Comparación entre las ecuaciones de movimiento traslacionales y rotacionales

Variable	**Mov. de tras. pura**	**Mov. rot. puro (eje fijo)**
Posición	x	θ
Velocidad	$\vec{v} = \frac{d\,\vec{x}}{dt}$	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
Aceleración	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
Fuerza o Torque	$\vec{F} = \begin{cases} m\,\vec{a} \\ \frac{d\,\vec{p}}{dt} \end{cases}$	$\vec{\tau}_{ne} = \sum \vec{\tau}_{ei} = \begin{cases} I\alpha\,\hat{n} \\ \frac{d\vec{L}}{dt} \end{cases}$
Trabajo	$W = \int \vec{F}\,d\,\vec{r}$	$W = \int \tau d\theta$
Energía Cinética	$K_{tras} = \frac{1}{2}mv^2$	$K_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$
Potencia	$P = \vec{F}.\vec{v}$	$P = \vec{\tau}.\vec{\omega}$
Momentum	$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{L} = I_0\omega\,\hat{n}$

Tabla 9.2 Momentos de inercia de diversos cuerpos

a) Varilla delgada, eje a través del centro

$$I = \frac{1}{12}ML^2$$

b) Varilla delgada, eje a través de un extremo

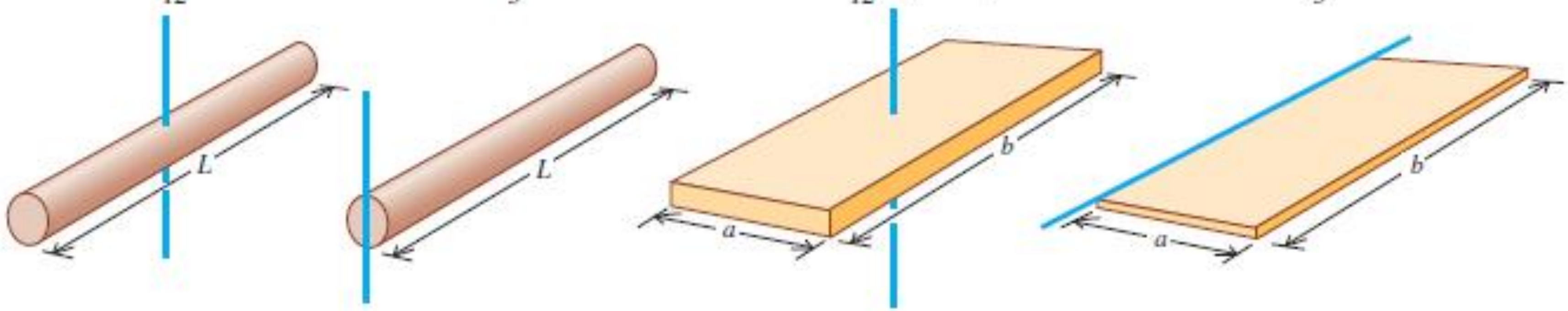
$$I = \frac{1}{3}ML^2$$

c) Placa rectangular, eje a través del centro

$$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$$

d) Placa rectangular delgada, eje a lo largo de un extremo

$$I = \frac{1}{3}Ma^2$$



e) Cilindro hueco de pared gruesa

$$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$$

f) Cilindro sólido

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

g) Cilindro hueco de pared delgada

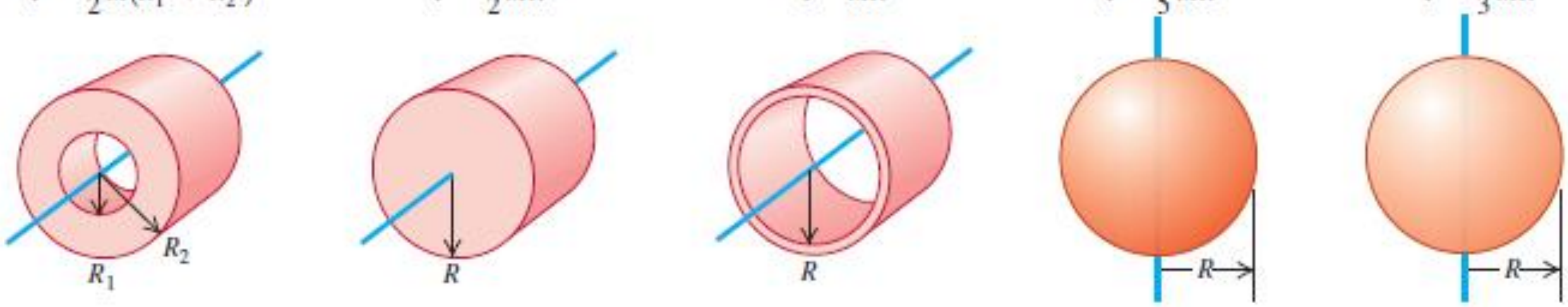
$$I = MR^2$$

h) Esfera sólida

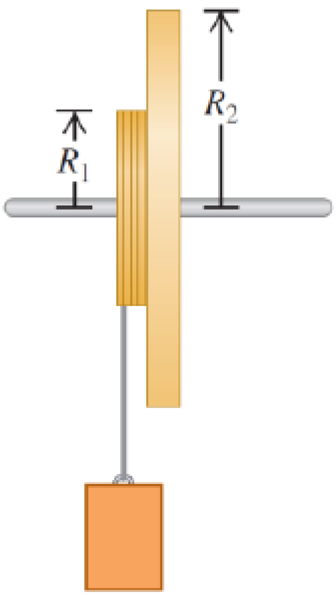
$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

i) Esfera hueca de pared delgada

$$I = \frac{2}{3}MR^2$$



