§ 10-2　简谐振动的合成

10.2.1　同方向同频率简谐振动的合成

The composition of two harmonic vibrations with the same direction and same frequency

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_{10}) \qquad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi_{20})$$

求： $x = x_1 + x_2$

1、 计算法

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \phi_{10}) + A_2 \cos(\omega t + \phi_{20})$$

$$= A_1 \cos\omega t \cdot \cos\phi_{10} - A_1 \sin\omega t \cdot \sin\phi_{10}$$

$$+ A_2 \cos\omega t \cdot \cos\phi_{20} - A_2 \sin\omega t \cdot \sin\phi_{20}$$

$$= \cos\ \omega t (A_1 \cos\ \phi_{10} + A_2 \cos\ \phi_{20})$$

$$- \sin\ \omega t (A_1 \sin\ \phi_{10} + A_2 \sin\ \phi_{20})$$

令

$$A_1 \cos\ \phi_{10} + A_2 \cos\ \phi_{20} = A \cos\ \phi_0$$

$$A_1 \sin\ \phi_{10} + A_2 \sin\ \phi_{20} = A \sin\ \phi_0$$

上式 $x = A\cos\omega t\cdot\cos\phi_0 - A\sin\omega t\cdot\sin\phi_0$

$$= \mathrm{A}\cos(\omega \mathrm{t} + \phi_0)$$

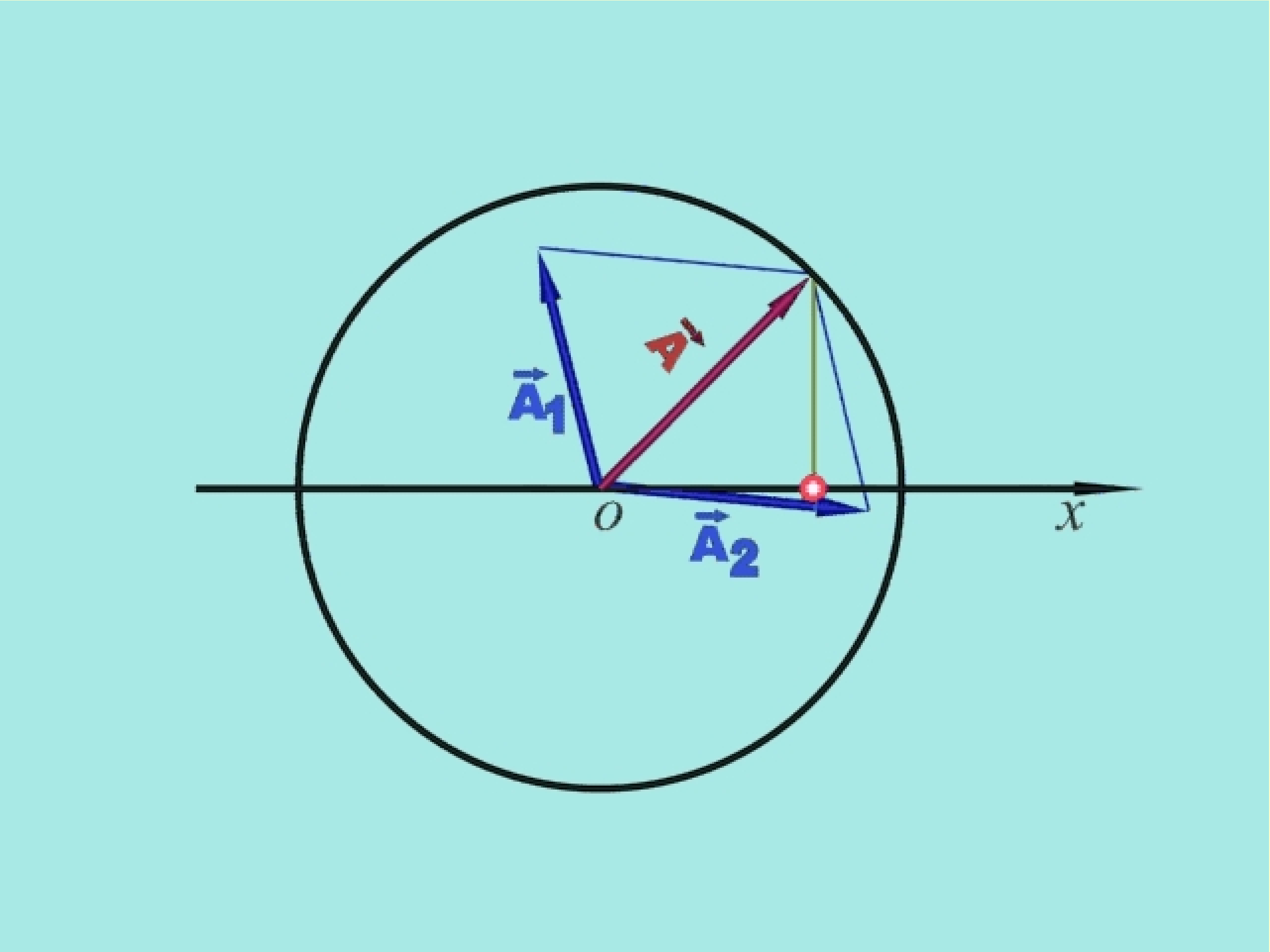
两个同方向、同频率的简谐振动的合振动仍然是一个同频率的简谐振动。

其中　合振幅 $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_{20} - \phi_{10})}$

初位相 $\varphi_0 = \arctan\dfrac{A_1\sin\varphi_{10} + A_2\sin\varphi_{20}}{A_1\cos\varphi_{10} + A_2\cos\varphi_{20}}$

2、旋转矢量合成法

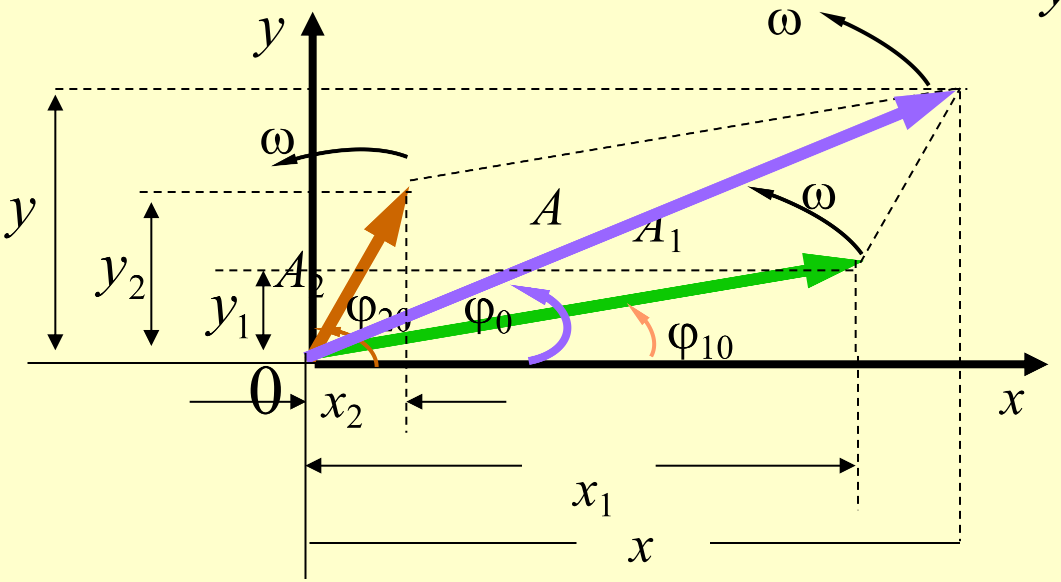
两振动频率相同，则它们的旋转矢量以相同的角速度ω 旋转，故形成稳定的平形四边形。



