4 高斯定理及应用

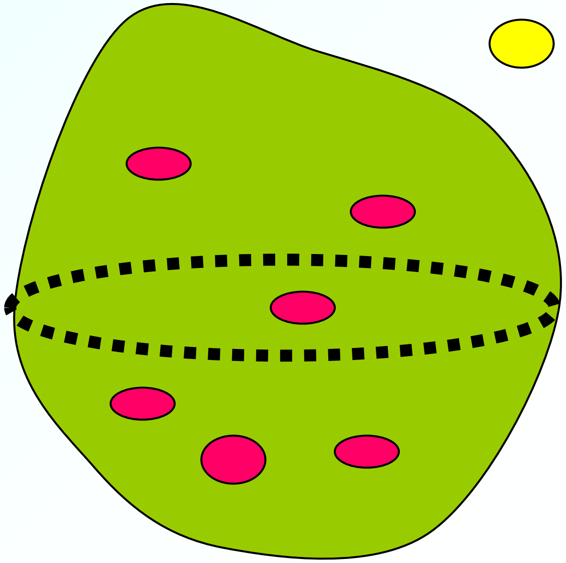
高斯（1777－1855）德国数学家、天文学家和物理学家，被誉为历史上伟大的数学家之一，和阿基米德、牛顿并列，同享盛名。

高斯的成就遍及数学的各个领域，他还把数学应用在天文学、大地测量学和电磁学的研究，并有杰出的贡献。

1. Gauss's Law **真空中的高斯定理：**

在**真空**中，通过任一**闭合曲面**的电场强度的**通量**等于包围在该**闭合曲面内**的所有电荷的代数和的$1/\varepsilon_0$倍。

$$\boxed{\Phi_e = \oint\!\!\!\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i}$$



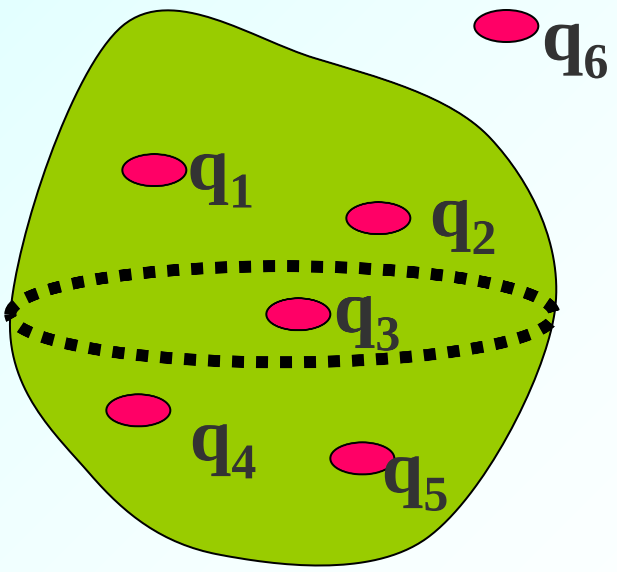
$\sum_{i=1}^{n} q_i$表示高斯面内电荷的代数和。

例如，如图所示有

$$\Phi_e = \oint\!\!\!\oint_s E\cos\theta ds$$

$$= \frac{\sum_s q_i}{\varepsilon_0}$$

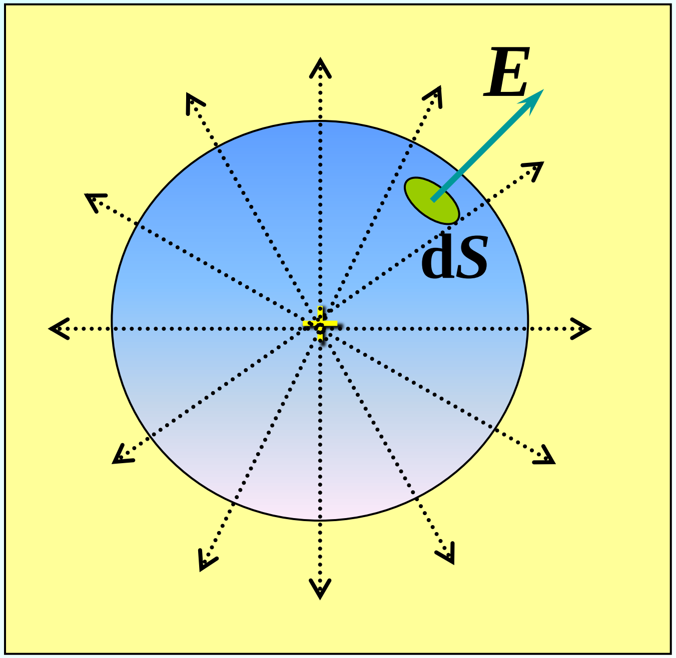
$$= \frac{q_1+q_2+q_3+q_4+q_5}{\varepsilon_0}$$



