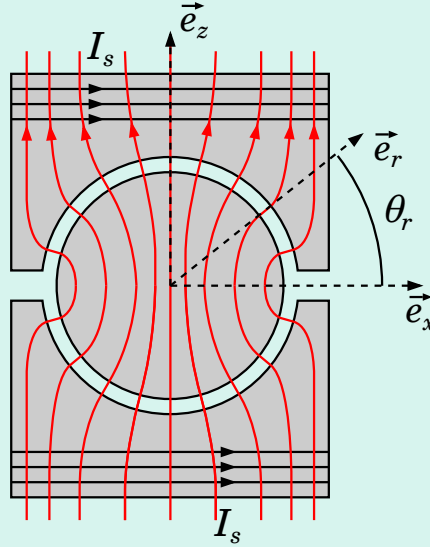
Commenter les expressions trouvées.

**Corrigé :**

1. On ne tient compte ici que des enroulements du stator.

- Le plan  $xOz$  étant un plan de d'antisymétrie de la distribution de courant,  $\vec{B}_s$  est contenu dans ce plan.
- Le plan  $xOy$  étant un plan de de symétrie de la distribution de courant,  $\vec{B}_s$  est antisymétrique par rapport à ce plan :  $\vec{B}_s(\pi - \theta_r) = -\vec{B}_s$ .
- La perméabilité du matériau étant infini, les lignes de champ sont radiales dans l'entrefer ; de plus le matériau canalise les lignes de champ.

En conséquence, les lignes de champ ont l'allure suivante :



On en déduit donc que  $\vec{B}_s$  est radial, dirigé suivant  $+\vec{e}_r$  si  $\theta_r \in [0, \pi]$  et dirigé suivant  $-\vec{e}_r$  si  $\theta_r \in [-\pi, 0]$ .

On applique ensuite le théorème d'Ampère sur une ligne de champ (quelconque), dont on note  $L_{fer}$  (resp.  $H_{fer}$ ) la longueur (resp. l'excitation) dans le matériau ferro :

$$L_{fer}H_{fer} + 2eH_e = NI_s$$

Comme l'excitation magnétique dans le matériau est nulle (car  $\mu_r \rightarrow \infty$ ), on a donc, dans l'entrefer :

$$B_0 = \frac{\mu_0 NI_s}{2e}$$

2. Il s'agit de la force de Laplace  $d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$ . Appliqué sur le fil repéré par  $\theta_r$  (en  $z > 0$ ) de l'enroulement en rouge, on obtient :

$$\vec{F} = \int_0^L I_r dy \vec{e}_y \wedge \vec{B}_s = I_r L B_0 \vec{e}_{\theta_r}$$

Sur le fil en  $\theta_r + \pi$ , pour  $z < 0$  :

$$\vec{F} = \int_0^L I_r (-dy) \vec{e}_y \wedge \vec{B}_s = -I_r L B_0 \vec{e}_{\theta_r}$$

Cet enroulement exerce un couple résultant sur l'axe  $y$  s'écrivant :

$$\Gamma_1 = 2a L I_r B_0$$

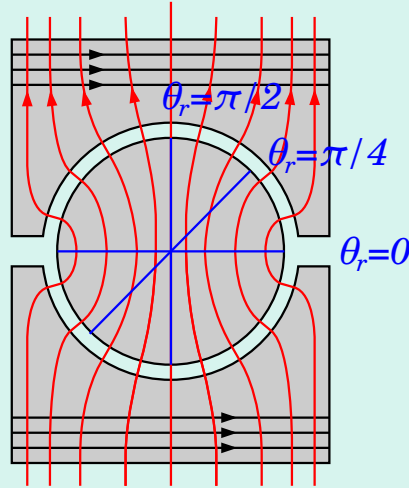


3. Le couple exercée par les  $dN = n_0 d\theta$  enroulements situés entre  $\theta$  et  $\theta + d\theta$  est la somme des couples exercée par les enroulements individuels :

$$\begin{aligned}\Gamma &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \Gamma_1 n_0 d\theta \\ &= 2\pi a L I_r B_0 \\ &= 2\Phi_0 B_0\end{aligned}$$

$B_0$  étant la norme du champ  $\vec{B}_s$  au niveau de l'entrefer, en y étant orthogonal à l'interface, et la demi-surface du cylindre du rotor est  $S = \pi a L$ , on en déduit que  $\Phi_0$  est le flux du champ magnétique dans l'entrefer pour  $z > 0$  (ou  $z < 0$ ).

4. Regardons le flux passant à travers les enroulements situés, à un instant  $t$ , aux positions  $\theta_r = 0$ ,  $\pi/4$  et  $\pi/2$  :



Pour  $\theta_r = 0$ , l'enroulement est dans le plan  $(xOy)$ , qui un plan de symétrie de distribution de courant. Le champ magnétique est donc orthogonal à ce plan. Par conservation du flux, le flux du champ magnétique  $\Phi_0$  calculé à la question précédente passe nécessairement intégralement par la surface délimitée, donc  $\phi(\theta_r = 0) = \Phi_0$ .

Pour  $\theta_r = \pi/2$ , l'enroulement est confondu avec le plan  $(yOz)$ , qui est plan d'antisymétrie de la distribution de courant, donc  $\vec{B}_s$  appartient à ce plan, son flux est donc nul :  $\phi(\theta_r = \pi/2) = 0$ .

Pour  $\theta_r = \pi/4$ , il est impossible de déterminer analytiquement le flux, mais on se trouve dans une situation intermédiaire aux deux précédentes, avec un flux à travers l'enroulement non nul, mais inférieur à  $\Phi_0$  :  $0 < \phi(\theta_r = \pi/4) < \Phi_0$ .

Enfin par symétrie,  $\phi(\theta_r = \pi) = -\Phi_0$ .

On en déduit que la fonction  $f$  définie par  $\phi = f(\theta_r)\Phi_0$  est comprise entre  $f(0) = 1$  et  $f(\pi) = -1$  (donc décroissante de  $\theta_r$ ).

Lorsque l'enroulement tourne à la vitesse  $\Omega$ , la force électromotrice induite par le champ  $\vec{B}_s$  est :

$$e_1 = -\frac{d\phi}{dt} = -\Phi_0 f'(\theta_r) \dot{\theta}_r = -\Phi_0 f'(\theta_r) \Omega$$

5. Tous les enroulements étant en série, la force électromotrice créée par les  $dN = n_0 d\theta$  enroulements situés entre  $\theta$  et  $\theta + d\theta$  est la somme des forces électromotrices exercée par les enroulements

individuels :

$$\begin{aligned}e &= \int_0^\pi e_1 n_0 d\theta \\&= -\Phi_0 \Omega \int_0^\pi f'(\theta) n_0 d\theta \\&= -\Phi_0 \Omega [f(\theta)]_0^\pi \\&= 2\Phi_0 \Omega\end{aligned}$$

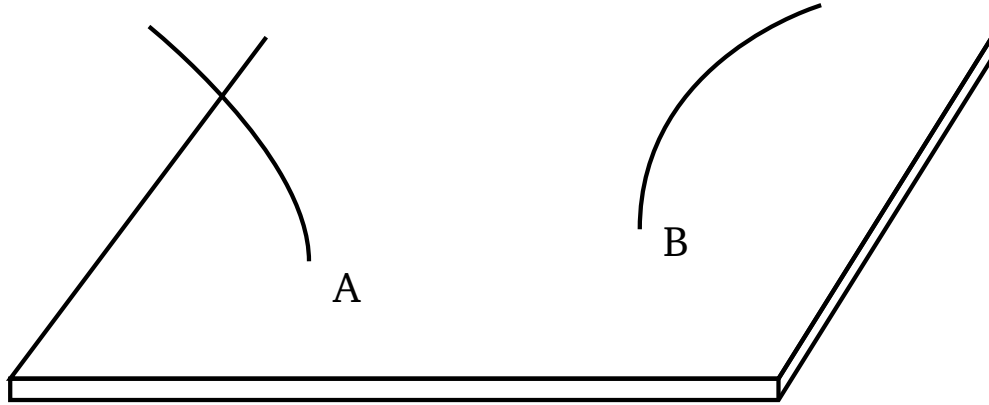
6. On retrouve les expressions du cours, où le couple est proportionnel à l'intensité circulant dans le bobinage du rotor et la force contre électromotrice  $-e$  est proportionnelle à la vitesse de rotation. Cet exercice nous permet de rendre compte de la constante de proportionnalité,  $2\Phi_0$ , correspondant au double du flux du champ magnétique statorique à travers les enroulements du rotor.

## Chapitre 7

# Mécanique des fluides

## 7.1 Écoulement bidimensionnel

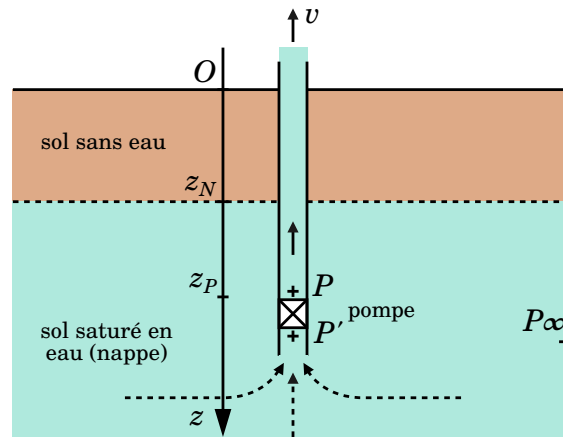
On considère deux plaques en verre de très grande dimension, séparées d'une épaisseur  $e$  dans laquelle circule un fluide que l'on supposera incompressible. Le fluide est injecté à travers un tuyau en  $A$  à un débit volumique  $D$  et ressort en  $B$  à travers un tuyau identique et au même débit. L'écoulement est supposé permanent. Le plan délimité par les plaques est noté  $Oxy$ , où  $O$  est le milieu de  $AB$  et l'axe  $x$  dans la direction du vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .



1. On considère dans cette question uniquement l'écoulement issu du point  $A$ .
  - (a) Justifier que le champ de vitesse à un point  $M$  du plan peut se mettre sous la forme  $\vec{v}_A(M) = a/r_A \vec{e}_{r_A}$ , où  $r_A = AM$  et  $\vec{e}_{r_A} = \overrightarrow{AM}/AM$  et  $a$  est une constante.
  - (b) Déterminer la constante  $a$  en fonction de  $e$  et  $D$ .
2. On considère désormais l'écoulement issu des tuyaux  $A$  et  $B$ . Déterminer le champ de vitesse  $\vec{v}(M)$ , en coordonnées cartésiennes.
3. Vérifier que  $\text{div}(\vec{v}) = 0$ . Quelle hypothèse formulée dans l'énoncé est vérifiée à travers cette relation ?

## 7.2 Pompe dans une nappe phréatique

Une nappe phréatique est une réserve d'eau contenue dans les porosités du sol (par exemple dans les interstices de grain de sable). Elle se remplit au gré des précipitations jusqu'à une profondeur  $z_N = 20m$ , et on admet que la pression de l'eau dans la nappe est équivalente à celle dans une étendue d'eau de masse volumique  $\rho$  à l'air libre (où la pression est  $P_0$ ) dont la surface serait située en  $z_N$ .



Au fond d'un forage de rayon  $a$  et de profondeur  $z_P = 40m$ , une pompe de puissance  $\dot{w}$  est immergée dans la nappe phréatique, pour remonter l'eau à la surface (pression  $P_0$ ) dans un réseau de distribution. La pompe génère une différence de pression  $\Delta P = P_P - P_{P'}$  entre les profondeurs  $z_P$  et  $z_{P'}$  et est supposée avoir une hauteur négligeable ( $z_P \simeq z_{P'}$ ). Dans le forage, l'écoulement de l'eau est supposé parfait, et à la vitesse  $v$ . On souhaite connaître le lien entre le débit  $D$  à la sortie du forage et la surpression  $\Delta P$  fournie par la pompe. On prendra l'axe  $z$  comme indiqué sur le schéma, avec  $z$  croissant avec la profondeur.

