第十一章 机械波

Mechanical Waves

§1 Formation & Propagation of a Mechanical Wave 机械波的产生和传播

§2 Wave Function of a Plane SHW
平面简谐波 波动方程

§3 Energy Energy Flow and Wave Intensity
波的能量 波动强度

§4 Huygen's Principle Principle of Superposition of Waves Interference of Waves
惠更斯原理 波的叠加原理 波的干射

§5 Standing Waves 驻波

教学要求

1、确切理解描述波动的物理量的物理意义，并能熟练地确定这些物理量;

2、深刻理解平面简谐波波动方程的物理意义，并会建立波动方程，运用它来讨论与分析波动现象;

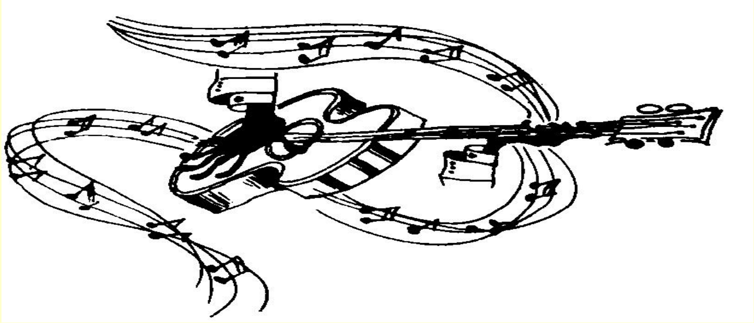
3、理解波的能量 能流密度;

4、熟练掌握波的干涉原理和干涉强弱的条件;

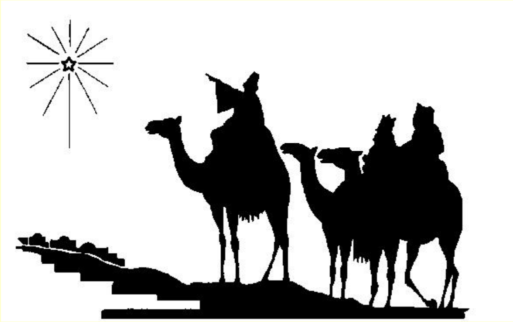
5、理解驻波形成条件和干涉强弱条件.

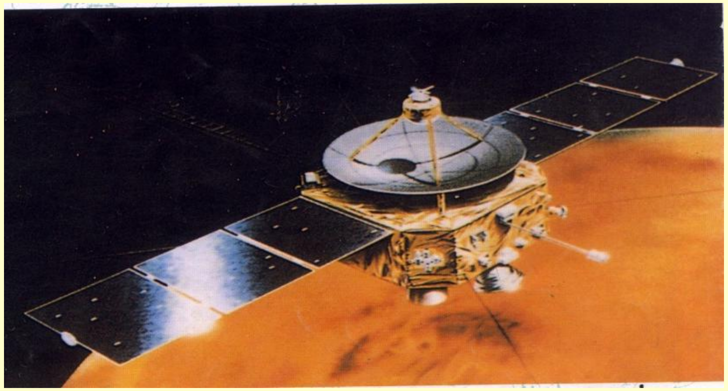
The types of waves

(1)Mechanical waves: earthquake waves, sound wave, water wave, ...

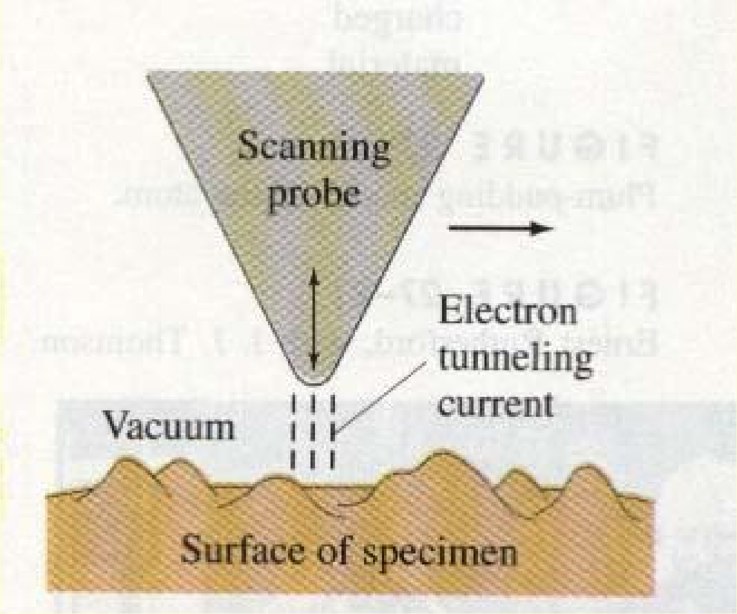


(2)Electromagnetic waves: light, sun, communication,...



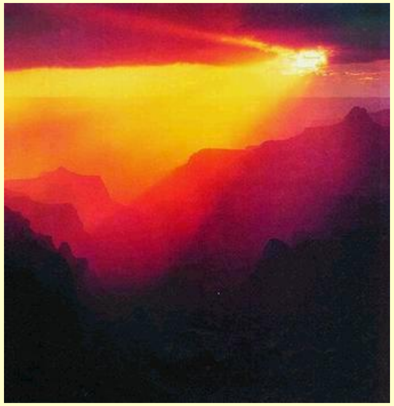


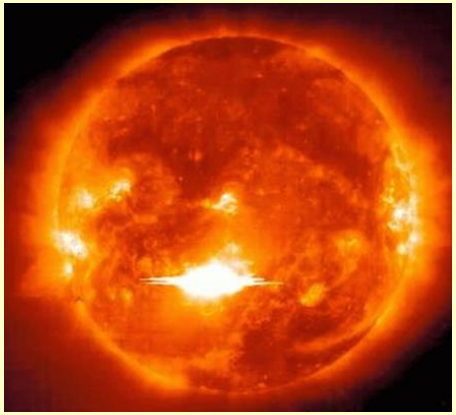
(3) Matter waves: electron, atom, molecule…….



The applications of wave

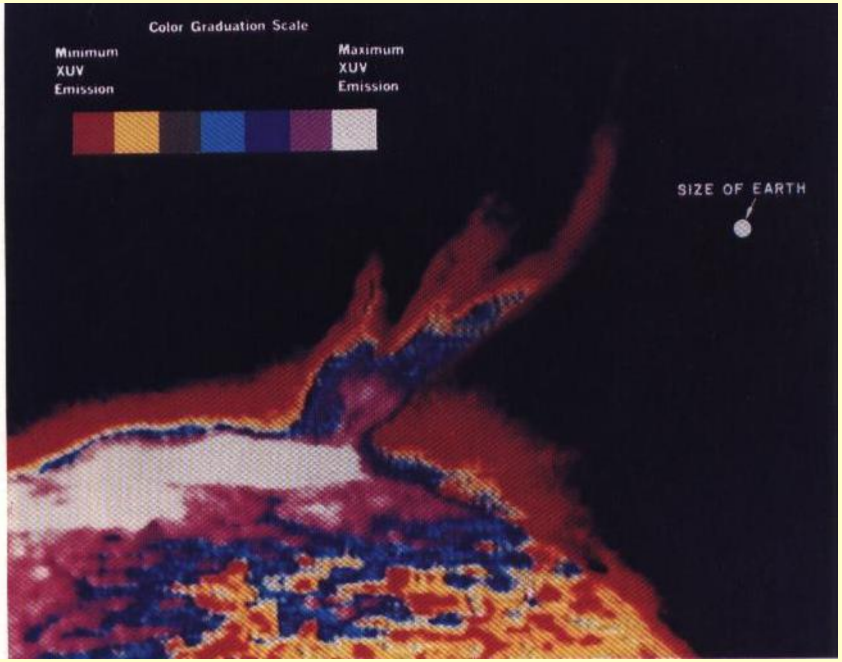
(1)The transmission of energy: solar energy, laser weapon, ...





(2)The transmission of information: radio, radar system, communications satellite, B-超， x-ray,……..

In a wave, information and energy move from one point to another but no material makes that journey.



In this chapter, for specific examples we shall refer(涉及) to Mechanical Waves.

