Universidad del Norte
Facultad de Ciencias Básicas
Departamento de Matemáticas
Taller de Cálculo II
Examen Final
Profesor Coordinador: Javier de la Cruz
Periodo 30 de 2023

Nombre: ______________________ **Fecha:** ____________

Observación: Recuerden que el texto guía es: Ron Larson y Bruce H. Edwards, Cálculo, novena edición, McGraw-Hill, 2011.

Notación: En el taller C denota convergente y D denota divergente.

Sucesiones

1. Determine si la sucesión converge o diverge. Si converge, calcule el límite.

   (a) $a_n = \frac{3+5n^2}{n+n^2}$. **Rta**: 5

   (b) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}$ **Rta**: 0

   (c) $\left\{\frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}\right\}$ **Rta**: 0

   (d) $\left\{\frac{e^n+e^{-n}}{e^{2n}-1}\right\}$ **Rta**: 0

   (e) $a_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ **Rta**: e^2

   (f) $a_n = \frac{\ln n}{n^2}$ **Rta**: 0

   (g) $a_n = \frac{e^n}{n}$ **Rta**: D

   (h) $a_n = \frac{3-2n^2}{n^2-1}$ **Rta**: -2

2. Dada la sucesión $\left\{\frac{1-(1-1/n)^a}{1-(1-1/n)^b}\right\}$, donde a y b son constantes con $b \neq 0$, determine si la sucesión converge y halle su límite. **Rta**: $\frac{a}{b}$.

Series númericas

Series telescópicas y geométricas

3. Determine si la serie es convergente o divergente. Si es convergente, calcular su suma.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$ **Rta**: 2

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}$ **Rta**: 3

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n}$ **Rta**: D

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{2^n}$ **Rta**: D

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{5^{n-1}}$ **Rta**:$\frac{2}{3}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{3^{n-1}}$ **Rta**: $\frac{3}{5}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n}$ **Rta**: 1

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-2)^{n-1}}$ **Rta**: $\frac{2}{3}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-3n}$ **Rta**: $\frac{1}{7}$

4. Determine si la serie es convergente o divergente. Si es convergente, calcular su suma.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}$ **Rta**: $\frac{3}{4}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2-1}$ **Rta**: 1

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$ **Rta**: $\frac{1}{2}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ **Rta**: $\frac{1}{2}$

(e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ **Rta**: $\frac{1}{2}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$ **Rta**: C

(g) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$ **Rta**: C

(h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{5^n}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ **Rta**: D

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ **Rta**: 1

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^{n-1}}$ **Rta**: 5/2

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{3}{2^n}$ **Rta**: 1

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ **Rta**: C

(n) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-3}{(n-1)(n-2)}$ **Rta**: $\frac{3}{2}$

(o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ **Rta**: 1

(p) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{5^n}$ **Rta**: $\frac{5}{2}$

(q) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n}$ **Rta**: D

(r) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n^2-1}$ **Rta**: D

(s) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+2^k}{3^k}$ **Rta**: $\frac{5}{2}$

(t) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)$ **Rta**: D

(u) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^n} + \frac{1}{n(n+1)}\right)$ **Rta**: $\frac{e}{e-1}$

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{1/n} - e^{1/(n+1)}\right)$**Rta**: $e-1$

5. Calcule los valores de x para los cuales la serie converge. Determine la suma de la serie para dichos valores de x

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$ **Rta**: $-3 < x < 3$; $\frac{x}{3-x}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n$ **Rta**: $-\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}$; $\frac{1}{1-4x}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^n x}{2^n}$ **Rta**: $x \in \mathbb{R}$; $\frac{2}{2-\cos x}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} (x-4)^n 4$ **Rta**: $3 < x < 5$; $\frac{4-x}{x-5}$

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n}$ **Rta**: $-5 < x < -1$; $\frac{-2}{x+1}$

6. ¿Cuál es el valor de c si $\sum_{n=2}^{\infty} (1+c)^{-n} = 2$? **Rta**: $c = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$

