

# Exercices de colle - seconde année de CPGE - MP/PC/PSI

Matthieu Santin

2 janvier 2026



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Induction</b>	<b>1</b>
1.1	Chauffage par induction . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Ferromagnétisme</b>	<b>5</b>
2.1	Matériaux ferromagnétiques . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Conversion électromécanique</b>	<b>9</b>
3.1	Moteur synchrone . . . . .	10
3.2	Alternateur synchrone (Centrale PSI 2021) . . . . .	14
3.3	Moteur à courant continu . . . . .	15



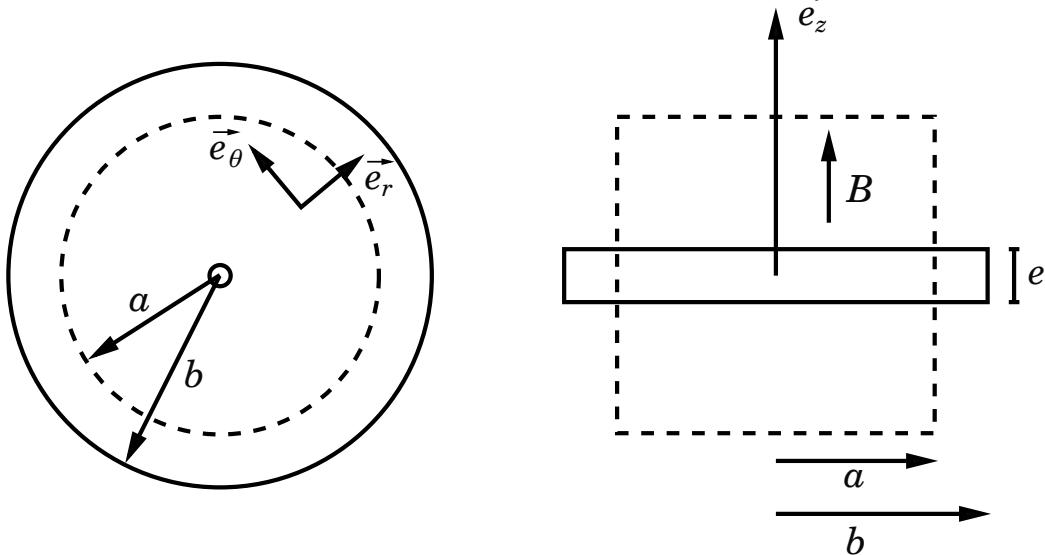
# Chapitre 1

## Induction

## 1.1 Chauffage par induction

Un disque métallique de conductivité  $\sigma$ , d'axe  $Oz$  vertical, de rayon  $b$  et d'épaisseur  $e$  est plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$ , ayant les caractéristiques suivantes :

- il est localisé dans un cylindre d'axe vertical  $Oz$  et de rayon  $a$  ;
- il est uniforme dans le cylindre précédent et nul à l'extérieur de ce cylindre ;
- il est dirigé suivant  $\vec{e}_z$  ;
- il varie au cours du temps selon  $\vec{B} = B_m \cos(\omega t) \vec{e}_z$ .



On admettra par la suite que le champ magnétique induit est négligeable devant le champ magnétique extérieur appliqué.

1. Rappeler l'expression de l'équation de Maxwell-Faraday et justifier l'existence de courants de Foucault dans le cylindre métallique de la forme  $\vec{j} = j(r, t) \vec{e}_\theta$ .
2. A l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday, exprimer  $j(r, t)$  en fonction des données du problème.
3. Quelle est l'expression de la puissance dissipée par effet Joule  $P_{Joule}$ ? Donner sa valeur moyenne  $\langle P_{Joule} \rangle$ .
4. Le champ magnétique utilisé a une pulsation de  $\omega = 1 \times 10^5 \text{ rad.s}^{-1}$  et son intensité de l'ordre de  $10^{-4} \text{ T}$ . On considère une plaque à induction de rayon  $b = 10 \text{ cm}$  et une casserole dont le fond a le même rayon  $a = b = 10 \text{ cm}$ , une épaisseur  $e = 3 \text{ mm}$  et une conductivité  $\sigma = 6,0 \times 10^7 \text{ S.m}^{-1}$ . Déterminer l'ordre de grandeur de la puissance dissipée dans le fond de la casserole.
5. On suppose que le champ magnétique est créé par un solénoïde de 5 cm de longueur ayant un enroulement de  $N = 100$  spires. En déduire l'intensité  $I$  le traversant pour produire le champ magnétique de la question précédente.

Corrigé :

1. L'équation Faraday s'écrit :  $\vec{\text{rot}}\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$ . Le champ magnétique  $\vec{B}$  étant variable, le terme  $-\partial\vec{B}/\partial t$  est non nul, et on peut appliquer le théorème d'Ampère (avec  $\vec{B} \leftarrow \vec{E}$  et  $\mu_0\vec{j} \leftarrow -\partial\vec{B}/\partial t$ ). Au vu des symétries du problème, on en conclut naturellement que le champ électrique est sous la forme  $\vec{E} = E(r, t)\vec{e}_\theta$ . Puis par la loi d'Ohm, on en déduit que les courants induits sont de la même forme :  $\vec{j} = j(r, t)\vec{e}_\theta$ .
2. On calcule tout d'abord le champ électrique à l'aide de la circulation de  $\vec{E}$ , sur le contour  $\Gamma$  choisi comme un cercle de centre  $O$  coplanaire au cylindre de rayon  $r$ , délimitant la surface  $\Sigma$  :

$$\oint_{\Gamma} d\vec{l} \cdot \vec{E} = - \iint_{\Sigma} d\vec{S} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