1、什么是波动

波动也是一种运动形式，波动是振动的传播过程。

波动有机械波，电磁波，物质波。

2、波动和其他运动形式相比

具时间和空间上的某种重复性。

3、各类波在传播途中具有共性：

类似的波动方程：

反射、折射现象：在两种介质的界面上的反射，折射；

干涉现象：同一介质中，几列波的叠加；

衍射现象：在介质中绕过障碍物继续前进。

§11-1　机械波的形成和传播

Formation & Propagation of a mechanical Wave

11.1.1　机械波产生的条件Conditions of mechanical waves:

1、什么是机械波

一个振动以有限的速度在连续介质中的传播。

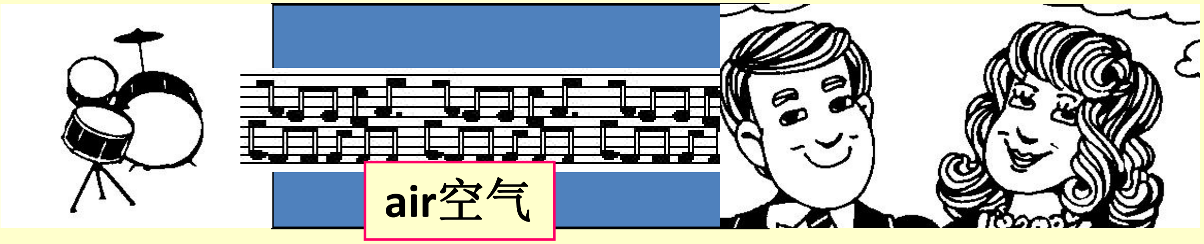
2、机械波产生的条件：

波源（振源）： There must be a vibrating center called source of wave:

——在此只讨论作简谐振动的波源。

弹性介质: There must be medium propagating(传递) wave:

