$\lim_{y \to 0} \dfrac{}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$

而 $f(0)=\mathrm{i}$，即 $\lim\limits_{z\to 0}f(z)\neq f(0)$，所以函数 $f(z)$ 在 $z=0$ 处不连续.

§1.3 教材习题同步解析

1.1 计算下列各式：

(1) $(1+\mathrm{i})-(3-2\mathrm{i})$；

解 $(1+\mathrm{i})-(3-2\mathrm{i})=(1+\mathrm{i})-3+2\mathrm{i}=-2+3\mathrm{i}$.

(2) $(a-b\mathrm{i})^3$；

解 $$(a-b\mathrm{i})^3=a^3-3a^2b\mathrm{i}+3a(b\mathrm{i})^2-(b\mathrm{i})^3$$
$$=a^3-3ab^2+\mathrm{i}(b^3-3a^2b).$$

(3) $\dfrac{\mathrm{i}}{(\mathrm{i}-1)(\mathrm{i}-2)}$；

解 $$\frac{\mathrm{i}}{(\mathrm{i}-1)(\mathrm{i}-2)}=\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2-2\mathrm{i}-\mathrm{i}+2}=\frac{\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}}$$
$$=\frac{\mathrm{i}(1+3\mathrm{i})}{10}=\frac{-3}{10}+\frac{\mathrm{i}}{10}.$$

(4) $\dfrac{z-1}{z+1}(z=x+\mathrm{i}y\neq -1)$；

解 $$\frac{z-1}{z+1}=\frac{x+\mathrm{i}y-1}{x+\mathrm{i}y+1}=\frac{(x-1+\mathrm{i}y)(x+1-\mathrm{i}y)}{(x+1)^2+y^2}$$
$$=\frac{x^2+y^2-1+2\mathrm{i}y}{(x+1)^2+y^2}.$$

1.2 证明下列关于共轭复数的运算性质：

(1) $\overline{(z_1\pm z_2)}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$；

证 $\overline{(z_1\pm z_2)}=\overline{(x_1+\mathrm{i}y_1)\pm(x_2+\mathrm{i}y_2)}$

$$=\overline{(x_1 \pm x_2)+\mathrm{i}(y_1 \pm y_2)} = (x_1 \pm x_2)\ \ldots$$

$$=x_1-\mathrm{i}y_1 \pm x_2 \mp \mathrm{i}y_2 = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2.$$

(2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$;

证
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)}$$
$$=\overline{(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+y_1x_2)}$$
$$=x_1x_2-y_1y_2-\mathrm{i}(x_1y_2+y_1x_2).$$
$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \overline{(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)} = (x_1-\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)$$
$$=x_1x_2-\mathrm{i}y_1x_2-\mathrm{i}x_1y_2-y_1y_2.$$

即左边=右边,得证.

(3) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}(z_2 \neq 0)$.

证
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}\right)} = \left(\overline{\frac{(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)}{x_2^2+y_2^2}}\right)$$
$$=\frac{(x_1-\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)}{x_2^2+y_2^2} = \frac{(x_1-\mathrm{i}y_1)(x_2^2+y_2^2)}{(x_2^2+y_2^2)(x_2-\mathrm{i}y_2)}$$
$$=\frac{x_1-\mathrm{i}y_1}{x_2-\mathrm{i}y_2} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

1.3 解方程组$\begin{cases}2z_1-z_2=\mathrm{i},\\(1+\mathrm{i})z_1+\mathrm{i}z_2=4-3\mathrm{i}.\end{cases}$

解 所给方程组可写为
$$\begin{cases}2x_1+2\mathrm{i}y_1-x_2-\mathrm{i}y_2=\mathrm{i},\\(1+\mathrm{i})(x_1+\mathrm{i}y_1)+\mathrm{i}(x_2+\mathrm{i}y_2)=4-3\mathrm{i}.\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}2x_1-x_2+\mathrm{i}(2y_1-y_2)=\mathrm{i},\\x_1-y_1-y_2+\mathrm{i}(x_1+x_2+y_1)=4-3\mathrm{i}.\end{cases}$$

利用复数相等的概念可知

$$\begin{cases}2x_1-x_2=0,\\2y_1-y_2=1,\\x_1-y_1-y_2=4,\\x_1+x_2+y_1=-3.\end{cases}$$

解得

$$y_2=-\frac{17}{5},y_1=-\frac{6}{5},x_1=-\frac{3}{5},x_2=-\frac{6}{5}.$$

故

$$z_1=-\frac{3}{5}-\frac{6}{5}\mathrm{i},z_2=-\frac{6}{5}-\frac{17}{5}\mathrm{i}.$$

1.4 将直线方程 $ax+by+c=0(a^2+b^2\neq0)$ 写成复数形式.
示:记 $x+\mathrm{i}y=z$.]