9.87 •• Dos discos metálicos, con radios $R_1 = 2.50$ cm y $R_2 = 5.00$ cm, y masas $M_1 = 0.80$ kg y $M_2 = 1.60$ kg, se sueldan y se montan en un eje sin fricción que pasa por el centro común (figura P9.87). *a*) ¿Qué momento de inercia total tienen los discos? *b*) Una cuerda ligera se enrolla en el extremo del disco más chico y del extremo libre de la cuerda se cuelga un bloque de 1.50 kg. Si el bloque se suelta del reposo a una altura de 2.00 m sobre el piso, ¿qué rapidez tiene justo antes de golpear el piso? *c*) Repita el inciso *b*), pero ahora con la cuerda enrollada en el borde del disco grande. ¿En qué caso el bloque alcanza mayor rapidez? Explique su respuesta.



9.87 ; $R_1 = 2{,}5$ cm ; $R_2 = 5$ cm ; $M_1 = 0{,}8$ Kg ; $M_2 = 1{,}6$ Kg

$m_b = 1{,}5$ Kg ; $h = 2$ m

a) $I_T = ?$; $I_1 = \frac{1}{2} M_1 R_1^2$; $I_2 = \frac{1}{2} M_2 R_2^2 \longrightarrow$ Tabla

$$I_T = I_1 + I_2$$

$$I_T = \frac{1}{2} M_1 R_1^2 + \frac{1}{2} M_2 R_2^2 = \frac{1}{2}(0{,}8 Kg)(2{,}5 \times 10^{-2} m)^2 + \frac{1}{2}(1{,}6 Kg)(5 \times 10^{-2} m)^2$$

$$I_T = 2{,}25 \times 10^{-3} Kg \cdot m^2$$

b) $V = ?$

$$\cancel{K_1}^{0} + U_1 + \cancel{W_{otr}}^{0} = K_2 + \cancel{U_2}^{0}$$

$$U_1 = K_2$$

$$m_b g h = \frac{1}{2} m_b V_f^2 + \frac{1}{2} I_T \omega^2 \; ; \text{ Como } \omega = \frac{V}{R}$$

$$m_b g h = \frac{1}{2} m_b V_f^2 + \frac{1}{2} I_T \left(\frac{V_f^2}{R_1^2} \right) \rightarrow \text{esta enrollado en el disco } R_1$$

$$m_b g h = \frac{1}{2} V_f^2 \left(m_b + \frac{I_T}{R_1^2} \right)$$

$$V_f = \sqrt{\frac{2 m_b g h}{m_b + \frac{I_T}{R_1^2}}} = \sqrt{\frac{2(1{,}5\,Kg)(9{,}8\,m/s^2)(2\,m)}{(1{,}5\,Kg) + \frac{(2{,}25 \times 10^{-3}\,Kg \cdot m^2)}{(2{,}5 \times 10^{-2}\,m)^2}}}$$

$$V_f = 3{,}40\,m/s$$

c)