——只讨论各向同性均匀无限大无吸收的 理想情况。

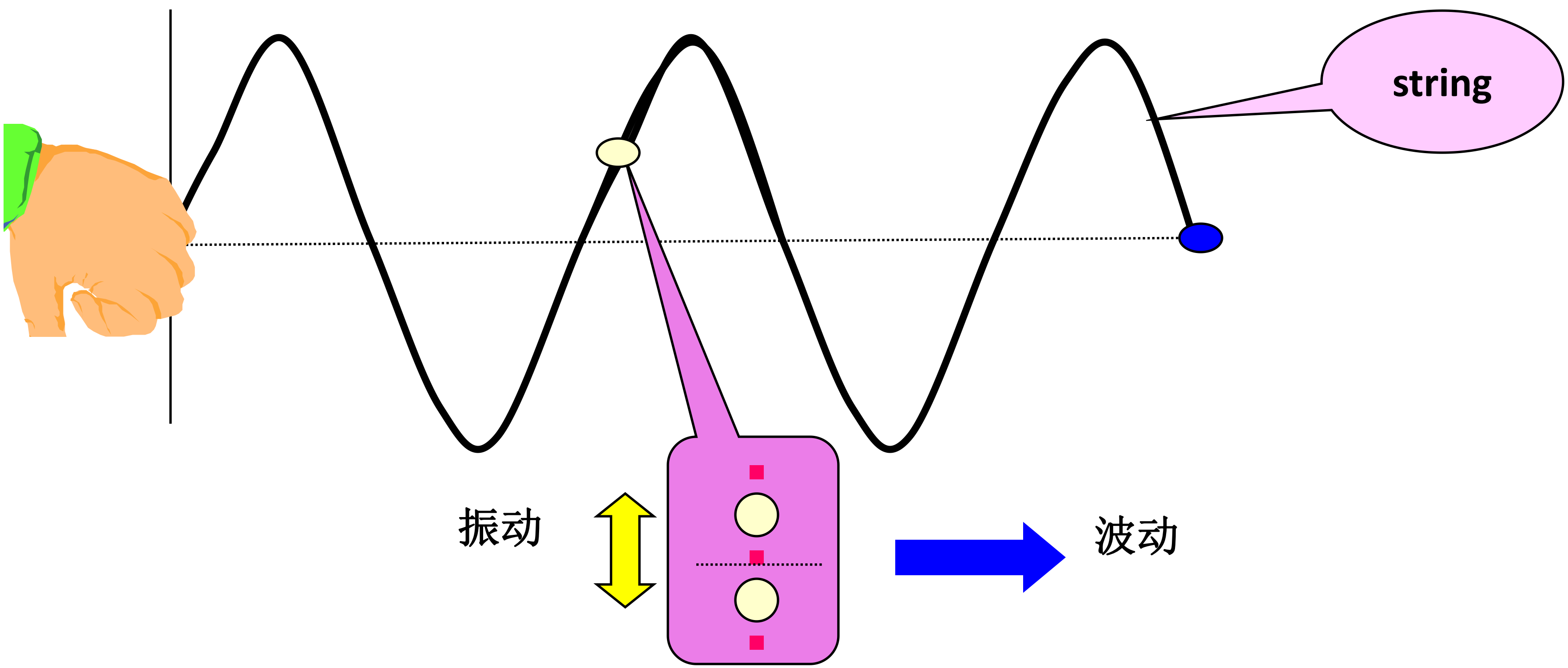


11.1.2 横波和纵波 Transverse wave and Longitudinal wave

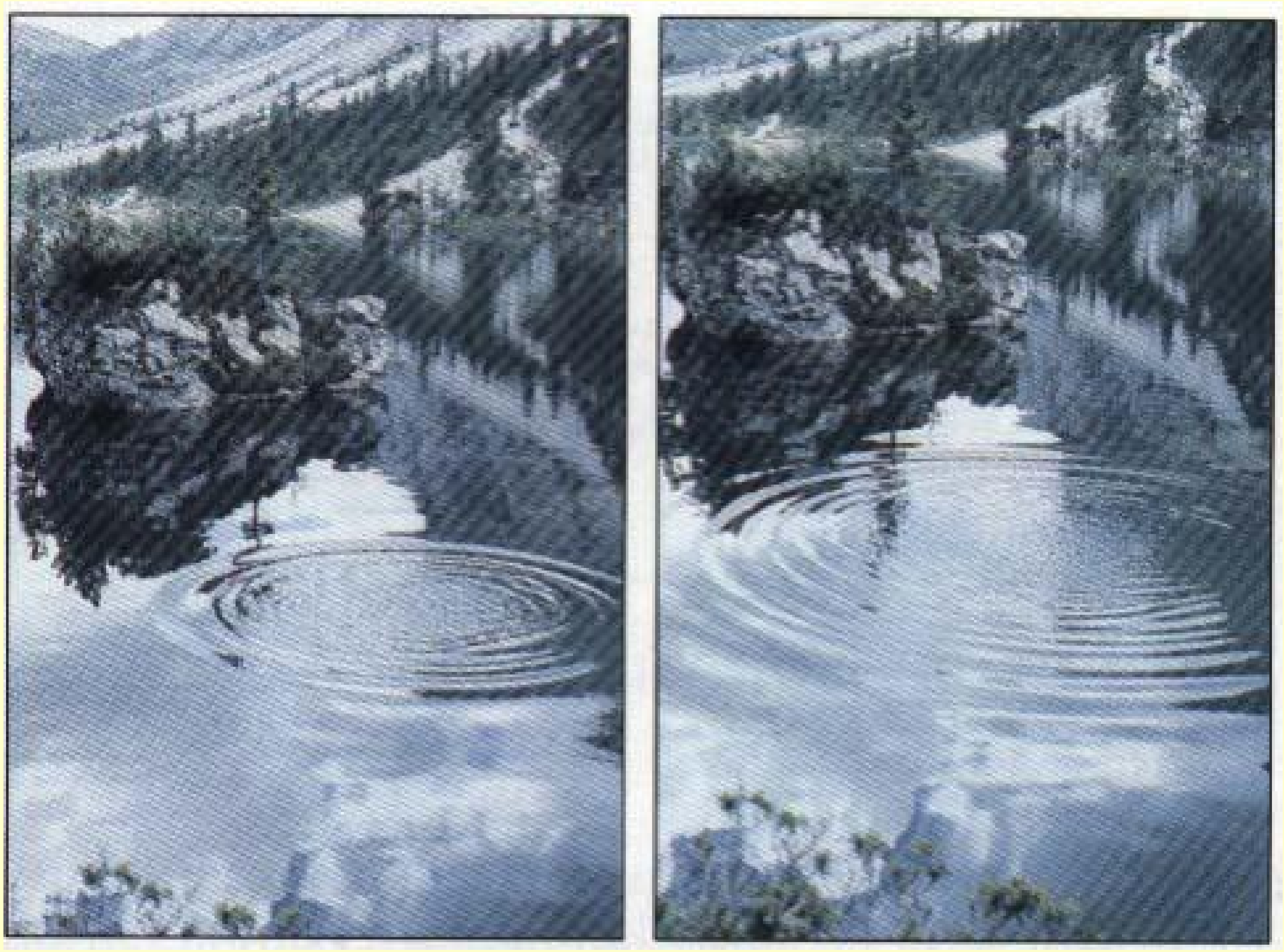
1、横波传播的特点： 以绳上所形成的横波为例。

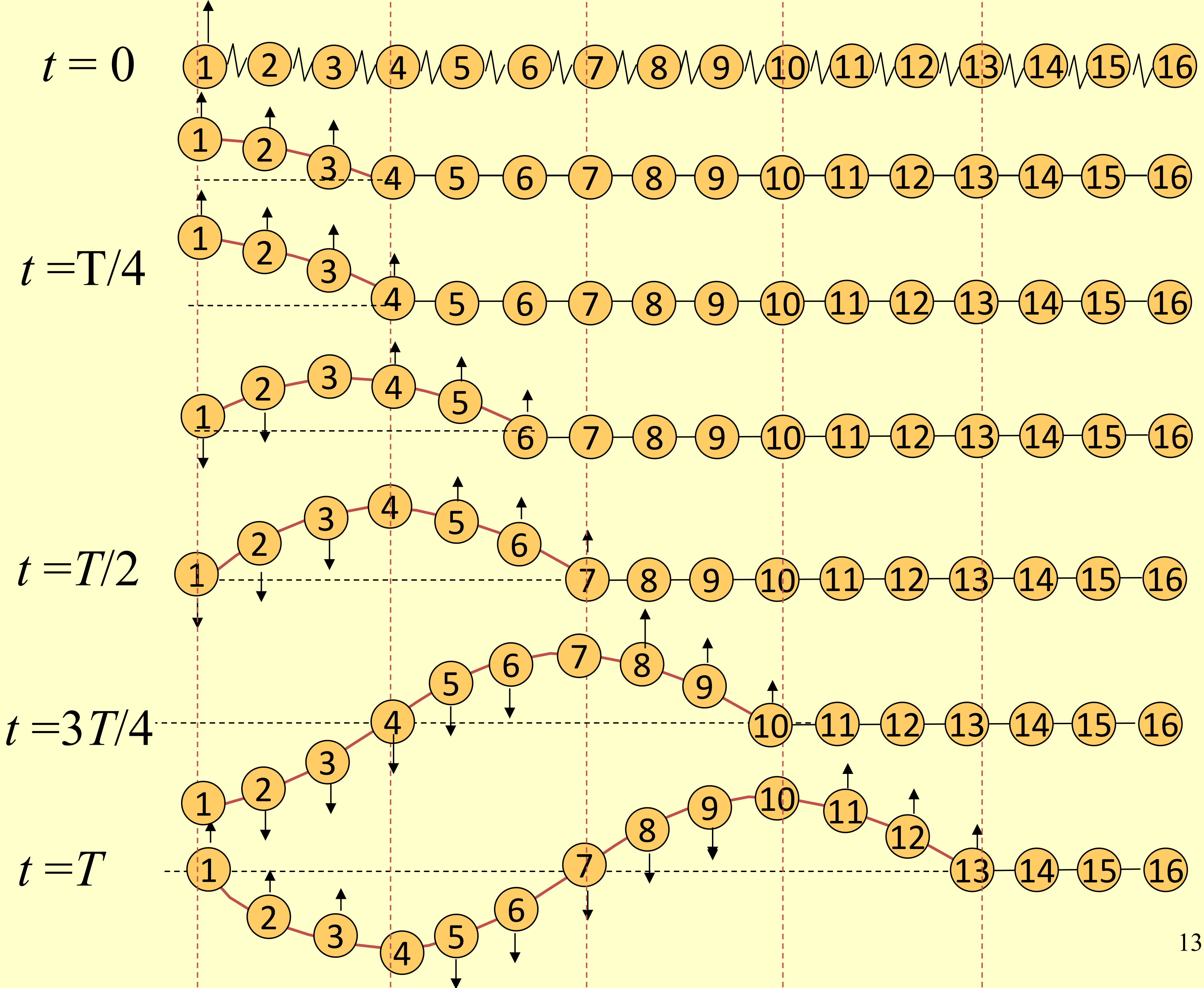
横波： 质点的振动方向和波的传播方向垂直。

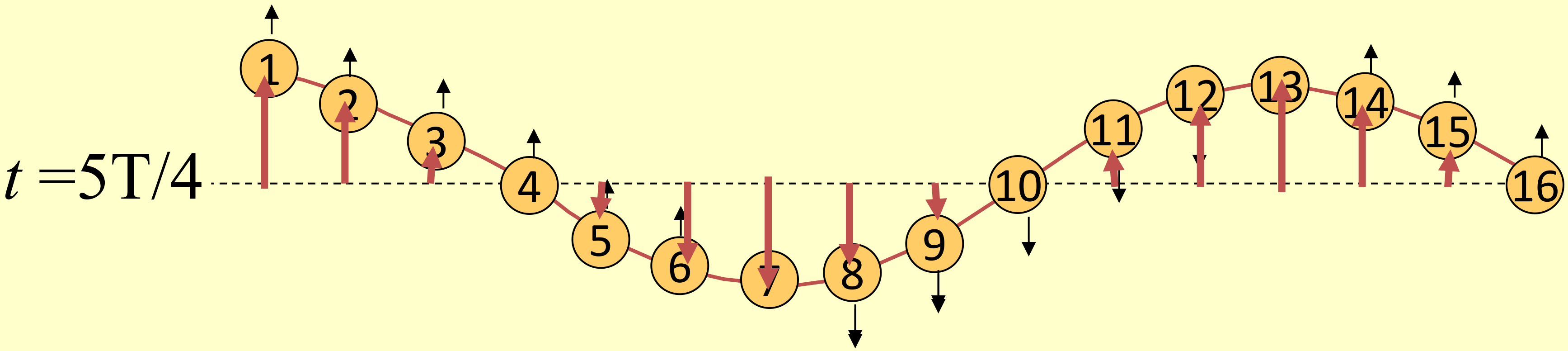
transverse wave: a traveling wave that causes the particles of the disturbed medium to move **perpendicular** to the wave motion.



Water wave




t = 0
t =T/4
t =T/2
t =3T/4
t =T
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16



①当点波源完成自己一个周期的运动，就有一个完整的波形发送出去。

② 沿着波的传播方向向前看去，前面各质元都要重复波源（已知点振动亦可）的振动状态（即位相），因此，沿着波的传播方向向前看去，前面质元的振动位相相继落后于波源的位相。

③ 所谓波形：是指介质中各质元在某确定时刻，各自偏离自己平衡位置位移的矢端曲线——简谐横波可用余弦函数描述。

2、纵波的特点

质点的振动方向和波的传播方向平行。

longitudinal wave: a traveling wave that causes the particles of the disturbed medium to move parallel to the direction of wave motion.

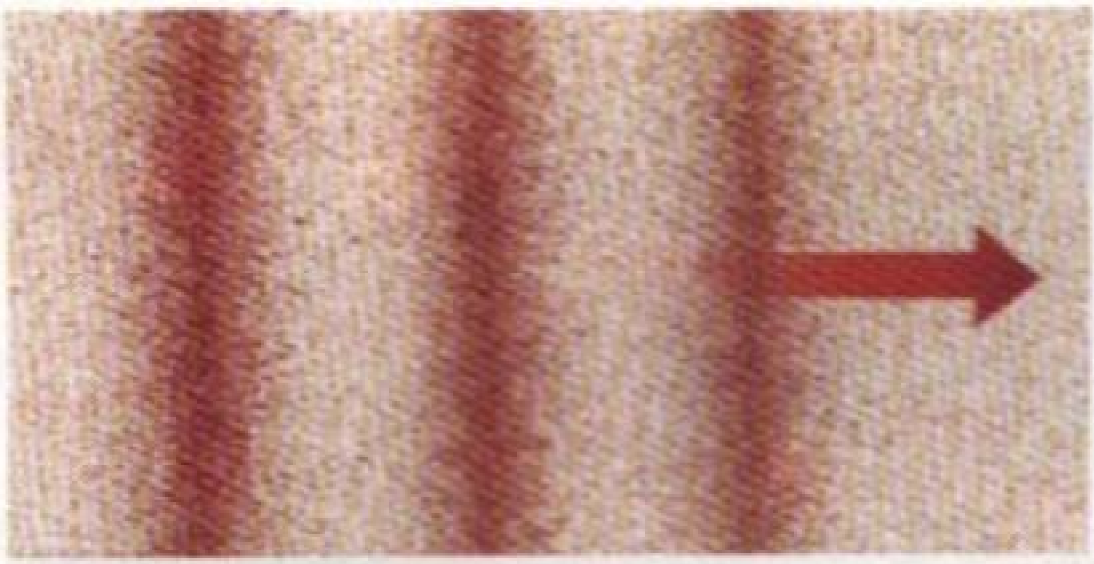


Figure 15-8 A drawing of a longitudinal sound wave. The dark regions represent compressions (high density), the lighter regions represent rarefactions (low density).

The general waves are treated as the mixed waves as a combination of longitudinal and transverse wave. For example:

(1)Water wave.

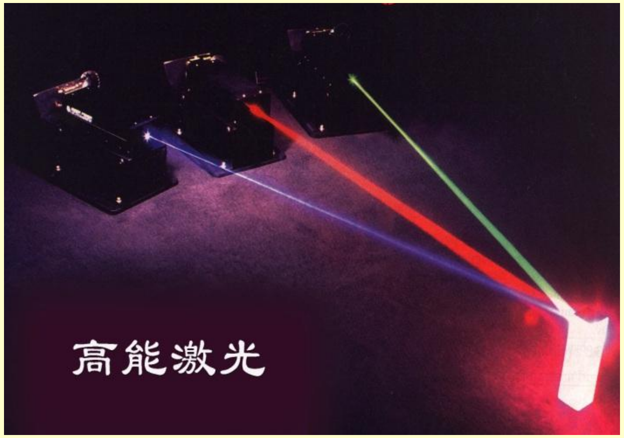
(2)Earthquake waves.

Other classification:

(1)One-dimensional waves: a wave in a string;

(2)Two-dimensional waves: water wave;

(3)Three-dimensional waves: the flash of light.