On est obligé de distinguer les cas  $r > a$  et  $r < a$  : Pour  $r < a$  :

$$\begin{aligned} 2\pi r E(r) &= \pi r^2 B_m \omega \\ \Rightarrow E(r) &= \frac{r B_m \omega}{2} \end{aligned}$$

Pour  $r > a$  :

$$\begin{aligned} 2\pi r E(r) &= \pi a^2 B_m \omega \\ \Rightarrow E(r) &= \frac{a^2 B_m \omega}{2r} \end{aligned}$$

La puissance volumique dissipée par effet s'écrit  $p_{vol} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2(r)$ . La puissance totale dissipée sur toute la plaque s'écrit alors :

$$\begin{aligned} P_{vol} &= \iiint_V d\tau p_{vol} \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^e dz \int_0^a rdr \gamma \frac{r^2 B_m^2 \omega^2}{4} + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^e dz \int_a^b rdr \gamma \frac{a^4 B_m^2 \omega^2}{4r^2} \\ &= 2\pi e \gamma B_m^2 \omega^2 \frac{a^4}{16} + 2\pi e \gamma a^4 B_m^2 \omega^2 \frac{1}{4} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \\ &= \frac{1}{2} \pi e \gamma a^4 B_m^2 \omega^2 \left[ \frac{1}{4} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right] \end{aligned}$$

3. En utilisant la formule précédente, on trouve une puissance de l'ordre de  $P = 3769\text{W}$ , ce qui est cohérent avec la puissance maximale des plaques à induction du commerce
4. Le champ créé par un solénoïde est donné par :

$$B = \frac{\mu_0 N I}{L}$$

Pour un champ magnétique de l'ordre de  $10^{-4}\text{T}$ , il faut une intensité  $I \simeq 0,04\text{A}$ .

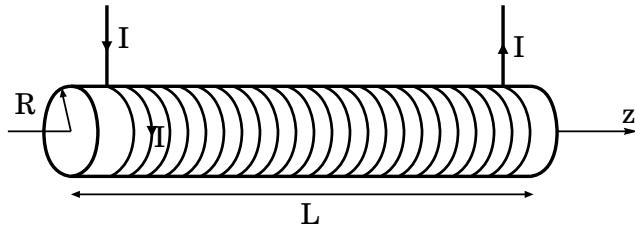


## Chapitre 2

# Ferromagnétisme

## 2.1 Matériaux ferromagnétiques

Un fil parcouru d'un courant  $I$  est enroulé sur toute la longueur  $L$ , en faisant  $N$  spires, d'un cylindre de rayon  $R \ll L$ , constitué d'un matériau ferromagnétique. On souhaite connaître l'allure des champs  $\vec{H}$ ,  $\vec{M}$  et  $\vec{B}$  le long de l'axe  $z$ . On suppose  $I > 0$  dans un premier temps.



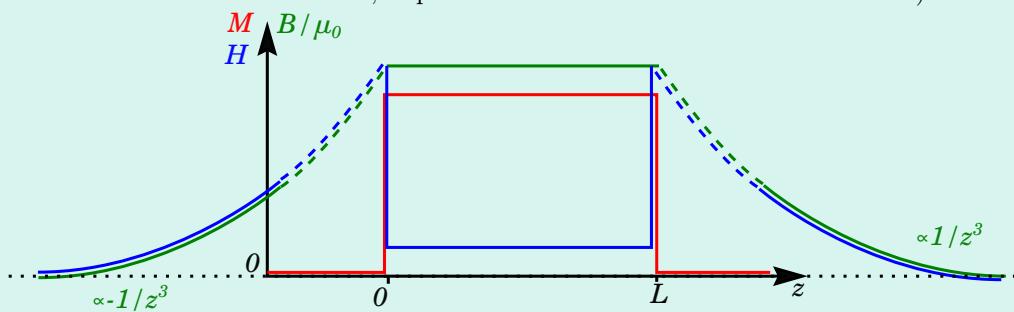
1. Déterminer le champ  $\vec{H}$  dans le solénoïde créé par l'enroulement sur l'axe  $z$ .
2. Comment réagit le matériau ferromagnétique à l'excitation  $\vec{H}$ ? En déduire l'allure du champ d'aimantation  $\vec{M}$  le long de l'axe  $z$ .
3. En déduire l'allure du champ magnétique  $\vec{B}$  le long de l'axe  $z$  dans le matériau, puis loin du solénoïde. En déduire l'allure  $\vec{H}$  sur la totalité de l'axe  $z$ .
4. Quel type de matériau ferromagnétique doit-on avoir pour avoir un champ magnétique  $\vec{B}$  dirigé selon  $+\vec{e}_z$  malgré un courant légèrement négatif  $I < 0$ ? Préciser quantitativement ce que signifie "légèrement". Tracer l'allure des champs  $\vec{H}$ ,  $\vec{M}$  et  $\vec{B}$  sur l'axe  $z$  dans ce cas-là.