旋转矢量合成法： $\vec{A}=\vec{A}_1+\vec{A}_2$

$$x = x_1 + x_2$$

$$y = y_1 + y_2$$



合振幅 $$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\phi_{20}-\phi_{10})}$$

初位相 $$\varphi_0=\arctan\frac{A_1\sin\varphi_{10}+A_2\sin\varphi_{20}}{A_1\cos\varphi_{10}+A_2\cos\varphi_{20}}$$

3、相位差对合振幅的影响

(1) 若位相差

$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_{20}) - (\omega t + \varphi_{10}) = \varphi_{20} - \varphi_{10} = 2k\pi$$

$$k = 0, \quad \pm 1, \quad \pm 2$$

振幅最大： $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = A_1 + A_2$

(2) 若位相差

$$\Delta\phi = (2k+1)\pi \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2\cdots$$

振幅最小： $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} = |A_1 - A_2|$

(3) 若位相差

$\Delta\phi = \varphi_{20} - \varphi_{10}$ **为其它任意值时**

振幅A $A_{min} < A < A_{max}$

例1: *The two harmonic vibrations are*

$$x_1 = 0.03\, cos(5t + \frac{\pi}{2})$$

$$x_2 = 0.04\, cos(5t)$$

Find their composition vibration.

Solution: $$x = x_1 + x_2 = A\cos(5t + \varphi)$$

$$A = \sqrt{A_1^{\ 2} + A_2^{\ 2} + 2A_1A_2\, cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = 0.05$$

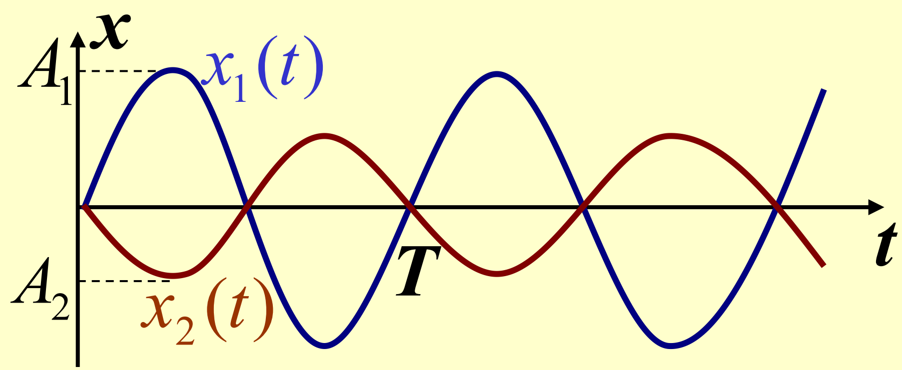
$$\varphi = arctg\frac{A_1\, sin\varphi_1 + A_2\, sin\varphi_2}{A_1\, cos\varphi_1 + A_2\, cos\varphi_2} = 0.643$$

Hence: $$x = 0.05\cos(5t + 0.643)$$

例2：两个同方向同频率的简谐振动曲线(如图所示)

1、求合振动的振幅。

2、求合振动的振动方程。

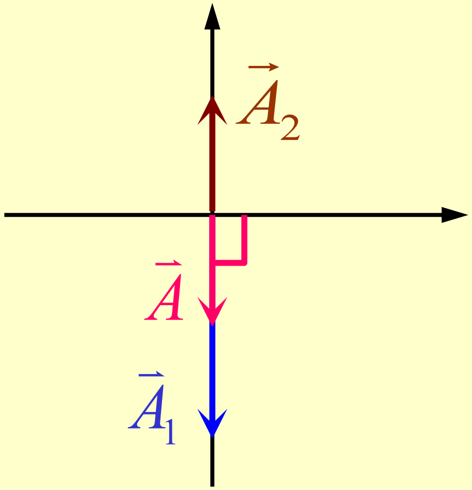


解：$A=(A_1-|A_2|)$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}$$

$$A_1\cos\varphi_1=0 \quad \varphi_1=\pm\frac{\pi}{2} \quad v_1>0\rightarrow\varphi_1=-\frac{\pi}{2}$$

$$A_2\cos\varphi_2=0 \quad \varphi_2=\pm\frac{\pi}{2} \quad v_2<0\rightarrow\varphi_2=\frac{\pi}{2}$$