7. Encuentre el valor de c tal que $\sum_{n=0}^{\infty} e^{nc} = 10$. **Rta**: $c = \ln \frac{9}{10}$

8. Ecriba los siguientes decimales periódicos como cociente de dos enteros

   (a) $0,222222\ldots$

   (b) $3,393939\ldots$

   (c) $1,257257257\ldots$

   (d) $2,352235223522\ldots$

9. Una pelota se deja caer de una altura de 6 pies y empieza a rebotar. La altura de cada salto es de tres cuartos la altura del salto anterior. Encuentre la distancia vertical total recorrida por la pelota. **Rta**: 42 pies

10. Un objeto rueda 10 metros en el primer segundo. En cada segundo en que dura moviéndose rueda un 80 % de lo que rodó en el segundo anterior debido al fricción. ¿ cuán lejos rodará el objeto? **Rta**: 50 metros

11. Texto guía, Ejercicios 9.2, Página 614, Ejercicios: 25,27,29, 39, 43, 49, 57, 63, 69.

Criterio del término n-ésimo para divergencia y operaciones con series

12. Determine si la serie es convergente o divergente. Si es convergente, calcular su suma.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n}+\frac{3}{2^n}\right)$ **Rta**: D

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (e^n+e^{-n})$ **Rta**: D

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1+(-1)^n)$ **Rta**: D

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{5n+2}$ **Rta**: D

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3^n}+\frac{5}{n(n+1)}\right)$ **Rta**: C

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n}{(-5)^n}+\frac{7}{(n+1)(n+2)}\right)$ **Rta**: C

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5^n}{(-2)^n}+\frac{2}{(n+2)(n+3)}\right)$

(h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{(-2)^{n+1}}+\ln\frac{n}{(n+1)}\right)$ **Rta**: D

13. Determine el valor de verdad de la afirmación dada o escoja la respuesta correcta

 (a) La suma de una serie convergente con una serie divergente es convergente.

 (b) Si la suma de dos series es convergente, entonces cada una de ellas es convergente.

 (c) Si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ satisface las condiciones del criterio de la integral y la integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge a s, entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge también a s.

 (d) Si dos series difieren en un número finito de términos, entonces o ambas convergen o ambas divergen.

 (e) Si una serie es convergente, entonces es absolutamente convergente.

 (f) Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente y $c \in \mathbb{R}$, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ es divergente.

 (g) Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ son dos series de términos positivos, $a_n \leq b_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces

  i. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente.

  ii. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ es divergente.

  iii. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ puede ser convergente o divergente.

 (h) Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ son dos series de términos positivos, $a_n \leq b_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente, entonces

  i. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

ii. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

iii. $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

Criterio de la integral

14. Usando el criterio de la integral determine si la serie es convergente o divergente.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$ **Rta**: D

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$ **Rta**: C

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+1}$ **Rta**: C

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$ **Rta**: C

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1}$ **Rta**: D

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5-2\sqrt{n}}{n^3}$ **Rta**: C

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$ **Rta**: C

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^3}$ **Rta**: C

(i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ **Rta**: D

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$ **Rta**: C

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+n}$ **Rta**: C

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n(n+2)}$ **Rta**: D

15. Determine los valores de p para los cuales la serie es convergente.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ **Rta**: $p > 1$

(b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^p}$ **Rta**: $p > 1$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n^2+1)^p$ **Rta**: $p < -1$

16. Encuentre todos los valores de c para los que converge la siguiente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \qquad \textbf{Rta}: c \leq 1$$

17. $(*)$ Para un cierto valor real k, la serie dada es convergente. Determinar k.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n^2+2k} - \frac{k}{n+1} \right). \qquad \textbf{Rta}: k = \frac{1}{2}$$

18. $(*)$ Para un cierto valor real k, la serie dada es convergente. Determinar k.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+4} - \frac{k}{3n+1} \right). \qquad \textbf{Rta}: k = 3$$

Criterio de comparación directa y criterio de comparación con límite

19. Analice la convergencia de las siguientes series.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2+4n+3}$ **Rta**: C