Corrigé :

1. Pour tout point  $M$  le long de l'axe  $z$  dans le solénoïde, le plan  $xMy$  est un plan de symétrie (le cylindre pouvant être considéré comme infini), le champ  $\vec{H}$  est donc dirigé selon l'axe  $z$ . On utilise le théorème d'Ampère, en utilisant pour contour un rectangle dont un des côté de longueur  $l$  en confondu avec l'axe  $z$ , et de sorte à ce que le côté parallèle soit en dehors du solénoïde (la largeur du rectangle est donc  $> R$ ). Le champ étant nul à l'extérieur du solénoïde, on obtient :

$$H = \frac{NI}{L}$$

2. Le matériau s'aimante lorsqu'il est soumis à l'excitation  $\vec{H}$  : les moments magnétiques permanents microscopiques du matériau s'orientent dans la direction du champ d'excitation et l'amplifient. Il en résulte que l'aimantation résultante est, pour un matériau ferromagnétique, massive et dépasse de plusieurs ordres de grandeur la valeur de l'excitation (par exemple pour un matériau ferro. linéaire et doux, la perméabilité relative atteint facilement  $10^3$ ).

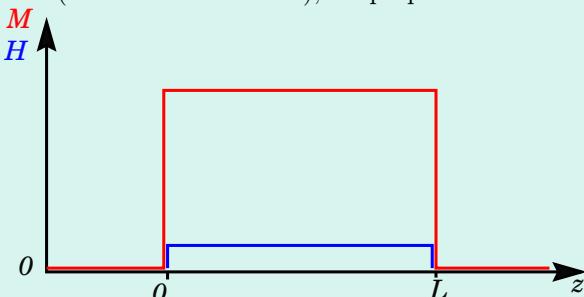


3. Le champ magnétique s'écrit comme l'addition de l'aimantation et de l'excitation magnétique (au facteur  $\mu_0$  près) :  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ . Dans le solénoïde, il suffit de sommer les contributions trouvées précédemment, l'aimantation étant prépondérante, on peut simplement dire que  $\vec{B} = \mu_0\vec{M}$ .

Une fois sorti du solénoïde, on sait que ce dernier peut être vu comme un moment magnétique  $M = NIS = NI\pi R^2$  à très grande distance,  $z \gg L$ . Sur l'axe  $z$ , le champ est alors :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{NI\pi R^2}{z^3} \vec{e}_z$$

Il décroît donc rapidement, en  $1/z^3$ . Entre le solénoïde et  $z \gg L$ , on sait que le champ magnétique doit être nécessairement continu (à cause de  $\text{div}\vec{B} = 0$ ), ce qui permet d'avoir



l'allure générale de la courbe ci-dessous :

On en déduit par ailleurs l'allure de l'excitation  $\vec{H}$  : dans le vide, il est égal à  $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$ , donc il épouse la courbe du champ magnétique une fois sorti du solénoïde. Il est discontinu : du fait de la relation  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ , la discontinuité de  $\vec{M}$  impose celle de  $\vec{H}$  pour assurer la continuité du champ magnétique.

4. Quel type de matériau ferromagnétique doit-on avoir pour avoir un champ magnétique  $\vec{B}$  dirigé selon  $+\vec{e}_z$  malgré un courant légèrement négatif  $I < 0$ ? Préciser quantitativement ce que signifie "légèrement". Tracer l'allure des champs  $\vec{H}$ ,  $\vec{M}$  et  $\vec{B}$  sur l'axe  $z$  dans ce cas-là.

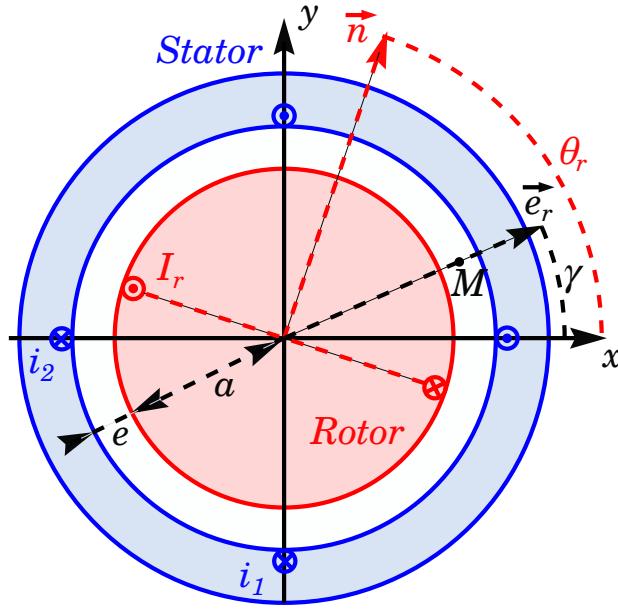


## Chapitre 3

# Conversion électromécanique

### 3.1 Moteur synchrone

On considère une machine synchrone cylindrique de longueur  $h$  selon  $\vec{e}_z$ , dont le rotor (en rouge, de rayon  $a$ ) et le stator (en bleu) sont séparés par l'entrefer d'épaisseur  $e \ll a$  et sont constitués d'un matériau ferromagnétique linéaire de perméabilité relative  $\mu_r$  très grande.



Deux bobinages, décalés de  $\pi/2$ , sont enroulés autour du stator et parcourus par les courants  $i_1(t) = I_s \cos(\omega t)$  et  $i_2(t) = I_s \sin(\omega t)$ . Le bobinage autour du rotor est parcouru par un courant d'intensité constante  $I_r$ . Le rotor peut tourner sans frottement autour de l'axe  $z$  et est repéré par l'angle  $\theta_r$ . Un point  $M$  quelconque de l'entrefer est repéré par l'angle  $\gamma$ .

