$$f(z)=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}=\frac{-1}{1-z}-\frac{1}{z},$$

这里 $|z|<1$,故

$$f(z)=-\frac{1}{z}-(1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots)$$

$$=-\frac{1}{z}-1-z-z^2-\cdots-z^n-\cdots.$$

(2) 在 $0<|z-1|<1$ 内,

$$f(z)=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{1+(z-1)},$$

这里 $|1-z|<1$,故

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)}-[1-(z-1)+(z-1)^2-\cdots+(-1)^n(z-1)^n+\cdots]$$

$$=\frac{1}{(z-1)}-1+(z-1)-(z-1)^2+\cdots+(-1)^{n+1}(z-1)^n+\cdots.$$

(3) 在 $1<|z|<+\infty$ 内,

$$f(z)=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}=-\frac{1}{z}+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{z}\right)},$$

这里 $\left|\frac{1}{z}\right|<1$,故

$$f(z)=-\frac{1}{z}+\frac{1}{z}\left[1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots+\frac{1}{z^n}+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots+\frac{1}{z^n}+\cdots.$$

(4) $|z-a|<a-1$($a>1$ 正数)内,

$$f(z)=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}$$

$$=\frac{1}{a-1}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-a}{a-1}}-\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-a}{a}},$$

扫描全能王 创建

这里 $\left|\frac{z-a}{a-1}\right|<1$，$\left|\frac{z-a}{a}\right|<1$. 故

$$f(z)=\frac{1}{a-1}\cdot\left[1-\frac{z-a}{a-1}+\frac{(z-a)^2}{(a-1)^2}+\cdots\right]$$

$$-\frac{1}{a}\cdot\left[1-\frac{z-a}{a}+\frac{(z-a)^2}{a^2}+\cdots\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-a)^n}{(a-1)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-a)^n}{a^{n+1}}.$$

例 35 在点 $z=\infty$ 的去心邻域内将函数 $f(z)=e^{\frac{z}{z+2}}$ 展成洛朗级数.

解 令 $z=\frac{1}{\xi}$，则得

$$f\left(\frac{1}{\xi}\right)=e^{\frac{1/\xi}{(1/\xi)+2}}=e^{\frac{1}{1+2\xi}},$$

而点 $\xi=0$ 是此函数的解析点，将此函数简记为 $\varphi(\xi)$，得

$$\varphi'(\xi)=-\frac{2}{(1+2\xi)^2}e^{\frac{1}{1+2\xi}},$$

$$\varphi''(\xi)=e^{\frac{1}{1+2\xi}}\left[\frac{8}{(1+2\xi)^2}+\frac{4}{(1+2\xi)^4}\right].$$

等等，于是

$$\varphi(0)=e,\varphi'(0)=-2e,\varphi''(0)=12e,\cdots,$$

由此得 $\varphi(\xi)=e(1-2\xi+6\xi^2+\cdots)$. 所以

$$e^{\frac{z}{z+2}}=e\left(1-\frac{2}{z}+\frac{6}{z^2}+\cdots\right)\quad(2<|z|<+\infty),$$

这里 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点，如令 $f(\infty)=e$，则化为解析点.

§4.3 教材习题同步解析

4.1 下列序列是否有极限？如果有极限，求出其极限.

(1) $z_n=i^n+\frac{1}{n}$； (2) $z_n=\frac{n!}{n^n}i^n$； (3) $z_n=\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^n$.

解 (1) 当 $n\to\infty$ 时，i^n 不存在极限，故 z_n 的极限不存在.

(2) $|z_n| = \frac{n!}{n^n} \to 0(n\to\infty)$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

(3) $z_n = \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^n = \frac{z^{2n}}{|z|^{2n}} \xlongequal{\text{令 } z=re^{i\theta}} \frac{r^{2n}\cdot e^{i2n\theta}}{r^{2n}}$

$= \cos 2n\theta + i\sin 2n\theta$,

$n\to\infty$ 时，$\cos 2n\theta$，$\sin 2n\theta$ 的极限都不存在，故 $z_n = \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^n$ 无极限.