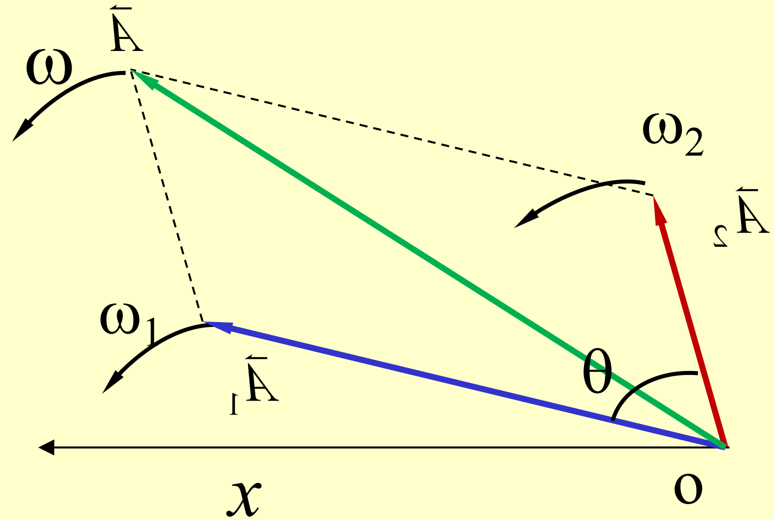


由矢量图： $\varphi=-\frac{\pi}{2}$

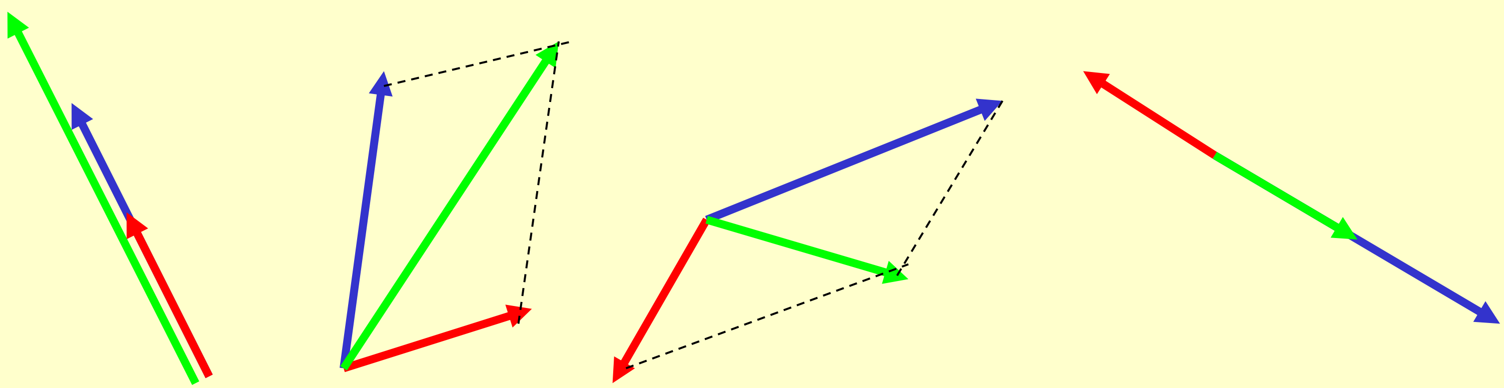
$$\therefore x=A\cos(\frac{2\pi}{T}t-\frac{\pi}{2})=(A_1-|A_2|)\cos(\frac{2\pi}{T}t-\frac{\pi}{2})$$

*10.2.2　同方向不同频率简谐振动的合成

1、利用旋转矢量合成法



从图可看出，因两旋转矢量的角速度ω_1、ω_2 不相同，所以由两矢量A_1、A_2合成的平行四边形的形状要发生变化，矢量A的大小也随之而变，出现了振幅有周期性地变化。