$$V_2 = \sqrt{\frac{2 m_b g h}{m_b + \frac{I_T}{R_2^2}}} = 4{,}95\,m/s$$

d) Como $V = \omega R$

Velocidad del disco 1

Velocidad del disco 2

$V_1 = \omega R_1$

$V_2 = \omega R_2$

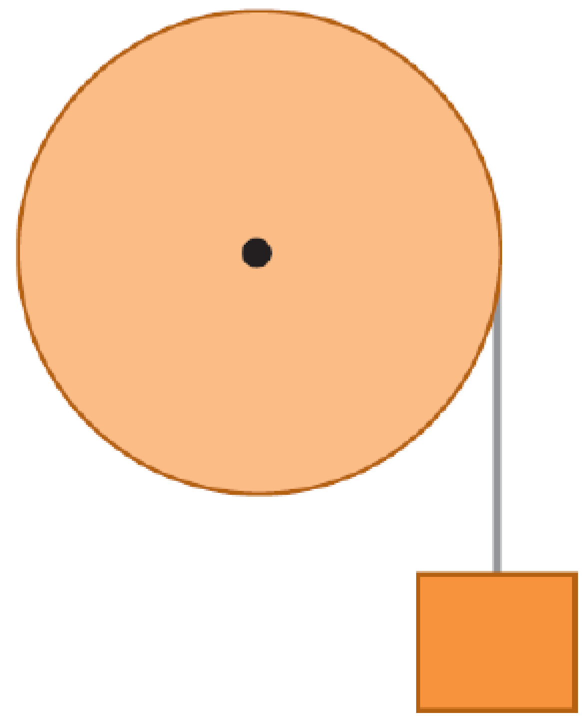
Como $R_1 < R_2 \Rightarrow V_1 < V_2$

c)

$$V_2 = \sqrt{\frac{2 m_b g h}{m_b + \frac{I_T}{R_2^2}}} = 4{,}95 \ m/s$$

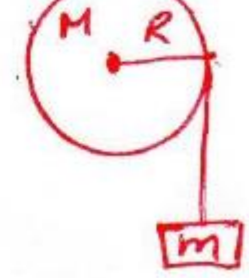
9.49 •• **PA** Un alambre ligero y delgado se enrolla alrededor del borde de una rueda, como se muestra en la figura E9.49. La rueda gira sin fricción alrededor de un eje horizontal fijo que pasa por su centro. La rueda es un disco uniforme de radio $R = 0.280$ m. Del extremo libre del alambre se encuentra suspendido un objeto de $m = 4.20$ kg. El sistema se libera del reposo y el objeto desciende con aceleración constante una distancia de 3.00 m en 2.00 s. ¿Cuál es la masa de la rueda?

Figura **E9.49**



9.49 $R = 0{,}28\,m$ | $h = 3\,m$ en $t = 2\,s$

$m = 4{,}2\,Kg$ | $M = ?$



Por Conservación de la energía

$$\cancel{K_1} + U_1 + \cancel{W_{otr}} = K_2 + \cancel{U_2}$$

$$U_1 = K_2$$

$$mgh = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad ; \text{ Como } I = \frac{1}{2}MR^2 \text{ y } \omega = \frac{V}{R}$$

$$mgh = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{V^2}{R^2}\right)$$

$$mgh = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{4}MV^2$$

$$mgh - \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{4}MV^2$$

$$mgh - \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{4}MV^2$$

$$M = \frac{m4(gh - \frac{1}{2}V^2)}{V^2}$$; $\boxed{\text{Pero } V = ?}$ $\Rightarrow$

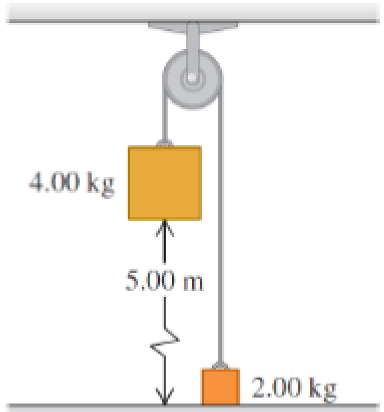
$$V = \cancel{V_0} + at$$
$$V = at$$
$$V = (1{,}5\,m/s^2)(2s)$$
$$V = 3\,m/s$$

