$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\frac{\overline{f(\xi)}}{\xi-z}d\xi=\overline{f(0)}\ (\ |z|<1).$$

当 $|z|>1$ 时，$|1/\bar{z}|<1$，则式(1)右端被积函数的两个奇点 0 及 $1/\bar{z}$ 都在圆周 $|\xi|=1$ 的内部. 为此，我们将被积函数分成两项，再应用柯西积分公式

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\frac{f(\xi)}{\xi(1-\bar{z}\xi)}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\left(\frac{1}{\xi}-\frac{1}{\xi-(1/\bar{z})}\right)f(\xi)d\xi$$

$$=f(0)-f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right),$$

所以由式(1)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\frac{\overline{f(\xi)}}{\xi-z}d\xi=\overline{f(0)}-\overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}.$$

§3.3　教材习题同步解析

3.1　计算积分 $\int_0^{1+i}[(x-y)+ix^2]dz$，积分路径(1)自原点至 $1+i$ 的直线段；(2) 自原点沿实轴至 1，再由 1 铅直向上至 $1+i$；(3) 自原点沿虚轴至 i，再由 i 沿水平方向向右至 $1+i$(图 3.16).

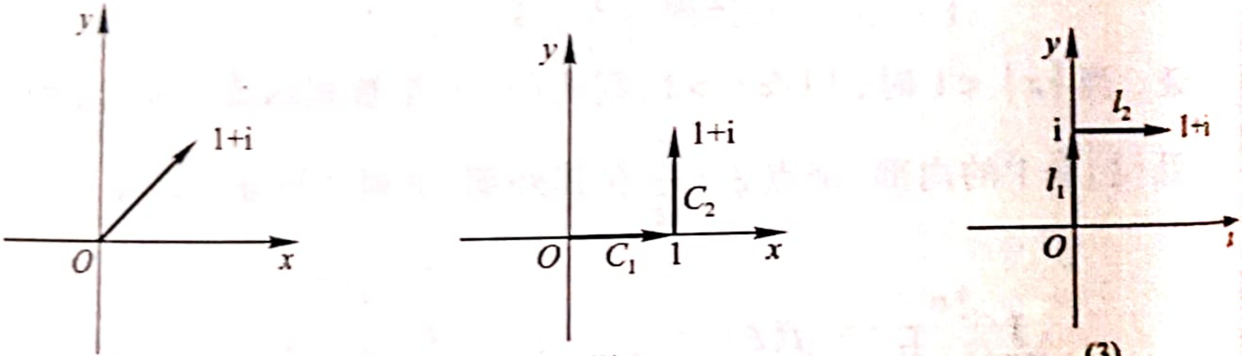

图 3.16

解　(1) $\int_0^{1+i}[(x-y)+ix^2]dz$

$$=\int_0^1 it^2(1+i)dt=i(1+i)\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}+\frac{i}{3}.$$

注：直线段的参数方程为 $z=(1+i)t, 0\leqslant t\leqslant 1$.

(2) $C_1: y=0, dy=0, dz=dx$,

$C_2: x=1, dx=0, dz=idy$.

$$\int_0^{1+i}[(x-y)+ix^2]dz=\int_{C_1}+\int_{C_2}$$

$$=\int_0^1(x+ix^2)dx+\int_0^1(1-y+i)idy=-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}i.$$

(3) $l_1: x=0, dz=idy; l_2: y=1, dz=dx$.

$$\int_0^{1+i}[(x-y)+ix^2]dz=\int_{l_1}+\int_{l_2}$$

$$=\int_0^1(-y)idy+\int_0^1(x-1+ix^2)dx$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{i}{6}.$$

3.2　计算积分 $\oint_C \frac{\bar{z}}{|z|}dz$ 的值，其中 C 为(1) $|z|=2$;(2) $|z|=4$.