2、拍振动表达式

设分振动为 $x_1 = A\cos(\omega_1 t + \varphi)$ $x_2 = A\cos(\omega_2 t + \varphi)$

$$\because \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\therefore x = x_1 + x_2 = 2A\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t)\cos(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\varphi)$$

3、拍频：指合振幅变化的频率. 合振幅每变化一个周期称为一拍。

振幅只能取正值，因此拍的圆频率为调制频率的2倍

于是拍频为 $\nu_{拍} = \frac{\omega_{拍}}{2\pi} = \left|\frac{\omega_2}{2\pi} - \frac{\omega_1}{2\pi}\right| = |\nu_2 - \nu_1|$

即“拍频”等于两个分振动频率之差。

因此，当两个振动频率接近时，合成中由于周期的微小差别而造成合振幅随时间作周期性变化，振动时而加强时而减弱的现象称为**拍**。

合振动在单位时间内加强(或减弱)的次数称为**拍频**。

4、“拍振动”的应用

声振动、电磁振荡和波动中是经常遇到的。

利用拍现象还可以测定振动频率、校正乐器和制造差拍振荡器等等

5、同步锁模：

上面关于拍频现象的讨论只是数学计算的结果。这只是问题的一种可能。如果这两个分振动，通过一定物理条件，使二者发生了非线性耦合，那么上面那种简单的线性叠加就不再成立，而会出现所谓“同步锁模”现象，即两个分振动的频率锁定在同一个频率上。

*10.2.3　两个相互垂直的同频率简谐振动的合成

设　$x = A_1\cos(\omega t + \varphi_{10})$　　$y = A_2\cos(\omega t + \varphi_{20})$

下面所做的工作是为了消去参量t，而得其轨迹方程。

将两分振动方程进行恒等变换，得

$$\frac{x}{A_1} = \cos\omega t\cos\varphi_{10} - \sin\omega t\sin\varphi_{10} \qquad (1)$$

$$\frac{y}{A_2} = \cos\omega t\cos\varphi_{20} - \sin\omega t\sin\varphi_{20} \qquad (2)$$

由 $(1)\times\cos\varphi_{20} - (2)\times\cos\varphi_{10}$

得　$$\frac{x}{A_1}\cos\varphi_{20} - \frac{y}{A_2}\cos\varphi_{10} = \sin\omega t\sin(\varphi_{20} - \varphi_{10}) \qquad (3)$$