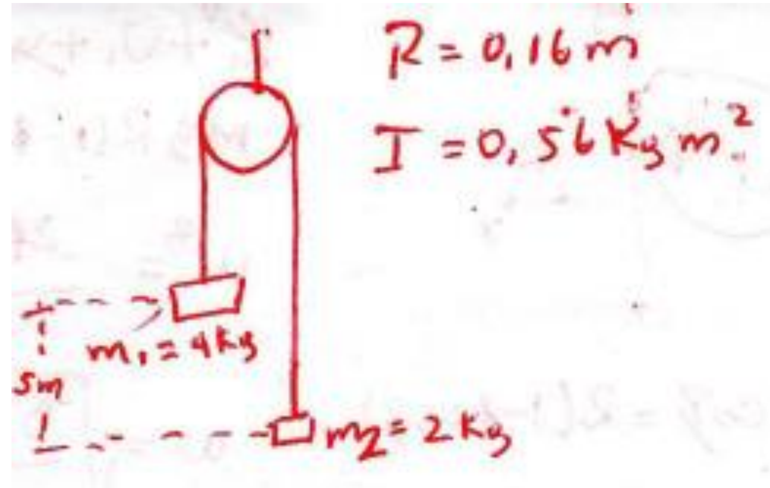
$$h = \cancel{V_0 t} + \frac{1}{2}at^2$$
$$a = \frac{2h}{t^2}$$
$$a = \frac{2(3m)}{(2s)^2}$$
$$a = 1{,}5\,m/s^2$$

$$M = \frac{4(4{,}2Kg)\left[(9{,}8\,m/s^2)(3m) - \frac{1}{2}(3\,m/s)^2\right]}{(3\,m/s)^2}$$

$$M = 46{,}5\,Kg$$

9.84 •• La polea de la figura P9.84 tiene 0.160 m de radio y su momento de inercia es de 0.560 $kg \cdot m^2$. La cuerda no resbala en la polea. Use métodos de energía para calcular la rapidez del bloque de 4.00 kg justo antes de golpear el piso.





9.84) $\cancel{K_1}^{0} + U_1 + \cancel{W_{ot}}^{0} = K_2 + U_2$

$$m_1 g h = \frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + m_2 g h$$

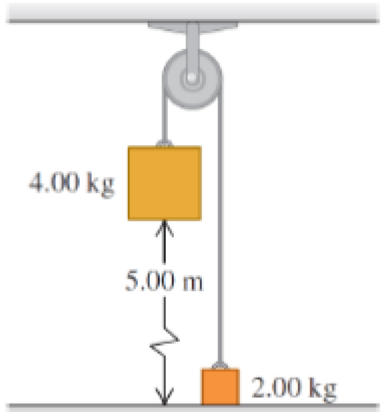
$$(m_1-m_2)gh - \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2$$

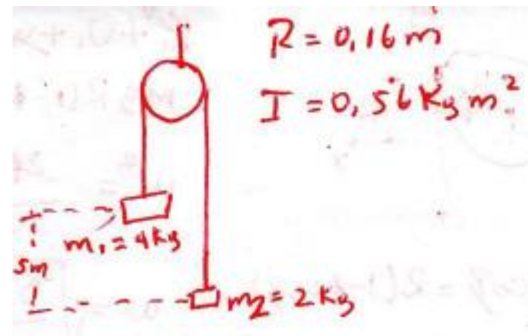
$$(m_1-m_2)gh - \frac{1}{2} I \left(\frac{V}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2$$

$$(m_1-m_2)gh = \frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 + \frac{1}{2} I \frac{V^2}{R^2}$$

$$(m_1-m_2)gh = \left[(m_1+m_2) + \frac{I}{R^2}\right]\frac{1}{2} V^2$$

9.84 •• La polea de la figura P9.84 tiene 0.160 m de radio y su momento de inercia es de 0.560 kg·m^2. La cuerda no resbala en la polea. Use métodos de energía para calcular la rapidez del bloque de 4.00 kg justo antes de golpear el piso.





9,84) $\cancel{K_1}^{0} + U_1 + \cancel{W_{ot}}^{0} = K_2 + U_2$

$$m_1 g h = \frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + m_2 g h$$

$$(m_1-m_2)gh - \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2$$

$$(m_1-m_2)gh - \frac{1}{2} I\left(\frac{V}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2$$