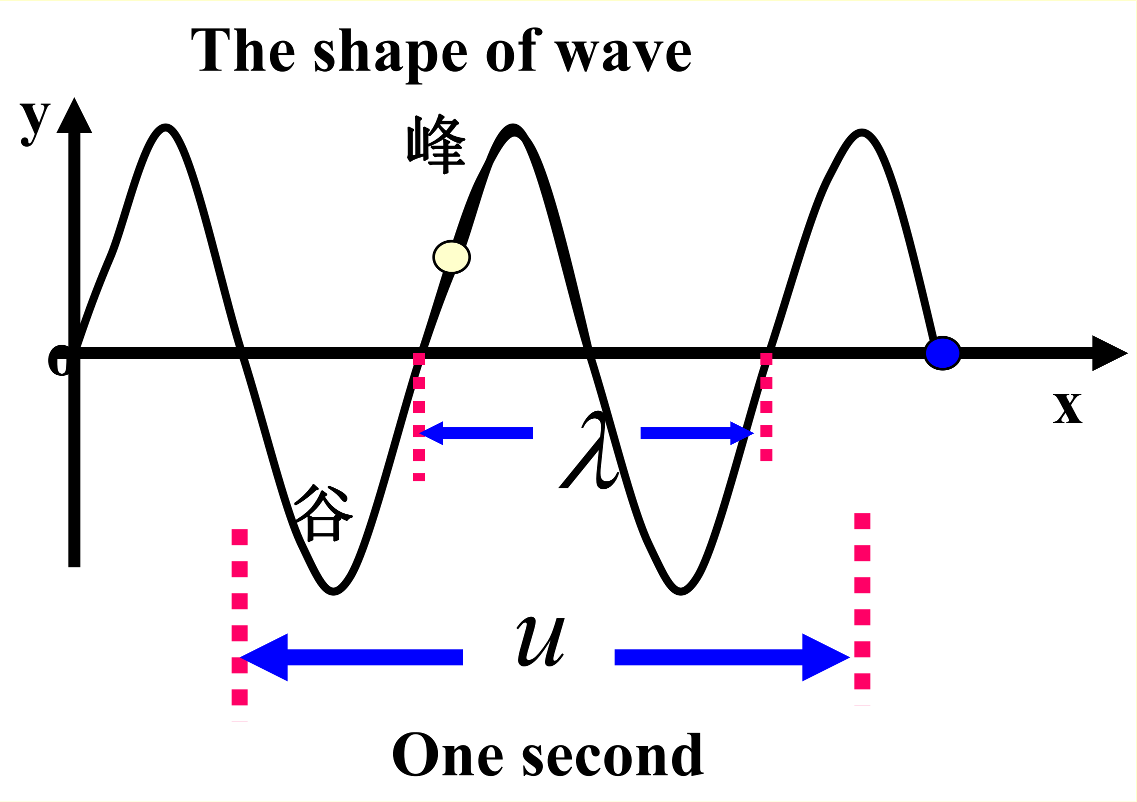
11.1.3 描述波动的三个物理量

Take a sinusoidal(正弦波) wave in a string as example.

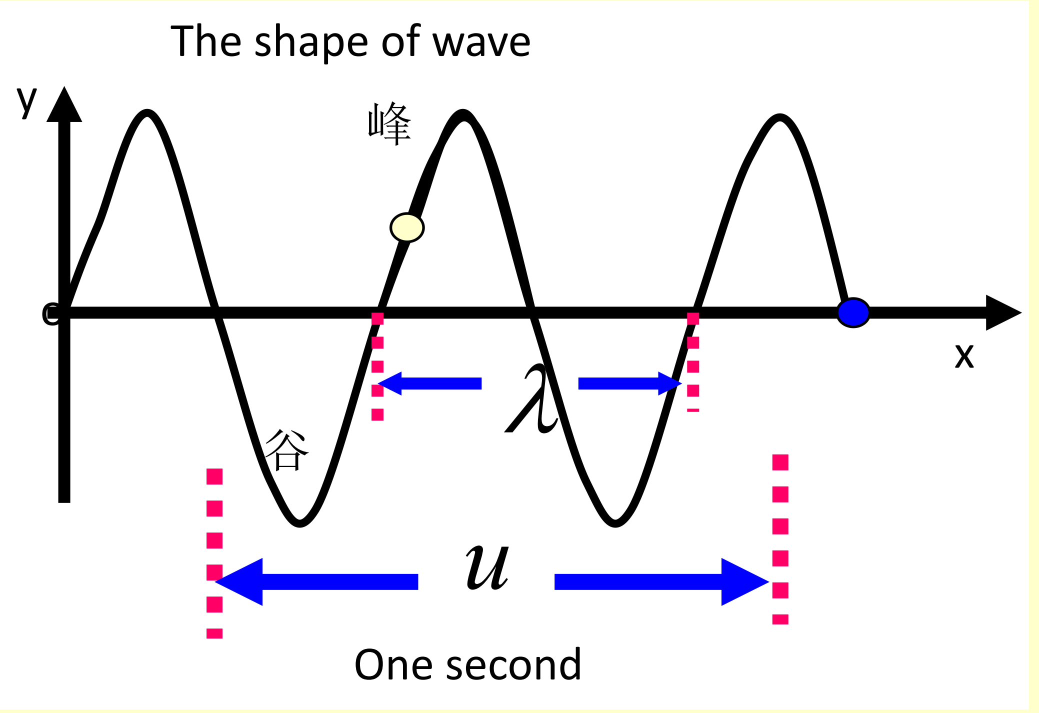
Crest:波峰(peak)

Trough:波谷(valley)

1. 波速 *u* ： 单位时间内一定振动状态或位相沿波线传播的距离。



2. 波长λ: 同一波线上振动位相差为2π的相邻的两质点间的距离。
the distance from crest to adjacent(毗连的） crest or trough to adjacent trough.



3. 周期T: 波传播一个波长所需的时间。

the time in which wave traverses a distance of a wavelength.

频率ν: $\nu = \dfrac{1}{T}$ 即一秒钟通过横截面的完整波形的个数。

波的周期和频率与波源的振动周期及频率相同。

波速：由媒质的性质决定。如空气声速不同于钢轨中的速度。

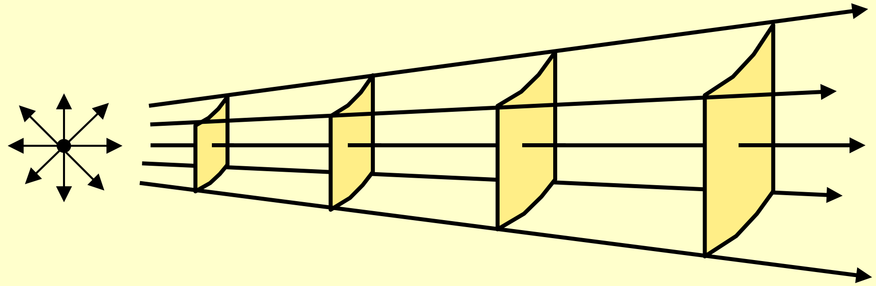
$u = \sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$ （固体中横波） $u = \sqrt{\dfrac{K}{\rho}}$ （纵波）

G为固体的切变模量，K为介质的体积模量，ρ为介质的密度。

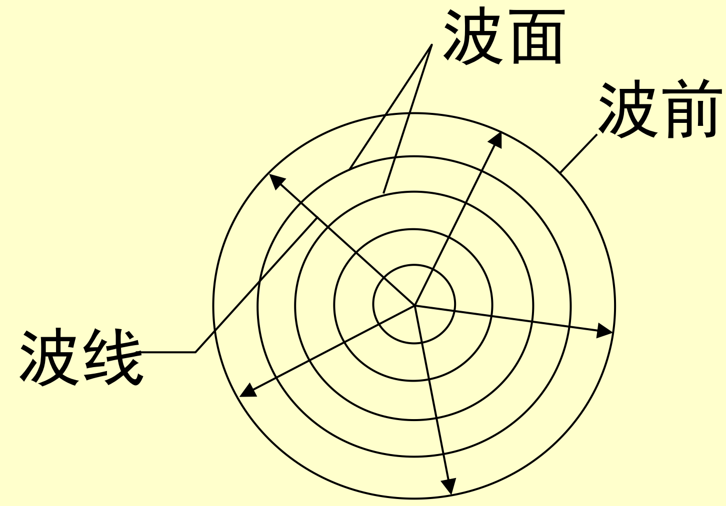
波长：描述波的空间周期性，与波速和频率满足：

$$\boxed{\lambda = u \cdot T = \frac{u}{\nu} = \frac{2\pi \cdot u}{\omega}}$$

11.1.4 波线和波面



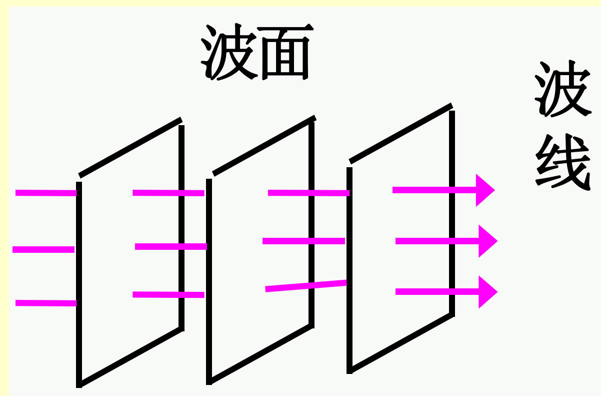
(*a*) 点波源



(*b*) 球面波

1、波线：波的传播方向。**the direction of wave transmission or wave propagating line.**

2、波面（同相面）：振动传播时相位相同的点所组成的面。**A surface marking the points that have same phase is called the same phase surface.**