1. On considère un point  $P_{\infty}$  dans la nappe phréatique loin du forage, à la profondeur  $z$ . Pourquoi la vitesse de l'eau est négligeable à ce point, même lorsque la pompe est en fonctionnement ? En déduire le champ de pression  $P_{\infty}(z)$  loin du forage.
2. Pourquoi ne place t-on pas plutôt une pompe aspirante à la surface ?
3. En appliquant judicieusement le théorème de Bernoulli, obtenir une relation entre la surpression  $\Delta P$ , la profondeur  $z_N$  de la nappe et la vitesse  $v$ .
4. Quelle surpression  $\Delta P = P_{min}$  doit fournir la pompe pour faire remonter l'eau jusqu'à la surface ? En déduire le débit  $D$ , en fonction de  $\Delta P$  et  $P_{min}$  dans le cas où  $\Delta P > P_{min}$ .
5. A l'aide d'un bilan d'énergie mécanique, montrer que la puissance fournie par la pompe s'écrit  $\dot{w} = \Delta P \times D$ .
6. La surpression  $\Delta P$  étant fixée par construction, déterminer comment varie la puissance  $\dot{w}$  en fonction du débit  $D$ .
7. En réalité, l'écoulement dans la nappe (avant l'arrivée dans le forage) n'est pas parfait, et il existe une résistance hydraulique  $R_h$  entraînant une chute de pression donnée par  $P_{\infty} - P_{P'} = R_h \times D$ , où  $P_{\infty}$  est la pression d'un point situé à l'horizontale de  $P'$ , très loin du forage. Donner la nouvelle relation entre le débit  $D$  et la surpression  $\Delta P$ . Quelle est la puissance perdue par cette résistance hydraulique ? On simplifiera dans le cas où la chute de pression  $R_h D$  est faible.

**Corrigé :**

1. La surface par laquelle circule l'eau au point  $P_\infty$  est considérablement plus grande qu'au niveau du forage (proportionnelle en  $1/r^2$ ). Avec la conservation du débit, la vitesse est nécessairement bien inférieure qu'au niveau du forage. On peut donc appliquer le théorème de la statique des fluides, et on trouve que :

$$P(z) = P_0 + \rho g(z - z_N)$$

On rappelle que dans la nappe, la pression  $P_0$  se situe en  $z_N$ .

2. La hauteur entre la nappe et la surface est de 20m, il faut donc une pression de 2 bar pour la faire remonter jusqu'à la surface. Une pompe aspirante ne peut retirer que la pression  $P_0=1$  bar. Elle ne pourra pas remonter l'eau !
3. On suppose que le point  $P_\infty$  se situe à la même profondeur que  $P$  (pour simplifier mais ça revient au même). Entre  $P_\infty$  et  $P'$  Bernoulli s'écrit donc :

$$P_{P'} + \rho \frac{v^2}{2} = P(z_\infty) = P_0 + \rho g(z_{P'} - z_N)$$

D'autre part, entre  $P$  et la surface :

$$P_P + \rho \frac{v^2}{2} - \rho g z_P = P_0 + \rho \frac{v^2}{2}$$

Et en utilisant  $\Delta P = P - P'$  et en soustrayant les deux lignes précédentes :

$$\Delta P - \rho g z_P = \rho \frac{v^2}{2} - \rho g(z_{P'} - z_N)$$

On en déduit donc :

$$\Delta P = \rho \frac{v^2}{2} + \rho g z_N$$

La pompe doit fournir un supplément de pression  $\rho g z_N$  pour monter l'eau à la surface, puis  $\rho \frac{v^2}{2}$  pour lui faire acquérir de la vitesse.

4. De la question précédente, pour  $v = 0$  :  $\Delta P = P_{min} = \rho g z_N$ . On a alors :

$$D = \pi a^2 \sqrt{\frac{2(\Delta P - P_{min})}{\rho}}$$

5. On considère un volume de contrôle ouvert  $V^*$  entre les points  $P$  et  $P'$ , ainsi qu'une masse  $dm$  entrant en  $P$  à l'instant  $t$  et ressortant en  $P'$  à l'instant  $t + dt$ . L'énergie mécanique du système  $V_C; dm$ , qui est un système fermé s'écrit :

$$E(t) = E_{V^*} - \rho g z_P + \frac{1}{2} dm v^2$$

$$E(t + dt) = E_{V^*} - \rho g z_P + \frac{1}{2} dm v^2$$

Donc, ayant  $z_C \simeq z_B$ , on a  $E(t + dt) - E(t) = 0$ . D'autre part, la variation d'énergie cinétique correspond au travail des forces de pression et de la pompe durant  $dt$  :

$$E(t + dt) - E(t) = 0 = \dot{w}dt + P_P \pi a^2 v dt - P_{P'} \pi a^2 v dt$$

On trouve donc la relation voulue (comme  $D = \pi a^2 v$ ) :

$$\dot{w} = D \Delta P$$

6. En utilisant les résultats précédents :

$$\dot{w} = \pi a^2 \Delta P \sqrt{\frac{2(\Delta P - P_{min})}{\rho}}$$

C'est une courbe en  $\sim \Delta P^{3/2}$  qui démarre à  $P_{min}$ .

7. Il suffit de réappliquer le théorème de Bernoulli en ajoutant la chute de pression dans la nappe (c'est incorrect de l'appliquer tel quel mais c'est juste quand même) :

$$P_{P'} + \rho \frac{v^2}{2} + R_h D = P_0 + \rho g(z_{P'} - z_N)$$

On trouve donc :

$$D = \pi a^2 \sqrt{\frac{2(\Delta P - P_{min} - R_h D)}{\rho}}$$

Pour isoler  $D$ , il faut résoudre l'équation du second ordre en  $D$ . On trouve après résolution :

$$D = \frac{\pi^2 a^4}{\rho} \left( \sqrt{R^2 + \frac{\rho(\Delta P - P_{min})}{\pi^2 a^4}} - R \right)$$

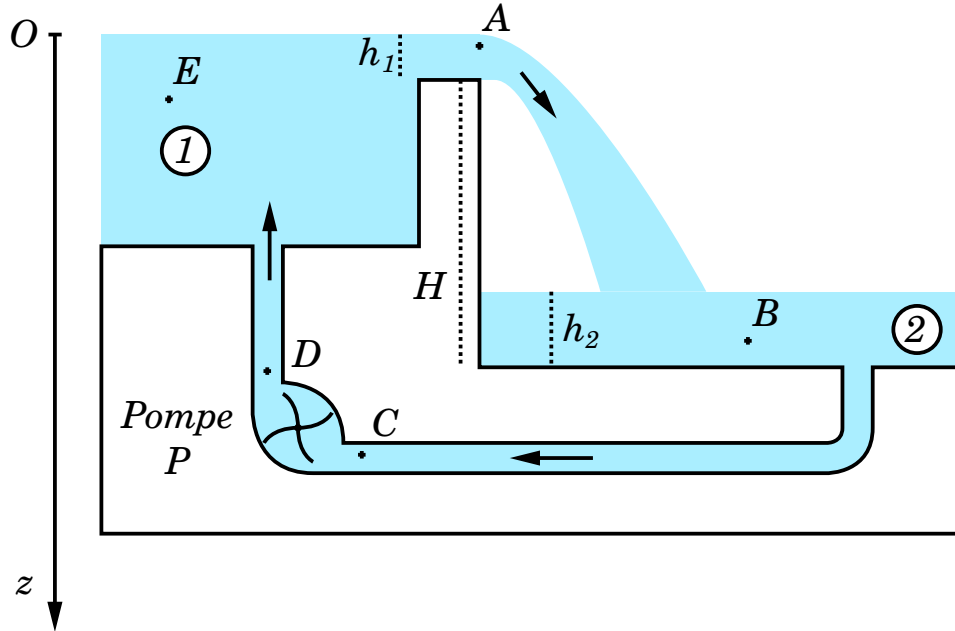
On retrouve bien le résultat précédent lorsque  $R = 0$ . La puissance perdue est alors :

$$\dot{w}_P = \pi a^2 \Delta P \sqrt{\frac{2(\Delta P - P_{min})}{\rho}} - \Delta P \frac{\pi^2 a^4}{\rho} \left( \sqrt{R^2 + \frac{\rho(\Delta P - P_{min})}{\pi^2 a^4}} - R \right)$$

Il faut ensuite simplifier en faisant un d.l. en  $R$ . Bon courage.

### 7.3 Bassin à débordement

On s'intéresse à un bassin à débordement comme schématisé sur la figure ci-dessous. Deux bassins, notés 1 et 2, (carrés de côté  $L$ ) sont situés l'un à côté de l'autre, séparé par un mur de hauteur  $H$ . Le niveau d'eau du bassin 1 se situe à un niveau  $h_1$  au-dessus du haut du mur de séparation (de largeur  $L$ ), l'eau déborde et s'écoule ainsi dans le bassin 2, où le niveau de l'eau est  $h_2$ .



Une pompe  $P$ , située dans une canalisation de rayon  $a \ll L$ , refoule ensuite l'eau du bassin 2 dans le bassin 1 pour que l'eau reste en circuit fermé. La pompe de puissance  $\dot{w}$  génère une surpression  $\Delta P = P_D - P_C$  entre son entrée et sa sortie, et on supposera sa hauteur négligeable ( $z_C \simeq z_D$ ). On prendra l'axe  $z$  comme indiqué sur le schéma, avec  $z$  croissant avec la profondeur et on notera  $\rho$  la masse volumique de l'eau et  $P_0$  la pression atmosphérique.

1. L'écoulement est supposé parfait entre les lignes de courant  $BC$ ,  $DE$  et  $EA$ . Peut-on faire cette hypothèse sur les trajets  $AB$  et  $CD$ ? Conclure sur quels trajets il est possible d'appliquer le théorème de Bernoulli.
2. Les bassins étant larges, que peut-on dire sur la vitesse de l'eau au point  $E$ , loin du débordement ?
3. En appliquant le théorème de Bernoulli entre les points  $A$  et  $E$  (supposés à la même altitude  $z$ ), déterminer la vitesse de l'eau  $v(z)$  au point  $A$ , au niveau du débordement, puis le débit de l'écoulement du bassin 1 vers le bassin 2.
4. En appliquant judicieusement le théorème de Bernoulli sur différents trajets entre la surface du bassin 2 à celle du bassin A, expliciter une relation entre  $\Delta P$  et les hauteurs  $h_1$ ,  $h_2$  et  $H$ . Quelle surpression  $\Delta P_{min}$  minimale doit fournir la pompe pour monter le niveau de l'eau du bassin 1 jusqu'à  $z = h_1$  ?
5. A l'aide d'un bilan d'énergie mécanique, montrer que la puissance fournie par la pompe s'écrit  $\dot{w} = \Delta P \times D$ .
6. Pourquoi la somme  $h_1 + h_2$  est une constante (de  $h_1$  et  $h_2$ ) ? En déduire la puissance  $\dot{w}$  que doit fournir la pompe pour que l'eau atteigne une hauteur  $h_1$  au-dessus du mur.