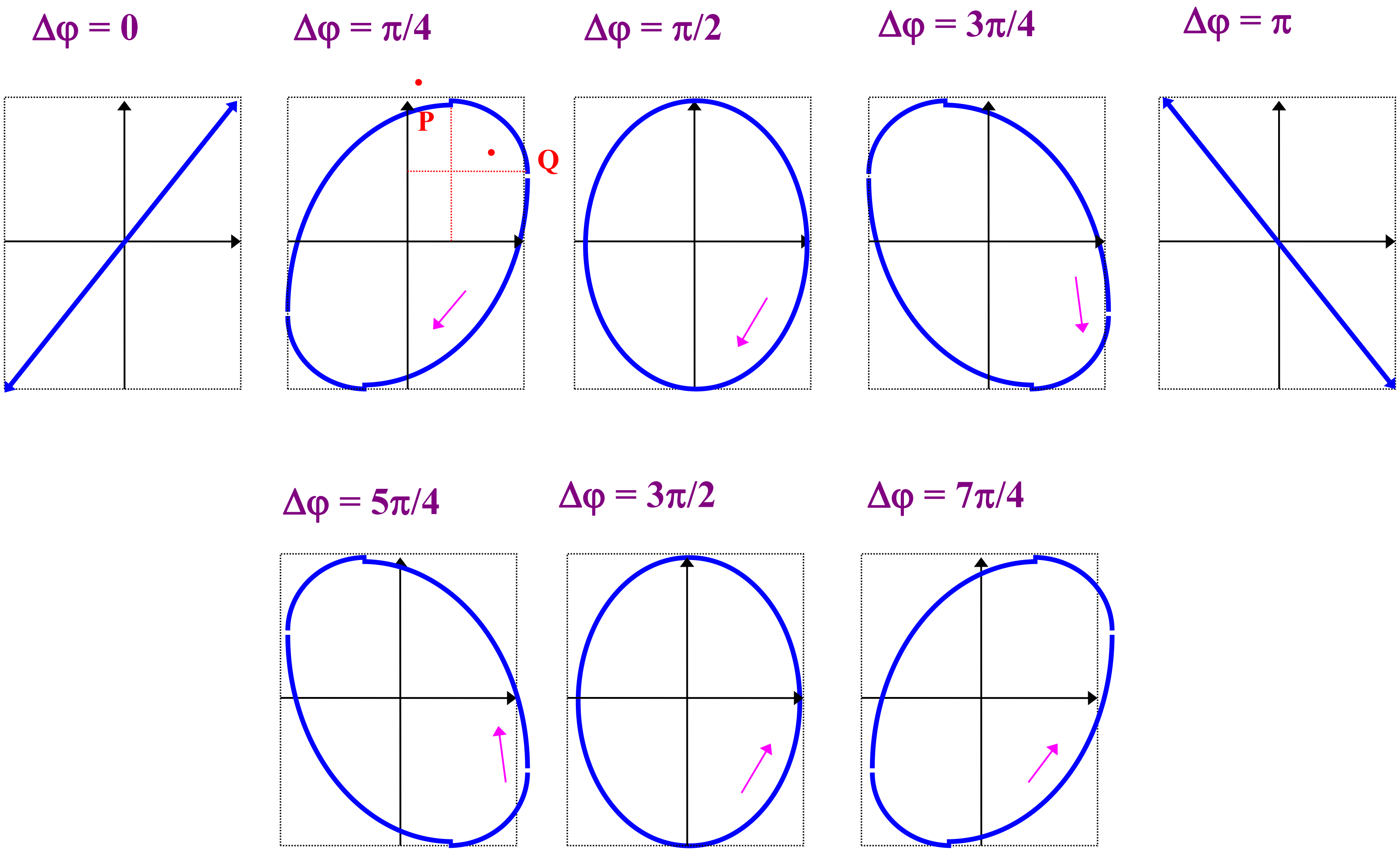
由 $(1)\times\sin\varphi_{20}-(2)\times\sin\varphi_{10}$