平面波

最前面的一个波面称波阵面（或波前）。

球面波和平面波：波阵面为球面（平面）。

在各向同性介质中，波线恒与波面垂直。

11.1.5 简谐波 Harmonic move

一般说来，波动中各质点的振动是复杂的。最简单而又最基本的波动是简谐波，即波源以及介质中各质点的振动都是简谐振动。

这种情况只能发生在各向同性、均匀、无限大、无吸收的连续弹性介质中。

由于任何复杂的波都可以看成由若干个简谐波叠加而成，因此，研究简谐波具有特别重要的意义。

§11-2　平面简谐波的波动方程

The wave equation of plane harmonic waves

11.2.1 平面简谐波的波动方程

在同一时刻，沿着波的传播方向，各质点的振动状态或位相依次落后；

波动是介质中大量质点参与的集体运动（振动）。

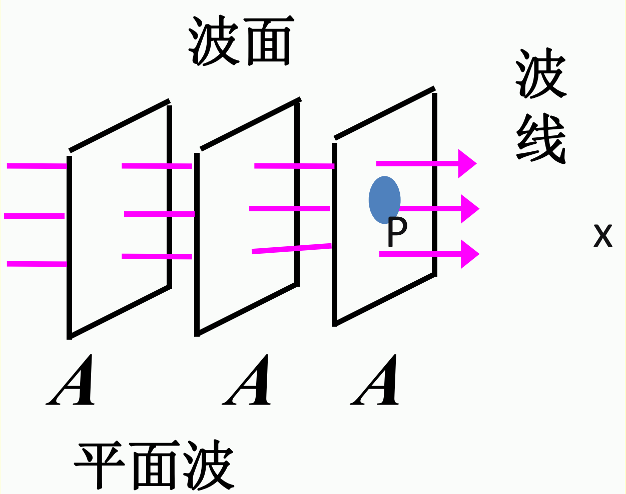
如何用数学式来描述大量质点以一定位相关系进行集体振动呢？

1、思路

介质中所有质点的振动方程

任一波面上任一质点振动方程通式

任一波线上任一质点振动方程式的通式



2、过程

条件：

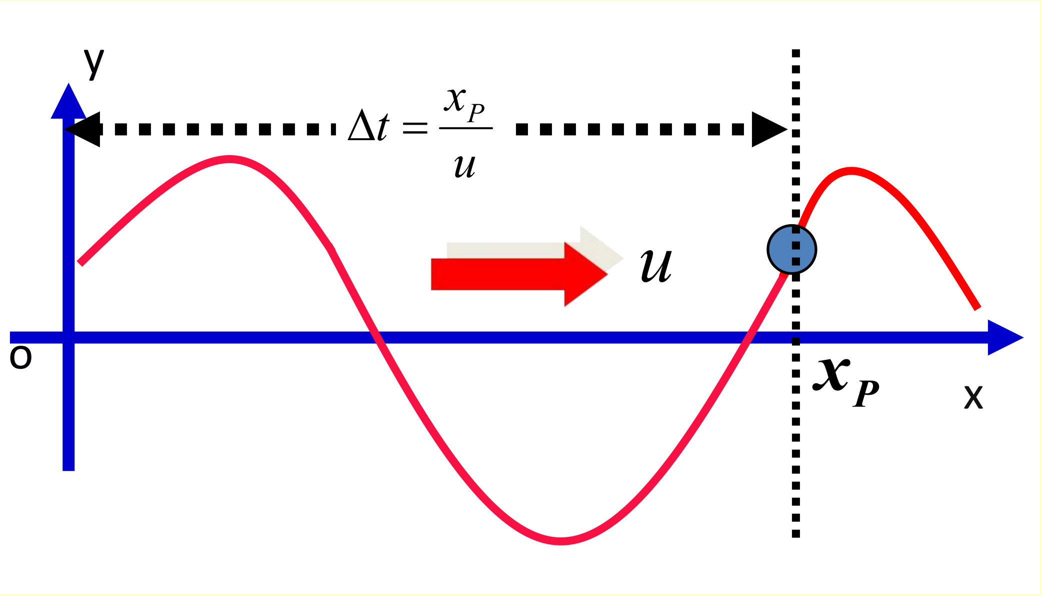
A、波源在坐标原点，X轴与某一波线重合；

B、波是沿着X轴正向传播，传播速度为 u；

C、波源的振动方程 $y(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ ；

在波线ox上任选一点P来研究. 已知 o点的运动方程为

$$y_o = A\cos(\omega t + \varphi)$$



P点的运动状态是由o点的运动状态经一段时间传过来的。

$t - \frac{x_P}{u}$时刻o点的运动状态

经 $\frac{x_P}{u}$ 时间到达

t时刻P点的运动状态

与相同

经 $\frac{x_P}{u}$ 时间到达

$t-\frac{x_P}{u}$时刻P点的运动状态

t时刻P点的运动状态

与相同

$$y_o(t-\frac{x_P}{u})=A\cos[\omega(t-\frac{x_P}{u})+\varphi]$$

= t时刻P点的运动状态

所以t时刻P点的运动状态为：

$$y_P(t)=y_o(t-\frac{x_P}{u})=A\cos[\omega(t-\frac{x_P}{u})+\varphi]$$

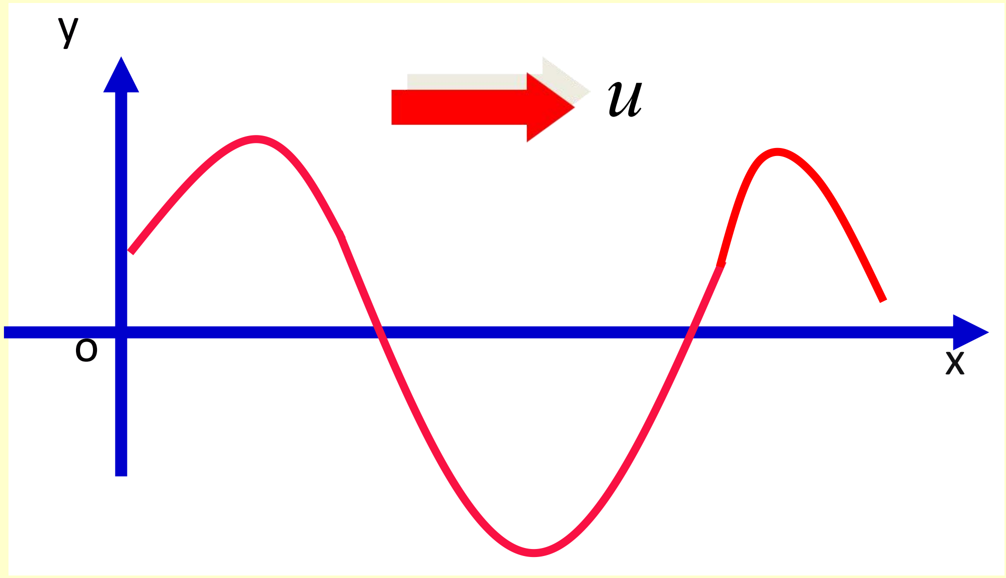
因为P为任意一点，去掉下标P, x轴上任一点(坐标x）满足：

$$y=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

$$y = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

上式所表示的是任一波线上任一点振动方程的通式，此即所求的平面简谐波的的波动表达式。

which is called the wave equation of plane harmonic wave.



3、波动表达式的多种形式：

将 $\omega = 2\pi\nu = \dfrac{2\pi}{T}, u = \dfrac{\lambda}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}\lambda$ 等代入：

$$y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

$$= A\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0)$$

$$= A\cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \varphi_0]$$

11.2.2 波动方程的物理意义

振动 $y=f(t)$ 描述一个质点的位移随时间变化的规律。

波动 $y=f(x,t)$ 描述波线上所有质点的位移随时间变化的规律。

1、假定 $x=x_0$ 常数: 则考察的是波线上某固定点

$$y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x_0}{u}\right) + \varphi_0\right]$$

$$= A\cos\left(\omega t - 2\pi\frac{x_0}{\lambda} + \varphi_0\right)$$

$$y = A\cos(\omega t + \varphi')$$ $y=f$（x，t） <u>蜕变成</u> $y=f$（t）

when x is given to be x_0, y is the function of time t, which shows the displacement of particle at point x_0. That is the equation of vibration of the particles at point x_0.