**Corrigé :**

1. Sur le trajet  $AB$ , l'écoulement est nécessairement turbulent pour que l'énergie cinétique de la chute soit dissipée (la vitesse en entrée de la canalisation  $v_B = D/\pi a^2$  est indépendante de la vitesse de chute  $\simeq \sqrt{2gH}$  puisque  $H$  et la section  $a$  peuvent être choisis indépendamment). Sur le trajet  $CD$ , la pompe est là et génère aussi des turbulences ainsi que de l'énergie mécanique : Bernoulli n'est pas applicable.
2. On applique la loi de la statique des fluides  $P_1(z)$  et  $P_2(z)$  dans les bassins 1 et 2 :

$$P_1(z) = P_0 + \rho g z, \quad z \in \text{bassin 1}$$

$$P_2(z) = P_0 + \rho g(z - (H + h_1)), \quad z \in [H + h_1 - h_2, H + h_1], \text{ bassin 2}$$

3. On applique Bernoulli entre le point  $A$ , d'altitude  $z$  au niveau du débordement, et le point  $E$ , situé à la même profondeur  $z$ , mais en plein dans le bassin. La pression en  $A$  est celle de l'atmosphère, puisqu'il n'y a rien pour retenir l'eau (pas de paroi). La vitesse en  $E$  est nulle, car on considère que la vitesse est négligeable dans les bassins. Enfin,  $P_E = P_1(z)$ .

$$\frac{\rho}{2} v_A^2 + P_0 = P_1(z)$$

Donc, on retrouve le grand classique :

$$v(z) = \sqrt{2gz}$$

Le débit est alors :

$$\begin{aligned} D &= L \int_0^z \sqrt{2gz} dz \\ &= \frac{2\sqrt{2g}}{3} L h_1^{3/2} \end{aligned}$$

4. La vitesse dans la canalisation est notée  $v_c = D/\pi a^2$  par conservation du débit. **Attention :** l'axe des  $z$  est orienté vers le bas : il y a un signe - devant les termes en  $\rho g z$ . En appliquant une première fois Bernoulli entre la surface du bassin 2 et le point  $B$  :

$$P_B - \rho g h_2 + \frac{\rho}{2} v^2 = P_0$$

Puis entre les trajets  $BC$  et  $CD$  on a les relations :

$$P_B + \frac{\rho}{2} v^2 - \rho g z_B = P_C + \frac{\rho}{2} v^2 - \rho g z_C$$

$$P_D = P_C + \Delta P$$

Enfin, on applique Bernoulli entre  $D$  et le point  $E$  :

$$P_D + \frac{\rho}{2} v^2 - \rho g z_C = P_E - \rho g z_E = P_0$$

car  $P_E = P_0 - \rho g z_E$ . On en déduit donc que (avec  $z_B = H + h_1$ ) :

$$\Delta P = \rho g(H + h_1 - h_2)$$

On retrouve bien le cas statique : la vitesse n'intervient pas dans notre circuit. C'est normal : l'énergie cinétique acquise en entrant dans  $B$  retourne sous forme de pression en sortant en arrivant dans le bassin 1.

Dans le cas  $h_1 = 0$ , l'eau se situe à ras bord mais ne coule pas encore. On a donc  $\Delta P_{min} = \rho g(H - h_2)$ .

5. On considère un volume de contrôle ouvert  $V^*$  entre les points  $C$  et  $D$ , ainsi qu'une masse  $dm$  entrant en  $C$  à l'instant  $t$  et ressortant en  $D$  à l'instant  $t + dt$ . L'énergie mécanique du système  $V_C; dm$ , qui est un système fermé s'écrit :

$$E(t) = E_{V^*} - \rho g z_C + \frac{1}{2} dm v^2$$

$$E(t + dt) = E_{V^*} - \rho g z_D + \frac{1}{2} dm v^2$$

Donc, ayant  $z_C \simeq z_D$ , on a  $E(t + dt) - E(t) = 0$ . D'autre part, la variation d'énergie cinétique correspond au travail des forces de pression et de la pompe durant  $dt$  :

$$E(t + dt) - E(t) = 0 = \dot{w} dt + P_C \pi a^2 v dt - P_D \pi a^2 v dt$$

On trouve donc la relation voulue (comme  $D = \pi a^2 v$ ) :

$$\dot{w} = D \Delta P$$

6. La quantité  $L^2 \times (h_1 + h_2) = V$  représente le volume total du bassin, qui est constant, comme l'eau s'écoule en cycle fermé. Avec les relations précédentes :

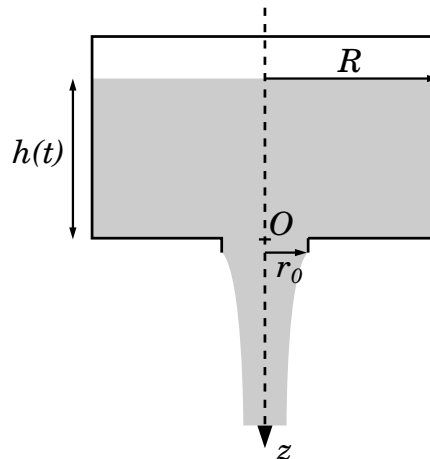
$$\dot{w} = \rho g (H + h_1 - h_2) \frac{2\sqrt{2g}}{3} L h_1^{3/2}$$

$$= \rho g (H' + 2h_1) \frac{2\sqrt{2g}}{3} L h_1^{3/2}$$

avec  $H' = H - V/L^2$ . Seule solution : résolution graphique ou numérique.

## 7.4 Vidange d'un réservoir d'huile

On considère un réservoir d'huile muni d'une ouverture de section circulaire  $s = \pi r_0^2$  sur sa face inférieure, par laquelle s'écoule l'huile (supposée incompressible) sous l'action de la gravité. On définit l'axe vertical  $Oz$  dirigé vers le bas, en prenant l'origine  $O$  au niveau de l'ouverture. Une fois sorti du réservoir, on suppose qu'à la côte  $z > 0$ , le filet d'huile a une section  $\pi r(z)^2$  et que sa vitesse est uniforme et s'écrit ainsi  $\vec{v} = v(z)\vec{e}_z$ . D'autre part, le réservoir est un cylindre de rayon  $R$  et de hauteur  $H$ .



- On suppose dans un premier temps que la vitesse de l'huile à la sortie du réservoir est constante et égale à  $v_0$ .
  - Déterminer la vitesse  $v(z)$  de l'huile à la côte  $z$ .
  - En déduire le rayon  $r(z)$  du filet d'huile à la côte  $z$ . Simplifier la formule en considérant  $v_0$  faible (devant quoi ?) pour obtenir  $r(z) \propto 1/\sqrt[4]{z}$ .
  - Que représente le terme  $\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{v})$  ? Le calculer et commenter.
  - Pourquoi l'expression de la vitesse est-elle incomplète ? A l'aide de la conservation locale du débit, montrer qu'elle doit s'écrire sous la forme  $\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_z\vec{e}_z$  et déterminer la vitesse radiale  $v(r, z)\vec{e}_r$  du filet l'huile en chute.
- On suppose désormais que le réservoir se vidange et que la hauteur d'huile, initialement au niveau  $H$  dans le réservoir, diminue donc progressivement. On note  $h(t)$  la hauteur d'huile à l'instant  $t$ .
  - On note  $v_1$  la vitesse de l'huile à la surface en  $z = -h(t)$ . Quel est le lien entre  $v_1$  et la variation du niveau  $\dot{h}(t)$  ? En déduire une relation  $\dot{h}(t)$  et la vitesse  $v_0(t)$ .
  - Quelle est la vitesse  $v_0(t)$  de l'huile au niveau de l'ouverture en fonction de la hauteur  $h(t)$ , de  $g$  et du rapport  $\sigma = r_0^2/R^2$  ?
  - En déduire la hauteur  $h(t)$  en fonction du temps  $t$ .
  - En combien de temps se sera vidé le réservoir ?

Expression de la divergence en coordonnées cylindriques :

$$\text{div}(\vec{v}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

**Corrigé :**

1. (a) Avec la formule de Torricelli (ou Bernoulli), on trouve que  $v(z) = \sqrt{v_0^2 + 2gz}$ .  
 (b) Conservation du débit volumique, en notant  $D = \pi r_0^2 v_0$  :  $D = v(z) \pi r^2(z)$ , donc :

$$r(z) = \sqrt{\frac{r_0^2 v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gz}}}$$

$$\simeq \sqrt{\frac{r_0^2 v_0}{\sqrt{2g}}} z^{-\frac{1}{4}}$$

- (c) Le terme se résume ici à :  $\vec{v} \cdot \mathbf{grad}(\vec{v}) = v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = g$ . Il représente l'accélération convective, c'est-à-dire à un changement du champ de vitesse dans l'espace, qui est non-nulle malgré le caractère permanent de l'écoulement. L'accélération  $\dot{V}(t)$  de la particule de poussière correspond à l'altitude  $z$  à ce terme d'accélération convective. Il s'agit tout simplement d'une chute libre.
- (d) La conservation du débit implique  $\mathbf{div}(\vec{v}) = 0$ . Or ici, le terme  $\frac{\partial v_z}{\partial z}$  n'est clairement pas nul, donc pour cette forme d'écoulement cette condition n'est pas vérifiée. En réalité, lorsque le filet d'huile s'écoule, il s'allonge selon  $z$  (à cause de l'accélération de la pesanteur) et doit donc, par conservation du volume, se contracter selon  $r$  (c'est ce que l'on trouve avec un rayon qui décroît lors de la chute). Il y a donc nécessairement une vitesse du fluide selon  $-\vec{e}_r$  pour qu'il s'amincisse :  $\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_z \vec{e}_z$ .

En utilisant l'expression de la divergence, on a :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = -\frac{g}{\sqrt{v_0^2 + 2gz}}$$

Ainsi, on peut proposer :

$$v_r(r, z) = -\frac{1}{2} \frac{gr}{\sqrt{v_0^2 + 2gz}}$$

Cette expression est cohérente : la vitesse est bien dirigée vers l'axe  $Oz$ , et décroît en fonction de  $z$ , comme  $v_z$ . On peut vérifier plus en détail : pour une particule de fluide située en  $z$  sur le bord du filet d'huile, en  $r(z)$ , parcourt pendant  $dt$  une distance  $d\vec{l} = dr\vec{e}_r + dz\vec{e}_z$ , avec  $dr = v_r \cdot dt$  et  $dz = v_z \cdot dt$ . On doit donc avoir :  $v_r/v_z = dr/dz$ . Commençons par calculer  $dr/dz$  :

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dz} &= \frac{d}{dz} \left( \sqrt{\frac{r_0^2 v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gz}}} \right) \\ &= -\sqrt{r_0^2 v_0} \frac{g}{2} (v_0^2 + 2gz)^{-5/4} \\ &= -\frac{g}{2} \sqrt{\frac{r_0^2 v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gz}}} \frac{1}{v_0^2 + 2gz} \\ &= -\frac{g}{2} \frac{r}{v_0^2 + 2gz} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} v_r &= v_z \frac{dr}{dz} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{gr}{\sqrt{v_0^2 + 2gz}} \end{aligned}$$

2. (a) On a tout simplement  $v_1 = -\dot{h}$ . Avec la conservation du débit, on a  $v_1 \pi R^2 = v_0 \pi r_0^2$ . Ainsi :

$$\dot{h} = -\sigma^2 v_0$$

- (b) On utilise Bernoulli entre la surface de l'huile ( $z = z_1$ , où la pression est  $P_0$ ) dans le réservoir et au niveau de l'orifice ( $z = 0$ , où la pression est aussi  $P_0$ , étant à l'air libre) :

$$P_0 - \rho g z_1 + \rho \frac{1}{2} v_1^2 = P_0 - \rho g z_2 + \rho \frac{1}{2} v_0^2$$