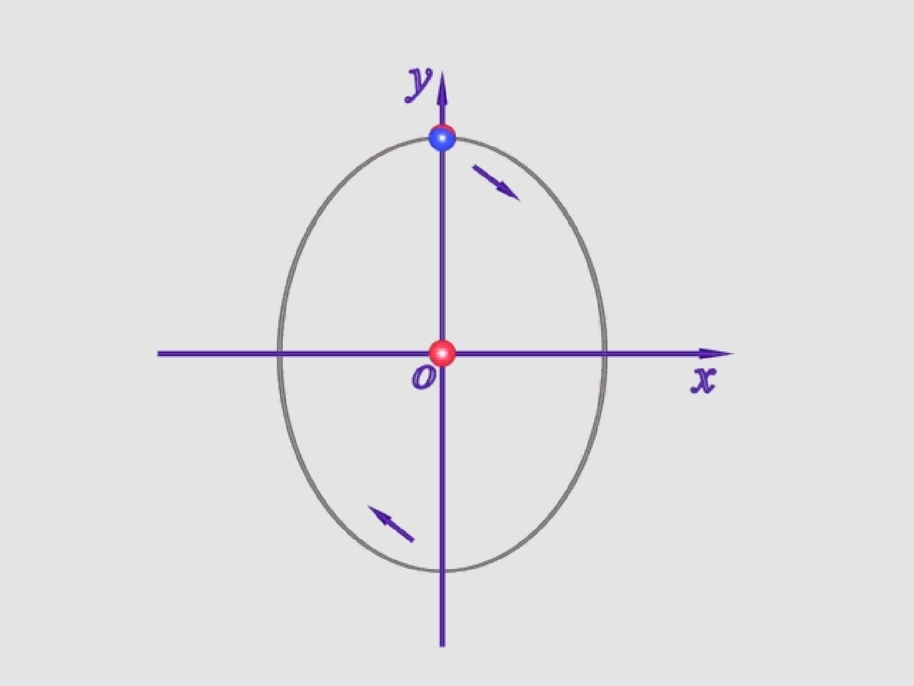
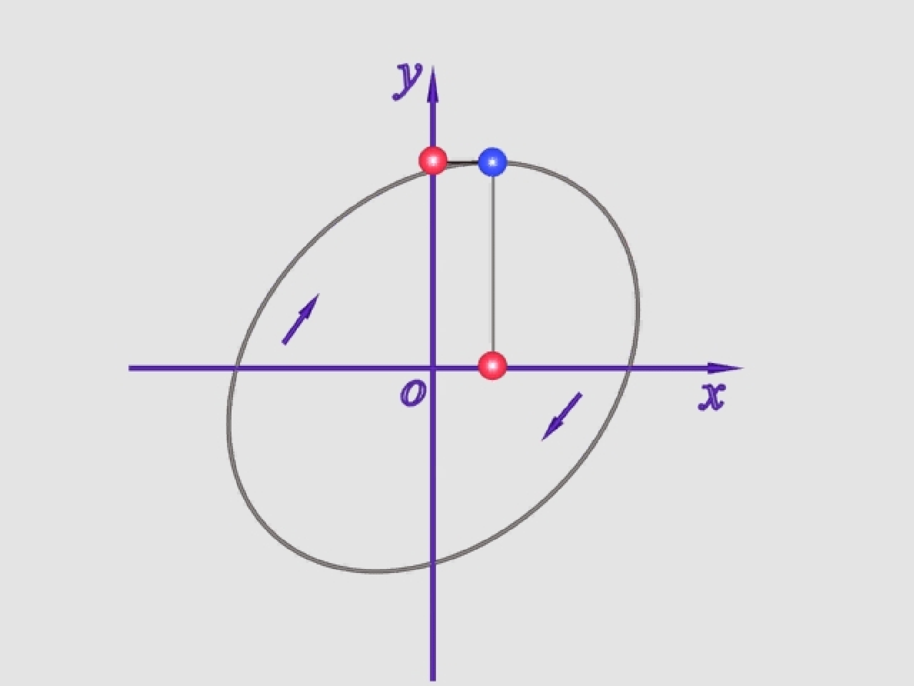
得 $$\frac{x}{A_1}\sin\varphi_{20}-\frac{y}{A_2}\sin\varphi_{10}=\cos\omega t\sin(\varphi_{20}-\varphi_{10}) \quad (4)$$

$(3)^2+(4)^2$ 并整理可得

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_{20}-\varphi_{10})=\sin^2(\varphi_{20}-\varphi_{10})$$