解 由 $x=\frac{z+\bar{z}}{2},y=\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}$代入直线方程,得

$$\frac{a}{2}(z+\bar{z})+\frac{b}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})+c=0,$$

$$az+a\bar{z}-b\mathrm{i}(z-\bar{z})+2c=0,$$

$$(a-\mathrm{i}b)z+(a+\mathrm{i}b)\bar{z}+2c=0,$$

故$\bar{A}z+A\bar{z}+B=0$,其中 $A=a+\mathrm{i}b,B=2c$.

1.5 将圆周方程 $a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0(a\neq0)$ 写成复数形
(即用 z 与$\bar{z}$表示,其中 $z=x+\mathrm{i}y$).

解 把 $x=\frac{z+\bar{z}}{2},y=\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}},x^2+y^2=z\cdot\bar{z}$代入圆周方程,得

$$az\cdot\bar{z}+\frac{b}{2}(z+\bar{z})+\frac{c}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})+d=0,$$

$$2az\cdot\bar{z}+(b-\mathrm{i}c)z+(b+\mathrm{i}c)\bar{z}+2d=0,$$

故

$$Az\cdot\bar{z}+\bar{B}z+B\bar{z}+C=0.$$

其中 $A=2a,B=b+\mathrm{i}c,C=2d$.

1.6 求下列复数的模与辐角主值.

(1) $\sqrt{3}+\mathrm{i}$;

解 $|\sqrt{3}+\mathrm{i}|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=2$,

$$\arg(\sqrt{3}+\mathrm{i})=\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}.$$

(2) $-1-\mathrm{i}$;

解 $|-1-\mathrm{i}|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$,

$$\arg(-1-\mathrm{i})=\arctan\left(\frac{-1}{-1}\right)-\pi=\frac{\pi}{4}-\pi=-\frac{3}{4}\pi.$$

(3) $2-\mathrm{i}$;

解 $|2-\mathrm{i}|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$,

$$\arg(2-\mathrm{i})=\arctan\frac{-1}{2}=-\arctan\frac{1}{2}.$$

(4) $-1+3\mathrm{i}$.

解 $|-1+3\mathrm{i}|=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$.

$$\arg(-1+3\mathrm{i})=\arctan\frac{3}{-1}+\pi=\pi-\arctan 3.$$

1.7 证明下列各式：

(1) $|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}(z_1\cdot\bar{z}_2)$;

证
$$\begin{aligned}|z_1-z_2|^2&=(z_1-z_2)(\overline{z_1-z_2})\\&=(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)\\&=z_1\cdot\bar{z}_1+z_2\cdot\bar{z}_2-z_2\bar{z}_1-z_1\bar{z}_2\\&=|z_1|^2+|z_2|^2-(\overline{z_1\bar{z}_2}+z_1\bar{z}_2)\\&=|z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2).\end{aligned}$$

(2) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$，并说明此式的几何意义；

证
$$\begin{aligned}&|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2\\&=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})+(z_1-z_2)(\overline{z_1-z_2})\\&=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)+(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)\end{aligned}$$

$$=2|z_1|^2+2|z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2).$$

此式的几何意义是：平行四边形对角线平方和等于各边平方和.

(3) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|x|+|y|)\leqslant|z|\leqslant|x|+|y|$（其中 $z=x+\mathrm{i}y$）.

证 显然有 $|z|=|x+\mathrm{i}y|=\sqrt{x^2+y^2}\leqslant|x|+|y|$. 而 $(|x|-|y|)^2\geqslant0$，则 $2|xy|\leqslant x^2+y^2$. 又

$$\begin{aligned}(|x|+|y|)^2&=|x|^2+|y|^2+2|xy|\\&\leqslant2(x^2+y^2)=2|z|^2,\end{aligned}$$

故

$$|z|\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}(|x|+|y|).$$

即

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|x|+|y|)\leqslant|z|\leqslant|x|+|y|.$$

1.8 将下列各复数写成三角表示式：

(1) $-3+2\mathrm{i}$;

解 $|-3+2\mathrm{i}|=\sqrt{13}$, $\arg(-3+2\mathrm{i})=\arctan\frac{2}{-3}+\pi$,

故

$$-3+2\mathrm{i}=\sqrt{13}\left[\cos\left(\pi-\arctan\frac{2}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\pi-\arctan\frac{2}{3}\right)\right].$$

(2) $\sin\alpha+\mathrm{i}\cos\alpha$;

解 $\sin\alpha+\mathrm{i}\cos\alpha$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

(3) $-\sin\frac{\pi}{6}-\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{6}$.

解 $\arg\left(-\sin\frac{\pi}{6}-\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{6}\right)=\arctan\left(\cot\frac{\pi}{6}\right)-\pi$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}-\pi=-\frac{2}{3}\pi,$$

故

$$-\sin\frac{\pi}{6}-\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{6}=\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$=\cos\frac{2}{3}\pi-\mathrm{i}\sin\frac{2}{3}\pi.$$

1.9 利用复数的三角表示计算下列各式：

(1) $(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})$；

解 $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$，

$1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{-\pi}{4}\right)$，

故

$$(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\right]=2.$$

(2) $(-2+3\mathrm{i})/(3+2\mathrm{i})$；

解 因

$$-2+3\mathrm{i}=\sqrt{13}\left[\cos\left(\arctan\frac{-3}{2}+\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\arctan\frac{-3}{2}+\pi\right)\right],$$

$$3+2\mathrm{i}=\sqrt{13}\left[\cos\left(\arctan\frac{2}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\arctan\frac{2}{3}\right)\right],$$

故 $(-2+3\mathrm{i})/(3+2\mathrm{i})=\mathrm{i}$.

注： $\arg(-2+3\mathrm{i})/(3+2\mathrm{i})=\arctan\frac{-3}{2}+\pi-\arctan\frac{2}{3}$

$$=\arctan\frac{-3/2-2/3}{1+(-3/2)\cdot(2/3)}+\pi$$

$$=-\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{\pi}{2}.$$

(3) $\left(\frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^3$；

解 由乘幂公式知

$$\left(\frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^3=\left[\cos 3\cdot\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin 3\cdot\frac{\pi}{6}\right]=\mathrm{i}.$$

(4) $\sqrt[4]{-2+2i}$.

解 因 $|-2+2i|=\sqrt{8}$, $\arg(-2+2i)=\frac{3}{4}\pi$, 所以由开方公式得

$$\sqrt[4]{-2+2i}=2^{\frac{3}{8}}\left(\cos\frac{3+8k\pi}{16}+i\sin\frac{3+8k\pi}{16}\right),$$

$$k=0,1,2,3.$$

1.10 解方程: $z^3+1=0$.

解 方程 $z^3+1=0$, 即 $z^3=-1$, 它的解是

$$z=(-1)^{\frac{1}{3}},$$

由开方公式计算得

$$\begin{aligned} z &= [1\cdot(\cos\pi+i\sin\pi)]^{\frac{1}{3}} \\ &= \cos\frac{(2k+1)\pi}{3}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{3}, k=0,1,2. \end{aligned}$$

即

$$z_0=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$z_1=\cos\pi+i\sin\pi=-1,$$

$$z_2=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

1.11 指出下列不等式所确定的区域与闭区域,并指明它是有界的还是无界的?是单连通域还是多连通域?

(1) $2<|z|<3$;

解 圆环,有界多连通域.

(2) $\left|\frac{1}{z}\right|<3$;

解 以原点为中心, $\frac{1}{3}$ 为半径的圆的外部,无界多连通域.

(3) $\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{\pi}{3}$ 且 $1<|z|<3$;

解 圆环的一部分,有界、单连域.

(4) $\operatorname{Im} z>1$ 且 $|z|<2$;

解 圆的一部分,有界、单连域.

(5) $\operatorname{Re} z^2 < 1$;

解　$x^2 - y^2 < 1$，无界、单连域.

(6) $|z-1| + |z+1| \leqslant 4$;

解　椭圆的内部及椭圆的边界，有界、闭区域.

(7) $|\arg z| < \frac{\pi}{3}$;

解　从原点出发的两条半射线所成的区域、无界、单连域.

(8) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| > a(a>0)$.

解　分三种情况：$0<a<1$，区域为圆的外部，无界二连域. $a=1$ 为左半平面无界单连域；$a>1$ 为圆内有界单连域.

1.12　指出满足下列各式的点 z 的轨迹是什么曲线？

(1) $|z+\mathrm{i}| = 1$;

解　以 $(0,-\mathrm{i})$ 为圆心，1 为半径的圆周.

(2) $|z-a| + |z+a| = b$，其中 a,b 为正实常数；

解　以 $\pm a$ 为焦点，$\frac{b}{a}$ 为长半轴的椭圆.

(3) $|z-a| = \operatorname{Re}(z-b)$，其中 a,b 为实常数；

解　设 $z = x + \mathrm{i}y$，则 $|(x-a) + \mathrm{i}y| = \operatorname{Re}(x - b + \mathrm{i}y)$. 即

$$\begin{cases}(x-a)^2 + y^2 = (x-b)^2, \\ x - b \geqslant 0.\end{cases}$$

亦即

$$\begin{cases}y^2 = 2(a-b)x + b^2 - a^2 \\ \quad = 2(a-b)\left(x - \frac{a+b}{2}\right), \\ x \geqslant b.\end{cases}$$

若 $a=b$，则轨迹为 $y=0$；若 $a>b$，则 $x \geqslant \frac{a+b}{2} > b$，轨迹为

$$y^2 = 2(a-b)\left(x - \frac{a+b}{2}\right);$$

若 $a<b$，则 $x \leqslant \frac{a+b}{2}$，无意义.