1. Déterminer le champ magnétique  $\vec{B}_1(M)$  dans l'entrefer créé par le courant  $i_1(t)$ , si l'enroulement est uniquement dans le plan  $yOz$ . Comment modifier cet enroulement de sorte à obtenir un champ magnétique de la forme  $\vec{B}_1(M) = K_s i_1(t) \cos(\gamma) \vec{e}_r$ ? ( $K_s$  est une constante que l'on ne cherchera pas à déterminer).
2. En supposant que l'enroulement parcouru par le courant  $i_2(t)$  est identique à celui parcouru par  $i_1(t)$  mais décalé de  $\pi/2$ , montrer que le champ magnétique créé par le bobinage du stator peut s'écrire :

$$\vec{B}_s(M) = K_s I_s \cos(\omega t - \gamma) \vec{e}_r$$

3. Expliciter le champ magnétique  $\vec{B}_r(M)$  créé par le courant  $I_r$  du rotor, si le bobinage est compris dans le plan de normale  $\vec{n}$ . Comment réaliser un enroulement pour que le champ magnétique puisse s'écrire  $\vec{B}_r(M) = K_r I_r \cos(\gamma - \theta_r) \vec{n}$ ?
4. Montrer que l'énergie magnétique contenue dans l'entrefer s'écrit :

$$E_m = \frac{\pi e h a}{\mu_0} K_s K_r I_s I_r \cos(\omega t - \theta_r) + K$$

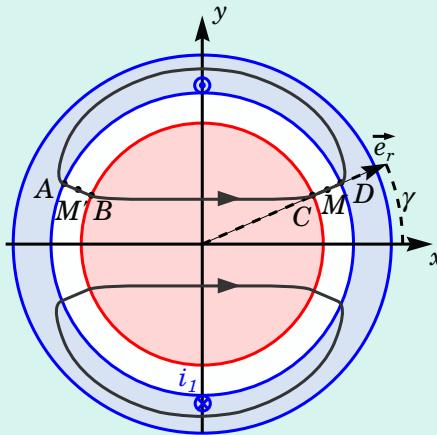
où  $K$  est une constante de  $\theta_r$ .

5. Comment s'exprime le couple électromagnétique  $\Gamma_m$ ? Pourquoi appelle-t-on cette machine "synchrone"? En déduire l'angle  $\alpha = \omega t - \theta_r$  maximisant le couple.

Corrigé :

1. On étudie en premier lieu les propriétés du champ magnétique créé par l'enroulement parcouru par le courant  $i_1$  :
- le plan  $xOy$  est plan d'antisymétrie de la distribution de courant, le champ  $\vec{B}$  est donc contenu dans ce plan (on néglige les effets de bord) ;
  - le matériau ferromagnétique ayant une perméabilité relative infinie, les lignes de champs sont droites et radiales dans l'entrefer. D'autre part, comme  $e \ll a$ , on peut considérer le champ magnétique comme constant dans l'entrefer. On a donc pour  $a < r < a + e$ ,  $\vec{B}(r, \gamma) = B(\gamma)\vec{e}_r$  ;
  - le plan  $xOz$  est un plan d'antisymétrie donc le champ magnétique est symétrique par rapport à ce plan :  $\vec{B}(-\gamma) = \vec{B}(\gamma)$  ;
  - le plan  $yOz$  étant un plan de symétrie, le champ magnétique est antisymétrique par rapport à ce plan, donc  $\vec{B}(\pi - \gamma) = -\vec{B}(\gamma)$ .

On applique le théorème d'Ampère sur le contour représenté en gris (partie supérieure du schéma).



On a donc :

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_B^C \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_D^A \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_1(t)$$

Sur les parcours  $BC$  et  $DA$ , l'excitation est nulle : le matériau ayant une perméabilité magnétique infinie, dans le matériau,  $H = B/\mu_0\mu_r \rightarrow 0$  le champ magnétique étant le même dans le matériau que dans l'entrefer, par conservation du flux.

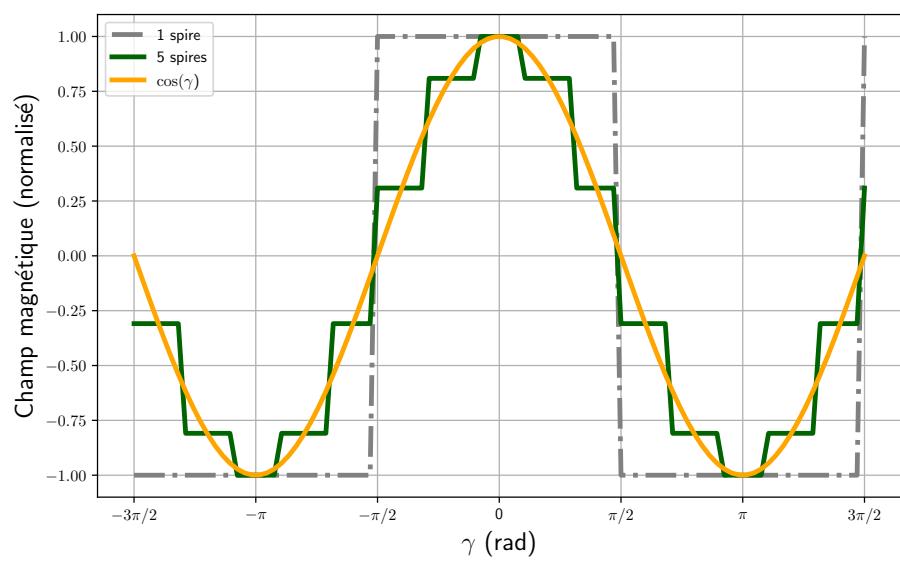
Ainsi :

$$-eH(\pi - \gamma) + eH(-\gamma) = -\frac{eB(\pi - \gamma)}{\mu_0} + \frac{eB(\gamma)}{\mu_0} = i_1(t)$$