Donc :

$$v_0(t)^2 = \frac{2g}{1 - \sigma^2} h(t)$$

- (c) Comme  $\dot{h} = -\sigma^2 v_0$ , on a l'équation différentielle suivante :

$$-\dot{h} = \sqrt{\frac{2g\sigma^2}{1 - \sigma^2}} \sqrt{h(t)}$$

La solution est :

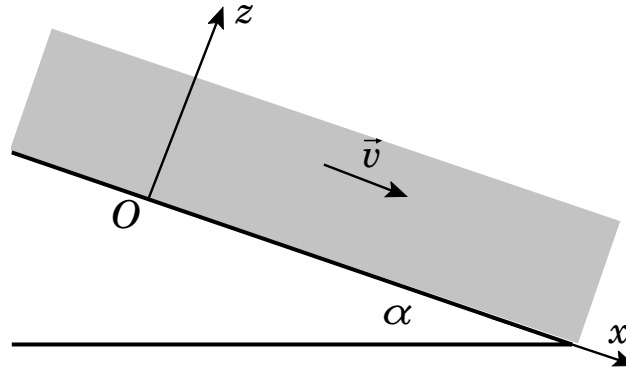
$$h(t) = \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2g\sigma^2}{1 - \sigma^2}} t - \sqrt{H} \right)^2$$

- (d) Le réservoir se sera vidé lorsque  $h(t) = 0$ , cad pour  $t = T$  :

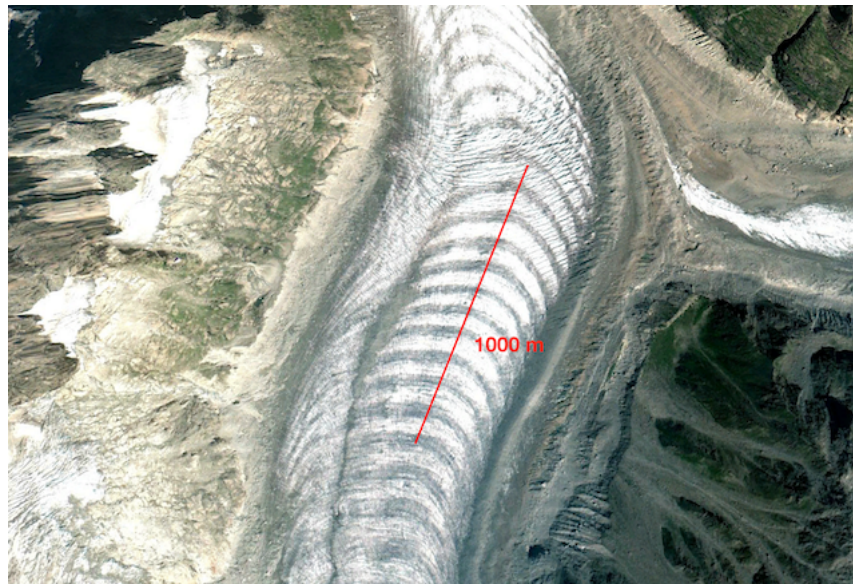
$$T = \sqrt{\frac{2(1 - \sigma^2)H}{2g\sigma^2}}$$

## 7.5 Écoulement d'un fluide en pente

Un fluide de forte viscosité ( $\eta$ , masse volumique  $\rho$ ), d'épaisseur  $h$ , est soumis à la gravité (notée  $\vec{g}$ ) s'écoule lentement sur un plan infini incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à la verticale. On se place en régime permanent, on suppose que la vitesse selon  $\vec{e}_y$  est nulle et que le fluide est incompressible. On cherche à décrire l'écoulement de ce fluide.



1. Montrer que  $\vec{v}(x, y, z) = v(z)\vec{e}_x$ .
2. Écrire le bilan des forces volumiques s'exerçant sur un volume de fluide situé au point  $M = (x, y, z)$ .
3. En déduire le profil de vitesse dans le fluide.
4. En déduire le débit linéique (le débit par unité de longueur selon l'axe  $y$ ).
5. On souhaite avoir un ordre de grandeur de la viscosité d'un glacier. Pour cela, dispose d'image satellite du glacier du Tacul, situé sur la face nord du Mont Blanc. Chaque "rayure" correspond à une année. Estimer sa viscosité.



6. En reprenant la première figure, on place désormais une plaque au dessus du liquide, au niveau de  $z = h$ . Que deviennent les conditions aux limites ? Trouver le nouveau profil de vitesse. Comment s'appelle se type d'écoulement ?

**Corrigé :**

1. Comme l'écoulement est lent, et invariant selon  $x$  et  $y$  : l'écoulement ne dépend que de  $z$ . De plus, comme il est incompressible,  $\text{div}(\vec{v}) = 0$ , donc  $v_z = \text{cte} = 0$ , car la vitesse doit être nécessairement nulle en  $z = 0$ . L'écoulement est donc laminaire et est dirigé selon  $\vec{e}_x$  (c'est une hypothèse, on suppose qu'il est dans le sens de la descente) :  $\vec{v}(x, y, z) = v(z)\vec{e}_x$ .

*NB* : avec un tel profil de vitesse,  $(\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v}$  est identiquement nul, mais on peut directement le négliger ce terme avec l'hypothèse de l'énoncé (écoulement lent et très visqueux).

2. Les forces s'exerçant sur le fluide sont celles de gravité, de pression et de viscosité. Le bilan des forces s'écrit :

$$0 = \eta \Delta \vec{v} + \rho \vec{g} - \text{grad}(P)$$

En projetant sur les axes  $x$  et  $z$ , on obtient :

$$\begin{cases} \vec{e}_x & : \quad \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \rho g \sin \alpha - \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \vec{e}_z & : \quad -\rho g \cos \alpha - \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

3. En intégrant selon  $\vec{e}_z$  et avec la condition au limite  $P(x, z = h) = P_0$ , on obtient :

$$P(x, z) = P_0 + \rho g \cos \alpha (h - z)$$

En intégrant selon  $\vec{e}_x$ , avec la condition aux limites  $\frac{\partial v}{\partial z}|_{z=h} = 0$  (il n'y a pas de forces de cisaillement à l'interface air/fluide) devient alors :

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\rho g}{\eta} \sin \alpha (h - z)$$

En intégrant une nouvelle fois, avec la condition aux limites  $v(z = 0) = 0$  (continuité de la vitesse avec le support) :

$$v(z) = \frac{\rho g}{\eta} \sin \alpha z \left( h - \frac{z}{2} \right)$$

Le profil de vitesse est parabolique.

4. Le débit s'écrit, en prenant comme section un carré de largeur  $L \gg h$  pour que les hypothèses de l'énoncé soient valables :

$$D = \int_{y=0}^L dy \int_{z=0}^h dz \cdot v(z)$$

En intégrant, on obtient :

$$D = \frac{\rho g}{3\eta} \sin \alpha L h^3$$

5. La glace a une densité de  $900 \text{ kg.m}^3$ . La vitesse proposée est la vitesse maximale de la glace, car c'est celle en surface. On a donc  $\eta \simeq 7.1 \cdot 10^{12} \text{ Pa.s}$ .

On obtient donc, sur une année :  $V = D \Delta t \simeq 4,73 \cdot 10^6 \text{ m}^3$ , soit 4250 tonnes chaque année.

Il faut garder à l'esprit que ce sont des ordre de grandeurs, car nous n'avons pas pris en compte les conditions aux limites sur les bords (en  $y$ ) du canal d'écoulement du glacier, et que la vitesse est elle aussi un ordre de grandeur.

- Les conditions aux limites deviennent alors  $v(z=0) = v(z=h) = 0$ , mais on a plus la condition sur la dérivée première de la vitesse. La vitesse s'écrit :  $v(z) = -\frac{\rho g}{2\eta} \sin \alpha z^2 + a + b$ . Avec les conditions aux limites, on trouve  $b = 0$  et  $a = \frac{\rho g}{2\eta} \sin \alpha h$ .

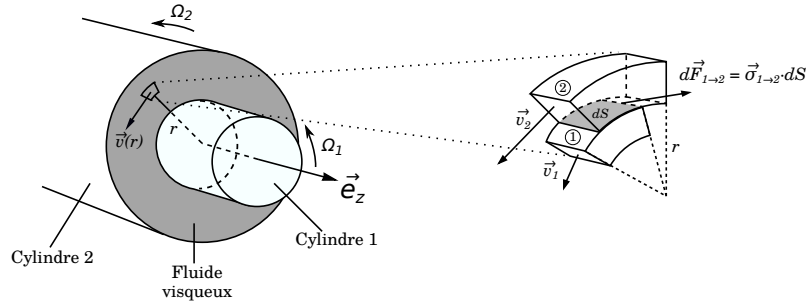
$$v(z) = \frac{\rho g}{2\eta} \sin \alpha z (h - z)$$

C'est un écoulement de Poiseuille.



## 7.6 Boîte automatique

On modélise un convertisseur de couple d'une boîte automatique, dispositif permettant de se passer d'un embrayage, comme un système de deux cylindres de même axe  $\vec{e}_z$ , et de rayons respectifs  $R_1$  et  $R_2$ , de longueur  $L$ , entre lesquels se trouve un fluide de viscosité  $\eta$  élevée (*schéma de gauche*). Le moteur (resp. l'arbre de transmission) est solidaire du cylindre 1 (resp. 2) et tourne à la vitesse  $\Omega_1$  (resp.  $\Omega_2$ ). Lorsque le moteur fournit un couple  $\Gamma_1$  au cylindre 1, il entraîne le fluide situé entre  $R_1$  et  $R_2$ , qui entraîne à son tour le cylindre 2, relié à la boîte de vitesse. Pour étudier son fonctionnement, on se placera en coordonnées cylindriques.



On rappelle que la force surfacique de viscosité, entre deux couches élémentaires 1 et 2 adjacentes de fluide, s'écrit :  $\vec{\sigma}_{1 \rightarrow 2} = \frac{d\vec{F}_{1 \rightarrow 2}}{dS}$ , où  $d\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$  est la force exercée de la couche 1 sur la couche 2,  $dS$  étant la surface élémentaire de contact (*schéma de droite*). On admet que son expression en coordonnées cylindriques de sa composante selon  $\vec{e}_\theta$  s'écrit :

$$\sigma_\theta(r, \theta, z) = \eta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right)$$

On admet que les autres composantes de  $\vec{\sigma}$  sont nulles ( $\sigma_r = \sigma_z = 0$ ). On suppose par ailleurs que l'écoulement est incompressible et permanent, que la vitesse ne dépend que de  $r$ , et enfin que  $v_z = 0$ .

1. (a) Quel est le nombre de Reynolds de cet écoulement ? En déduire le type d'écoulement.
- (b) Montrer que le champ de vitesse est strictement orthoradial :  $\vec{v} = v_\theta(r) \vec{e}_\theta$ .
- (c) En faisant un bilan des moments sur un élément de fluide selon  $\vec{e}_z$  et en négligeant les forces de pression, montrer que la vitesse vérifie la relation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^3 \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) = 0$$

- (d) A l'aide des conditions aux limites, en déduire l'expression du champ de vitesse  $\vec{v}$ .
- (e) Calculer le couple  $\Gamma_{1 \rightarrow 2}$  qu'exercent les forces visqueuses sur le cylindre 2. Comparer avec  $\Gamma_{2 \rightarrow 1}$ .
2. On suppose que le moteur peut asservir son régime moteur de sorte à garder  $\Omega_1$  fixé, quelque soit le couple  $\Gamma_{1 \rightarrow 2}$  qu'il délivre.
  - (a) Le véhicule roule à vitesse constante dans une montée, équivalent à un couple résistif  $-\Gamma_r$  sur l'arbre de transmission. Déterminer  $\Omega_2$  puis le rendement du convertisseur de couple. Quels sont les intérêts et les inconvénients d'un convertisseur de couple par rapport à un embrayage classique ?
  - (b) Désormais, le véhicule est initialement à l'arrêt, et démarre à pleine puissance sur une route plate à  $t = 0$ . L'inertie du véhicule est vue au niveau du cylindre 2 comme un moment d'inertie  $J$ . Déterminer l'évolution  $\Omega_2(t)$ .