4.2 下列级数是否收敛？是否绝对收敛？

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{i}{n}\right)$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}$； (3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+i)^n$.

解 (1) 因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散. 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{i}{n}\right)$ 发散.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{i^n}{n!}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛；故(2)绝对收敛.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+i)^n = \lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2})^n e^{\frac{n\pi}{4}i} \not\to 0$，故发散.

4.3 试证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2z)^n$ 当 $|z| < \frac{1}{2}$ 时绝对收敛.

证 当 $|z| < \frac{1}{2}$ 时，令 $|z| = r < \frac{1}{2}$，

$$|(2z)^n| = 2^n \cdot |z|^n < 1,$$

且

$$|(2z)^n| = (2r)^n < 1.$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2r)^n$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2z)^n$ 绝对收敛.

4.4 试确定下列幂级数的收敛半径.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$； (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^n$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$，故 $R = 1$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$,

故 $R=\frac{1}{e}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$,

故 $R=\infty$.

4.5 将下列各函数展开为 z 的幂级数,并指出其收敛区域.

(1) $\frac{1}{1+z^3}$; (2) $\frac{1}{(z-a)(z-b)}$ $(a\neq0,b\neq0)$;

(3) $\frac{1}{(1+z^2)^2}$; (4) ch z; (5) $\sin^2 z$; (6) $e^{\frac{z}{z-1}}$.

解 (1) $\frac{1}{1+z^3}=\frac{1}{1-(-z^3)}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-z^3)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{3n},$$

原点到所有奇点的距离最小值为 1,故 $|z|<1$.

(2) $\frac{1}{(z-a)(z-b)}=\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}\right)$ $(a\neq b)$

$$=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a-z}-\frac{1}{b-z}\right)$$

$$=\frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{a\left(1-\frac{z}{a}\right)}-\frac{1}{b\left(1-\frac{z}{b}\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{b-a}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{a^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{b^{n+1}}\right),\ \left|\frac{z}{a}\right|<1,\text{且}\left|\frac{z}{b}\right|<1,$$

$$|z|<\min\{|a|,|b|\}.$$

$a=b$,则

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)}=\frac{1}{(z-a)^2}=-\left(\frac{1}{z-a}\right)'=\left(\frac{1}{a-z}\right)'$$

$$=\left(\frac{1}{a(1-z/a)}\right)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{a^{n+1}}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z^n}{a^{n+1}}\right)'$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{a^{n+1}}, |z| < |a|.$$

(3) $\frac{1}{(1+z^2)^2} = -\frac{1}{2z} \cdot \left(\frac{1}{1+z^2}\right)' = -\frac{1}{2z}\left[\sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n\right]'$

$$= -\frac{1}{2z} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2nz^{2n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} nz^{2n-2}, |z| < 1.$$

(4) $\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!}\right)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, |z| < \infty.$$

(5) $\sin^2 z = \frac{1-\cos 2z}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^n \cdot (-1)^n}{(2n)!}$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n \cdot z^n}{(2n)!}, |z| < \infty.$$

(6) 令 $f(z) = e^{\frac{z}{z-1}}, f(0) = 1$,

$$f'(z) = e^{\frac{z}{z-1}} \cdot \left(\frac{z}{z-1}\right)' = e^{\frac{z}{z-1}}\left(-\frac{1}{(z-1)^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{(z-1)^2} f(z), f'(0) = -1,$$

$$f''(z) = \frac{2}{(z-1)^3} f(z) - \frac{f'(z)}{(z-1)^2}, f''(0) = -1,$$

$$f'''(z) = \frac{-6}{(z-1)^4} f(z) + \frac{4f'(z)}{(z-1)^3} - \frac{f''(z)}{(z-1)^2}, f'''(0) = -1,$$

…

$$f(z) = 1 - z - \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} - \cdots.$$

因为 1 为 $f(z)$ 的唯一奇点,原点到 1 的距离为 1,故收敛半径 $R < 1$.

4.6 证明对任意的 z,有 $|e^z - 1| \leqslant e^{|z|} - 1 \leqslant |z| e^{|z|}$.