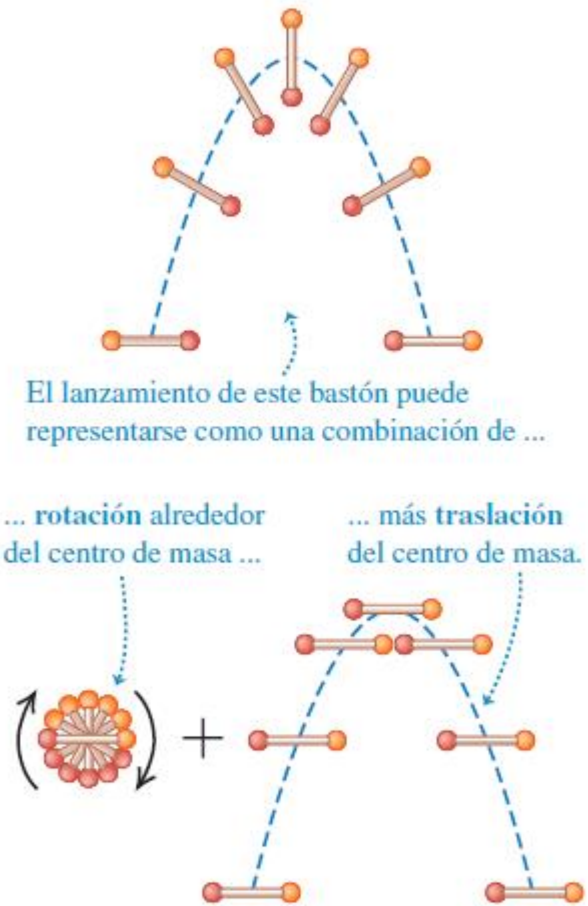
$$(m_1-m_2)gh = \frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 + \frac{1}{2} I \frac{V^2}{R^2}$$

$$(m_1-m_2)gh = \left[(m_1+m_2) + \frac{I}{R^2}\right]\frac{1}{2}V^2$$

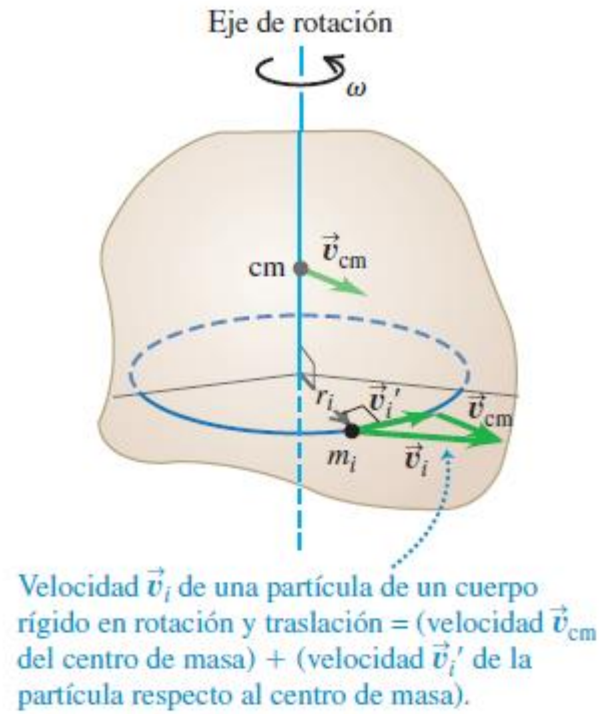
$$V = \sqrt{\frac{2\left[(m_1-m_2)gh\right]}{(m_1+m_2)+\frac{I}{R^2}}} = \sqrt{\frac{2\left[(4Kg-2Kg)(9{,}8\,m/s^2)(5m)\right]}{(4Kg+2Kg)+\frac{0{,}56\,Kg\,m^2}{(0{,}16m)^2}}} = 2{,}65\ m/s$$

10.3 Rotación de un cuerpo rígido sobre un eje móvil

10.11 El movimiento de un cuerpo rígido es una combinación de traslación del centro de masa y rotación alrededor de ese centro.



10.12 Cuerpo rígido con movimiento de traslación y de rotación.



Traslación y rotación combinadas: Relaciones de energía

$$K = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \tfrac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

(cuerpo rígido con traslación y rotación)