解　令 $z=re^{i\theta}$，则

$$\oint_{|z|=r}\frac{\bar{z}}{|z|}dz=\int_0^{2\pi}\frac{re^{-i\theta}}{r}rie^{i\theta}d\theta=2\pi ri.$$

当 $r=2$ 时，为 $4\pi i$；当 $r=4$ 时，为 $8\pi i$.

3.3　求证：$\left|\int_C\frac{dz}{z^2}\right|\leqslant\frac{\pi}{4}$，其中 C 是从 $1-i$ 到 1 的直线段(图 3.17).

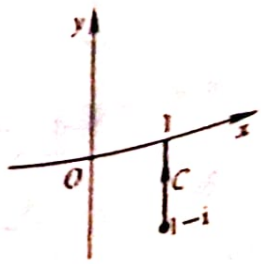

图 3.17

证　$C: z=1+iy=1+i\tan\theta$,

$$-\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant 0.$$

$$|z|^2 = 1 + y^2 = 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta},$$

$$|dz| = \left| i\frac{d\theta}{\cos^2\theta} \right|,$$

故

$$\left| \int_C \frac{1}{z^2} dz \right| \leqslant \int_C \frac{|dz|}{|z|^2} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

3.4 试用观察法确定下列积分的值,并说明理由,C 为 $|z|=1$.

(1) $\oint_C \frac{1}{z^2+4z+4} dz$.

解 积分值为0,因被积函数在 $|z| \leqslant 1$ 内解析.

(2) $\oint_C \frac{1}{\cos z} dz$.

解 积分值为0,理由同上.

(3) $\oint_C \frac{1}{z-\frac{1}{2}} dz$.

解 $\oint_C \frac{1}{z-\frac{1}{2}} dz = 2\pi i$.

3.5 求积分 $\int_C \frac{e^z}{z} dz$ 的值,其中 C 为由正向圆周 $|z|=2$ 与负向圆周 $|z|=1$ 所组成(图 3.18).

解 $$\int_C \frac{e^z}{z} dz = \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z} dz - \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz$$
$$= 2\pi i - 2\pi i = 0.$$

3.6 计算

$$=2\pi i-2\pi i=0.$$

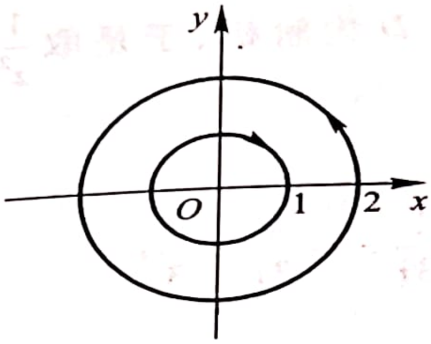

图 3.18

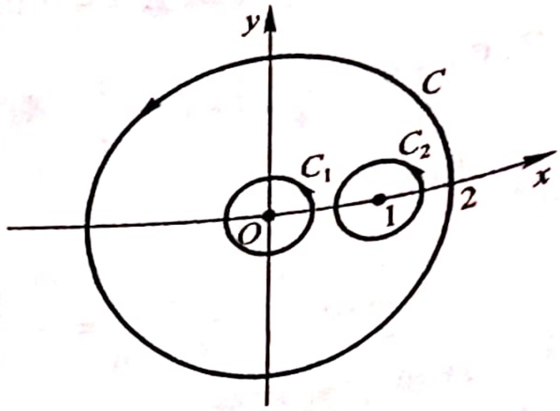

图 3.19

3.7 计算 $\oint_{|z|=3}\frac{1}{(z-i)(z+2)}dz.$

解 解法同上题,

$$\oint_{|z|=3}\frac{1}{(z-i)(z+2)}dz=0.$$

3.8 计算下列积分值.