(4) $z\bar{z}+a\bar{z}+\bar{a}z+b=0$,其中 a 为复数,b 为实常数;

解 由题设可知$(z+a)(\bar{z}+\bar{a})+b-|a|^2=0$,即

$$|z+a|^2=|a|^2-b.$$

若 $|a|^2=b$,则 z 的轨迹为一点 $-a$;

若 $|a|^2>b$,则 z 的轨迹为圆,圆心在 $-a$,半径为 $\sqrt{|a|^2-b}$;

若 $|a|^2<b$,无意义.

(5) $\bar{a}z+a\bar{z}+b=0$,其中 a 为复常数,b 为实常数.

解 设 $z=x+\mathrm{i}y$,代入上述方程得

$$\begin{aligned}\bar{a}(x+\mathrm{i}y)+a(x-\mathrm{i}y)+b&=x(a+\bar{a})+\mathrm{i}(\bar{a}-a)y+b=0.\\&=2\mathrm{Re}\ a\cdot x+2\mathrm{Im}\ a\cdot y+b=0.\end{aligned}$$

即 z 的轨迹为一直线.

1.13 用参数方程表示下列各曲线.

(1) 连续 $1+\mathrm{i}$ 与 $-1-4\mathrm{i}$ 的直线段;

解 平面上连接点$(1,1)$与$(-1,-4)$的直线段,其参数方程可写为

$$\begin{cases}x=1+(-1-1)t,\\y=1+(-4-1)t,\end{cases}0\leqslant t\leqslant 1,$$

故其复数形式的参数方程为

$$\begin{aligned}z&=1-2t+\mathrm{i}(1-5t)\\&=1+\mathrm{i}+(-2-5\mathrm{i})t,0\leqslant t\leqslant 1\end{aligned}$$

(2) 以 0 为中心,焦点在实轴上,长半轴为 a,短半轴为 b 的椭圆周.

解 椭圆周的参数方程为$\begin{cases}x=a\cos t,\\y=b\sin t,\end{cases}0\leqslant t\leqslant 2\pi$,写成复数形式为

$z=a\cos t+\mathrm{i}b\sin t(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

1.14 试将函数 $x^2-y^2-\mathrm{i}(xy-x)$写成 z 的函数$(z=x+\mathrm{i}y)$.

解 将 $x=\dfrac{z+\bar{z}}{2},y=\dfrac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}$代入上式,得

$$\frac{(z+\bar{z})^2}{4}+\frac{(z-\bar{z})^2}{4}-\mathrm{i}\frac{(z+\bar{z})(z-\bar{z})}{4\mathrm{i}}+\mathrm{i}\frac{z+\bar{z}}{2}$$

$$=\frac{z^2+2z\cdot\bar{z}+\bar{z}^2}{4}+\frac{z^2-2z\cdot\bar{z}+\bar{z}^2}{4}-\frac{z^2-\bar{z}^2}{4}+\mathrm{i}\,\frac{z+\bar{z}}{2}$$

$$=\frac{z^2}{4}+\frac{3\,\bar{z}^2}{4}+\frac{\mathrm{i}z}{2}+\frac{\mathrm{i}\,\bar{z}}{2}.$$

1.15 试证$\lim\limits_{z\to 0}\frac{\mathrm{Re}\,z}{z}$不存在.

证 $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\mathrm{Re}\,z}{z}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x}{x+\mathrm{i}y}$，令 $y=kx$，则上述极限为$\frac{1}{1+k\mathrm{i}}$，随 k 变化而变化，因而极限不存在.

1.16 设$f(z)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & z\neq 0,\\ 0, & z=0,\end{cases}$试证$f(z)$在 $z=0$ 处不连续.

证 因

$$\lim_{z\to 0}f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

即$\lim\limits_{z\to 0}f(z)$不存在，故$f(z)$在 $z=0$ 处不连续.

§1.4 自 测 题

自测题 1

（一）填空题

1. 复数 $z=\frac{1}{\mathrm{i}}-\frac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$的实部______，虚部______，模______，辐角______.
2. $2+2\mathrm{i}$ 的复指数形式为______，三角表示式为______.
3. $(1+\mathrm{i})^6$的值为______.
4. 方程 $z^3+8=0$ 的所有根______，______，______.
5. 若 $\mathrm{Re}(z+2)=-1$，则点 z 的轨迹为______.

（二）计算下列各题

1. 求$\left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^4$.
2. 用 $\cos\theta$ 与 $\sin\theta$ 表示 $\cos 5\theta$.