证 因为 $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$，$|z|<+\infty$ 所以

$$|e^z-1|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}-1\right|$$

$$=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!}=e^{|z|}-1.$$

又因为：

$$e^{|z|}-1=|z|+\frac{1}{2!}|z|^2+\cdots+\frac{1}{n!}|z|^n+\cdots$$

$$=|z|\left(1+\frac{1}{2!}|z|+\cdots+\frac{1}{n!}|z|^{n-1}+\cdots\right)$$

$$\leqslant|z|\left(1+|z|+\frac{1}{2!}|z|^2+\cdots\right)=|z|e^{|z|},$$

所以

$$|e^z-1|\leqslant e^{|z|}-1\leqslant|z|e^{|z|}.$$

4.7 求下列函数在指定点 z_0 处的泰勒展式.

(1) $\frac{1}{z^2}, z_0=1$；

(2) $\sin z, z_0=1$；

(3) $\frac{1}{4-3z}, z_0=1+i$；

(4) $\tan z, z_0=\frac{\pi}{4}$.

解 (1) $\frac{1}{z^2}=-\left(\frac{1}{z}\right)'$

$$=-\left(\frac{1}{1+z-1}\right)'=-\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n\right]'$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot n(z-1)^{n-1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(z-1)^n,\ |z-1|<1.$$

(2) $\sin z=\sin(z-1+1)$

$$=\sin(z-1)\cos 1+\sin 1\cos(z-1)$$

$$=\cos 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{2n+1}(-1)^n}{(2n+1)!}$$

$$+\sin 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{2n}(-1)^n}{(2n)!},\ |z-1|<\infty.$$

(3) $$\frac{1}{4-3z}=\frac{1}{4-3(z-z_0)-3z_0}=\frac{1}{1-3\mathrm{i}-3(z-z_0)}$$

$$=\frac{1}{1-3\mathrm{i}}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{1-3\mathrm{i}}(z-z_0)}$$

$$=\frac{1}{1-3\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{3}{1-3\mathrm{i}}(z-z_0)\right]^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(1-3\mathrm{i})^{n+1}}(z-z_0)^n,$$

$$|z-(1+\mathrm{i})|<\left|\frac{1-3\mathrm{i}}{3}\right|=\frac{\sqrt{10}}{3}.$$

(4) 令 $f(z)=\tan z, f(z_0)=1$,

$$f'(z)=(\tan z)'=\left(\frac{\sin z}{\cos z}\right)'=\frac{\cos^2 z+\sin^2 z}{\cos^2 z}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 z},\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2.$$

$$f''(z)=\left(\frac{1}{\cos^2 z}\right)'=\frac{-2}{\cos^3 z}(-\sin z)=\frac{2\tan z}{\cos^2 z}, f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=4.$$

$$f'''(z)=\left(\frac{2f(z)}{\cos^2 z}\right)'=\frac{2f'(z)\cdot\cos^2 z-2f(z)2\cos z(-\sin z)}{\cos^4 z}$$

$$=\frac{2f'(z)\cos z+4f(z)\sin z}{\cos^3 z}, f'''\left(\frac{\pi}{4}\right)=16.$$

…

故

$$\tan z=1+2\left(z-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{8}{3}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3+\cdots,$$

$$\left|z-\frac{\pi}{4}\right|<\frac{\pi}{4}.$$

4.8 将下列各函数在指定圆环内展开为洛朗级数.

(1) $\dfrac{z+1}{z^2(z-1)}$, $0<|z|<1$, $1<|z|<\infty$;

(2) $z^2 e^{1/z}$, $0<|z|<\infty$;

(3) $\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$, $1<|z|<2$;

(4) $\cos\dfrac{i}{1-z}$, $0<|z-1|<\infty$.