（1）波动方程蜕变成 x_0 处质元的振动方程

$$y(t) = A\cos(\omega t + \varphi') = A\cos\left(\omega t - 2\pi\frac{x_0}{\lambda} + \varphi_0\right)$$

$$v_P = \frac{dy_P}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi')$$

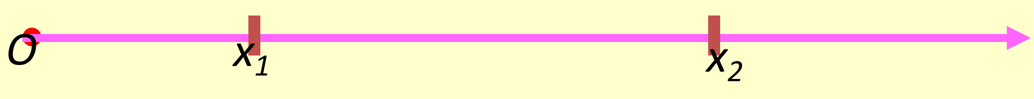
（2）x_0 处质元的振动初位相

$$\varphi' = -\frac{2\pi}{\lambda}x_0 + \varphi_0$$

“—”表示x_0 处质元的位相落后于原点0。

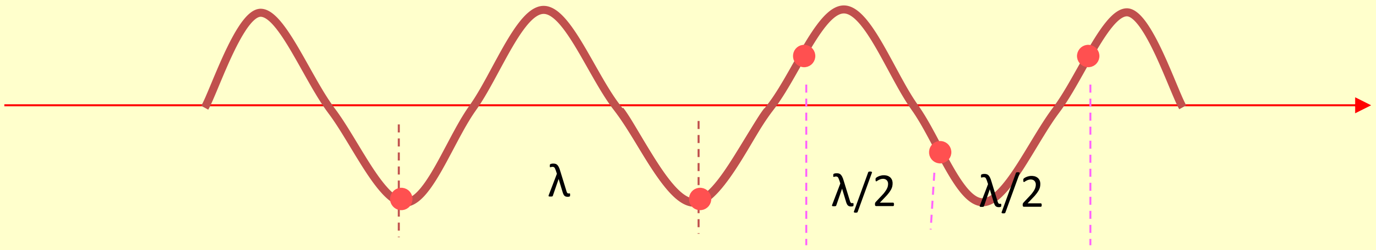
（3）同一时刻，同一波线上两点的振动位相差

$$\Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1)$$



当 $\begin{cases} x_2 - x_1 = k\lambda \text{时}, & \Delta\varphi = 2k\pi \\ x_2 - x_1 = (2k+1)\dfrac{\lambda}{2} \text{时}, & \Delta\varphi = (2k+1)\pi \end{cases}$

可见，**波长反映了波动在空间上的周期性**。



2、假定$t=t_0$常数

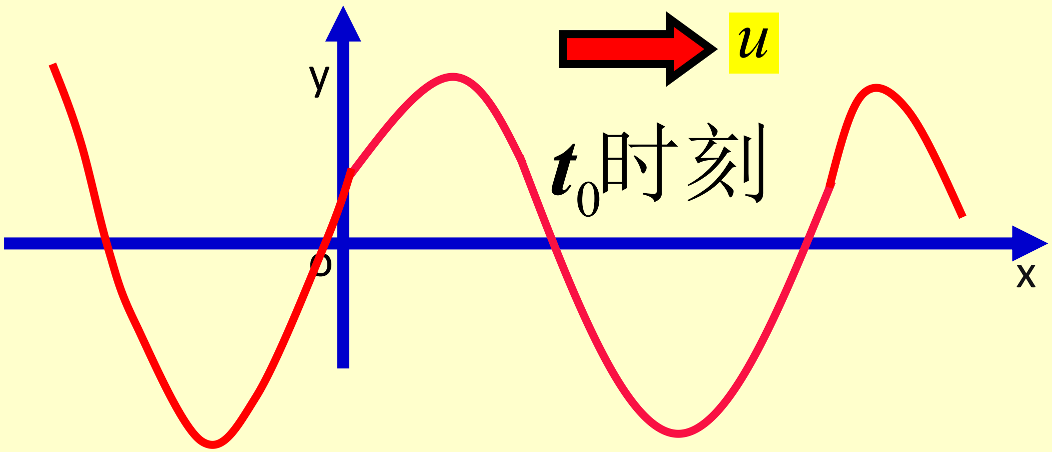
相当于对某波动过程照相后的相片，这时 ***y=f(x,t)*****蜕变成** ***y=f(x)***

When t is given, y is the function of x, which indicates the shape of wave at time t(摄像法）.

（1）波动方程蜕变成 t_0 时刻的波形方程

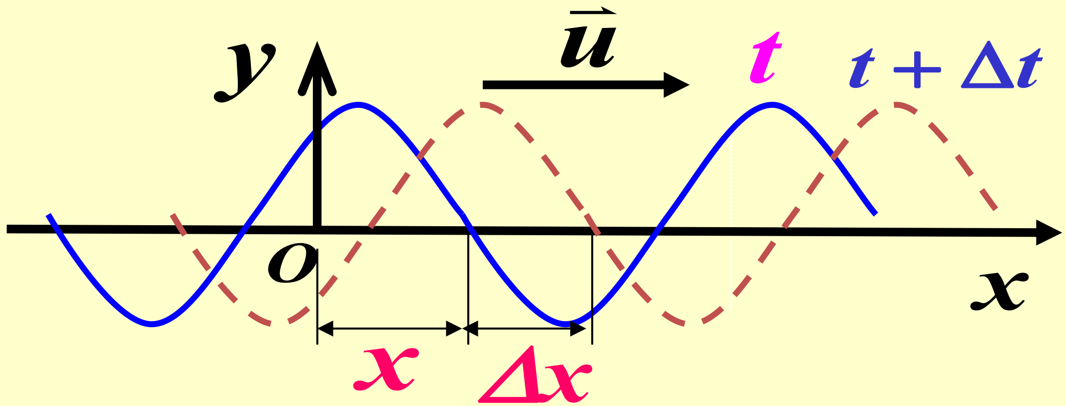
$$y=A\cos\left[\omega\left(t_0-x/u\right)+\varphi_0\right]$$

t_0时刻的波形方程



（2） 时间延续△t，整个波形向前推进 $\Delta x=u\cdot\Delta t$

据此，可由已知 时刻的波形图画出下一时刻的波形图；



（3）同一质元在不同的两个时刻的振动位相差

设：$y_1 = A\cos(2\pi\nu t_1 - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0)$ $\quad \varphi_1 = 2\pi\nu t_1 - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0$

$y_2 = A\cos(2\pi\nu t_2 - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0)$ $\quad \varphi_2 = 2\pi\nu t_2 - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0$

$\therefore \Delta\phi = 2\pi\nu(t_2 - t_1) = 2\pi\frac{t_2 - t_1}{T}$ $\quad$ 当$\Delta t = kT$ 则 $\Delta\varphi = 2k\pi$