Données :  $R_1 = 295\text{mm}$ ,  $R_2 = 300\text{mm}$ ,  $L = 500\text{mm}$ ,  $\rho = 860\text{kg.m}^{-3}$  et  $\eta = 120\text{ SI}$ .

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

**Corrigé :**

1. (a) Question piège : on a pas la vitesse de rotation. Pour un moteur de voiture, on a typiquement  $\Omega = 1000 \text{tr/min} \simeq 105 \text{rad/s}$ , soit une vitesse typique  $U = R_2 \Omega \simeq 31 \text{m/s}$ . On trouve  $Re = \rho U L / \eta \simeq 67$ , soit un écoulement laminaire.
- (b) Comme l'écoulement est incompressible, on a  $\text{div}(\vec{v}) = 0$ . Avec les hypothèses de l'énoncé, on trouve donc que  $v_r = \frac{\text{cste}}{r}$ . Comme  $v_r(R_1) = 0$  par conservation du débit,  $\forall r, v_r = 0$ .
- (c) Le plus simple est de faire un bilan des moments selon  $\vec{e}_z$  à un élément de fluide (en coordonnées cylindriques) qui est un anneau (ou tore) compris entre  $r$  et  $r + dr$ , d'épaisseur  $dz$ . Les forces visqueuses s'appliquent orthoradialement alors sur les surfaces internes et externe.

Comme on est en régime stationnaire, le moment total exercé doit être nul de sorte que :

$$2\pi r dz \sigma_\theta(r) \times r - 2\pi(r + dr) dz \sigma_\theta(r + dr) \times (r + dr) = 0$$

cad :  $r^2 \sigma_\theta(r) - (r + dr)^2 \sigma_\theta(r + dr) = 0$ . On en déduit que  $\frac{\partial}{\partial r} r^2 \sigma_\theta = 0$ .

D'autre part,  $\sigma_\theta = \eta \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) = \eta r \frac{\partial}{\partial r} \frac{v_\theta}{r}$ . On trouve le résultant voulu :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^3 \frac{\partial}{\partial r} \frac{v_\theta}{r} \right) = 0$$

- (d) On intègre la relation précédente et on trouve :

$$v_\theta = \frac{A}{r} + Br$$

Les conditions aux limites sont :  $v_\theta(r = R_{1,2}) = R_{1,2} \Omega_{1,2}$ . On obtient alors :

$$v_\theta = -\frac{(\Omega_2 - \Omega_1) R_2^2 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r} + \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r$$

- (e) Le couple s'exerçant sur une surface élémentaire  $dS = R_2 \cdot d\theta \cdot dz$  du cylindre 2 correspond au moment des forces de cisaillement en  $R_2$  :  $d\Gamma_{1 \rightarrow 2} = \sigma_\theta(R_2) \cdot dS \cdot R_2$ .

Comme  $\sigma_\theta(r) = \eta r \frac{\partial}{\partial r} \frac{v_\theta}{r} = -2\eta \frac{A}{r^2}$ , on a :

$$\Gamma_{1 \rightarrow 2} = -4\pi\eta L \frac{(\Omega_2 - \Omega_1) R_2^2 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

On trouve bien que le couple reçu par 2  $\Gamma_{1 \rightarrow 2}$  est négatif lorsque  $\Omega_2 > \Omega_1$ , et inversement. Pour le cas du cylindre 1, le calcul donne la même chose, avec un signe négatif (car les forces de viscosité s'exercent sur un cylindre plus petit) :

$$\Gamma_{2 \rightarrow 1} = 4\pi\eta L \frac{(\Omega_2 - \Omega_1) R_2^2 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

On trouve bien que  $\Gamma_{1 \rightarrow 2} + \Gamma_{2 \rightarrow 1} = 0$ . Le couple exercée par le cylindre 1 est bien reçu par le cylindre 2, et inversement.

2. (a) En supposant que la vitesse de rotation du moteur est fixée à  $\Omega_1$ , déterminer  $\Omega_2$ . Calculer alors la puissance dissipée dans le fluide visqueux et la comparer avec la puissance mécanique  $P_1$  fournie par le moteur et  $P_2$ , celle récupérée par l'arbre de transmission.

Le couple résistif s'exerce sur l'arbre de transmission, cad sur le cylindre 2, donc le couple résistif s'exerce aussi sur 1 :  $\Gamma_{2 \rightarrow 1} = -\Gamma_r$ . On trouve donc :

$$-\Gamma_r = 4\pi\eta L \frac{(\Omega_2 - \Omega_1)R_2^2 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

cad :

$$\Omega_2 = \Omega_1 - \frac{\Gamma_r}{4\pi\eta L} \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^2 R_1^2} < \Omega_1$$

On trouve que l'arbre extérieur tourne moins vite que l'arbre intérieur : le couple résistif fait "glisser" le convertisseur de couple. Si le couple résistif est trop important, on peut même arrêter l'arbre de transmission : le véhicule s'arrête !

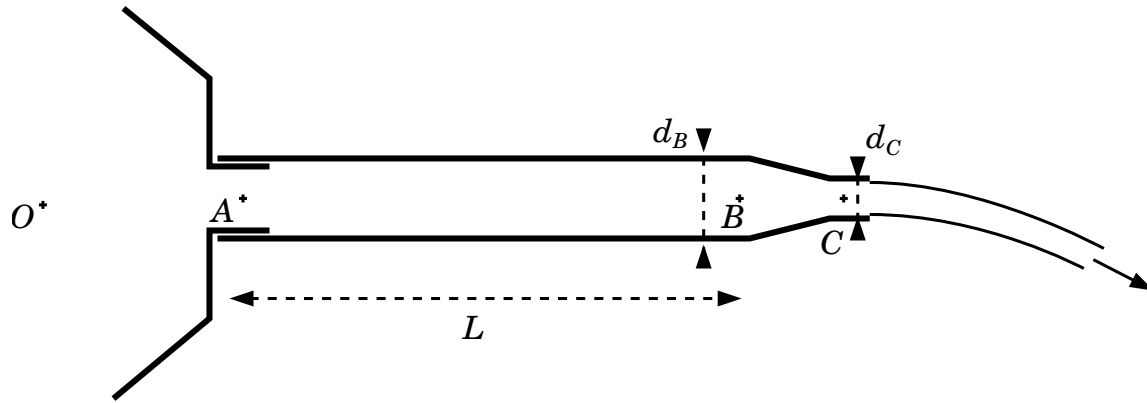
Par ailleurs, toute la puissance n'est pas transmise à l'arbre 2. La puissance fournie par le moteur est  $P_1 = \Omega_1 \Gamma_r$  et la puissance reçue par l'arbre est  $P_2 = \Omega_2 \Gamma_r < P_1$ . Le rendement du convertisseur est alors :

$$r = \frac{P_2}{P_1} = \frac{\Omega_2}{\Omega_1} = 1 - \frac{\Gamma_r}{4\pi\eta L \Omega_1} \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^2 R_1^2}$$

Le rendement est systématiquement inférieur à 1, sauf lorsqu'il n'y a pas de couple résistif. On a bien vu que, par essence, ce convertisseur de couple perd de la puissance par dissipation dès qu'il doit exercer un couple ou transmettre de la puissance. Néanmoins, l'avantage est que le moteur peut rester à régime fixe (notamment sur les meilleures plages de rendement) et il n'y a pas de discontinuité dans la transmission du couple, contrairement à un embrayage (lorsqu'on change de vitesse : les disques se décollent et frottent par ailleurs aussi). Un embrayage fonctionnant sur le même rapport n'a aucune perte.

## 7.7 Augmenter la vitesse du jet d'eau à la sortie d'un tuyau (*PSI*)

Dans un jardin, un tuyau d'arrosage de longueur  $L$  et de diamètre constant  $d_B = 2$  cm est branché sur une arrivée d'eau en  $A$ , connectée à un réservoir de taille très grande où la pression en  $O$  (loin de  $A$ ) est  $P_1 = 3$  bar. A l'autre extrémité du tuyau, on dispose d'un rétrécissement (entre les points  $B$  et  $C$ , de longueur négligeable), faisant passer le diamètre de  $d_B$  à  $d_C$ . On note  $\sigma = d_C/d_B$ . La pression en sortie de tuyau (au point  $C$ ) est la pression atmosphérique  $P_0 = 1$  bar.



1. Si l'écoulement était parfait, quelle serait la vitesse  $U_T$  (dite vitesse de Torricelli) du jet d'eau à la sortie en  $C$ ? Est-ce que le rétrécissement joue un rôle?
2. Quel est le nombre de Reynolds associé à cet écoulement? On rappelle que pour l'eau  $\eta = 1,0 \times 10^{-3}$  SI et  $\rho = 1,0 \times 10^3$ . En déduire le type d'écoulement auquel on a affaire. Est-il parfait? Quel phénomène doit-on prendre en compte?
3. Rappeler l'expression des pertes de charges  $\Delta_A^B P$  dans le tuyau, entre  $A$  et  $B$ , en fonction de la vitesse débitante dans le tuyau  $U_B$ ,  $\rho$ ,  $L$ ,  $d_B$ , et  $\xi$  le coefficient de perte de charge donné par le diagramme de Moody. En déduire, dans le cas  $\sigma = 1$ , l'expression de la vitesse  $U_C$  à la sortie du tuyau. Application numérique pour  $L = 4$  m, et une rugosité relative du tuyau de  $\varepsilon = 0,01$ .
4. Le rétrécissement provoque une perte de charge que l'on peut écrire sous la forme :

$$\Delta_B^C P = -\frac{1}{2}\rho(1 - \sigma^2)\chi U_C^2$$

avec  $\chi = 0,3$ . Montrer que la vitesse de sortie s'écrit sous la forme :

$$U_C = \frac{U_T}{\sqrt{\alpha + \beta\sigma^2 + \gamma\sigma^4}}$$

et déterminer les constantes  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ .

5. A quelle condition sur la longueur  $L$  du tuyau la vitesse du jet d'eau augmente d'elle lorsqu'on réduit le diamètre de sortie  $d_C$ ? Le débit augmente-t-il?

**Corrigé :**

1. On applique Bernoulli entre les points  $O$  et  $C$ , on trouve que la vitesse de sortie est  $U_T = \sqrt{2\Delta P/\rho}$ , où  $\Delta P = P_1 - P_0 = 2$  bar. On trouve  $U_T = 20\text{m/s}$ . Elle ne dépend pas de la largeur de la sortie, le rétrécissement en joue aucun rôle.
2. On trouve  $Re = 4 \times 10^5$ . On est donc dans un écoulement turbulent, il n'est pas parfait et on doit prendre en compte les pertes de charges.
3. Les pertes de charges régulières s'écrivent sous la forme :

$$\Delta P_r = \frac{1}{2} \frac{L}{d_B} \rho \xi U_B^2$$

Avec le diagramme de Moody, on trouve  $\xi \simeq 0,04$ . On a donc, en tenant compte des pertes :

$$P_O + \frac{1}{2} \rho v_O^2 = P_A + \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \Delta P_r$$

On obtient donc une équation sur  $U_B = U_C$  :

$$\Delta P - \frac{1}{2} \frac{L}{d_B} \rho \xi U_B^2 = \frac{1}{2} \rho U_C^2$$

On voit bien que la perte de charge diminue la vitesse par rapport à l'écoulement parfait. On trouve ainsi :

$$\begin{aligned} U_B &= \frac{U_T}{\sqrt{1 + \frac{\xi L}{d_B}}} \\ &= \frac{U_T}{3} \end{aligned}$$

Cad  $U_T = 6,7\text{m/s}$ .