10.3 Rotación de un cuerpo rígido sobre un eje móvil

Rodar sin resbalar

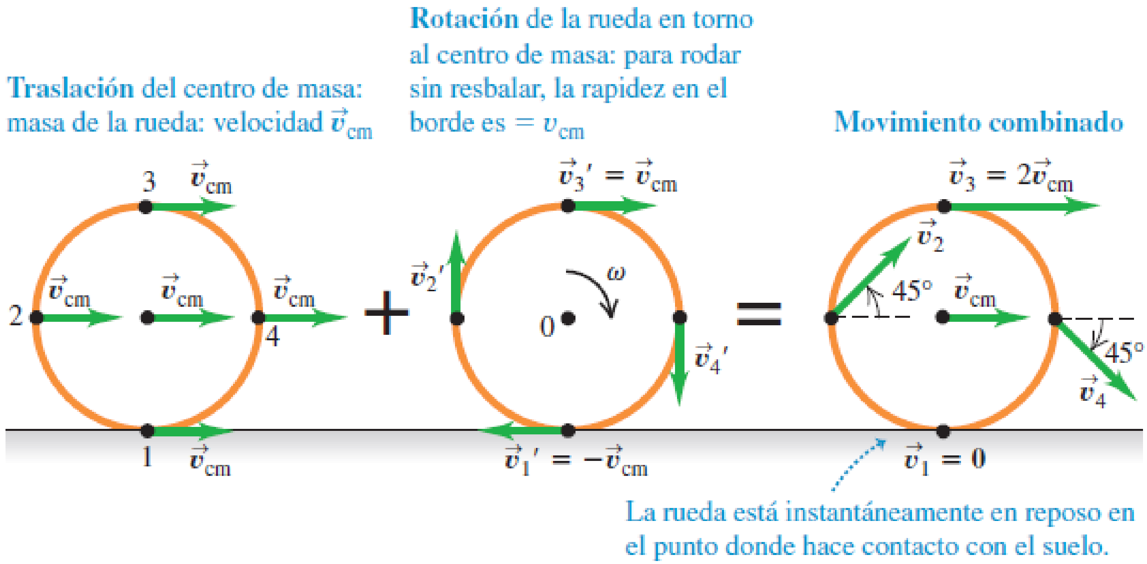
Un caso importante de traslación y rotación combinadas es el de **rodar sin resbalar**,

$$v_{cm} = R\omega \qquad \text{(condición para rodar sin resbalar)}$$

de masa alrededor de él. Si vemos así el movimiento de la rueda de la figura 10.13, la energía cinética de la rueda es $K = \frac{1}{2} I_1 v^2$, donde I_1 es el momento de inercia de la rueda alrededor de un eje que pasa por el punto 1. Pero, por el teorema de los ejes paralelos, ecuación (9.19), $I_1 = I_{cm} + MR^2$, donde M es la masa total de la rueda e I_{cm} es el momento de inercia con respecto a un eje que pasa por el centro de masa. Usando la ecuación (10.11), la energía cinética de la rueda es

$$K = \tfrac{1}{2} I_1 \omega^2 = \tfrac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \tfrac{1}{2} M R^2 \omega^2 = \tfrac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \tfrac{1}{2} M v_{cm}^2$$

10.13 El movimiento de una rueda es la suma del movimiento de traslación del centro de masa y del movimiento de rotación de la rueda alrededor del centro de masa.



CUIDADO **Rodar sin resbalar** Observe que es importante tener en cuenta que la relación $v_{cm} = R\omega$ se cumple *únicamente* para el caso de rodar sin resbalar. Cuando un automóvil de "arrancones" comienza a moverse, los neumáticos traseros están girando con gran rapidez mientras que el vehículo casi no se mueve, así que $R\omega$ es mayor que v_{cm} (figura 10.14). Si el conductor aplica los frenos con demasiada fuerza y el coche derrapa, los neumáticos casi no girarán y $R\omega$ será menor que v_{cm}.

Si un cuerpo rígido cambia de altura al moverse, también debemos considerar la energía potencial gravitacional. Como se analizó en la sección 9.4, la energía potencial gravitacional asociada a cualquier cuerpo extendido de masa M, rígido o no, es la misma que si sustituimos el cuerpo por una partícula de masa M situada en el centro de masa del cuerpo. Esto es,