(1) $\int_0^{\pi i}\sin z\,dz.$

解 $\int_0^{\pi i}\sin z\,dz=-\cos z\Big|_0^{\pi i}=1-\cos\pi i.$

(2) $\int_1^{1+i}ze^z dz.$

解 $\int_1^{1+i}ze^z dz=(ze^z-e^z)\Big|_1^{1+i}=ie^{1+i}.$

(3) $\int_0^{i}(3e^z+2z)dz.$

解 $\int_0^{i}(3e^z+2z)dz=(3e^z+z^2)\Big|_0^{i}$

$$=3e^i-1-3=3e^i-4.$$

3.9 计算 $\int_C\frac{1}{z^2}dz$,其中 C 为圆周 $|z+i|=2$ 的右半周,走向为从 $-3i$ 到 i.

域，例如 $D:\mathrm{Re}\,z>-\frac{}{4}, |z|$ ... 2 ... z ... z^2 的一个

原函数 $-\frac{1}{z}$，则

$$\int_C \frac{1}{z^2}dz=-\frac{1}{z}\bigg|_{-3i}^{i}=-\frac{1}{i}-\frac{1}{3i}=-\frac{4}{3i}=\frac{4}{3}i.$$

3.10 计算下列积分.

(1) $\oint_{|z-2|=1}\frac{e^z}{z-2}dz.$

解 $\oint_{|z-2|=1}\frac{e^z}{z-2}dz=2\pi ie^z\bigg|_{z=2}=2\pi ie^2.$

(2) $\oint_{|z|=2}\frac{2z^2-z+1}{z-1}dz.$

解 原式 $=2\pi i(2z^2-z+1)\bigg|_{z=1}=4\pi i.$

(3) $\oint_{|z-i|=1}\frac{dz}{z^2-i}.$

解 将被积函数分解因式得到

$$\frac{1}{z^2-i}=\frac{1}{z-e^{\frac{\pi}{4}i}}\frac{1}{z+e^{\frac{\pi}{4}i}},$$

由于点 $e^{\frac{\pi}{4}i}$ 在圆周 $|z-i|=1$ 内部，而函数 $\frac{1}{z+e^{\frac{\pi}{4}i}}$ 在闭圆盘 $|z-i|\leqslant$

上为解析，故

$$\oint_{|z-i|=1}\frac{dz}{z^2-i}=\oint_{|z-i|=1}\frac{1}{z-e^{\frac{\pi}{4}i}}\left(\frac{1}{z+e^{\frac{\pi}{4}i}}\right)dz$$

3.11 计算 $I=\oint_C \frac{z\mathrm{d}z}{(2z+1)(z-2)}$,其中 C 是

(1) $|z|=1$; (2) $|z-2|=1$;

(3) $|z-1|=\frac{1}{2}$;(4) $|z|=3$.

解 (1) 被积函数在 $|z|\leqslant 1$ 内仅有一个奇点 $z=-\frac{1}{2}$,故

$$I=\oint_C \frac{\frac{z}{z-2}}{2\left(z+\frac{1}{2}\right)}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-2}\right)\bigg|_{z=-\frac{1}{2}}=\frac{\pi\mathrm{i}}{5}.$$

(2) 被积函数在 $|z-2|\leqslant 1$ 内仅有奇点 $z=2$,故

$$I=\oint_C \frac{\frac{z}{2z+1}}{z-2}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\left(\frac{z}{2z+1}\right)\bigg|_{z=2}=\frac{4\pi\mathrm{i}}{5}.$$

(3) 被积函数在 $|z-1|\leqslant\frac{1}{2}$ 内处处解析,故 $I=0$,

(4) 被积函数在 $|z|\leqslant 3$ 内有两个奇点 $z=-\frac{1}{2}$,$z=2$,由复合闭路原理,知

$$I=\oint_{C_1}+\oint_{C_2}=\oint_{C_1}\frac{\frac{z}{z-2}}{2\left(z+\frac{1}{2}\right)}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{\frac{z}{2z+1}}{z-2}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{\pi\mathrm{i}}{5}+\frac{4\pi\mathrm{i}}{5}=\pi\mathrm{i},$$

其中 C_1 为 $|z|=1$,C_2 为 $|z-2|=1$.