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$ **Rta**: C

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{3+10^n}$ **Rta**: C

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n)}{n^2+1}$ **Rta**: C

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n4^n}$ **Rta**: C

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ **Rta**: D

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+4^n}{1+3^n}$ **Rta**: D

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{2n^2+n+1}$ **Rta**: C

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+2n}{(1+n^2)^2}$ **Rta**: C

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n+n^2}{\sqrt{1+n^2+n^6}}$ **Rta**: D

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ **Rta**: C

(l) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{n^4-1}$ **Rta**: D

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$ **Rta**: C

20. Texto guía, Ejerecicios 9.4, Página 631, Ejercicios: 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23.

Criterio de Leibniz o de la serie alternante

21. Analice la convergencia de las siguientes series.

(a) $-\frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{3}{5} + \frac{4}{6} - \frac{5}{7} + \dots$

(b) $\frac{4}{7} - \frac{4}{8} + \frac{4}{9} - \frac{4}{10} + \frac{4}{11} + \dots$ **Rta**: C

(c) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+2)}{n(n+1)}$ **Rta**: C

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(-2)^{n-1}}$ **Rta**: C

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$ **Rta**: C

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{2n+1}$ **Rta**: D

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{10^n}$ **Rta**: C

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+4}$ **Rta**: C

(j) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\ln(n)}$ **Rta**: D

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{n!}$ **Rta**: D

22. ¿Para qué valores de p es convergente la serie?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}.$$

23. Texto guía, Ejercicios 9.5, Página 639, Ejercicios: 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 29, 31.

Convergencia absoluta, convergencia condicional y criterios de la razón y de la raíz

Notación: AC denotará absolutamente Convergente y CC denotará condicionalmente Convergente.

24. Determine si la serie es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-10)^n}{n!}$ **Rta**: AC

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+2)}{n(n+1)}$ **Rta**: CC

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ **Rta**: AC

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}}{n3^n}$ **Rta**: D

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$ **Rta**: CC

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n}}$ **Rta**: CC

(g) $\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^k$ **Rta**: AC

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n+1)4^{2n+1}}$ **Rta**: AC

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$ **Rta**: AC

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ **Rta**: D

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{n!}$ **Rta**: D

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n n!}{5\cdot 8\cdot 11\cdots(3n+2)}$

25. Los términos de una serie se definen en forma recursiva mediante las ecuaciones

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{5n+1}{4n+3}a_n.$$

Determine si $\sum a_n$ es convergente o divergente. **Rta**: D

26. ¿Para cuáles de las series siguientes la prueba de la razón no es concluyente (es decir, no proporciona una respuesta definida)?

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n^2}$.

Rta: (a) y (d).

27. ¿Para cuáles enteros positivos k la serie siguiente es convergente?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(kn)!}.$$

28. (a) Demuestre que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge para toda x.

    (b) Deduzca que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ para toda x.

29. (a) Demuestre que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$ converge.

    (b) Deduzca que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0$.

30. Aplicar la prueba de la razón, para deducir la convergencia de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}.$$

Series de potencias (Radios e intervalos de convergencia)

31. Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$. **Rta**: 1, $[-1,1)$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n^3}$. **Rta**: 1, $[-1,1]$

(c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. **Rta**: ∞, $(-\infty,\infty)$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2x^n}{2^n}$. **Rta**: 2, $(-2,2)$

(e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$. **Rta**: 3, $(-5,1)$

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n x^n}{\sqrt[4]{n}}$. **Rta**: $\frac{1}{2}$, $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

(g) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4^n \ln(n)}$. **Rta**: 4, $(-4,4]$

(h) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2+1}$. **Rta**: 1, $[1,3]$

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(x+4)^n}{\sqrt{n}}$. **Rta**: $\frac{1}{3}$, $[-\frac{13}{3},-\frac{11}{3}]$

(j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^n}$. **Rta**: ∞, $(-\infty,\infty)$

(k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{b^n}(x-a)^n$, $b>0$ **Rta**: b, $(a-b, a+b)$

(l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$, **Rta**: ∞, $(-\infty,\infty)$

(m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$.