$$U = Mgy_{cm}$$

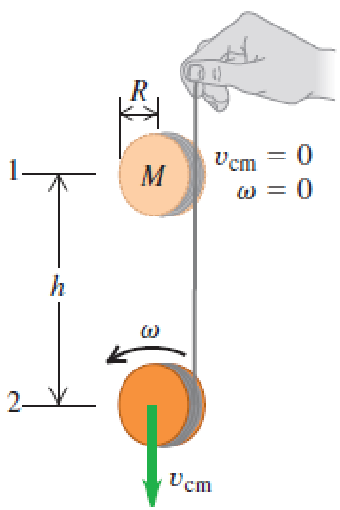
Ejemplo 10.4 Rapidez de un yoyo común

Se hace un yoyo enrollando una cuerda con masa despreciable varias veces alrededor de un cilindro sólido de masa M y radio R (figura 10.15). Se sostiene el extremo de la cuerda fija mientras se suelta el cilindro desde el reposo. La cuerda se desenrolla sin resbalar ni estirarse conforme el cilindro cae y gira. Use consideraciones de energía para calcular la rapidez v_{cm} del centro de masa del cilindro después de caer una distancia h.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El extremo superior de la cuerda está fijo, no se tira de este hacia arriba, así que su mano no efectúa trabajo sobre el sistema de la cuerda y el cilindro. Hay fricción entre la cuerda y el cilindro pero, como la cuerda no resbala sobre la superficie del cilindro, no se pierde energía mecánica. Por lo tanto, podemos usar la conservación de la energía mecánica. La energía cinética inicial del cilindro es $K_1 = 0$, y su energía cinética final K_2 está dada por la ecuación (10.8); la cuerda no tiene energía cinética porque no tiene masa. El momento de inercia es $I = \frac{1}{2}MR^2$ y, por la ecuación (9.13), $\omega = v_{cm}/R$ ya que la cuerda no resbala. Las energías potenciales son $U_1 = Mgh$ y $U_2 = 0$.

10.15 Cálculo de la rapidez de un yoyo común.



EJECUTAR: Utilizando la ecuación (10.8), la energía cinética en el punto 2 es

$$K_2 = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v_{cm}}{R}\right)^2$$
$$= \tfrac{3}{4}Mv_{cm}^2$$

La energía cinética es $1\frac{1}{2}$ veces mayor que si el yoyo estuviera cayendo a una rapidez v_{cm} sin girar. Dos tercios de la energía cinética total $(\frac{1}{2}Mv_{cm}^2)$ son de traslación y un tercio $(\frac{1}{4}Mv_{cm}^2)$ es de rotación. Utilizando conservación de la energía,

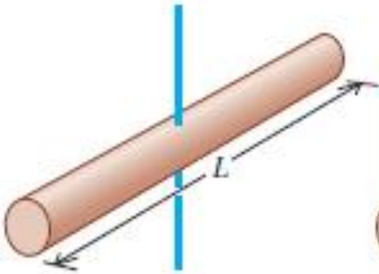
$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$
$$0 + Mgh = \tfrac{3}{4}Mv_{cm}^2 + 0$$
$$v_{cm} = \sqrt{\tfrac{4}{3}gh}$$

EVALUAR: No se pierde ni se gana energía mecánica, así que desde el punto de vista de la energía, la cuerda no es más que una manera de convertir parte de la energía potencial gravitacional (que se libera conforme cae el cilindro) en energía cinética de rotación más que en energía cinética de traslación. Debido a que no toda la energía liberada entra en la traslación, v_{cm} es menor que la velocidad $\sqrt{2gh}$ de un objeto en caída libre desde una altura h.

Tabla 9.2 Momentos de inercia de diversos cuerpos

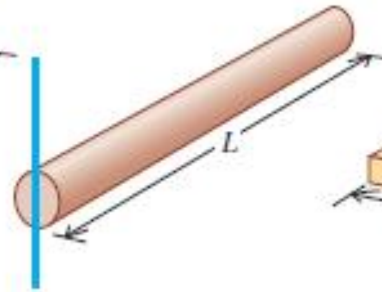
a) Varilla delgada, eje a través del centro

$$I = \frac{1}{12}ML^2$$



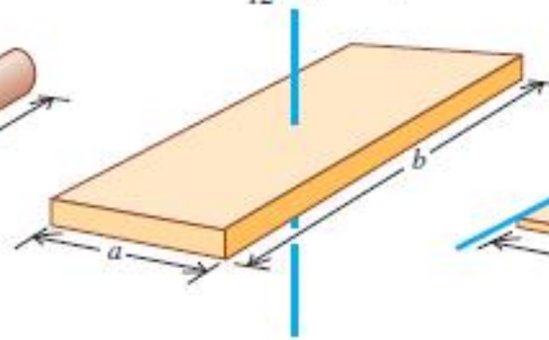
b) Varilla delgada, eje a través de un extremo

$$I = \frac{1}{3}ML^2$$



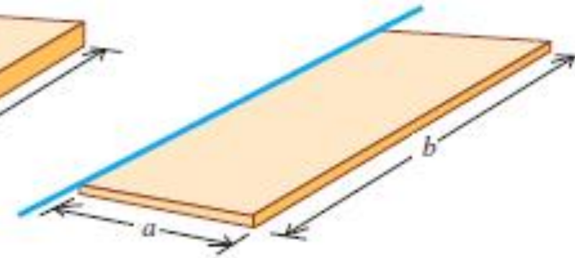
c) Placa rectangular, eje a través del centro