En utilisant  $\vec{B}(-\gamma) = \vec{B}(\gamma)$  :

$$\begin{aligned} \gamma \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ , \quad \vec{B}(\gamma) &= \frac{\mu_0 i_1(t)}{2e} \vec{e}_r \\ \gamma \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[ , \quad \vec{B}(\gamma) &= -\frac{\mu_0 i_1(t)}{2e} \vec{e}_r \end{aligned}$$

Le champ magnétique est réparti dans l'entrefer comme représenté par la courbe grise en pointillé ci-dessous :



On obtient donc une fonction créneau paire, de valeur moyenne nulle.

Pour se rapprocher d'un champ variant en  $\cos \gamma$ , on peut ajouter  $N$  enroulements parcourus par  $i_1(t)$  décalés d'un angle  $\theta_k = \frac{\pi}{N} (k - \frac{N-1}{2})$ ,  $k \in [0, N-1]$ , avec un nombre d'enroulements proportionnel à  $\propto \cos \theta_k$  (de façon à avoir un champ plus intense pour  $\theta_k = 0$ ). Si  $M$  est le nombre d'enroulements à  $\theta_k = 0$ , le champ magnétique total créé par le courant  $i_1(t)$  s'écrit :

$$\vec{B}_1(\gamma) = \sum_{k=0}^{N-1} M \cos(\theta_k) \vec{B}(\gamma - \theta_k)$$

On peut montrer que cette fonction tend vers  $\cos(\gamma)$  lorsque  $N \rightarrow \infty$  :

$$\vec{B}_1(\gamma) = K_s i_1(t) \cos(\gamma) \vec{e}_r$$

On retrouve sur la courbe verte ci-dessus l'exemple  $N = 5$ , se rapprochant ainsi du  $\cos \gamma$ .

2. Il s'agit de la même question que la précédente, mais tout décalé de  $\pi/2$  :  $\gamma \leftarrow \gamma - \pi/2$  donc :

$$\begin{aligned} \vec{B}_2(\gamma) &= K_s i_2(t) \cos(\gamma - \pi/2) \vec{e}_r \\ &= K_s I_s \sin(\gamma) \vec{e}_r \end{aligned}$$

Le champ total s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \vec{B}_s(\gamma) &= \vec{B}_1(\gamma) + \vec{B}_2(\gamma) \\ &= K_s I_s \cos(\omega t) \cos(\gamma) \vec{e}_r + K_s I_s \sin(\omega t) \sin(\gamma) \vec{e}_r \\ &= K_s I_s \cos(\omega t - \gamma) \vec{e}_r \end{aligned}$$

Il s'agit du champ glissant.

3. Le raisonnement pour établir le champ magnétique créé par les enroulements du rotor est identique à celui pour trouver le champ du stator, avec une translation de l'angle de rotation du rotor  $\theta_r$  :  $\gamma \leftarrow \gamma - \theta_r$ . En effet, le fait que le bobinage se situe sur le rotor et non sur le stator ne change rien au théorème d'Ampère. On a donc :

$$\begin{aligned} \gamma \in \left[ -\frac{\pi}{2} - \theta_r, \frac{\pi}{2} - \theta_r \right], \quad \vec{B}_r(\gamma) &= \frac{\mu_0 i_1(t)}{2e} \vec{e}_r \\ \gamma \in \left[ \frac{\pi}{2} - \theta_r, \frac{3\pi}{2} - \theta_r \right], \quad \vec{B}_r(\gamma) &= -\frac{\mu_0 i_1(t)}{2e} \vec{e}_r \end{aligned}$$

Si l'on réalise le même enroulement que dans le cas du stator, on obtient, avec le décalage de  $\theta_r$  :

$$\vec{B}_r(M) = K_r I_r \cos(\gamma - \theta_r) \vec{n}$$

4. L'énergie magnétique contenue dans l'entrefer s'écrit :

$$\begin{aligned} E_m &= \iiint_V dv \frac{B^2}{2\mu_0} \\ &= \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\gamma \int_a^{a+e} rdr \frac{1}{2\mu_0} (B_s^2 + B_r^2 + 2B_s B_r) \\ &= \frac{eah}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} d\gamma (K_s^2 I_s^2 \cos^2(\omega t - \gamma) + K_r^2 I_r^2 \cos^2(\theta_r - \gamma) + 2K_s K_r I_s I_r \cos(\omega t - \gamma) \cos(\theta_r - \gamma)) \\ &= \frac{eah}{2\mu_0} \left( \pi K_s^2 I_s^2 + \pi K_r^2 I_r^2 + \int_0^{2\pi} d\gamma K_s K_r I_s I_r (\cos(\omega t - \theta_r) + \cos(\theta_r + \omega t - 2\gamma)) \right) \\ &= \frac{eah}{2\mu_0} (\pi K_s^2 I_s^2 + \pi K_r^2 I_r^2 + 2\pi K_s K_r I_s I_r \cos(\omega t - \theta_r)) \end{aligned}$$