32. Si k es un entero positivo, encuentre el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!}x^n. \qquad \textbf{Rta}: k^k$$

Series de Taylor y de Maclaurin

33. Si $f^n(0) = (n+1)!$ para $n = 0, 1, 2, ...$, encuentre la serie de Maclaurin para f y su radio de convergencia. **Rta**: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$, $R = 1$.

34. Encuentre la serie de Maclaurin para $f(x)$ usando la definición de la serie de Maclaurin. [Suponga que f tiene un desarrollo en serie de potencias. No demuestre que $R_n(x) \to 0$.] Determine también el radio asociado con la convergencia.

(a) $f(x) = (1-x)^{-2}$. **Rta**: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$, $R = 1$

(b) $f(x) = \sin(\pi x)$. **Rta**: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$, $R = \infty$

(c) $f(x) = e^{5x}$. **Rta**: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!}x^n$, $R = \infty$

(d) $f(x) = \sinh(x)$. **Rta**: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R = \infty$

(e) $f(x) = \ln(1+x)$

(f) $f(x) = \cos(3x)$

(g) $f(x) = xe^x$

(h) $f(x) = \cosh(x)$

35. Calcule la serie de Taylor para $f(x)$ centrada en el valor dado de a. [Suponga que f tiene un desarrollo en serie de potencias. No demuestre que $R_n(x) \to 0$.] Determine también el radio asociado con la convergencia.

(a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$, $a = 1$. **Rta**:$-1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1^4)$, $R = \infty$

(b) $f(x) = e^x,\ a = 3.$ **Rta**: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{e^3}{n!}(x-3)^n,\ \ R = \infty$

(c) $f(x) = \cos(x),\ a = \pi.$ **Rta**: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)!}(x-\pi)^{2n},\ \ R = \infty$

(d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},\ a = 9.$ **Rta**: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n 3^{2n+1} n!}(x-9)^n,\ \ R = 9$

(e) $f(x) = x - x^3,\ a = -2.$

(f) $f(x) = \frac{1}{x},\ a = -3$

(g) $f(x) = \sin(x),\ a = \frac{\pi}{2}$

(h) $f(x) = x^{-2},\ a = 1.$

36. **Serie Binomial**. Si k es cualquier número real y $|x| < 1$, entonces

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1+kx+\frac{k(k-1)}{2!}x^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3+\cdots,\quad (R = 1)$$

Use la serie binomial para expandir la función como una serie de potencias. Exprese el radio de convergencia.

(a) $f(x) = \sqrt{1+x}.$ **Rta**:$1 + \frac{x}{2} + \sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n n!}x^n,\ R = 1$

(b) $f(x) = \frac{1}{(2+x)^3}.$ **Rta**:$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+4} n!}x^n,\ R = 2$

(c) $f(x) = (1-x)^{2/3}.$

(d) $f(x) = \frac{1}{(1+x)^4}.$

37. Mediante la serie de Maclaurin para e^x calcule $e^{-0.2}$ con cinco posiciones decimales. **Rta**: 0.81873

38. Evalúe la integral indefinida como una serie infinita.

(a) $\int x\cos(x^3)dx.$ **Rta**: $C + \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{6n+2}}{(6n+2)(2n)!},\ R = \infty$

(b) $\int \frac{\cos x - 1}{x}dx.$ **Rta**: $C + \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n(2n)!}x^{2n},\ R = \infty$

(c) $\int \frac{e^x - 1}{x}dx$

(d) $\int \arctan(x^2)dx$

39. Utilice series para obtener un valor aproximado de la integral definida con la exactitud indicada.

(a) $\int\limits_0^1 x\cos(x^3)dx.$ (Tres decimales) **Rta**: 0.440

(b) $\int\limits_0^{0.4} \sqrt{1+x^4}dx.$ ($|error| < 5\cdot 10^{-6}$) **Rta**: 0.40102

(c) $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx.$ (Cuatro decimales) **Rta**: 0.7475