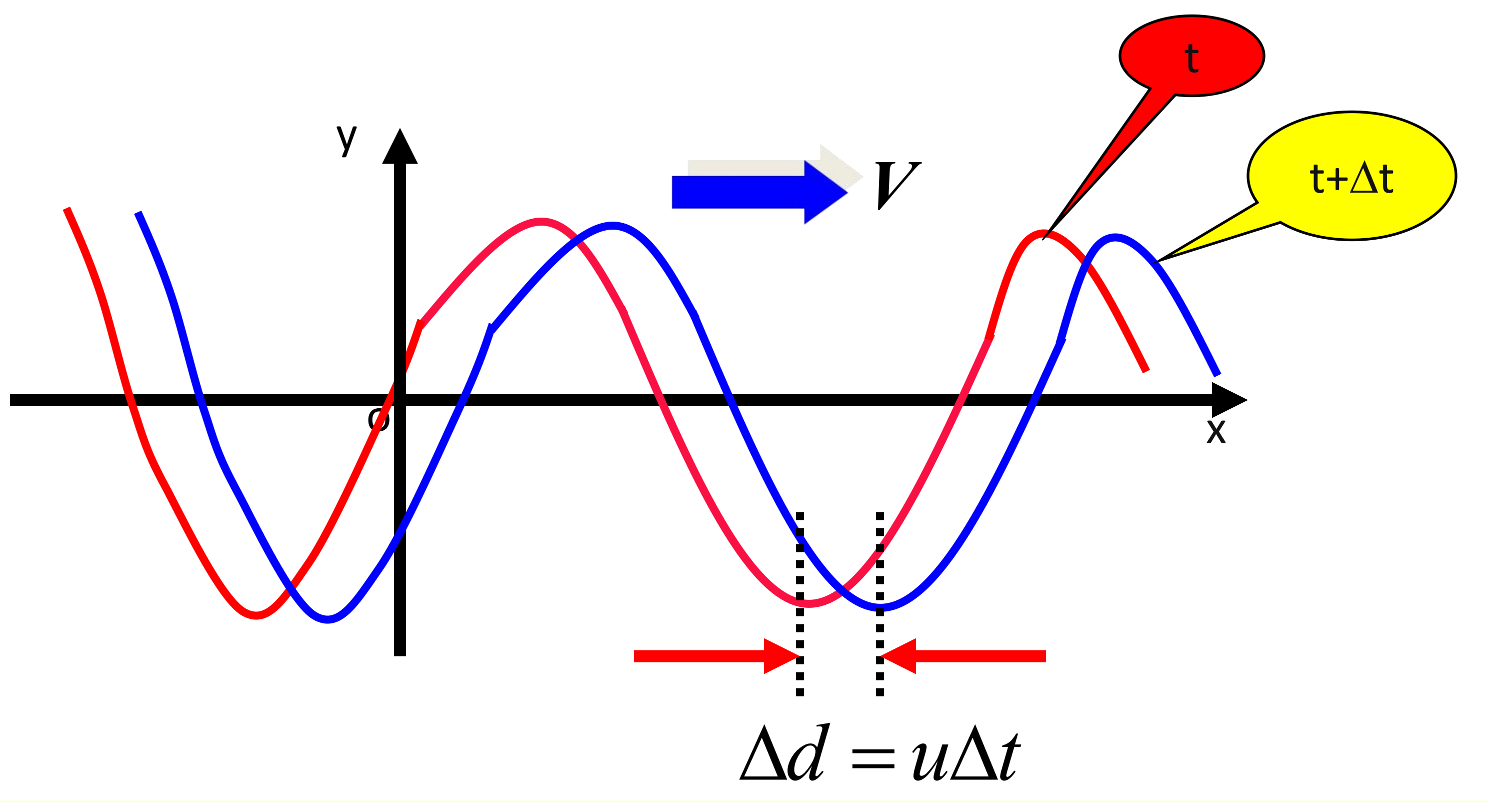
所以波动周期T反映了波动在时间上的周期性。

3、 x，t 都变

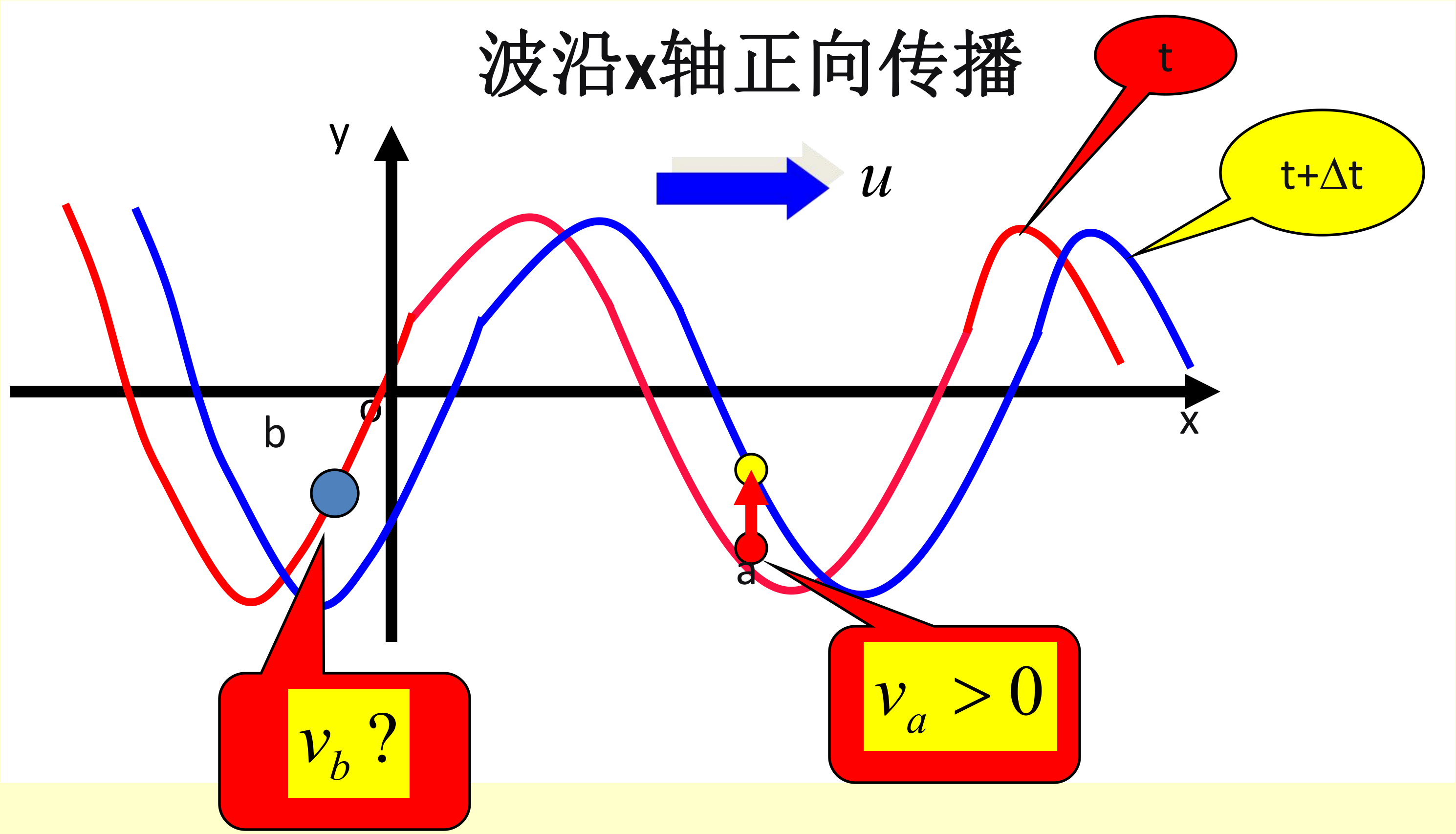
***y=f(x,t)*描述波线上各个不同质点在不同时刻的位移.**

In general, y is the function of x and t, which describes the traveling wave:

t 时刻的波形方程为: y(x)=Acosω(t－x / u)



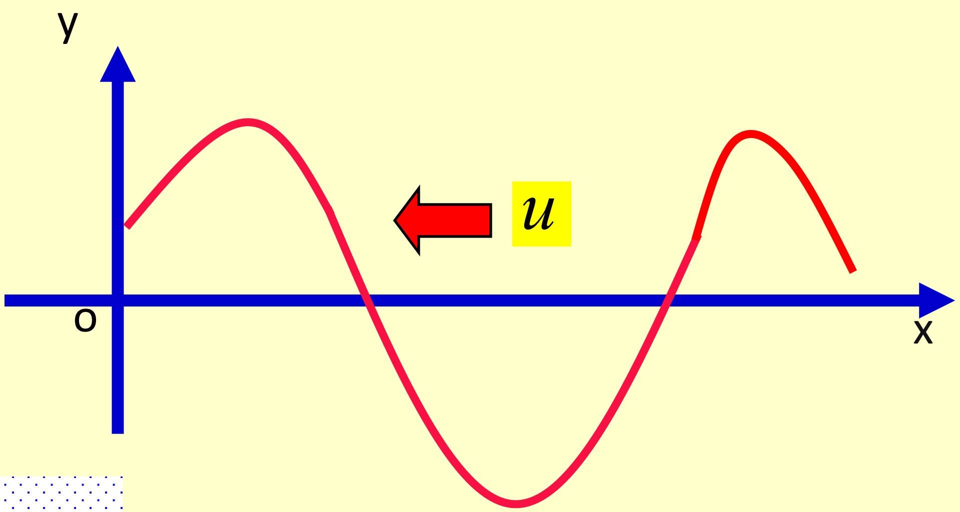
4. 如何判断波线上一点某一时刻的运动方向（以横波为例）？



当波沿x轴正向传播时：“下坡上”，“上坡下”

5. 前面讨论的波沿x轴正向传播，如波沿x轴负向传播，如何写出相应波动方程？将上面所有方程中的速度作以下变换：

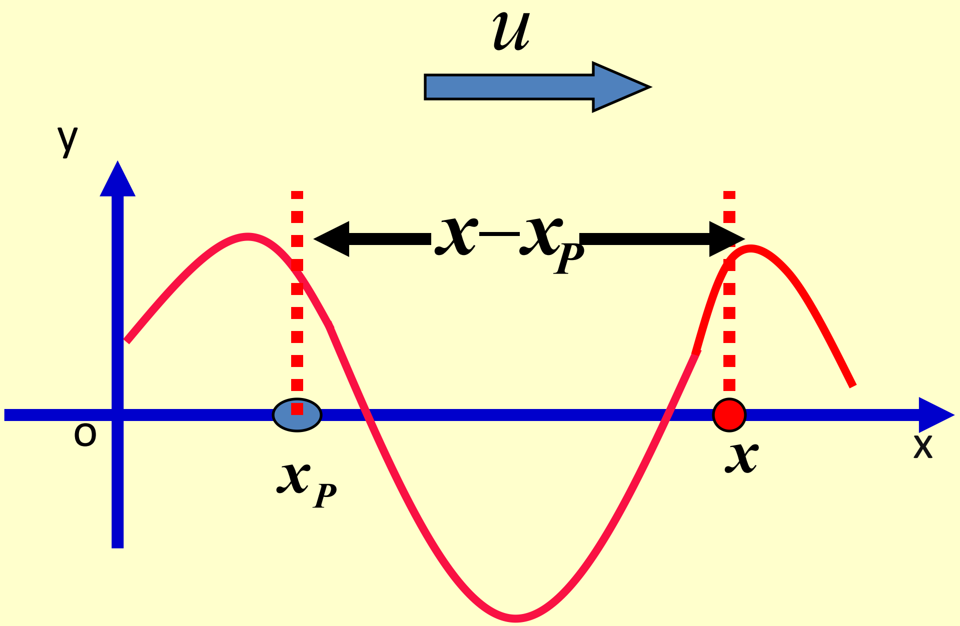
$$u \rightarrow -u$$



$$y = A\cos[\omega(t + \frac{x}{u}) + \varphi]$$

6. 已知x_P的振动方程, 写出波动方程

$$y_P = A\cos(\omega t + \varphi_P)$$



$$y_P = A\cos[\omega(t - \frac{x - x_P}{u}) + \varphi_P]$$

如 $u < 0$ ， 波动方程?