4. On réapplique Bernoulli entre  $O$  et  $C$  avec cette perte de charge :

$$P_O + \frac{1}{2} \rho U_O^2 = P_C + \frac{1}{2} \rho U_C^2 + \Delta_O^B P + \Delta_B^C P$$

Ce qui devient :

$$\begin{aligned} P_O - P_C = \Delta P &= \frac{1}{2} \frac{L}{d_B} \rho \xi U_B^2 + \frac{1}{2} \rho (1 - \sigma^2) \chi U_C^2 + \frac{1}{2} \rho U_C^2 \\ &= \frac{1}{2} \rho U_C^2 \left( 1 + \frac{L}{d_B} \xi \sigma^4 + \chi (1 - \sigma^2) \right) \end{aligned}$$

**Attention !** : la chute de pression n'est pas uniquement due aux pertes de charges causée par les turbulences, comme une loi des séries des résistances hydrauliques. L'accélération du fluide entre  $O$  et  $A$ , puis entre  $B$  et  $C$  génère aussi une baisse de la pression à cause de l'accélération du fluide (effet Venturi).

On isole alors la vitesse en sortie de tuyau :

$$\begin{aligned} U_C &= \frac{U_T}{\sqrt{1 + \frac{L}{d_B} \xi \sigma^4 + \chi (1 - \sigma^2)}} \\ &= \frac{U_T}{\sqrt{\alpha + \beta \sigma^2 + \gamma \sigma^4}} \end{aligned}$$

avec  $\alpha = 1 + \chi$ ,  $\beta = -\chi$  et  $\gamma = L\xi/d_B$ .

5. On regarde les cas extrêmes  $\sigma \rightarrow 0$  et  $\sigma \rightarrow 1$ . On trouve :

$$U_C(\sigma \rightarrow 1) = \frac{U_T}{\sqrt{\left(1 + \frac{L}{d_B} \xi\right)}}$$

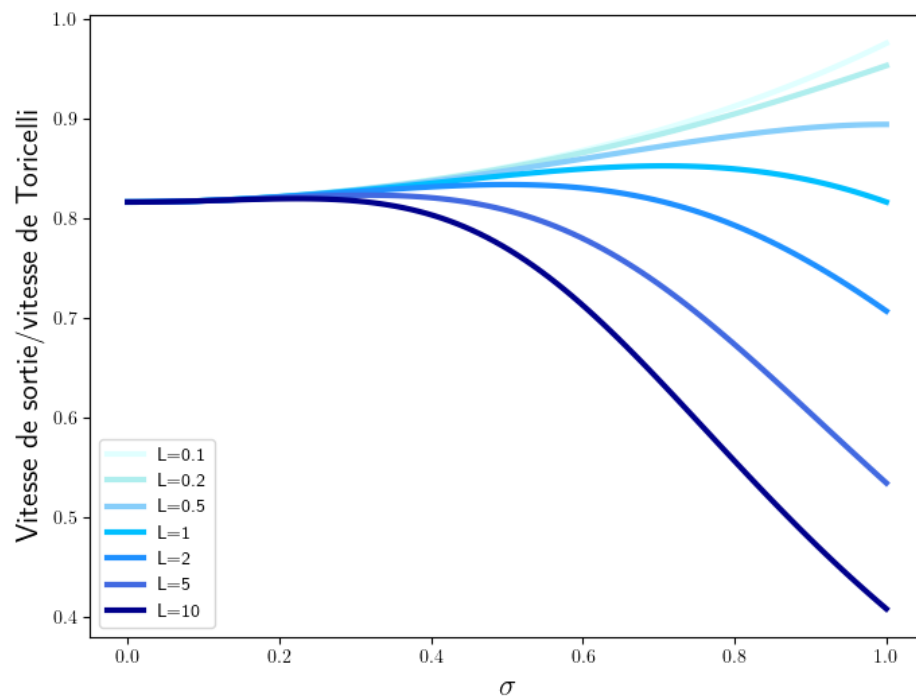
On retombe bien sur le résultat de la question précédente : il n'y a que les pertes de charges régulières.

$$U_C(\sigma \rightarrow 0) = \frac{U_T}{\sqrt{(1 + \chi)}}$$

Dans ce cas-là, il n'y a que la perte de charge singulière due au rétrécissement, car la vitesse  $U_B$  dans le tuyau tend vers 0.

Pour que la vitesse du jet augmente lorsqu'on rétrécit la sortie, il faut que  $U_C(\sigma \rightarrow 0) > U_C(\sigma \rightarrow 1)$ , c'est-à-dire :

$$L > \frac{\chi d_B}{\xi}$$



## 7.8 Écoulement de Poiseuille cylindrique

Un capillaire sanguin est un vaisseau sanguin très fin, dans lequel circule du sang, supposé être un fluide incompressible de masse volumique  $\rho = 1,0 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$  et de viscosité  $\eta = 4 \times 10^{-2} \text{ Pa.s}$ . Le capillaire peut être modélisé comme un tuyau cylindrique, de rayon  $R = 10 \text{ microns}$  et de longueur  $L \gg R$  suivant l'axe  $z$ . La pression artérielle impose une différence de pression  $\Delta P = P_e - P_s$  à ses extrémités, entre  $z = 0$  et  $z = L$ . On se place en coordonnées cylindriques dans tout l'exercice, en notant  $O$  l'origine du repère. On néglige dans tout l'exercice le poids du fluide et on suppose l'écoulement stationnaire.

1. Estimer le nombre de Reynolds pour cet écoulement, alors que l'ordre de grandeur de la vitesse est de  $1 \text{ mm/s}$ . En déduire le type d'écoulement auquel on a affaire, et justifier que le champ de vitesse s'écrit sous la forme  $\vec{v} = v_z(r)\vec{e}_z$ .
2. On considère un volume élémentaire  $d\tau = r d\theta \times dr \times dz$  de fluide situé en  $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$ . Quelles forces s'appliquent sur ce volume? Donner leur expression en coordonnées cylindriques.
3. En déduire que la vitesse vérifie la relation suivante :

$$\eta \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z(r)}{\partial r} \right) - \frac{r \Delta P}{L} = 0$$

4. En supposant qu'il n'y a pas de glissement en  $r = R$ , montrer que la vitesse s'écrit alors :

$$v_z(r) = v_0 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

Expliciter  $v_0$ .

5. En déduire le débit volumique  $D_v$  de cet écoulement, ainsi que la vitesse débitante  $U$  associée.
6. (PSI) Montrer que le coefficient de perte de charge que l'on peut trouver dans le diagramme de Moody s'écrit  $\xi = 64/Re$  pour cet écoulement.

**Corrigé :**

1. Ici  $Re = 10^{-2}$ , on a donc un écoulement laminaire (très visqueux). L'écoulement étant laminaire, la vitesse est nécessairement orientée selon l'axe du tuyau  $\vec{e}_z$ . D'autre part, le problème étant invariant par translation le long de l'axe  $e_z$  et par rotation autour de  $\vec{e}_\theta$ , la vitesse ne dépend que de  $r$ .
2. Les forces de pression et de viscosité s'appliquent le volume élémentaire  $d\tau = r d\theta \times dr \times dz$ . Respectivement, il y a la force de pression sur la face en  $z$ , la force de pression en  $z + dz$ , la force de viscosité en  $r$  et celle en  $r + dr$ , soit :

$$P(z) \times r d\theta \times dr - P(z + dz) \times r d\theta \times dr - \eta \frac{\partial v_z}{\partial r}(r) \times r d\theta \times dz + \eta \frac{\partial v_z}{\partial r}(r + dr) \times (r + dr) d\theta \times dz = 0$$

3. L'équation précédente donne :

$$-r d\theta \times dr \times dz \frac{\partial P}{\partial z} + \eta \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z(r)}{\partial r} \right) dr \times d\theta \times dz = 0$$

et donc, en intégrant sur  $z$  de 0 à  $L$  :

$$\eta \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z(r)}{\partial r} \right) - \frac{r \Delta P}{L} = 0$$

4. On intègre cette équation deux fois, on trouve facilement avec la condition limite que :

$$v_z(r) = v_0 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

avec  $v_0 = R^2 \Delta P / 4\eta L$

5. Le débit volumique s'écrit :

$$\begin{aligned} D_v &= \iint r d\theta dr v_z(r) \\ &= 2\pi \times \int r dr v_0 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \\ &= \pi R^2 \frac{v_0}{2} \end{aligned}$$

La vitesse débitante (définie comme le rapport du débit sur la surface) est donc  $U = v_0/2$ .

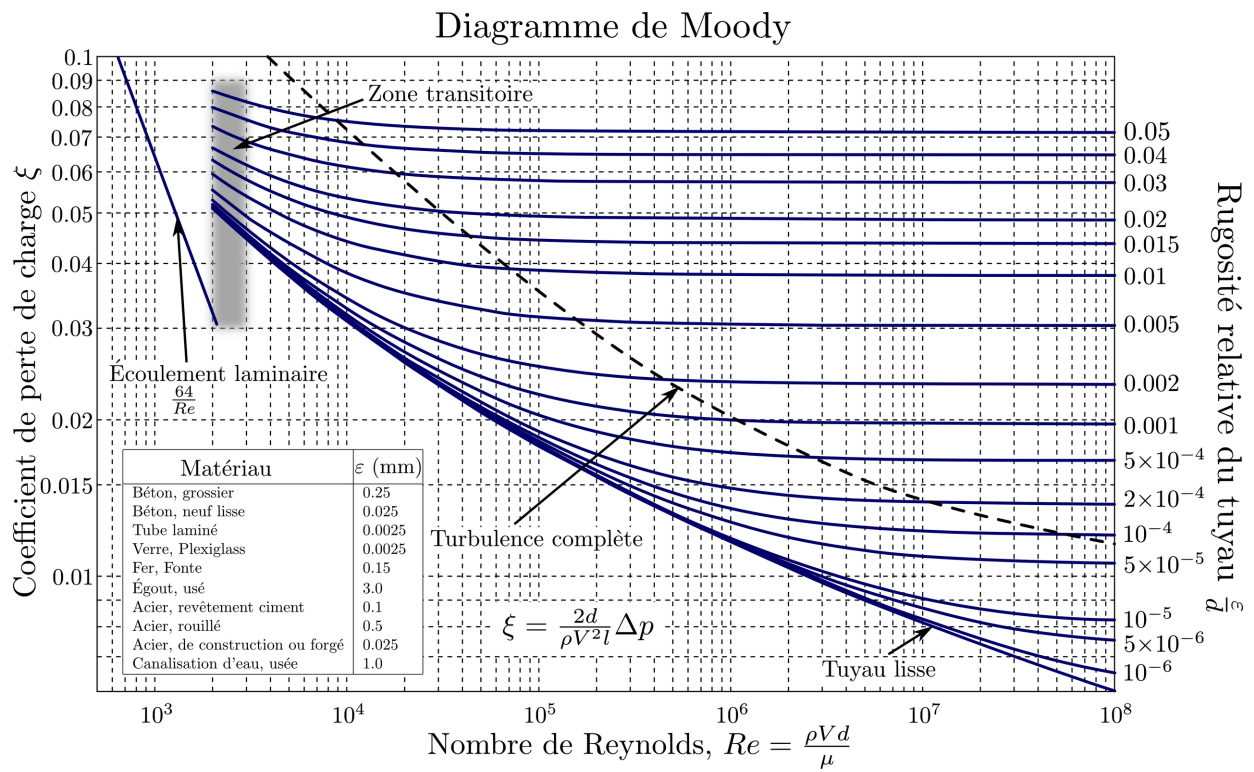
6. (PSI) La perte de charge s'écrit  $\Delta P = \frac{1}{2} \frac{L}{D} \rho \xi U^2$ . On a donc :

$$\Delta P = \xi \frac{L}{4R} \rho U \frac{\Delta P R^2}{8L\eta}$$

Donc :