从库仑定律可以严格证明高斯定理。

验证高斯定理：

1、点电荷在球形高斯面的圆心处

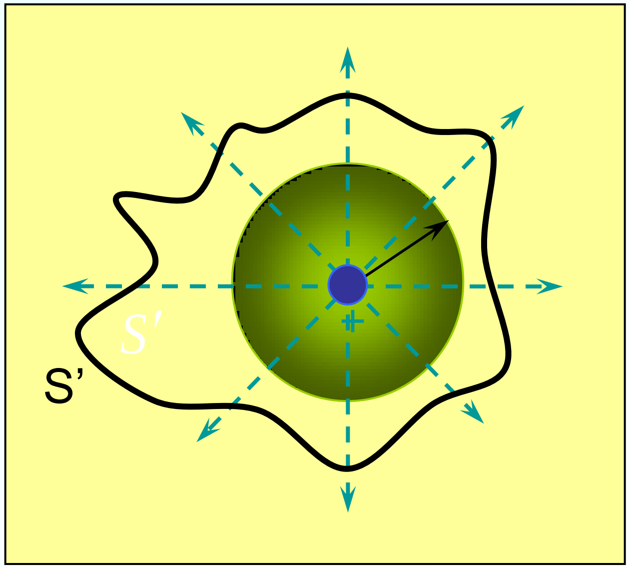


$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

$$d\Phi_e = E\cos 0^0 ds = \frac{q ds}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

$$\Phi_e = \oiint_s \frac{q ds}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} 4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

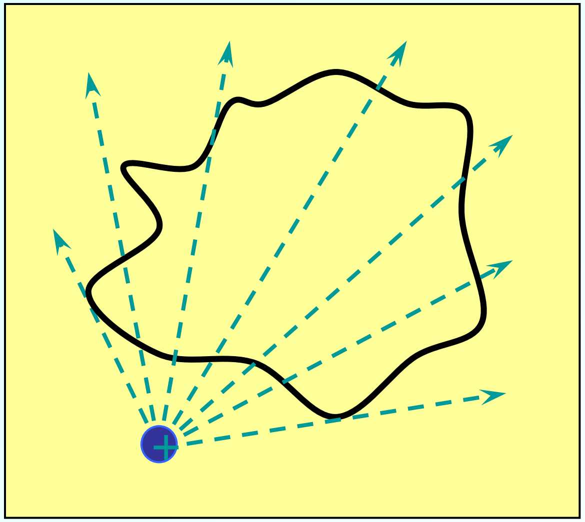
2、点电荷在任意形状的高斯面内



通过球面S的电场线也必通过任意曲面S’，即它们的E通量相等，为 q/ε_0

$$\boxed{\Phi_e = \oiint_{s'} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

3、电荷q 在闭合曲面以外



穿进曲面的电场线条数等于穿出曲面的电场线条数。

$$\boxed{\Phi_e = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0}$$

4、点电荷系：

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n = \sum_i \vec{E}_i$$

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \oiint_S \sum_i \vec{E}_i \cdot d\vec{s}$$

$$= \sum_{i(内)} \oiint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{s} + \sum_{i(外)} \oiint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{s}$$

$$\because \sum_{i(外)} \oiint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = 0$$

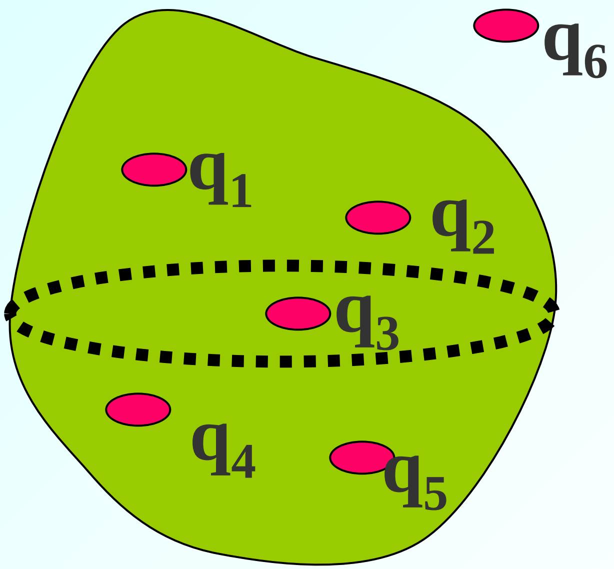
$$\boxed{\therefore \Phi_e = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \sum_{i(内)} \oiint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{s}} \quad \boxed{= \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i(内)} q_i}$$

$$\Phi_e = \oiint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i$$

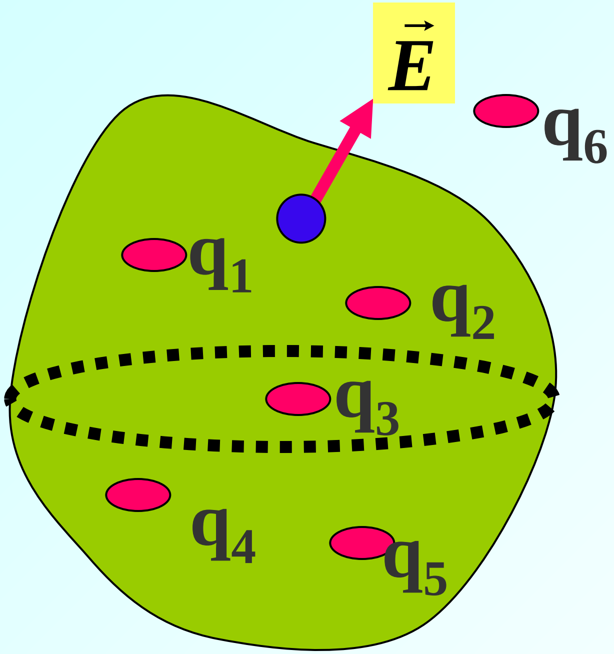
Note:

1）高斯面为闭合曲面.

2）电通量只与曲面包围的电荷有关，与外部电荷及内部电荷分布无关.



3）高斯面上的场强由内、外电荷决定。通量由面内电荷决定。

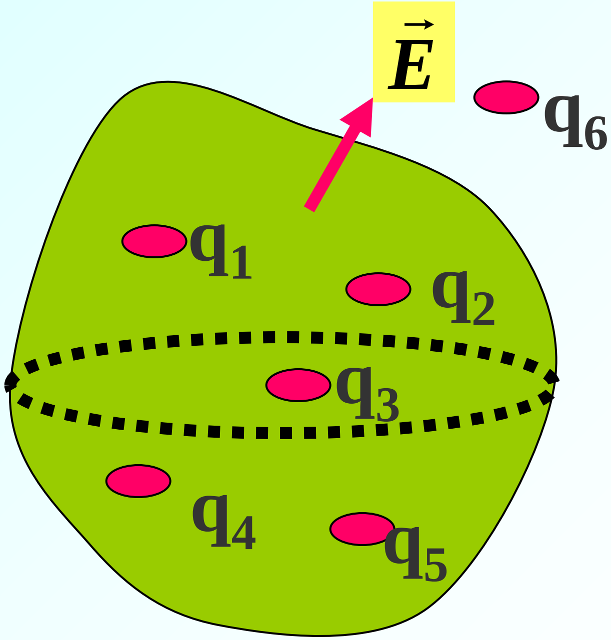


$\vec{E}$ 由q_1、q_2、q_3、q_4、q_5和q_6决定。

4）通量为零不等于高斯面内无电荷，也不说明高斯面上场强处处为零.

•只有 $q_1+q_2+q_3+q_4+q_5=0$

•不能肯定 $\vec{E}=0$



5）高斯定理说明电场的有源性。

6）高斯定理是从库仑定律推出来的，它们是等价的.

在某些情况下，利用高斯定理，可方便地求出电场强度。

2.Applying Gauss' Law 高斯定理的应用

高斯定理计算场强的条件：

$$\boxed{\Phi_e = \oiint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}}$$

带电体的电场强度分布要具有*高度的对称性。*

(1) 高斯面上的电场强度大小处处相等；

(2) 面积元d*S*的法线方向与该处的电场强度的方向一致或具有相同的夹角。

常见的具有对称性的 带电体：

1)Spherical symmetry 球对称（球体，球面）；

2) Cylindrical symmetry柱对称（无限长柱体，柱面）；

3) Planar symmetry面对称（无限大平板，平面）。

用高斯定理计算电场强度的步骤：

1. 从电荷分布的对称性来分析电场强度的对称性，判定电场强度的方向。

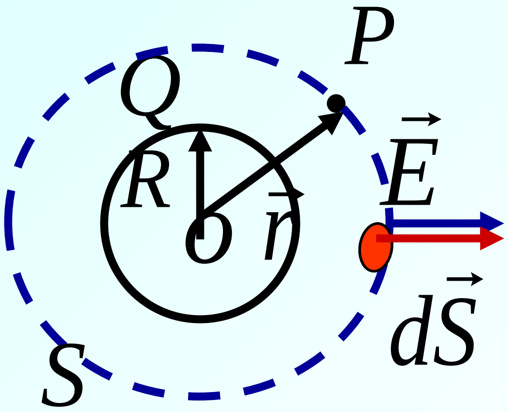
2 . 根据电场强度的对称性特点，作相应的高斯面（通常为球面、圆柱面等），使高斯面上各点的电场强度大小相等。

3. 确定高斯面内所包围的电荷之代数和。

4. 根据高斯定理计算出电场强度大小。

例1: 均匀带电球面， 总电量为

半径为R 求：电场强度分布



解： 根据电荷分布的对称性，

选取合适的高斯面(闭合面)

∴作过场点的P，以球心 o 为球心的球面

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oiint_S E dS = E\oiint_S dS = E4\pi r^2$$

$$\boxed{E4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i} \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sum_i q_i}$$

☞过场点的高斯面内电量代数和?

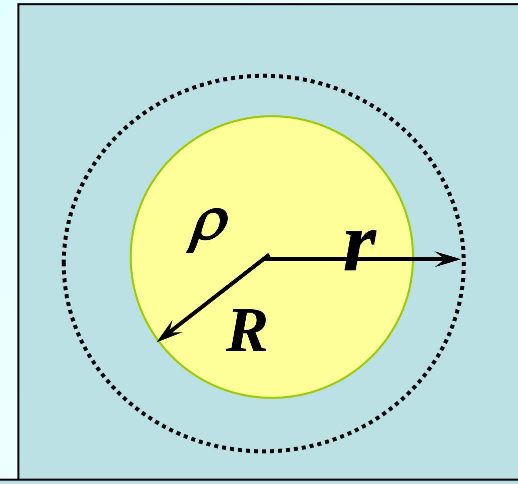
$$r > R \quad \sum_i q_i = Q \qquad \therefore \quad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

方向:沿半径方向

$$r < R \quad \sum_i q_i = 0 \qquad \therefore E = 0$$

例2. 求均匀带电球体的场强分布。（已知球体半径为R，带电量为q，电荷密度为ρ）

解： 场源电荷的球对称分布决定其场强具有球对称性, 故选同心球面为高斯面。 场强的方向沿半径方向，且在同一球面上的场强大小处处相等。



$$\boxed{\oint\!\!\!\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

（1）球外任意点的场强

$$E\oint\!\!\!\oint_s d\vec{s} = E4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad q = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\therefore E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}(r \geq R)$$

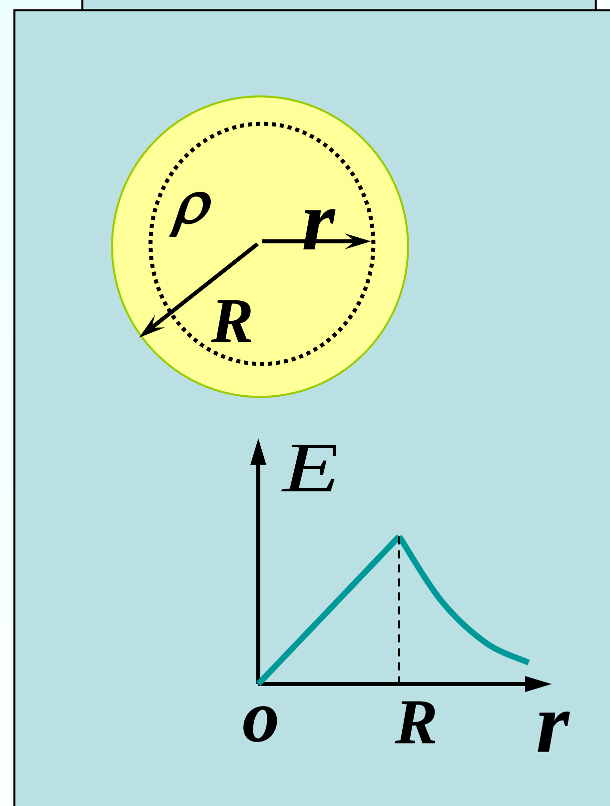
（2）求球体内一点的场强

$$E\oint\!\!\!\oint_s ds = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{q}{4\pi R^3/3}\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$E\cdot 4\pi r^2 = \frac{qr^3}{\varepsilon_o R^3}$$

方向均沿半径方向

$$\therefore E = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_o R^3} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_o} \quad (r < R)$$

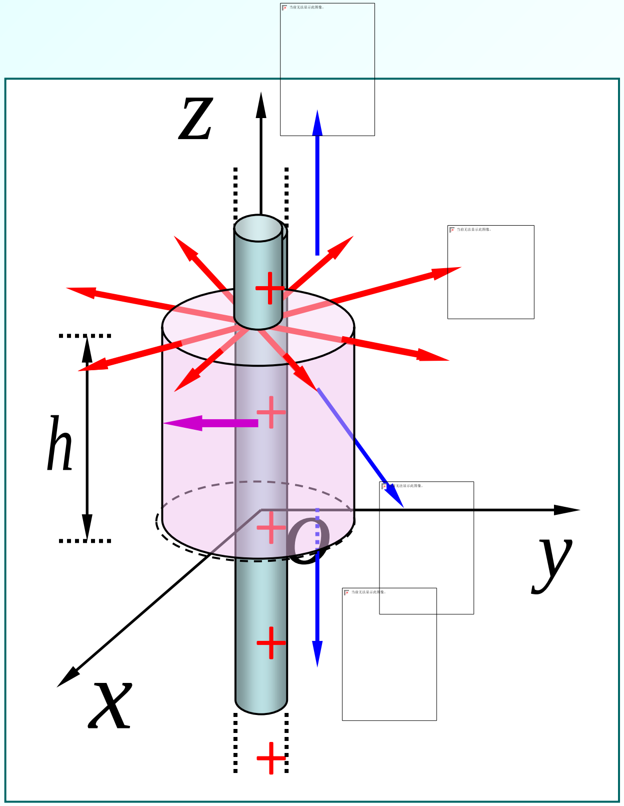


例3. 求无限长带电直线的场强分布。（已知线电荷密度为λ）

无限长均匀带电直线，单位长度上的电荷，即电荷线密度为λ，求距直线为r处的电场强度.

解 对称性分析：**轴对称**

选取闭合的柱形高斯面



$$\oiint_s \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_{s(\text{柱面})} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \iint_{s(\text{上底})} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

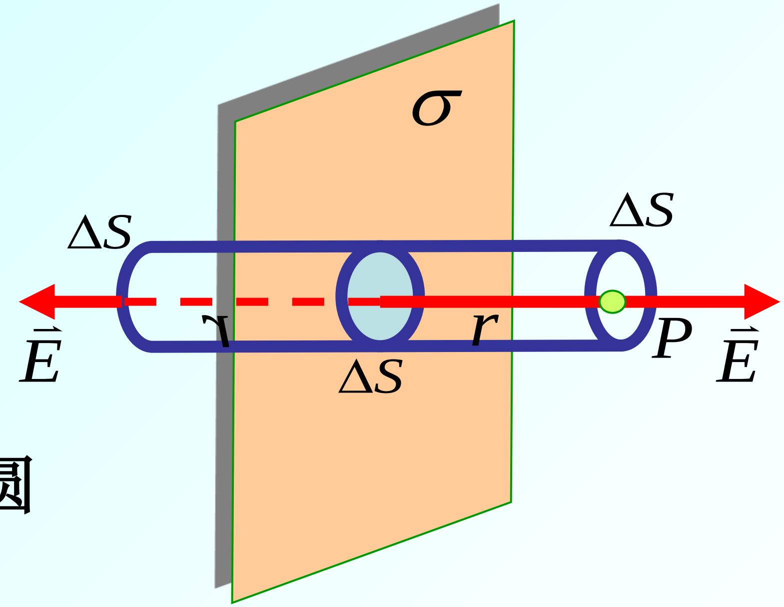
$$+ \iint_{s(\text{下底})} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_{s(\text{柱面})} \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2\pi r h E = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}}$$

例4 求均匀带电无限大薄板的场强分布，设电荷密度为 σ。

解： 无限大均匀带电薄平板可看成无限多根无限长均匀带电直线排列而成，由对称性分析，平板两侧离该板等距离处场强大小相等，方向均垂直平板。

面对称性



取一轴垂直带电平面，高为 $2r$ 的圆柱面为高斯面，通过它的电通量为

$$\Phi_e = \oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \iint_{S_{侧面}} \vec{E}\cdot d\vec{s} + \iint_{S_{两底}} \vec{E}\cdot d\vec{s} = 2E\Delta s$$

$$\sum q_{内} = \sigma\Delta S$$

由高斯定理 $$2E\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

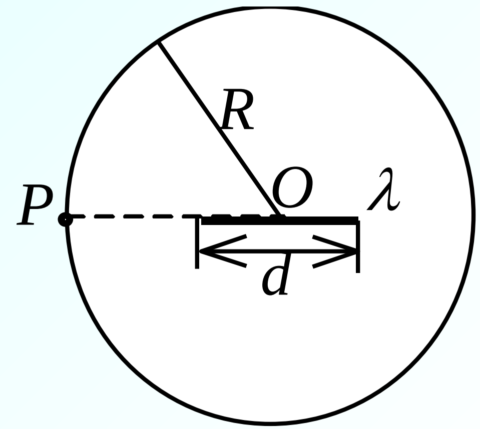
当 $\sigma > 0$ 时，$\vec{E}$ 的方向垂直平板指向外；

当 $\sigma < 0$ 时，$\vec{E}$ 的方向垂直平板指向平板。

单选题 1分

设置

一均匀带电直线长为*d*，电荷线密度为$+\lambda$，以导线中点*O*为球心，*R*为半径(*R*>*d*)作一球面，如图所示，则通过该球面的电场强度通量为(　　)



A $\dfrac{\lambda d}{4\pi\varepsilon_0}$

B $\dfrac{\lambda d}{4\varepsilon_0}$

C $\dfrac{\lambda d}{\varepsilon_0}$

D 无法计算

提交

带电直线的延长线与球面交点*P*处的电场强度为?

总结：电场强度的求解方法：

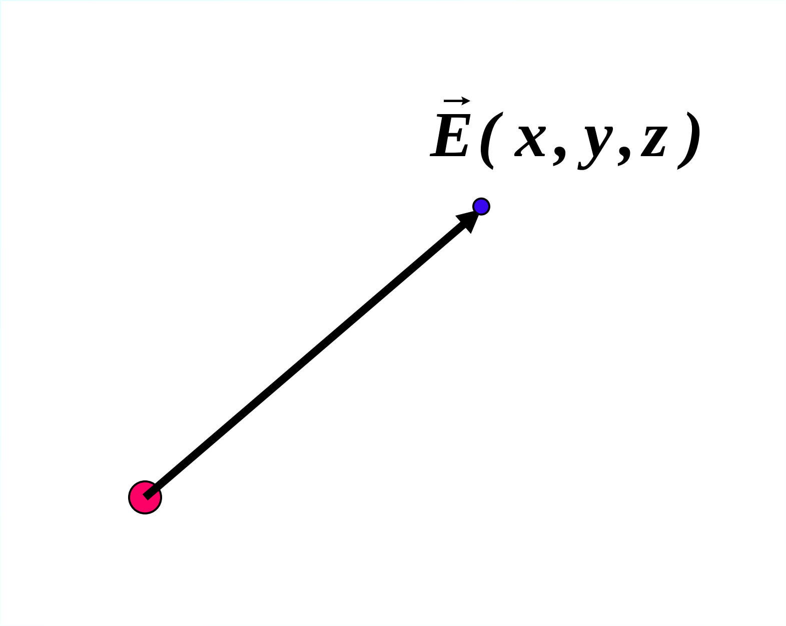
1.叠加（积分）法。

2.高斯定理（对称场）。

3.还有一种下节讲

（1）点电荷的电场

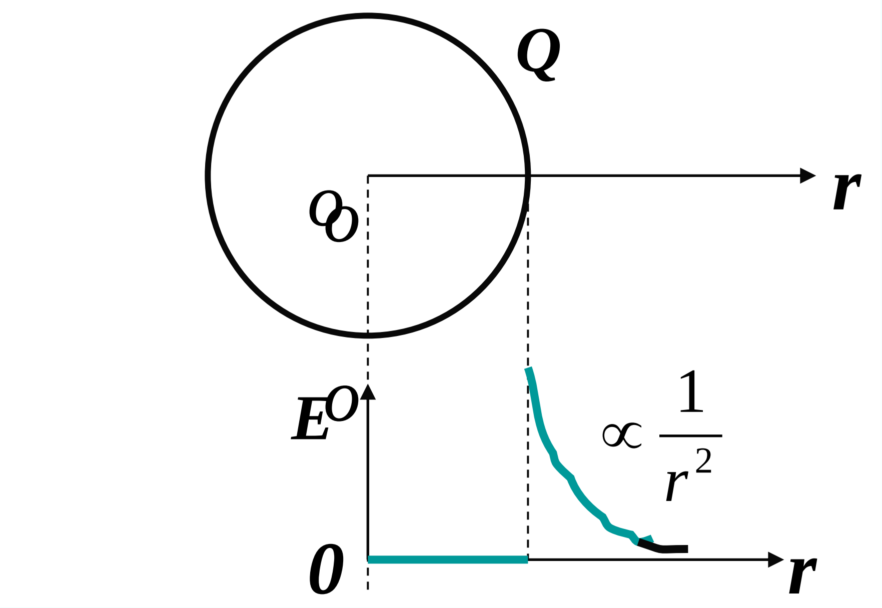
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$



（2）均匀带电球面的电场：

$$E_{内} = 0$$

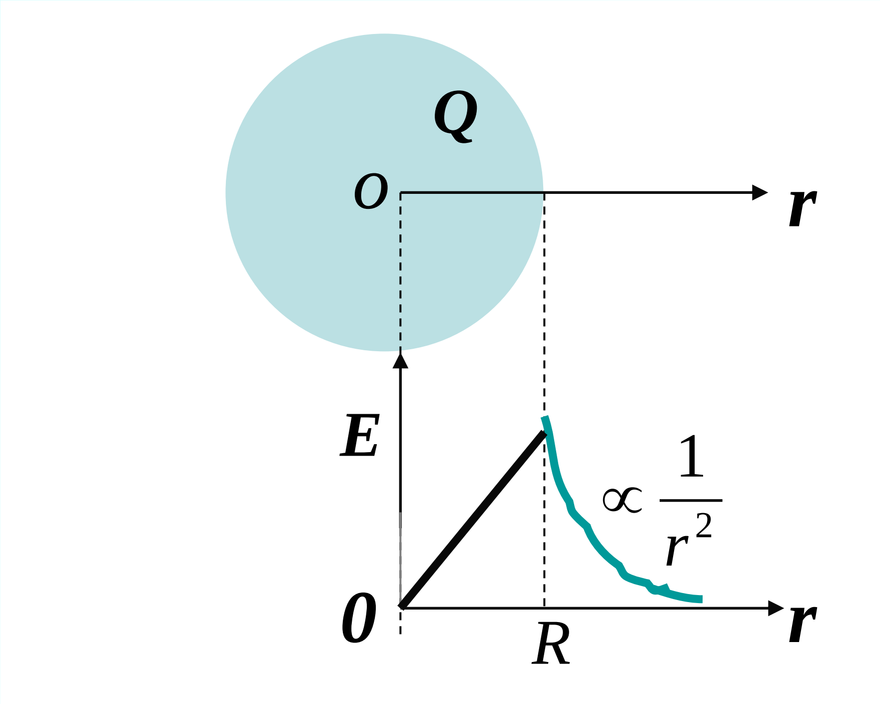
$$E_{外} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$



（3）均匀带电球体的电场：

$$E_{内} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Qr}{R^3}$$

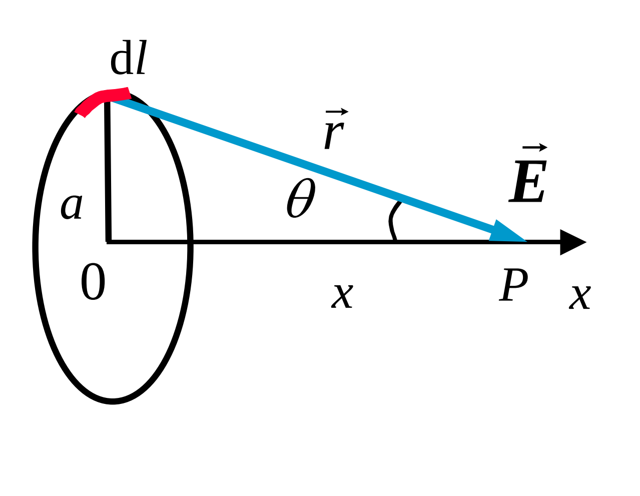
$$E_{外} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$



（4）均匀带电圆环（ R,λ ）的电场：

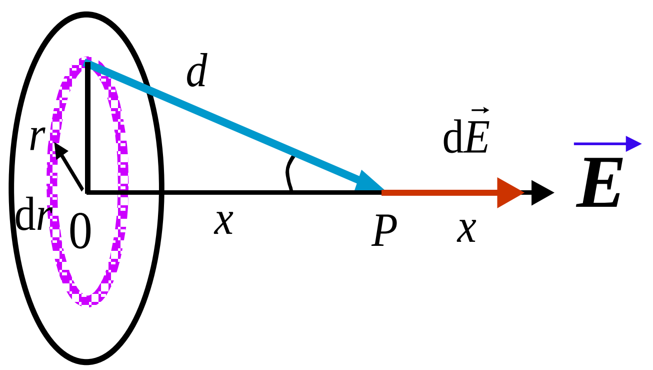
$$E=\int dE_x$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{qx}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$



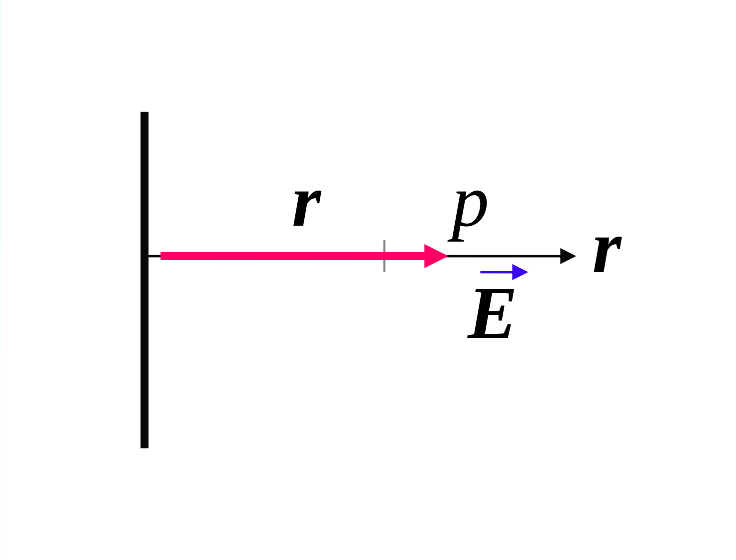
（5）均匀带电圆盘（ R,σ ）的电场：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}_x \\
&= \int d\boldsymbol{E}_x \\
&= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right]
\end{aligned}
$$



（6）无限长带电直线（ λ ）的电场：

$$\boldsymbol{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \boldsymbol{r}}$$

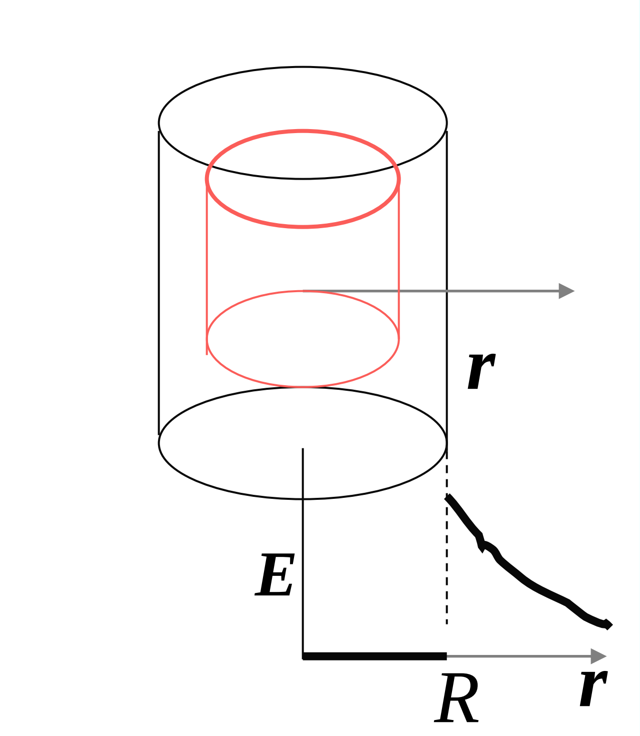


有何对称性？

（7）无限长带电圆柱面（ R,λ ）的电场：

$$\boldsymbol{E}_{内}=\mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{E}_{外}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \boldsymbol{r}}$$



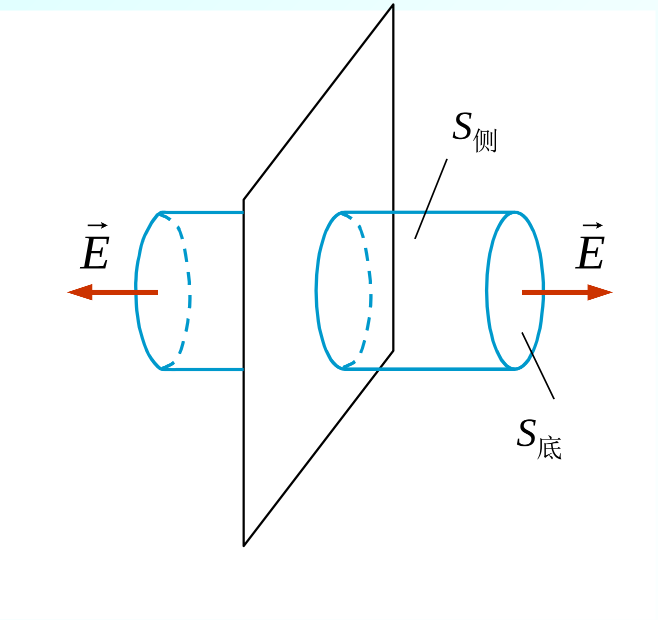
有何对称性？

电场线的方向？

无限长带电圆柱体的电场?

（8）无限大带电平面（ σ ）的电场：

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



有何对称性？

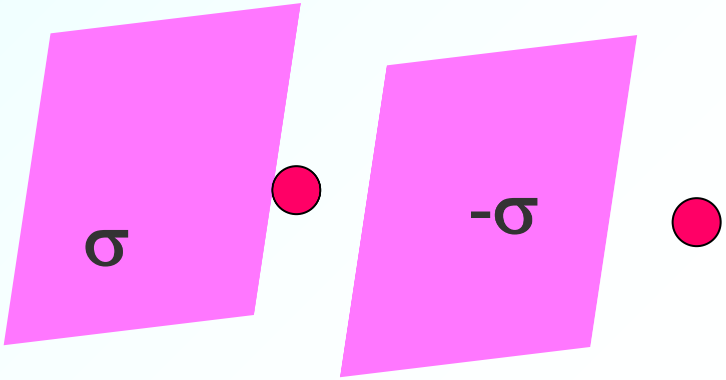
电场线的方向？

其他情况：

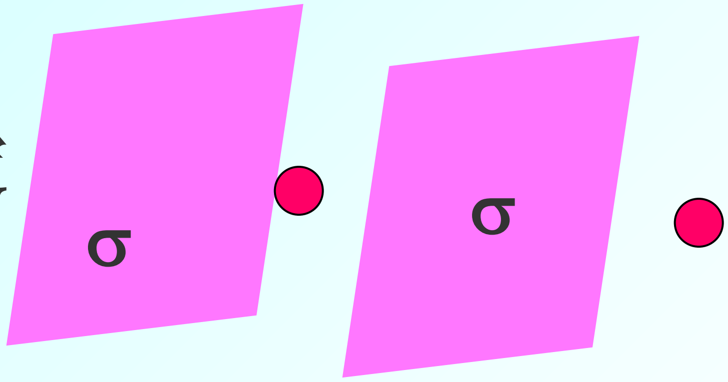
$$E_{内} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

正极板指向负极板

$$E_{外} = 0$$



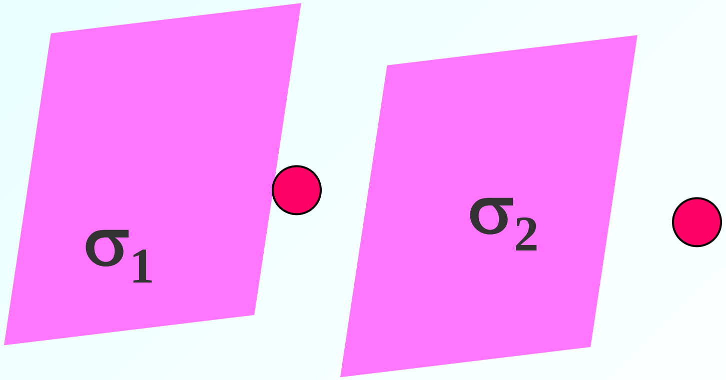
$$E_{外} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$ 方向由σ的正负决定



$$E_{内} = 0$$

$$E_{外} = ?$$

$$E_{内} = ?$$



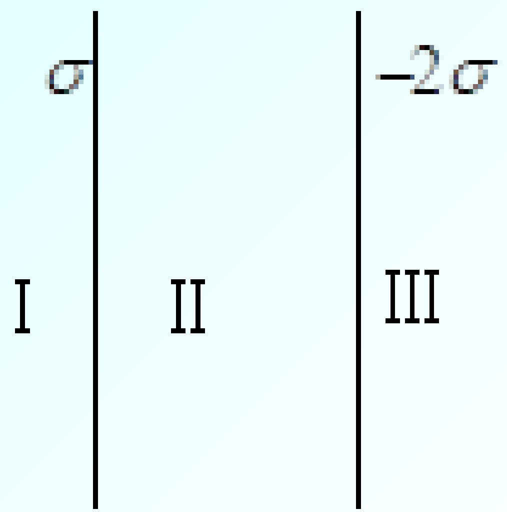
练习:

1.两块“无限大”的均匀带电平行平板，其电荷面密度分别为σ($\sigma>0$)及-2σ，如图所示．试写出各区域的电场强度 $\vec{E}$

Ⅰ区 $\vec{E}$ 的大小____________________，方向______________.

Ⅱ区 $\vec{E}$ 的大小____________________，方向______________.

Ⅲ区 $\vec{E}$ 的大小____________________，方向______________.



2. 设在半径为**R**的球体内，其电荷分布是对称的，电荷体密度为$\rho=kr(0\le r\le R)$，$\rho=0\ (r>R)$，**k**为一常量。试用高斯定理求场强与**r**的函数关系。

94页：10. 11. 15. 18.