3.12 若 $f(z)$ 是区域 G 内的非常数解析函数,且 $f(z)$ 在 G 内无零点,则 $f(z)$ 不能在 G 内取到它的最小模.

3.13 计算下列积分.

(1) $\oint_{|z|=1} z^{\frac{e^z}{100}} \mathrm{d}z$.

解 原式 $=2\pi \mathrm{i} \dfrac{1}{99!} \mathrm{e}^z \Big|_{z=0} = \dfrac{2\pi \mathrm{i}}{99!}$.

(2) $\oint_{|z|=2} \dfrac{\sin z}{(z-\pi/2)^2} \mathrm{d}z$.

解 原式 $=2\pi \mathrm{i}(\sin z)' \Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = 2\pi \mathrm{i} \cdot \cos z \Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = 0$.

(3) $\oint_{C=C_1+C_2^-} \dfrac{\cos z}{z^3} \mathrm{d}z$,其中 $C_1: |z|=2, C_2: |z|=3$.

解 $\oint_{C=C_1+C_2^-} \dfrac{\cos z}{z^3} \mathrm{d}z$

$$= \oint_{C_1} \frac{\cos z}{z^3} \mathrm{d}z + \oint_{C_2^-} \frac{\cos z}{z^3} \mathrm{d}z$$

$$= 2\pi \mathrm{i} \frac{1}{2!} (\cos z)'' \Big|_{z=0} - 2\pi \mathrm{i} \frac{1}{2!} (\cos z)'' \Big|_{z=0}$$

$$= \pi \mathrm{i}(-1) - \pi \mathrm{i}(-1) = 0.$$

3.14 设 $f(z)$ 在 $|z| \leqslant 1$ 上解析,且在 $|z|=1$ 上有 $|f(z)-z| \leqslant |z|$,试证: $\left|f'\left(\dfrac{1}{2}\right)\right| \leqslant 8$.

证 由柯西积分公式知

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} \mathrm{d}z,$$

则

$$\left|f'\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=1} \frac{|f(z)-z+z|}{\left|z-\frac{1}{2}\right|^2} |\mathrm{d}z|$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=1} \frac{|f(z)-z|+|z|}{\left|z-\frac{1}{2}\right|^2} |\mathrm{d}z|$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=1}\frac{|z|+|z|}{\left|z-\frac{1}{2}\right|^2}|dz|$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=1}\frac{2|z|}{\left|z-\frac{1}{2}\right|^2}ds$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\oint_{|z|=1}\frac{1}{\frac{1}{4}}ds=\frac{1}{\pi}\cdot 4\cdot 2\pi=8.$$

注：$\left|z-\frac{1}{2}\right|^2=x^2+y^2-x+\frac{1}{4}=1-x+\frac{1}{4}\geqslant\frac{1}{4}$，$(x,y)$在$|z|=1$上.

3.15 设$f(z)$与$g(z)$在区域D内处处解析，C为D内的任何一条简单闭曲线，它的内部全含于D，如果$f(z)=g(z)$在C上所有的点处成立，试证在C内所有的点处$f(z)=g(z)$也成立.

证 设$F(z)=f(z)-g(z)$，因$f(z)$，$g(z)$均在D内解析，所以$F(z)$在D内解析，在C上，$F(z)=0(z\in C)$，$\forall z_0$在C内有

$$F(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{F(z)}{z-z_0}dz=0,$$

即$f(z_0)=g(z_0)$，由z_0的任意性可知，在C内$f(z)=g(z)$.

§3.4 自 测 题

自测题 1

（一）填空题

1. $\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+2z+2}=$______.

2. $\oint_{|z-1|=1}\frac{z^2+1}{z^2-1}dz=$______.

3. $\oint_{|z|=1}\frac{\cos z}{(z-\pi)^2}dz=$______.