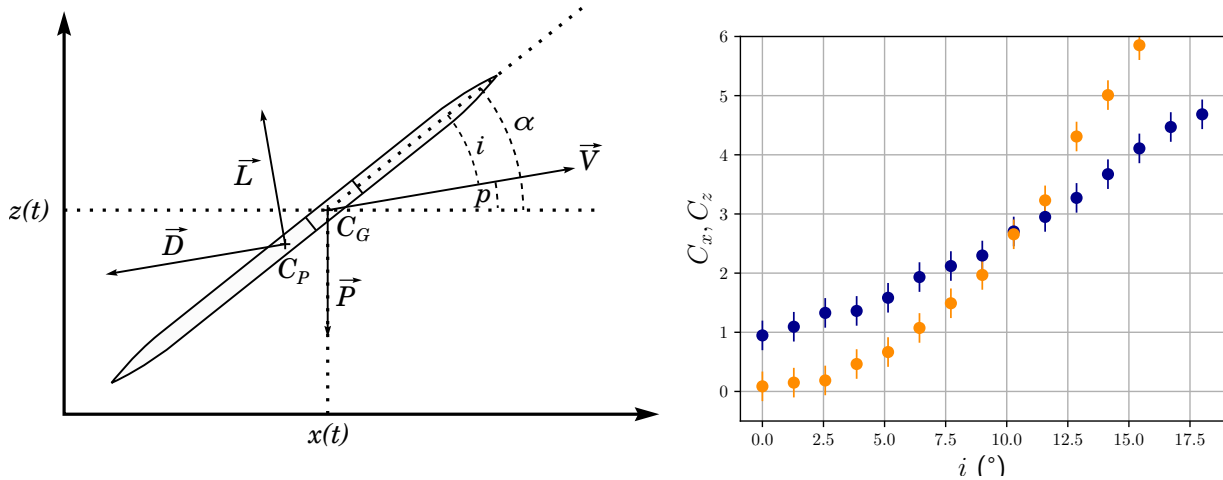
$$\xi = \frac{64\eta}{\rho U D}$$





## 7.9 Lancer de javelot (PSI)

Un athlète lance un javelot (masse  $m = 0,8\text{kg}$ , diamètre  $d = 4\text{cm}$ , longueur  $l = 2\text{m}$ ) avec une vitesse initiale  $V_0 = 30\text{m.s}^{-1}$  depuis la position  $(x_0, z_0) = (0, 0)$ . Une fois en vol, à l'instant  $t$ , le javelot se déplace à une vitesse  $\vec{V}(t)$  et est repéré par sa position horizontale  $x(t)$  et verticale  $z(t)$ , ainsi que par l'angle entre son axe et l'horizontale,  $\alpha(t)$ . On note par ailleurs  $p(t)$  l'angle entre  $\vec{V}(t)$  et l'horizontale, et  $i(t)$  l'angle entre l'axe du javelot et  $\vec{V}(t)$  (*figure de gauche*).



On suppose que les forces aérodynamiques de portance et de trainée, notées respectivement  $\vec{L}$  et  $\vec{D}$ , s'appliquent au centre de pression, au point  $C_P$ , à une distance  $l$  du centre de gravité  $C_G$ , où s'applique le poids  $\vec{P}$ .

On note  $\rho = 1,17\text{kg.m}^{-3}$  la masse volumique de l'air,  $\eta = 1,85 \times 10^{-5}\text{ Pa.s}$  sa viscosité,  $g$  l'accélération de la pesanteur,  $S$  la surface du javelot,  $C_x(i)$  et  $C_z(i)$  les coefficients de trainée et de portance, que l'on suppose dépendre de l'angle  $i$ .

1. Quel est le nombre de Reynolds associé à cet écoulement ? En déduire le type d'écoulement. Rappeler alors l'expression de  $L$  et  $D$ , normes des forces de portance et de trainée, en fonction de  $\rho$ ,  $S$ ,  $C_x$ ,  $C_z$  et de  $V$ , la norme de la vitesse.
2. Une mesure expérimentale (*figure de droite*) permet d'obtenir les courbes de  $C_x$  et de  $C_z$  en fonction de l'angle d'incidence  $i$ . Identifier à quelle courbe correspond  $C_x$  et  $C_z$ . En utilisant les symétries du problème, déterminer l'allure des courbes pour des angles d'incidence négatifs.
3. Dans quelle direction pointent respectivement  $\vec{L}$  et  $\vec{D}$  ? En déduire leur expression vectorielle sous la forme  $\vec{L} = L_x\vec{e}_x + L_z\vec{e}_z$  et  $\vec{D} = D_x\vec{e}_x + D_z\vec{e}_z$ .
4. A l'aide d'un PFD, montrer que l'équation du mouvement du javelot s'écrit :

$$m\ddot{x} = -\frac{1}{2}\rho SC_z(i)\dot{z}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2} - \frac{1}{2}\rho SC_x(i)\dot{x}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}$$

$$m\ddot{z} = -mg + \frac{1}{2}\rho SC_z(i)\dot{x}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2} - \frac{1}{2}\rho SC_x(i)\dot{z}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}$$

5. En notant  $J$  le moment d'inertie du javelot autour de l'axe  $y$ , montrer à l'aide du théorème du moment cinétique que l'on a :

$$J\ddot{\alpha} = -\frac{1}{2}\rho S(\dot{x}^2 + \dot{z}^2)(C_z(i)\cos(i) + C_x(i)\sin(i))$$

En déduire que l'on peut alors déterminer la trajectoire du javelot au cours du temps avec les 5 variables du problème ( $x$ ,  $z$ ,  $\alpha$ ,  $i$  et  $p$ ) à l'aide d'une simulation numérique.

**Corrigé :**

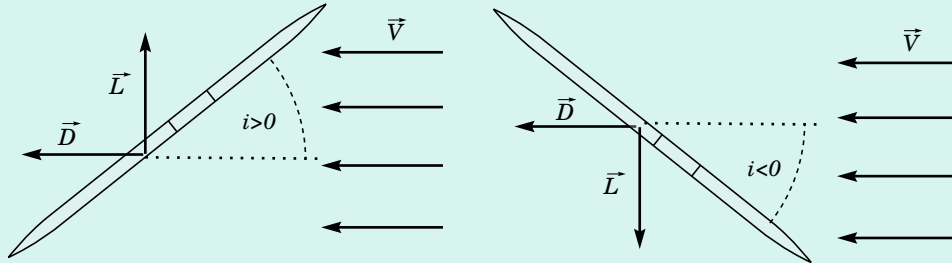
1. On trouve  $Re = \rho V L / \eta \simeq 76000$ , c'est un écoulement turbulent. Dans ces conditions, les forces de trainées et de portance s'écrivent respectivement :

$$D = \frac{1}{2} \rho S C_x(i) V^2$$

$$L = \frac{1}{2} \rho S C_z(i) V^2$$

2. On remarque que le coefficient de portance  $C_x$  démarre à 0 : c'est normal, car le javelot étant symétrique par rapport au vent à  $i = 0$ , il ne doit pas y avoir de force de portance. A l'inverse, le coefficient de trainée commence à une valeur non-nulle, car la trainée est nécessairement non nulle quelque soit l'angle d'incidence. D'autre part, la portance augmente avec l'incidence : le javelot se comporte comme une aile symétrique, en repoussant le flux d'air incident selon les  $z$  négatifs. La trainée augmente elle aussi, la surface exposée à l'air augmentant avec l'angle d'incidence.

Comme le montre le schéma ci-dessous, inverser le signe de  $i$  conduit à la même situation physique, avec une symétrie miroir avec le direction de la vitesse. La portance change donc de signe mais la trainée reste la même. On a alors  $C_x(-i) = C_x(i)$  et  $C_z(-i) = -C_z(i)$ .



3. La portance  $\vec{L}$  et la trainée  $\vec{D}$  pointent respectivement orthogonalement et parallèlement à la vitesse du javelot  $\vec{V}$ , qui fait un angle  $p$  avec l'horizontale. On a donc :

$$\vec{L} = \frac{1}{2} \rho S C_z(i) V^2 (\cos(p) \vec{e}_z - \sin(p) \vec{e}_x)$$

$$\vec{D} = \frac{1}{2} \rho S C_x(i) V^2 (-\cos(p) \vec{e}_x - \sin(p) \vec{e}_z)$$

4. On applique alors le PFD sur le javelot, en projetant sur les axes  $x$  et  $z$  :

$$m\ddot{x} = -\frac{1}{2} \rho S C_z(i) V^2 \sin(p) - \frac{1}{2} \rho S C_x(i) V^2 \cos(p)$$

$$m\ddot{z} = -mg + \frac{1}{2} \rho S C_z(i) V^2 \cos(p) - \frac{1}{2} \rho S C_x(i) V^2 \sin(p)$$

Or, comme  $V^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2$ ,  $\cos(p) = \dot{x}/V$  et  $\sin(p) = \dot{z}/V$ , on trouve le résultat voulu :

$$m\ddot{x} = -\frac{1}{2} \rho S C_z(i) \dot{z} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2} - \frac{1}{2} \rho S C_x(i) \dot{x} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}$$

$$m\ddot{z} = -mg + \frac{1}{2} \rho S C_z(i) \dot{x} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2} - \frac{1}{2} \rho S C_x(i) \dot{z} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}$$

5. On applique le théorème du moment cinétique au javelot, en son centre de gravité. Attention, c'est l'angle  $\alpha$  qui repère l'angle du javelot par rapport au référentiel du sol (les angles  $i$  et  $p$

sont relatifs à la vitesse de l'air, qui dépend de la vitesse du javelot). On a alors :

$$\begin{aligned}
 J\ddot{\alpha} &= -d \cos(i)L - d \sin(i)D \\
 &= -\frac{1}{2}d\rho SV^2(\cos(i)C_z(i) + C_x(i)\sin(i)) \\
 &= -\frac{1}{2}\rho S(\dot{x}^2 + \dot{z}^2)(C_z(i)\cos(i) + C_x(i)\sin(i))
 \end{aligned}$$

On a désormais trois équations différentielles sur  $x$ ,  $z$  et  $\alpha$  (les deux variables de position correspondant à la trajectoire du javelot, et une variable de rotation correspondant à son inclinaison). Les équations faisant intervenir les angles  $i$  et  $p$ , il faut les expliciter pour résoudre numériquement le problème. Par géométrie, on a  $\alpha = i + p$  et  $\tan(p) = \dot{z}/\dot{x}$ . On peut ainsi connaître l'évolution de tous ces paramètres en fonction du temps à partir des conditions initiales.

## Chapitre 8

# Ondes sonores

## 8.1 Impédance acoustique

On s'intéresse à la propagation d'une onde sonore dans un milieu ayant une masse volumique au repos  $\rho_0$  et une compressibilité  $\chi_s$ . Dans tout l'exercice, on considèrera que l'onde se propage unidimensionnellement selon l'axe  $\vec{e}_x$ . Les vibrations des ondes sonores sont caractérisées par des variations locales du champ de pression  $P = P_0 + p(x, t)$ , de masse volumique  $\rho = \rho_0 + \mu(x, t)$  et de vitesse  $\vec{v} = v(x, t)\vec{e}_x$ .