$$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$$



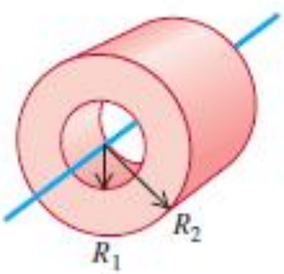
d) Placa rectangular delgada, eje a lo largo de un extremo

$$I = \frac{1}{3}Ma^2$$



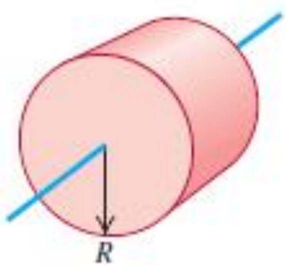
e) Cilindro hueco de pared gruesa

$$I = \frac{1}{2}M(R_1{}^2 + R_2{}^2)$$



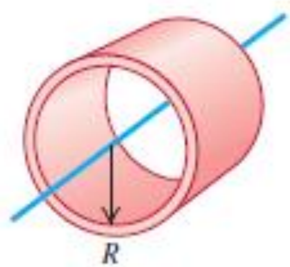
f) Cilindro sólido

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$



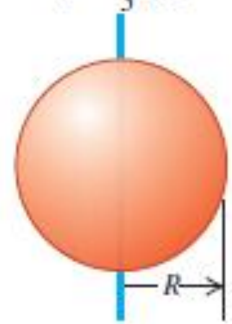
g) Cilindro hueco de pared delgada

$$I = MR^2$$



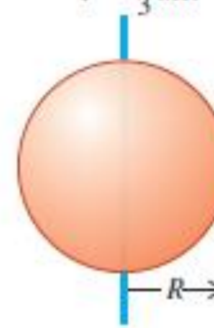
h) Esfera sólida

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

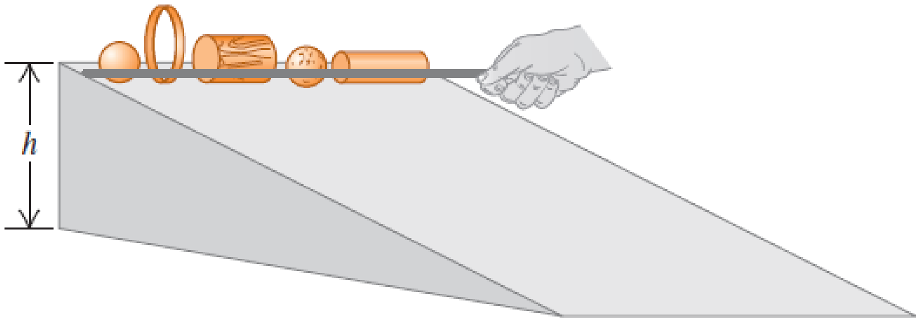


i) Esfera hueca de pared delgada

$$I = \frac{2}{3}MR^2$$



10.16 ¿Cuál cuerpo rueda hacia abajo por la superficie inclinada más rápido y por qué?



EJECUTAR: Por la conservación de la energía,

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$0 + Mgh = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \tfrac{1}{2}cMR^2\left(\frac{v_{cm}}{R}\right)^2 + 0$$

$$Mgh = \tfrac{1}{2}(1 + c)Mv_{cm}^2$$

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + c}}$$

EVALUAR: Para un valor dado de c, la rapidez v_{cm} una vez que se ha descendido una distancia *h no depende* de la masa *M* del cuerpo ni de su radio *R*. *Todos* los cilindros sólidos uniformes ($c = \tfrac{1}{2}$) tienen la misma rapidez abajo, sin importar sus masas y sus radios. Todos los valores de c nos indican que el orden de llegada para los cuerpos uniformes será el siguiente: **1.** cualquier esfera sólida ($c = \tfrac{2}{5}$), **2.** cualquier cilindro sólido ($c = \tfrac{1}{2}$), **3.** cualquier esfera hueca de pared delgada ($c = \tfrac{2}{3}$), y **4.** cualquier cilindro hueco de pared delgada ($c = 1$). Los cuerpos con c pequeña siempre vencen a los cuerpos con c grande porque menos de su energía cinética se dedica a la rotación y más a la traslación.