解 (1) $0<|z|<1$ 时,

$$\frac{z+1}{z^2(z-1)}=\frac{1}{z^2}\left(1-\frac{2}{1-z}\right)=\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}z^n,$$

当 $1<|z|<\infty$ 时, $0<\left|\dfrac{1}{z}\right|<1$,

$$\frac{z+1}{z^2(z-1)}=\frac{1}{z^2}\left(1+\frac{2}{z-1}\right)=\frac{1}{z^2}\left(1+\frac{2}{z}\cdot\frac{1}{1-1/z}\right)$$

$$=\frac{1}{z^2}+\frac{2}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=\frac{1}{z^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{z^{n+3}}.$$

(2) $z^2e^{\frac{1}{z}}=z^2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{z}\right)^n\Big/n!=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{2-n}}{n!}.$

(3) $$\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}=\frac{1}{z-2}-\frac{2}{z^2+1}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{2}{z^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n-\frac{2}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z^2}\right)^n$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{z^{2n+2}},\ 1<|z|<2.$$

(4) $0<|z-1|<\infty$ 时,

$$\cos\frac{i}{1-z}=\frac{e^{\frac{-1}{1-z}}+e^{\frac{1}{1-z}}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{1-z}\right)^n}{n!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{1-z}\right)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-z)^{-2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!\,(1-z)^{2n}}.$$

4.9 将$f(z)=\dfrac{1}{z^3-5z+6}$分别在有限孤立奇点处展开洛朗级数.

解 $f(z)=\dfrac{1}{z-3}-\dfrac{1}{z-2}$在复平面上的有限孤立奇点为$z_1=2$与$z_2=3$.

(1) 当$0<|z-2|<1$时,

$$f(z)=\frac{-1}{1-(z-2)}-\frac{1}{z-2}$$
$$=-\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n-\frac{1}{z-2}$$
$$=-\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^{n-1}.$$

(2) 当$1<|z-2|<+\infty$时,

$$f(z)=\frac{1}{z-2-1}-\frac{1}{z-2}$$
$$=\frac{1}{z-2}\frac{1}{1-\frac{1}{z-2}}-\frac{1}{z-2}$$
$$=\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z-2}\right)^n-\frac{1}{z-2}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-2)^{n+2}}.$$

(3) 当$0<|z-3|<1$时,

$$f(z)=\frac{1}{z-3}-\frac{1}{1+(z-3)}=\frac{1}{z-3}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-3)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-3)^{n-1}.$$

(4) 当$1<|z-3|<+\infty$时,

$$f(z)=\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z-3}\frac{1}{1+\frac{1}{z-3}}$$
$$=\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z-3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z-3}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(z-3)^{n+2}}.$$

4.10 将$f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^2}$在 $z = \mathrm{i}$ 的去心邻域内展开成洛朗级数.

解 $f(z)$的孤立奇点为 $\pm\mathrm{i}$.$f(z)$在最大的去心邻域$0 < |z-\mathrm{i}| < 2$内解析.

当$0 < |z-\mathrm{i}| < 2$时,

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z-\mathrm{i})^2} \cdot \frac{1}{(z+\mathrm{i})^2}$$

$$= -\frac{1}{(z-\mathrm{i})^2} \cdot \left(\frac{1}{z+\mathrm{i}}\right)'$$

$$= -\frac{1}{(z-\mathrm{i})^2} \left(\frac{1}{2\mathrm{i}} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{z-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}}\right)'$$

$$= -\frac{1}{(z-\mathrm{i})^2} \cdot \frac{1}{2\mathrm{i}} \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}\right)^n \cdot (-1)^n\right]'$$

$$= -\frac{1}{(z-\mathrm{i})^2} \cdot \frac{1}{2\mathrm{i}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n \cdot \frac{(z-\mathrm{i})^{n-1}}{(2\mathrm{i})^n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \frac{(z-\mathrm{i})^{n-3}}{(2\mathrm{i})^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (n+1) \cdot \frac{(z-\mathrm{i})^{n-2}}{(2\mathrm{i})^{n+2}}.$$

上式即为$f(z)$在 $z = \mathrm{i}$ 的去心邻域内的洛朗级数.

§4.4 自 测 题

自测题 1

(一) 填空题

1. 函数$f(z) = \dfrac{1}{z-\mathrm{i}} e^{\frac{1}{z-3}}$在 $z = 0$ 处 Taylor 展开式的收敛半径是______.