1. (a) Établir deux équations différentielles couplées entre  $\vec{v}(x, t)$  et  $p(x, t)$ .  
 (b) En déduire l'équation d'Alembert vérifiée par la surpression  $p(x, t)$  et la vitesse  $\vec{v}(x, t)$  dans un milieu homogène, et expliciter une vitesse  $c_0$ . Quelles sont les solutions générales dans ce cas unidimensionnel ?
2. On s'intéresse désormais au cas où le milieu de propagation n'est plus homogène, mais est constitué de deux milieux 1 et 2, caractérisés par leur masse volumique  $\rho_1$  et  $\rho_2$ . Le demi-espace  $x < 0$  est constitué du milieu 1, et le demi-espace  $x > 0$  est constitué du milieu 2. On écrit les solutions des champs de vitesse et de surpression de l'équation d'Alembert comme :

$$\begin{aligned} v_j(x, t) &= v_j^+ \left( t - \frac{x}{c_j} \right) + v_j^- \left( t + \frac{x}{c_j} \right) \\ p_j(x, t) &= p_j^+ \left( t - \frac{x}{c_j} \right) + p_j^- \left( t + \frac{x}{c_j} \right) \end{aligned}$$

où l'indice  $j$  représente le milieu 1 ou 2. Pour simplifier, on a supposé que le vecteur vitesse  $\vec{v}_j(x, t) = v_j(x, t)\vec{e}_x$  n'a de composante que sur  $x$  pour s'affranchir de la notation vectorielle.

- (a) Donner la signification physique du signe  $+$  et  $-$  dans l'écriture des champs. Trouver deux relations, une entre  $v_j^+$  et  $p_j^+$  et une autre entre  $v_j^-$  et  $p_j^-$ . On fera intervenir l'impédance acoustique du milieu  $Z_j = c_j \rho_j$ .
- (b) Quelles relations que vérifient la vitesse et la surpression à l'interface en  $x = 0$  ? Justifier.
- (c) Quelqu'un génère une onde depuis les  $x < 0$ , qui arrive sur l'interface depuis le milieu 1. Exprimer les coefficients de réflexion en vitesse  $r_v = v_1^-(t)/v_1^+(t)$  et de transmission  $t_v = v_2^+(t)/v_1^+(t)$ , puis les coefficients de réflexion en pression  $r_p$  et de transmission  $t_p$ .
- (d) En déduire les coefficients de réflexion  $R$  et de transmission  $T$  en intensité.
- (e) Pourquoi doit-on mettre un gel sur entre la sonde et le corps durant une échographie ?

**Corrigé :**

1. (a) On commence par l'équation d'Euler qui donne une première relation entre  $v$  et  $p$  :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\text{grad}}(P) = 0$$

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

Ensuite, l'équation de la conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{v}) = 0$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Pour trouver une relation entre la masse volumique et la pression, on utilise la compressibilité :

$$\chi = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P}$$

$$\chi = -\rho_0 \left( \frac{\mu}{\rho_0^2} \frac{1}{p} \right)$$

$$\mu = \chi_s p \rho_0$$

On obtient donc deux équations couplées :

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\chi_s \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

- (b) Avec les deux équations précédentes, on obtient l'équation d'Alembert sur la vitesse ou la surpression :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

La célérité est  $c_0 = 1/\sqrt{\chi_s \rho_0}$ .

2.

$v_j^+$  et  $v_j^-$  sont les champs de vitesse se propageant respectivement suivant les  $x$  croissants et décroissants. Ils sont indépendants l'un de l'autre : on peut avoir une onde incidente sans onde réfléchie ( $v_j^+ \neq 0$  et  $v_j^- = 0$ ) et vice-versa. Même chose pour la surpression.

En injectant dans une des équations couplées précédentes, on a alors :

$$\rho_0 (v_j'^+ + v_j'^-) = -\frac{1}{c_j} (-p_j'^+ + p_j'^-)$$

## 8.2 Onde acoustique guidée (Mines-Ponts PSI 2021)

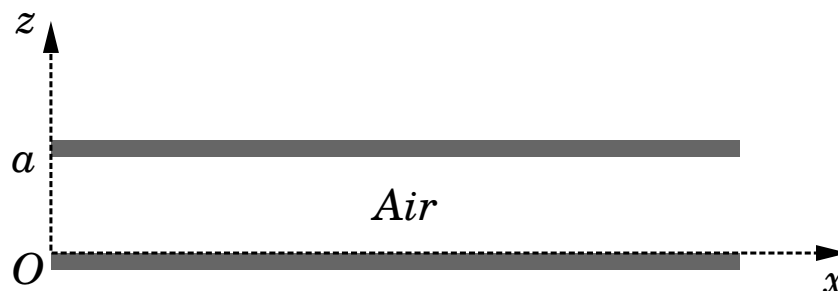
Un émetteur produit dans l'air une onde acoustique de fréquence  $f = 40\text{kHz}$  et de longueur d'onde  $\lambda$ . L'air possède une masse molaire  $M = 29\text{g.mol}^{-1}$ , un coefficient de compressibilité isentropique  $\chi_S$  et un coefficient de Laplace  $\gamma$ . Au repos, à  $20^\circ\text{C}$ , la pression de l'air vaut  $P_0 = 1\text{bar}$  et sa masse volumique  $\mu_0 = 1,2\text{kg.m}^{-3}$ . Au passage de l'onde sonore, que l'on suppose se propager uniquement suivant l'axe  $x$ , la masse volumique, la pression et la vitesse de l'air sont modifiées :  $\mu = \mu_0 + \mu_1(x, t)$ ,  $P = P_0 + p_1(x, t)$  et  $\vec{v} = v(x, t)\vec{e}_x$ .

1. Qu'est-ce que l'approximation acoustique ? En déduire trois équations linéarisées reliant  $\mu_1$ ,  $p_1$  et  $v$  ainsi que les données de l'énoncé.
2. En déduire l'équation d'onde vérifiée par la surpression  $p_1(x, t)$ .
3. Pour une OPPM, établir l'expression de l'impédance acoustique  $Z_a$ . Exprimer l'intensité en décibel  $I_{dB}$  en fonction de  $v_m$  l'amplitude de la vitesse acoustique,  $I_0 = 1,0 \times 10^{-12}\text{W.m}^{-2}$  l'intensité seuil d'audibilité d'un son, et  $Z_a$ . Calculer numériquement  $v_m$  si  $I_{dB} = 120\text{dB}$ .
4. On généralise l'équation d'onde à deux dimensions :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}(M, t) = c^2 \Delta p_1(M, t)$$

Et on suppose désormais que deux plaques rigides de grandes dimensions sont fixées en  $z = 0$  et en  $z = a$ . Elles imposent comme conditions à la surpression :

$$\left. \frac{\partial p_1}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial p_1}{\partial z} \right|_{z=a} = 0$$



On cherche une solution du problème sous la forme  $p_1(M, t) = p(z) \cos(\omega t - kx + \Phi)$ . Décrire physiquement cette onde.

5. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $p(z)$ . On montrera que les solutions s'écrivent :

$$p_n(z) = A_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}z\right)$$

où  $n$  est un entier.

6. Trouver la relation de dispersion pour chaque mode  $n$  et montrer l'existence d'une pulsation de coupure  $\omega_{c,n}$  à partir de laquelle le mode  $n > 0$  peut se propager.
7. A quelle condition sur  $a$  et la longueur d'onde  $\lambda$  de l'onde libre, le mode fondamental  $n = 0$  se propage t-il seul entre les plaques ? Faire l'application numérique.



Corrigé :

1. L'approximation acoustique consiste à supposer que  $p_1 \ll P_0$ ,  $\mu_1 \ll \mu_0$  et  $v \ll c$ . En conséquence, on simplifie les équations de la mécanique des fluides à l'ordre 1. On commence par l'équation d'Euler qui donne une première relation entre  $v$  et  $p$  dans le cadre de l'approximation acoustique :

$$\mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0$$

Ensuite, l'équation de la conservation de la masse :

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Et enfin, on utilise la compressibilité isentropique de l'air :

$$\mu_1 = \chi_s \mu_0 p_1$$

2. Avec les équations précédentes, on obtient donc deux équations couplées sur  $p_1$  et  $v$  :

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\partial p_1}{\partial x} \\ \chi_s \frac{\partial p_1}{\partial t} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

On en déduit donc l'équation d'Alembert vérifiée par la surpression :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}$$

La célérité est  $c_0 = 1/\sqrt{\chi_s \rho_0}$ .

3. L'impédance acoustique est définie comme le coefficient de proportionnalité entre la surpression et la vitesse acoustique :  $p_1 = Z_a v$ . Pour une OPPM, l'équation d'Euler donne  $\mu_0 j \omega v = i k p_1$ . La relation de dispersion dans le milieu étant  $\omega^2 = k^2 c^2$ , on trouve :

$$\boxed{Z_a = \mu_0 c}$$

L'intensité sonore est  $I = \frac{1}{2} Z_a v_m^2$  (expression déduite du vecteur de Poynting, que l'on retrouve facilement pour une OPPM), et on a  $I_{dB} = 10 \log(I/I_0)$ . On en déduit :

$$\boxed{v_m = \sqrt{\frac{2I_0}{Z_a} 10^{I_{dB}/10}}} = 7,0 \times 10^{-2} \text{ m/s}$$

4. Il s'agit d'une onde progressive, monochromatique mais pas plane. Les plaques imposent les conditions aux limites précisées dans l'énoncé, et donc que l'amplitude dépend de  $z$ .  
5. On injecte la solution proposée dans l'équation d'Alembert :

$$-\omega^2 p(z) = -c^2 k^2 p(z) + c^2 p''(z)$$

On obtient alors l'équation différentielle suivante :

$$p''(z) + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) p(z) = 0$$

Attention, la relation de dispersion  $\omega^2 = k^2 c^2$  n'est plus valide avec la présence des deux plaques. En posant  $\kappa^2 = \omega^2/c^2 - k^2$ , on obtient comme solutions :

$$p(z) = A \cos(\kappa z) + B \sin(\kappa z)$$

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$0 = B$$

$$0 = A \sin(\kappa a) + B$$

En conséquence, on a nécessairement  $\kappa a = n\pi$ , avec  $n$  entier, correspondant à une amplitude  $A_n$ . Ainsi,  $p(z)$  s'écrit :

$$p(z) = A_n \cos \frac{n\pi z}{a}$$

6. On réinjecte la solution trouvée dans l'équation de propagation, et on trouve :

$$-\omega^2 = c^2 \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 - c^2 k^2$$

On trouve donc :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_{c,n}^2}{c^2}$$

Avec  $\omega_{c,n} = n\pi c/a$ . Ainsi si  $\omega < \omega_{c,n}$ ,  $k = \pm i k_0$  est imaginaire pur et il n'y a plus de propagation. En effet, en passant en complexe l'expression de la pression, on obtient dans ce cas :

$$\begin{aligned} \underline{p}_1 &= p(z) e^{i(\omega t - kz + \Phi)} \\ &= p(z) e^{i(\omega t + \Phi)} e^{-k_0 z} \end{aligned}$$

Ce qui représente une onde stationnaire, dont l'amplitude décroît exponentiellement entre les deux plaques.

7. Pour que seul le mode fondamental se propage, il faut que  $\omega < \omega_{c,1} = \pi c/a$ . Pour l'onde libre, on a  $\omega = 2\pi c/\lambda$  donc la condition doit être :

$$a < \frac{\lambda}{2}$$

Dans ce cas là,  $p(z) = A_0$ , l'onde est plane et peut se propager quelque soit sa fréquence.