例1 一横波沿绳子传播，波的表达式为 $y = 0.05\cos(100\pi t - 2\pi x)$ ，试求：

(1) 此波的振幅、波速、频率和波长；

(2) 绳上各质点的最大振动速度和最大振动加速度；

(3) $x_1 = 0.2$m和 $x_2 = 0.7$m处二质元的相位差。

$$y = A\cos[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0]$$

解：(1) 由题意知，

$$y = 0.05\cos(100\pi t - 2\pi x) = 0.05\cos\left[100\pi\left(t - \frac{x}{50}\right)\right]$$

与标准形式相比较知，此波沿x轴正向传播，而

$A = 0.05m$ $\nu = 50Hz$ $\omega = 100\pi = 2\pi\nu$ $u = 50m/s$ $\lambda = u/\nu = 1m$

(2) 质点的最大振动速度为 $u_{\max} = A\omega = 5\pi = 15.7m/s$

质元的最大振动加速度为 $a_{\max} = A\omega^2 = 4.93\times10^3 m\cdot s^{-2}$

(3) 相位差 $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = \pi$ ，这两个质元的振动相位相反。

例2 一平面简谐波以6 m·s^{-1} 的速率沿x轴正方向传播，已知t=3 s时波形如图11.9(a)所示。
(1)写出坐标原点的振动方程；
(2)写出波动方程。

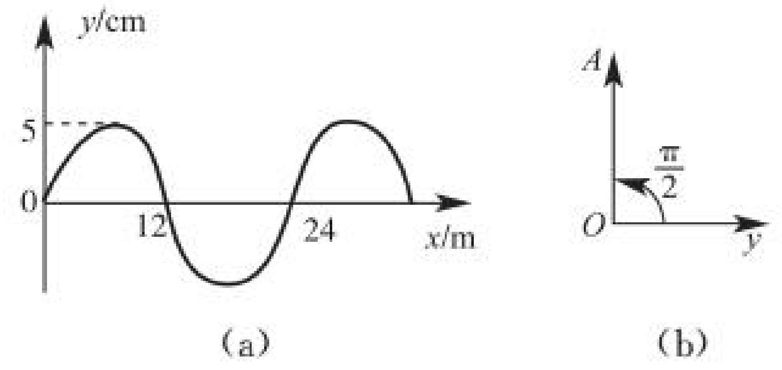


图 11.9

解： 由图11.9看出 $A=0.05m$，$\lambda=24m$ ，则

$$T=\frac{\lambda}{u}=\frac{24}{6}=4 \qquad \omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

在t =3 s，坐标原点y=0，v < 0，由旋转矢量图11.9(b)知

$$\varphi_{t=3}=\frac{\pi}{2}$$

而 $\varphi_{t=3}=\omega\times 3+\varphi_0$ ，即 $\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\times 3+\varphi_0$

所以有 $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} = -\pi$

因此坐标原点的振动方程为

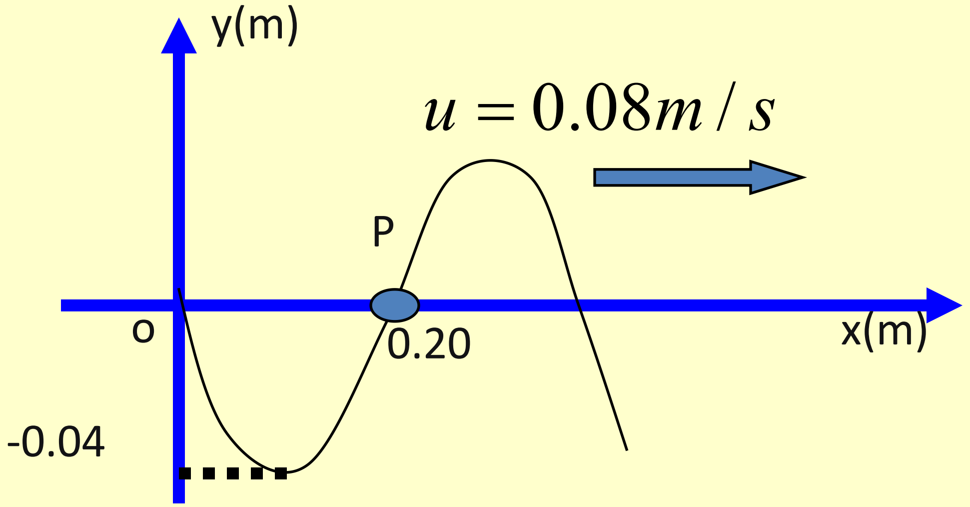
$$y = 0.05\cos\left(\frac{\pi}{2}t - \pi\right)$$

波动方程为

$$y = 0.05\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(t - \frac{x}{6}\right) - \pi\right]$$

例3:如图为一平面简谐波t=0时刻的波形图。求：（1）该波的波动方程；（2）P处质点的振动方程。

解：由图可知：



$$A = 0.04m \quad \lambda = 0.4m$$

$$V = 0.08m/s \quad T = \frac{\lambda}{V} = 5s$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{5}$$

（1）先求o点的振动方程：

$$y_o = 0.04\cos(\frac{2\pi}{5}t + \varphi)$$

t=0时刻

$$\begin{cases} y_o(0) = 0 \\ v_o(0) > 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow y_o = 0.04\cos(\frac{2\pi}{5}t - \frac{\pi}{2})$$

所以波的波动方程为：

$$y = 0.04\cos[\frac{2\pi}{5}(t - \frac{x}{0.08}) - \frac{\pi}{2}]$$

（2）P点（$x_P = 0.20m$）的振动方程

$$y_P = 0.04\cos[\frac{2\pi}{5}(t - \frac{x_P}{0.08}) - \frac{\pi}{2}]$$

$$= 0.04\cos[\frac{2\pi}{5}(t - \frac{0.20}{0.08}) - \frac{\pi}{2}]$$

$$= 0.04\cos(\frac{2\pi}{5}t - \frac{3\pi}{2})$$

例题4　已知波动方程为 $y = 0.1\cos\frac{\pi}{10}(25t - x)$ 其中x，y的单位为m，t的单位为s，求　(1)振幅、波长、周期、波速；(2)距原点为8 m和10 m两点处质点振动的位相差；(3)波线上某质点在时间间隔0.2 s内的位相差.

解：(1)用比较法，将波动方程改写为： $y = 0.1\cos\frac{25}{10}\pi\left(t - \frac{x}{25}\right)$

并与波动方程的标准形式 $y = A\cos[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0]$ 比较，即可得

$$A = 0.1m, \omega = \frac{25}{10}\pi s^{-1}, u = 25m/s, \varphi_0 = 0$$

所以 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.8s, \lambda = uT = 20m$

(2)同一时刻波线上坐标为 x_1 和 x_2 两点处质点振动的位相差

$$\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = -2\pi\frac{\delta}{\lambda}$$

$\delta = x_2 - x_1$是波动传播到x_1和x_2处的波程之差，上式就是同一时刻波线上任意两点间位相差与波程差的关系.

$$\delta = x_2 - x_1 = 10 - 8 = 2\text{m时，} \Delta\varphi = -2\pi\frac{\delta}{\lambda} = -\frac{\pi}{5}$$

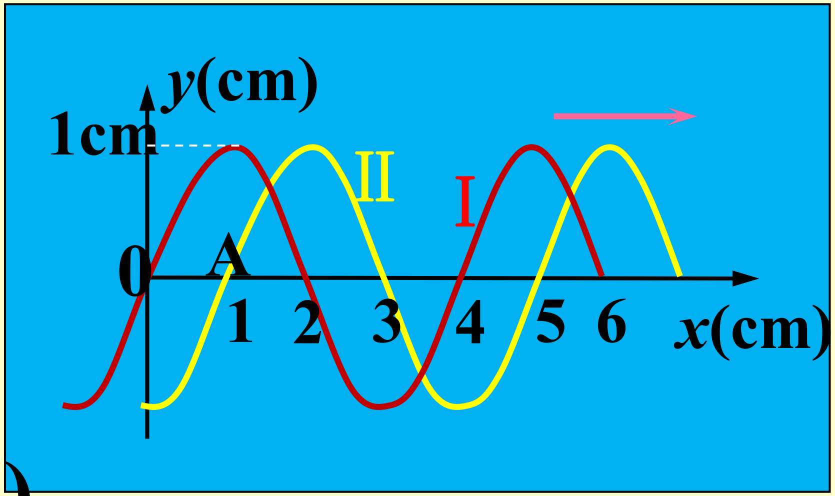
负号表示x_2处的振动位相落后于x_1处的振动位相.

(3)对于波线上任意一个给定点(x一定)，在时间间隔Δt内的位相差

$$\Delta\varphi = \omega\left(t_2 - t_1\right) = \omega\Delta t$$

$$\Delta t = 0.2s, \text{则}\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$$

例5. 已知$t=0$时的波形曲线为Ⅰ，波沿ox正方向传播，经$t=1/2s$后波形变为曲线Ⅱ。已知波的周期$T>1s$，试根据图中给出的条件求出波的表达式，并求A点的振动方程。



解： $A=0.01\text{m}$ $\quad\lambda=0.04\text{m}$

波速：$u=\dfrac{x_1-x_o}{t}=\dfrac{0.01}{1/2}=0.02\,m/s$

$$T=\frac{\lambda}{u}=\frac{0.04}{0.02}=2\text{s}\qquad \omega=\frac{2\pi}{T}=\pi\,\text{s}^{-1}$$

原点振动方程：$y_o=A\cos(\omega t+\varphi_0)$

初始条件：$0=A\cos\varphi_0\ \rightarrow\varphi_0=\pm\dfrac{\pi}{2}$

$v=-\omega A\sin\varphi_0<0\quad\rightarrow\varphi_0=\dfrac{\pi}{2}\qquad \therefore y_o=0.01\cos(\pi t+\dfrac{\pi}{2})$

波动方程：$y=0.01\cos[\pi(t-\dfrac{x}{0.02})+\dfrac{\pi}{2}]$

A点振动方程：$y_A=0.01\cos[\pi(t-\dfrac{0.01}{0.02})+\dfrac{\pi}{2}]=0.01\cos\pi t$