5. Le couple électromagnétique  $\Gamma_m$  s'exprime comme la dérivée de l'énergie magnétique par rapport à la rotation pièce en mouvement, c'est-à-dire le rotor, dont la rotation est repérée par l'angle  $\theta_r$  :

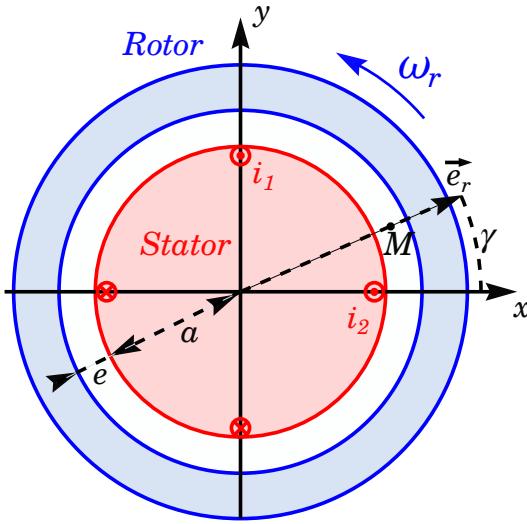
$$\begin{aligned} \Gamma_m &= \frac{\partial E_m}{\partial \theta_r} \\ &= \frac{eah\pi K_s K_r I_s I_r}{\mu_0} \sin(\omega t - \theta_r) \end{aligned}$$

La moyenne temporelle du couple est non nulle uniquement si  $\omega t = \theta_r$ , c'est la condition de synchronisme. Cette machine est un moteur (ou alternateur) uniquement si la vitesse de rotation du rotor est synchronisée avec celle du champ statorique tournant.

L'angle  $\alpha$  représente l'écart entre le champ moyen statorique et le champ moyen rotorique, et est maximal lorsque  $\alpha = \pi/2$ .

### 3.2 Alternateur synchrone (Centrale PSI 2021)

On étudie la production d'énergie électrique par une éolienne au moyen d'un générateur utilisant des aimants permanents. Il est constitué d'un stator (en rouge) intérieur cylindrique de diamètre  $2a$  et de longueur  $L_r$  selon  $\vec{e}_z$ . Le rotor (en bleu) a un diamètre intérieur noté  $2(e + a)$ , avec  $e \ll a$  l'entrefer du dispositif et est en rotation sans frottements autour de l'axe  $\vec{e}_z$ , en notant  $\theta_r$  sa position angulaire.



Le rotor et le stator sont constitués d'un matériau ferromagnétique doux de perméabilité magnétique relative  $\mu_r$  supposée infinie. Un point  $M$  quelconque de l'entrefer est repéré par l'angle  $\gamma$ .

1. On enroule autour du stator un câble parcouru par un courant électrique d'intensité  $i_1$ . Déterminer le champ magnétique  $\vec{B}_1$  créé par cet enroulement.
2. On enroule maintenant un grand nombre de spires, toutes parcourues par  $i_1$ , dans différents plans et on admet qu'une répartition adéquate permet d'obtenir un champ magnétique statorique dans l'entrefer qui varie sinusoïdalement avec l'angle  $\gamma$  selon :

$$\vec{B}_1 = \frac{N\mu_0 i_1}{2e} \cos(\gamma) \vec{e}_r$$

Proposer qualitativement comment doit se faire la répartition des enroulements pour arriver à ce champ magnétique.

3. On utilise un enroulement statorique identique au précédent, mais décalé de  $\pi/2$ , et parcouru par  $i_2$ . Expliciter l'expression  $\vec{B}_2$  du champ magnétique créé par cet enroulement.
4. Les courants  $i_1$  et  $i_2$  sont supposé désormais sinusoïdaux :  $i_1(t) = I_0 \cos(\omega t)$  et  $i_2(t) = I_0 \sin(\omega t)$ . Montrer que le champ magnétique total créé par les enroulements statoriques peut s'écrire :

$$\vec{B}_s = \frac{N\mu_0 i_1}{2e} \cos(\omega t - \gamma) \vec{e}_r$$

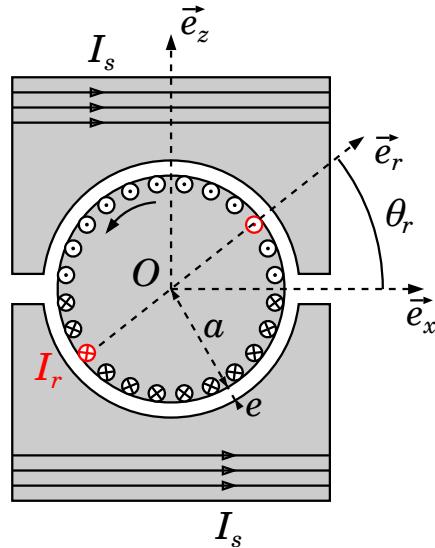
5. On admet que le rotor produit, au moyen d'aimants permanents, un champ magnétique dans l'entrefer qu'on considérera comme solidaire du rotor s'écrivant sous la forme :  $\vec{B}_r = B_r \cos(\gamma - \theta_r) \vec{e}_r$ . Déterminer l'expression de l'énergie magnétique totale dans l'entrefer  $E_m$ .
6. En déduire l'expression du couple  $\Gamma$  exercé sur le rotor.
7. On note  $\alpha = \omega t - \theta_r$ . A quelle condition la moyenne temporelle du couple  $\langle \Gamma \rangle$  est-elle non nulle ? Tracer  $\langle \Gamma \rangle$  en fonction de  $\alpha$ , préciser dans quel régime doit-on se trouver pour être en fonctionnement alternateur stable.

### 3.3 Moteur à courant continu

On considère une machine à courant continu, dont le stator et le rotor, de longueur  $L$  suivant l'axe  $y$ , sont constitués d'un matériau ferromagnétique doux de perméabilité relative  $\mu_r$  infinie.

Le rotor est un cylindre de rayon  $a$  et de longueur  $L$  pouvant tourner librement autour de l'axe  $y$ .  $N$  fils parcourus par une intensité  $I_r$ , parallèles à l'axe  $y$ , sont enroulés autour du rotor. Tous les enroulements sont en série et un système de collecteur permet que le courant  $I_r$  soit dirigé suivant  $+\vec{e}_y$  pour  $z > 0$ , et suivant  $-\vec{e}_y$  pour  $z < 0$ .

Le stator est un parallélépipède évidé de sorte à accueillir le rotor en son sein, entouré de  $N$  enroulements ( $N/2$  sur les parties supérieures et inférieures) contenus dans des plans parallèles à  $(xOy)$  parcourus par un courant continu  $I_s$ . La distance  $e \ll a$  entre le rotor et le stator est appelée entrefer.



1. A l'aide des symétries du problème et des propriétés du matériau ferromagnétique, tracer l'allure des lignes du champ magnétique  $\vec{B}_s$  créé par les enroulements du stator. En déduire que le champ magnétique créé par les enroulements du stator dans l'entrefer peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}\vec{B}_s(\theta_r) &= B_0 \vec{e}_r, \quad \theta_r \in [0, \pi] \\ &= -B_0 \vec{e}_r, \quad \theta_r \in [-\pi, 0]\end{aligned}$$

et expliciter l'expression de  $B_0$ . On rappelle que les lignes de champ sont orthogonales à l'interface dans l'entrefer.

2. On isole l'enroulement repéré par l'angle  $\theta_r$  (en rouge sur le schéma). Quelle force s'applique sur lui ? En déduire le couple  $\Gamma_1$  dû à cet enroulement qui s'exerce sur le rotor.
3. En notant  $n_0 = N/2\pi$  la densité radiale de spires, montrer que le couple total exercé sur le rotor s'écrit  $\Gamma = 2\Phi_0 I_r$ , où  $\Phi_0$  est le flux de  $\vec{B}_s$  à travers une surface que l'on explicitera.
4. Montrer que le flux de  $\vec{B}_s$  à travers l'enroulement repéré par  $\theta_r$  peut s'écrire sous la forme  $\phi = f(\theta_r)\Phi_0$ , où  $f(\theta_r)$  est une fonction décroissante comprise entre -1 et 1. Le rotor tournant à la vitesse  $\Omega$ , quelle est la force électromotrice  $e_1$  créée dans l'enroulement ?
5. En déduire que la force électromotrice totale  $e$  créée par l'ensemble des enroulements en série s'écrit :

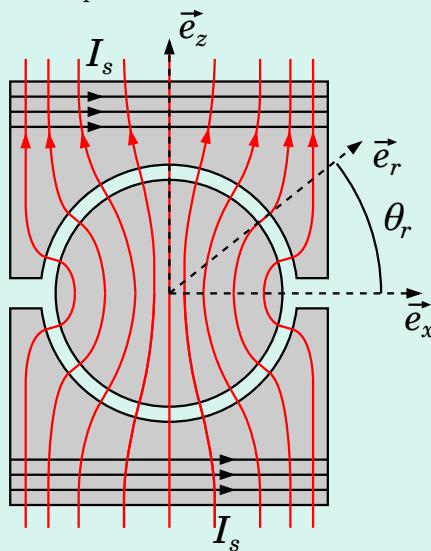
$$e = 2\Phi_0 \Omega$$

Commenter les expressions trouvées.

Corrigé :

1. On ne tient compte ici que des enroulements du stator.
  - Le plan  $xOz$  étant un plan de d'antisymétrie de la distribution de courant,  $\vec{B}_s$  est contenu dans ce plan.
  - Le plan  $xOy$  étant un plan de symétrie de la distribution de courant,  $\vec{B}_s$  est antisymétrique par rapport à ce plan :  $\vec{B}_s(\pi - \theta_r) = -\vec{B}_s$ .
  - La perméabilité du matériau étant infini, les lignes de champ sont radiales dans l'entrefer ; de plus le matériau canalise les lignes de champ.

En conséquence, les lignes de champ ont l'allure suivante :



On en déduit donc que  $\vec{B}_s$  est radial, dirigé suivant  $+\vec{e}_r$  si  $\theta_r \in [0, \pi]$  et dirigé suivant  $-\vec{e}_r$  si  $\theta_r \in [-\pi, 0]$ .

On applique ensuite le théorème d'Ampère sur une ligne de champ (quelconque), dont on note  $L_{fer}$  (resp.  $H_{fer}$ ) la longueur (resp. l'excitation) dans le matériau ferro :

$$L_{fer}H_{fer} + 2eH_e = NI_s$$

Comme l'excitation magnétique dans le matériau est nulle (car  $\mu_r \rightarrow \infty$ ), on a donc, dans l'entrefer :

$$B_0 = \frac{\mu_0 NI_s}{2e}$$

2. Il s'agit de la force de Laplace  $d\vec{F} = I_d\vec{l} \wedge \vec{B}$ . Appliqué sur le fil repéré par  $\theta_r$  (en  $z > 0$ ) de l'enroulement en rouge, on obtient :

$$\vec{F} = \int_0^L I_r dy \vec{e}_y \wedge \vec{B}_s = I_r L B_0 \vec{e}_{\theta_r}$$

Sur le fil en  $\theta_r + \pi$ , pour  $z < 0$  :

$$\vec{F} = \int_0^L I_r (-dy) \vec{e}_y \wedge \vec{B}_s = -I_r L B_0 \vec{e}_{\theta_r}$$

Cet enroulement exerce un couple résultant sur l'axe  $y$  s'écrivant :

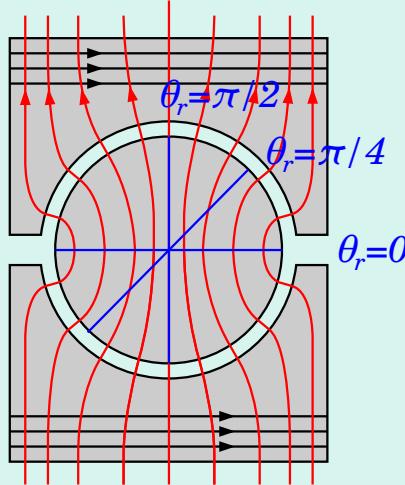
$$\Gamma_1 = 2aLI_rB_0$$

3. Le couple exercée par les  $dN = n_0 d\theta$  enroulements situés entre  $\theta$  et  $\theta + d\theta$  est la somme des couples exercée par les enroulements individuels :

$$\begin{aligned}\Gamma &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \Gamma_1 n_0 d\theta \\ &= 2\pi a L I_r B_0 \\ &= 2\Phi_0 B_0\end{aligned}$$

$B_0$  étant la norme du champ  $\vec{B}_s$  au niveau de l'entrefer, en  $y$  étant orthogonal à l'interface, et la demi-surface du cylindre du rotor est  $S = \pi a L$ , on en déduit que  $\Phi_0$  est le flux du champ magnétique dans l'entrefer pour  $z > 0$  (ou  $z < 0$ ).

4. Regardons le flux passant à travers les enroulements situés, à un instant  $t$ , aux positions  $\theta_r = 0$ ,  $\pi/4$  et  $\pi/2$  :



Pour  $\theta_r = 0$ , l'enroulement est dans le plan ( $xOy$ ), qui un plan de symétrie de distribution de courant. Le champ magnétique est donc orthogonal à ce plan. Par conservation du flux, le flux du champ magnétique  $\Phi_0$  calculé à la question précédente passe nécessairement intégralement par la surface délimitée, donc  $\phi(\theta_r = 0) = \Phi_0$ .

Pour  $\theta_r = \pi/2$ , l'enroulement est confondu avec le plan ( $yOz$ ), qui est plan d'antisymétrie de la distribution de courant, donc  $\vec{B}_s$  appartient à ce plan, son flux est donc nul :  $\phi(\theta_r = \pi/2) = 0$ .

Pour  $\theta_r = \pi/4$ , il est impossible de déterminer analytiquement le flux, mais on se trouve dans une situation intermédiaire aux deux précédentes, avec un flux à travers l'enroulement non nul, mais inférieur à  $\Phi_0$  :  $0 < \phi(\theta_r = \pi/4) < \Phi_0$ .

Enfin par symétrie,  $\phi(\theta_r = \pi) = -\Phi_0$ .

On en déduit que la fonction  $f$  définie par  $\phi = f(\theta_r)\Phi_0$  est comprise entre  $f(0) = 1$  et  $f(\pi) = -1$  (donc décroissante de  $\theta_r$ ).

Lorsque l'enroulement tourne à la vitesse  $\Omega$ , la force électromotrice induite par le champ  $\vec{B}_s$  est :

$$e_1 = -\frac{d\phi}{dt} = -\Phi_0 f'(\theta_r) \dot{\theta}_r = -\Phi_0 f'(\theta_r) \Omega$$

5. Tous les enroulements étant en série, la force électromotrice créée par les  $dN = n_0 d\theta$  enroulements situés entre  $\theta$  et  $\theta + d\theta$  est la somme des forces électromotrices exercée par les enroulements

individuels :

$$\begin{aligned} e &= \int_0^\pi e_1 n_0 d\theta \\ &= -\Phi_0 \Omega \int_0^\pi f'(\theta) n_0 d\theta \\ &= -\Phi_0 \Omega [f(\theta)]_0^\pi \\ &= 2\Phi_0 \Omega \end{aligned}$$

6. On retrouve les expressions du cours, où le couple est proportionnel à l'intensité circulant dans le bobinage du rotor et la force contre électromotrice  $-e$  est proportionnelle à la vitesse de rotation. Cet exercice nous permet de rendre compte de la constante de proportionnalité,  $2\Phi_0$ , correspondant au double du flux du champ magnétique statorique à travers les enroulements du rotor.