40. Mediante las series evalúe el límite.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\arctan x}{x^3}.$ **Rta**: $\frac{1}{3}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}.$ **Rta**: $\frac{1}{120}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2}.$ **Rta**: $\frac{1}{2}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{1+x-e^x}$

41. Calcule la suma de la serie.

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{n!}.$ **Rta**: e^{-x^4}

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)!}.$ **Rta**: $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!}.$

(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{5^n n!}$

(e) $3 + \frac{9}{2!} + \frac{27}{3!} + \frac{81}{4!} + \ldots.$ **Rta**: $e^3 - 1$

(f) $1 - e + \frac{e^2}{2!} - \frac{e^3}{3!} + \frac{e^4}{4!} - \ldots.$ **Rta**: e^{-e}

(g) $1 - \ln(2) + \frac{(\ln(2)^2)}{2!} - \frac{(\ln(2)^3)}{3!} + \frac{(\ln(2)^4)}{4!} + \ldots.$

Ejercicios variados

(a) (∗) Use el hecho que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$, para calcular la suma de la siguiente serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$. Respuesta: 1

(b) (∗) Calcula el radio de convergencia de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n^2}$. Respuesta: $\frac{1}{2}$

(c) (∗) Verifique el valor de la siguiente serie

$$\sum_{x=1}^{\infty} x p^x = \frac{p}{(1-p)^2}.$$

(d) (∗) Una famosa sucesión f_n, llamada **sucesión de Fibonacci**, en honor de Leonardo Fibonacci, quien la introdujo aproximadamente en el año 1200, se define mediante la fórmula recursiva

$$f_1 = f_2 = 1, \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

i. Calcule desde f_3 hasta f_{10}.

ii. Sea $\phi = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) \approx 1.618034$. Los gringos llamaron a este número *razón áurea* (razón dorada); afirmaron que un rectángulo cuyas dimensiones estaban es esta razón era perfecto". Se puede demostrar que

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\phi^n - (-1)\phi^{-n}\right] \end{aligned}$$

Verifique que esto da el resultado correcto $n = 1$ y $n = 2$. El resultado general se puede demostrar por inducción (es un buen reto). Use esta fórmula explícita para demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \phi.$$

Estrategia para analizar la convergencia o divergencia de series

1. ¿Tiende a 0 el término *n*-ésimo? Si no es así, la serie diverge.
2. ¿Es la serie de alguno de los tipos especiales: geométrica, serie *p*, telescópica o alternante?
3. ¿Se puede aplicar el criterio de la integral, el de la raíz o el cociente?
4. ¿Puede compararse la serie favorable o fácilmente con uno de los tipos especiales?

Resumen de criterios para las series

Criterio	Serie	Condición(es) de la convergencia	Condición(es) de la divergencia	Comentario
Término n-ésimo	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$		$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$	Este criterio no sirve para demostrar la convergencia
Series geométricas	$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$	$\lvert r\rvert < 1$	$\lvert r\rvert \geq 1$	Suma: $S = \frac{a}{1-r}$
Series telescópicas	$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$	$\lim_{n\to\infty} b_n = L$		Suma: $S = b_1 - L$
Series p	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$	$p > 1$	$0 < p \leq 1$	
Series alternadas o alternantes	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$	$0 < a_{n+1} \leq a_n$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$		Residuos: $\lvert R_N\rvert \leq a_{N+1}$
Integral (f continua, positiva y decreciente)	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = f(n) \geq 0$	$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge	$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ diverge	Residuo: $0 < R_N < \int_N^{\infty} f(x)\,dx$
Raíz	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} < 1$	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} > 1$ o $= \infty$	El criterio no es concluyente si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} = 1$.
Cociente	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} \left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert < 1$	$\lim_{n\to\infty} \left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert > 1$ o $= \infty$	El criterio no es concluyente si $\lim_{n\to\infty} \left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert = 1$.
Comparación directa ($a_n, b_n > 0$)	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$0 < a_n \leq b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge	$0 < b_n \leq a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge	
Comparación en el límite ($a_n, b_n > 0$)	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge	$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge	