安培环路定理

Ampere’s Law

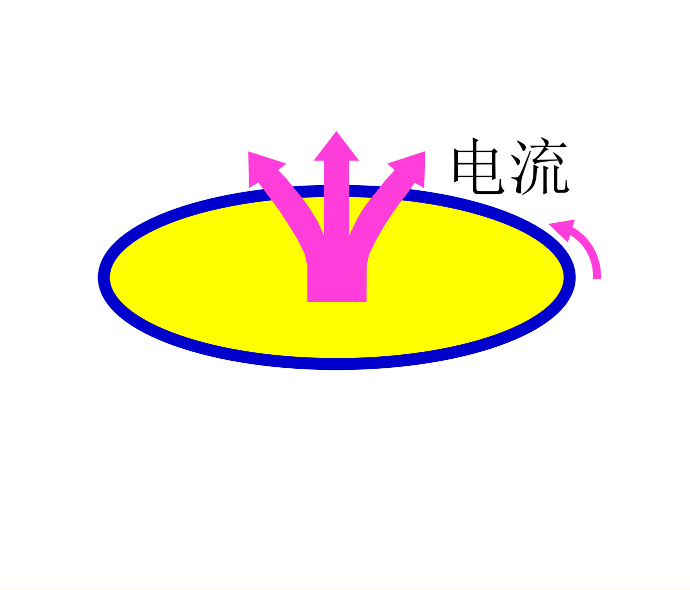
1. 定理表述

在稳恒磁场中，磁感应强度沿闭合回路的线积分等于环路所包围的电流代数和乘以 μ_0。

数学表达式：

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{n} I_i$$

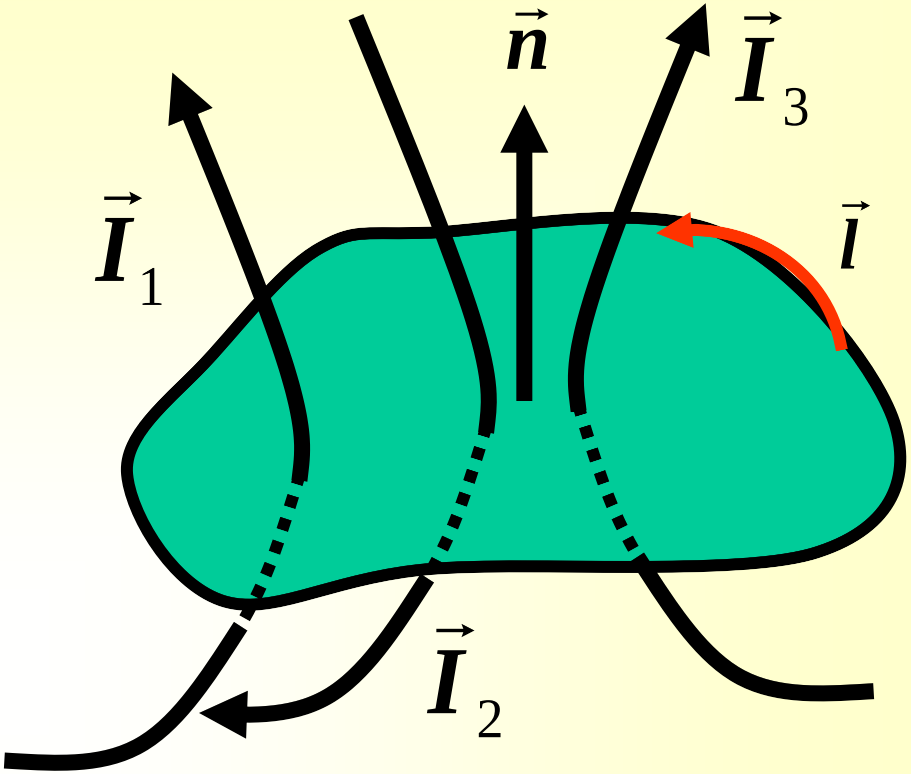
电流正负规定：电流方向与环路方向满足右手定则时电流 I 取正；反之取负。



如图:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{n} I_i$$

$$= \mu_0 (I_1 - I_2 + I_3)$$



2. 安培环路定理的证明：

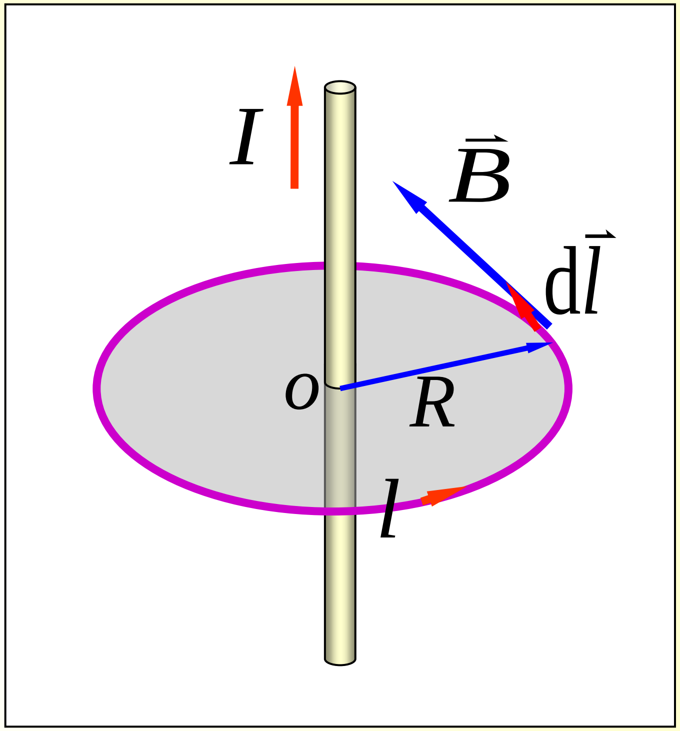
- 以无限长载流直导线的磁场为例

载流长直导线的磁感应强度为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

$$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\oint \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\mathrm{d}l = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\oint_l dl$$

$$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I$$



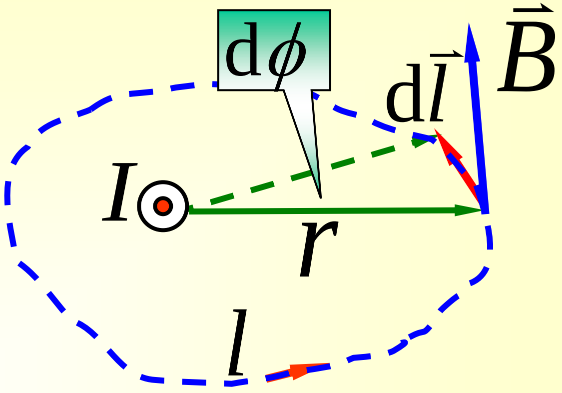
设闭合回路 l 为圆形回路
（l 与 I 成右螺旋）

若电流反向，环路方向不变，

$$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi=-\mu_0 I$$

• 对任意形状的回路

$$\vec{B}\cdot d\vec{l} = Bdl\cos\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\phi$$



$$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

l 与 I 成右螺旋

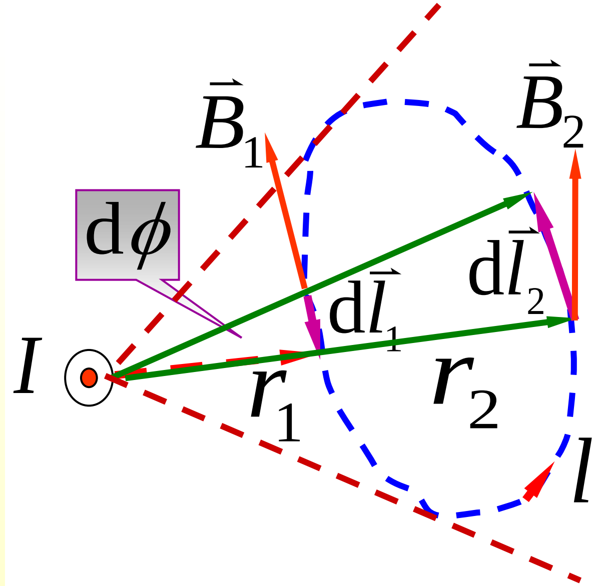
• 电流在回路之外

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}$$

$$\vec{B}_1\cdot d\vec{l}_1 = -\vec{B}_2\cdot d\vec{l}_2 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} d\phi$$

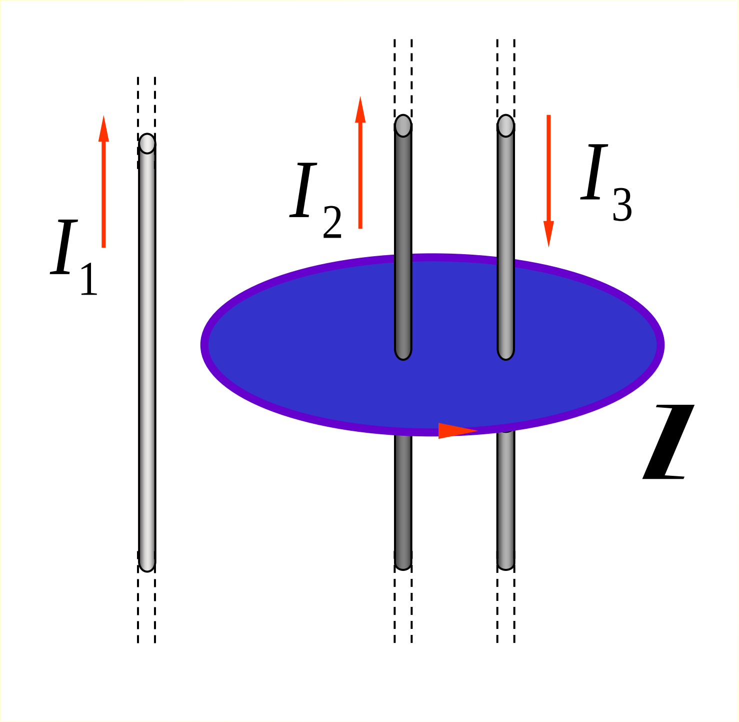
$$\vec{B}_1\cdot d\vec{l}_1 + \vec{B}_2\cdot d\vec{l}_2 = 0$$

$$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$$



- 多电流情况

$$\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2+\vec{B}_3$$



$$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\mu_0(I_2-I_3)$$

以上结果对任意形状的闭合电流（伸向无限远的电流）均成立.

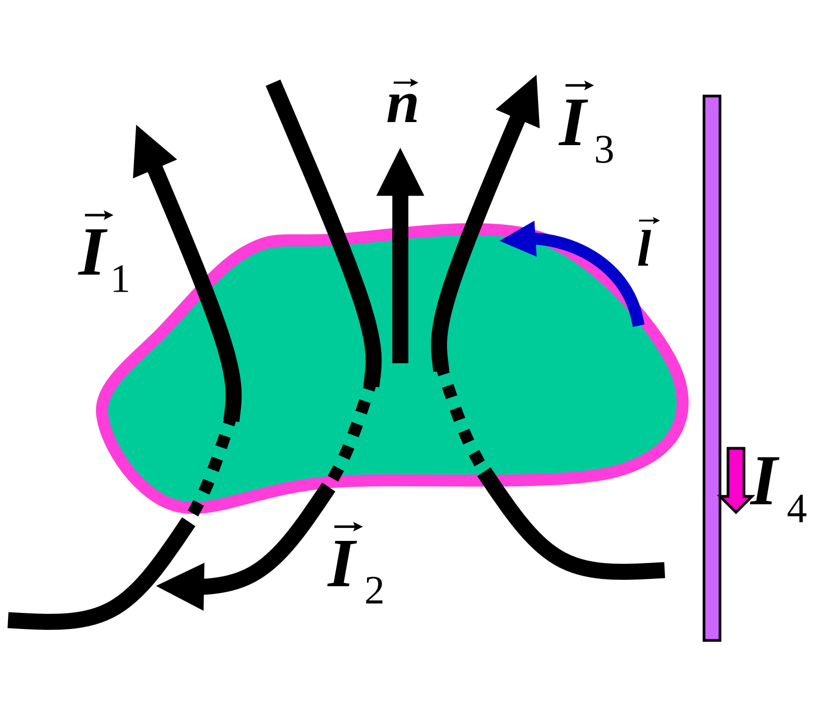
> 安培环路定理

$$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\mu_0\sum_{i=1}^{n}I_i}$$

3. 对安培环路定理的说明

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

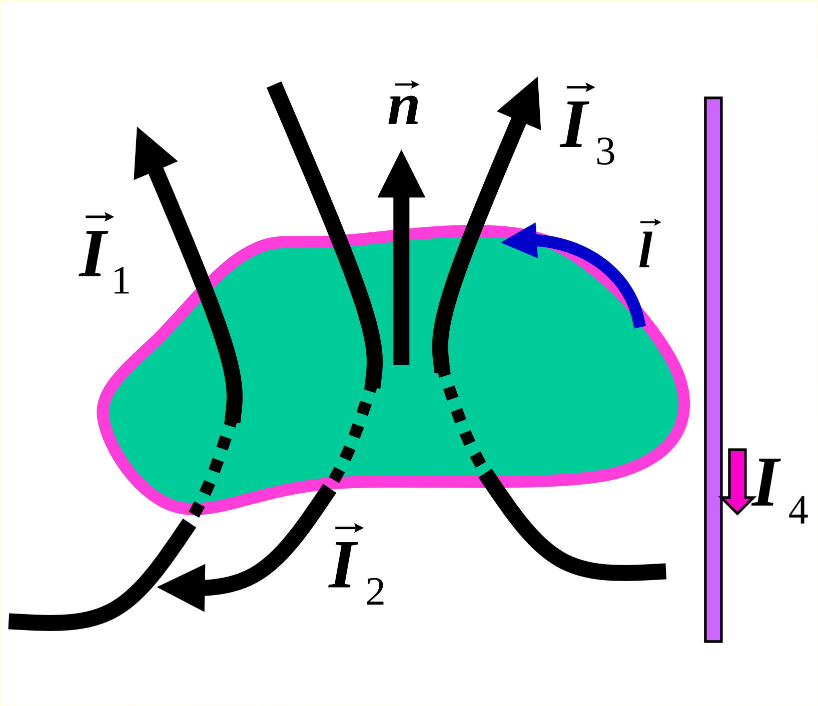
（1）电流I 的正负规定：电流的流向与闭合路径绕行方向满足右手螺旋法则时，I 取正值，反之 I 取负值；



(2) $\vec{B}$ 是闭合回路内外所有电流产生的；

（3）安培环路定理说明磁场性质—磁场是有旋场。

（4）$\vec{B}$的环流与曲线的形状无关，只与包含的电流有；



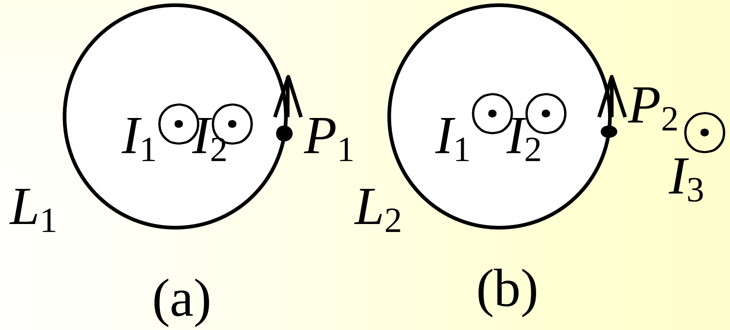
$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

（5）电流位置变化，只要不移出（进）回路，$\vec{B}$ 的环流不变。

（6）$\vec{B}$ 的环流为零时，L 上各点的场不一定都为零。

（7）环路定理只适用于闭合电流或无限电流.有限电流不适用环路定理，只能用毕奥—萨伐尔定律。

练习1. 在图(a)和(b)中各有一半径相同的圆形回路L_1、L_2，圆周内有电流I_1、I_2，其分布相同，且均在真空中，但在(b)图中L_2回路外有电流I_3，P_1、P_2为两圆形回路上的对应点，则：



(A) $\oint_{L_1} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_{L_2} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$, $B_{P_1} = B_{P_2}$

(B) $\oint_{L_1} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \neq \oint_{L_2} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$, $B_{P_1} = B_{P_2}$.

(C) $\oint_{L_1} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_{L_2} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$, $B_{P_1} \neq B_{P_2}$.

(D) $\oint_{L_1} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \neq \oint_{L_2} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$, $B_{P_1} \neq B_{P_2}$.

[C]

4. 安培环路定理的应用
Application of Ampere's Law

安培环路定理为我们提供了求磁感应强度的另一种方法。但利用安培环路定理求磁感应强度要求磁场具有高度的对称性 。这样才能把 $\vec{B}$ 从积分号中拿出来，因而要求电流的分布具有对称性。

利用安培环路定理求磁感应强度的关键：根据磁场分布的对称性，选取合适的闭合环路。

选取环路原则:

(1)环路要经过所研究的场点。

(2)环路的长度便于计算;

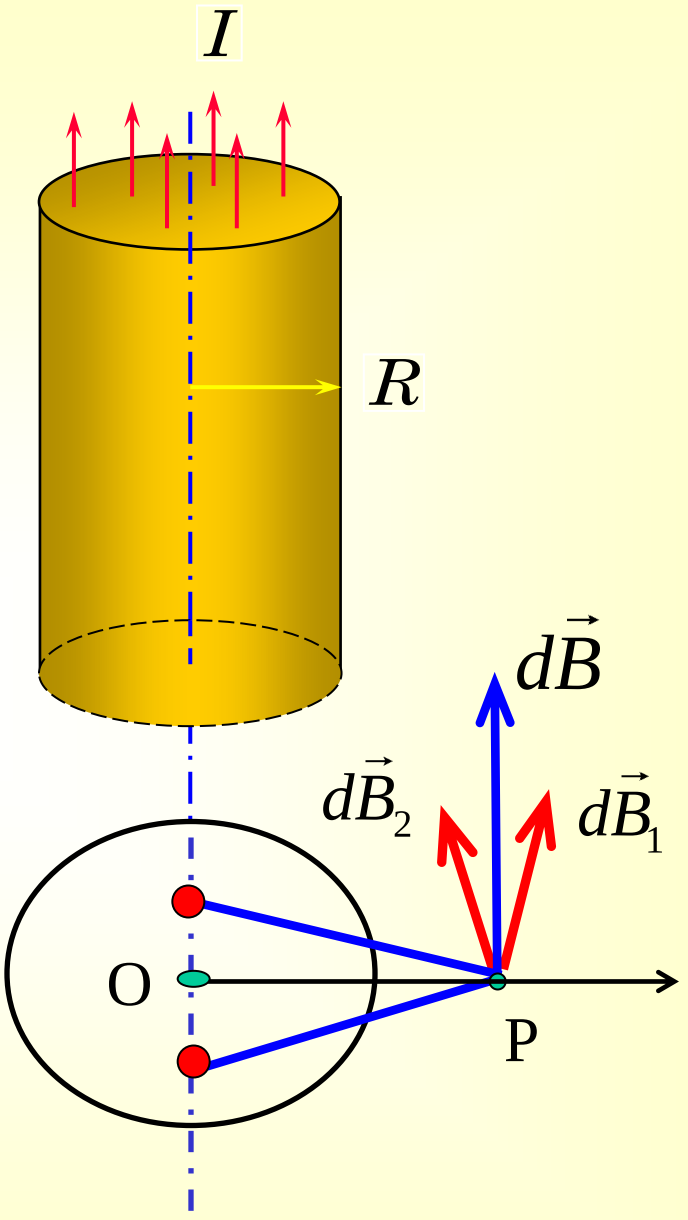
(3)要求环路上各点$\vec{B}$大小相等，$\vec{B}$的方向与环路方向一致，目的是将: $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$ 写成 $B = \dfrac{\mu_0 \sum I}{\oint dl}$

或 $\vec{B}$的方向与环路方向垂直，

$\vec{B} \perp d\vec{l}$ ，$\cos\theta = 0$ $\int_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$

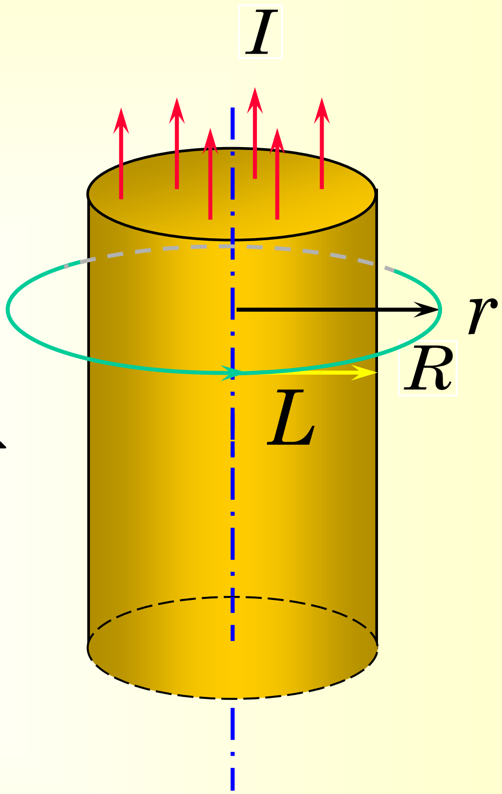
例1：

无限长圆柱形载流导体半径为 R，通有电流为 I，电流在导体横截面上均匀分布，求圆柱体内、外的磁感应强度的分布。



解：导体内外的磁场是以中心轴线为对称分布的。

1.圆柱体外部：$r > R$ 区域，在圆柱体外作半径为r 的环路，方向选逆时针



环路内电流代数和为：$\sum I = I$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint Bdl\cos\theta$$

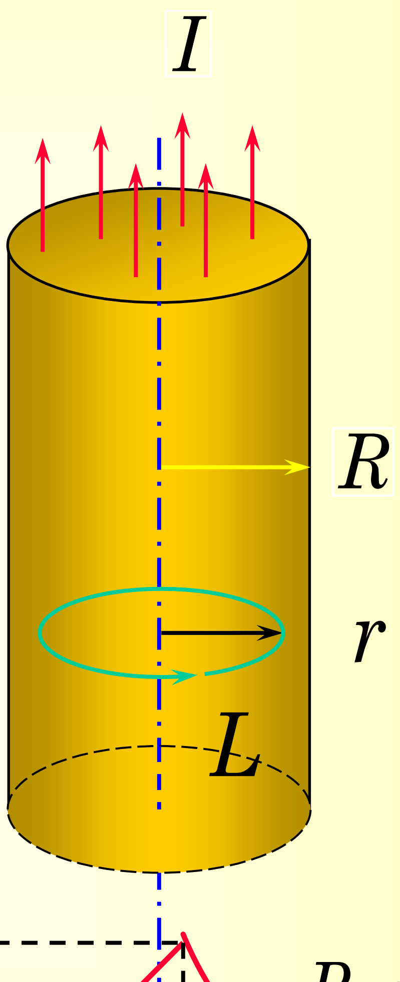
由于环路上各点 磁感应强度 大小相等，方向与环路一致。

$$\vec{B} \,//\, d\vec{l}\ , \qquad \cos\theta = 1$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = B\oint dl = B2\pi r = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \propto \frac{1}{r}$$

2.圆柱体内部：$r < R$ 区域，作半径为 r 的环路，选逆时针方向为回路正方向。



环路内电流代数和为：$\sum I = \frac{I}{\pi R^2}\pi r^2 = \frac{r^2}{R^2} I$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B dl \cos\theta$$

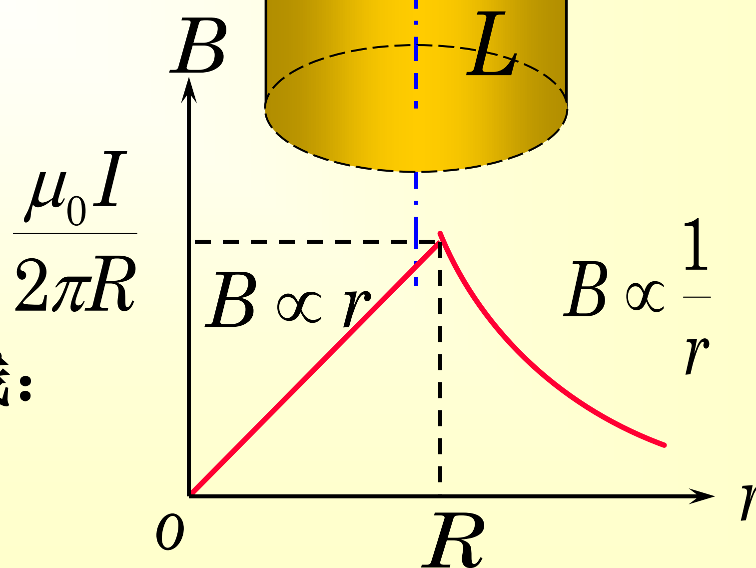
由于环路上各点 磁感应强度 大小相等，方向与环路一致。$\vec{B} \,//\, d\vec{l}$ ， $\cos\theta = 1$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B\oint dl = B 2\pi r$$

$$= \mu_0 \sum I = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} I$$

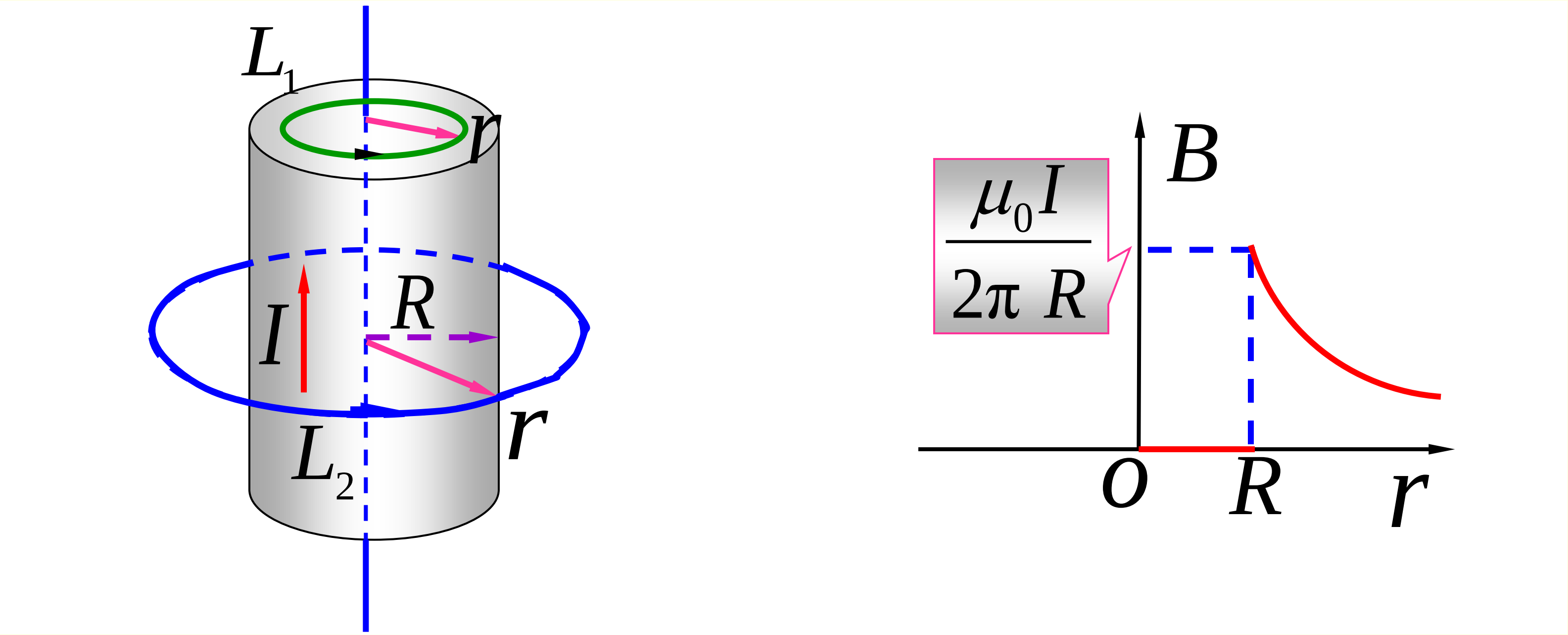
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \propto r$$

分布曲线：



磁场方向：与电流成右手定则方向

无限长载流圆柱面的磁场



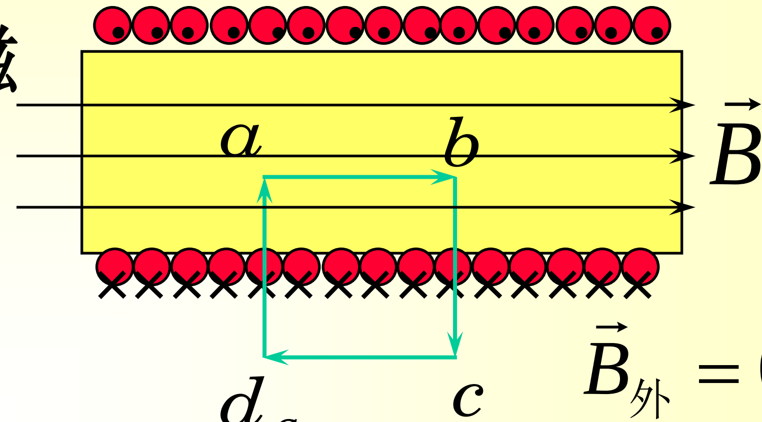
解 $0 < r < R,\ \oint_l \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$ $B = 0$

$r > R,\ \oint_l \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$ $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

磁场方向：与电流成右手定则方向

例2：密绕载流螺线管通有电流为 I，线圈密度为 n，求管内一点的磁感应强度 。

解：理想密绕螺线管，管内的磁场是均匀的，管外的磁场为 0 ；



$\vec{B}_{外} = 0$

作闭合环路 $abcda$,环路内的电流代数和为：$\sum I = n\overline{ab}I$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{B}\cdot d\vec{l}$$

$$\int_b^c \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_d^a \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0, \because \vec{B} \perp d\vec{l}, \cos\theta = 0$$

螺线管外： $\vec{B}_{外} = 0, \int_c^d \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$

$$\boxed{\boldsymbol{B = \mu_0 nI}}$$

$$\therefore \oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{B}\cdot d\vec{l} = B\cancel{\overline{ab}} = \mu_0 \sum I = \mu_0 n\cancel{\overline{ab}}I$$

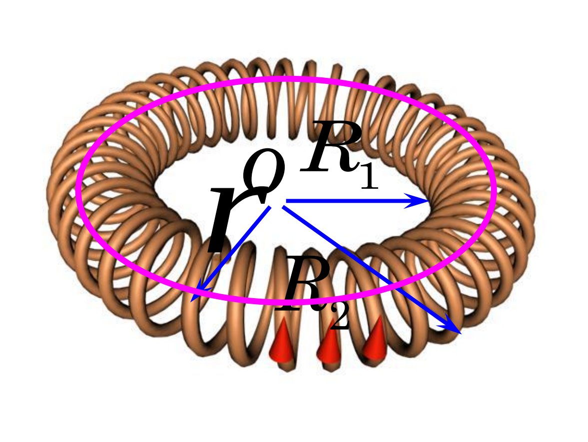
练习2. 一长直螺线管是由直径d = 0.2 mm的漆包线密绕而成．当它通以I = 0.5 A的电流时，其内部的磁感强度B =________________．(忽略绝缘层厚度)

(μ_0 =4π×10^{-7} N/A^2)

$$\boxed{B = \mu_0 n I}$$

$$n = \frac{1}{d}$$

例3：一环形载流螺线管，匝数为 N，内径为 $R1$，外径为 $R2$，通有电流 I，求管内磁感应强度。



解：在管内作环路半径为 r的圆环，

环路内电流代数和为：$\sum I = NI$

$$\because \oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I \qquad B2\pi r = \mu_0 NI \qquad \therefore \boxed{B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}}$$

当 $r >> (R_2 - R_1)$ 时 $\dfrac{N}{2\pi r} = n$ 为沿轴向线圈密度；

$$\boxed{B = \mu_0 nI}$$

与直螺管的结论一致。

稳恒磁场：

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{n} I_i$$

$$\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

静电场：

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0}$$

作业：15，16