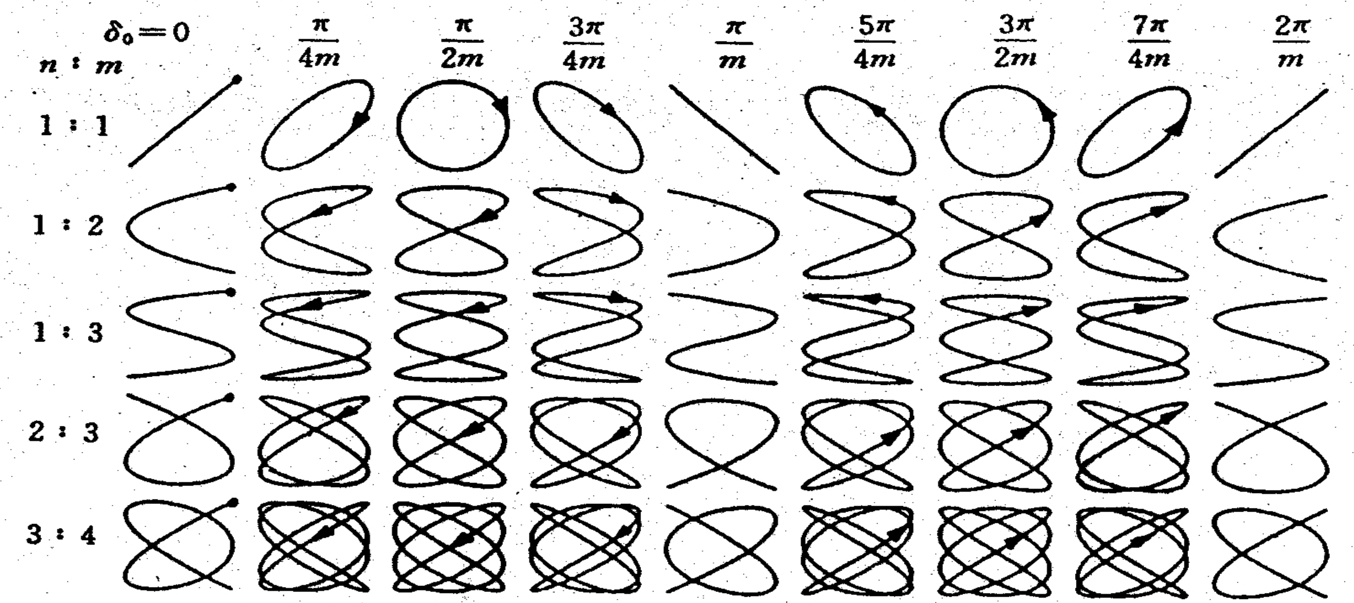
这说明：振动方向互相垂直的同频谐振的轨迹是一椭圆曲线，但曲线的形状则与两分振动的位相差有很大关系。

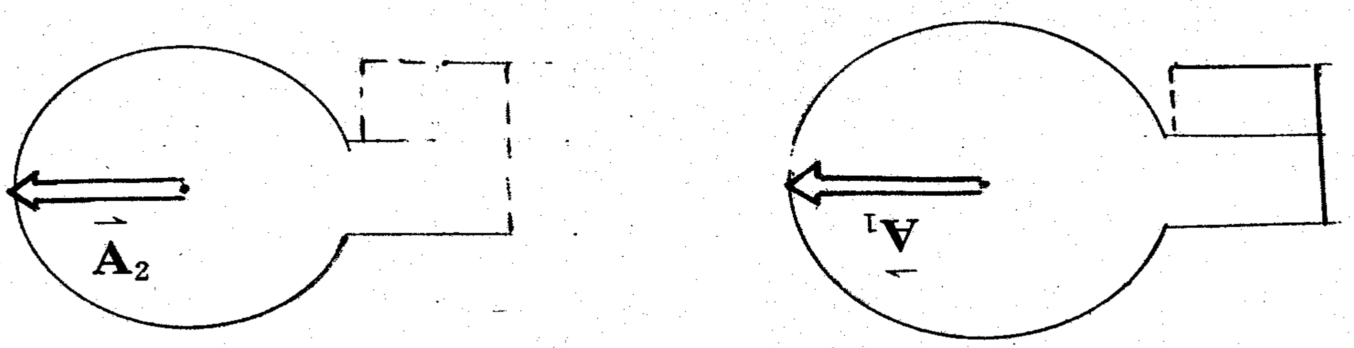

Δφ = 0
Δφ = π/4
P
Q
Δφ = π/2
Δφ = 3π/4
Δφ = π
Δφ = 5π/4
Δφ = 3π/2
Δφ = 7π/4


y
o
x

y
o
x

*10.2.4　两个相互垂直的不同频率简谐振动的合成

李萨如图形 (Lissajou's figure)





§10-3 阻尼振动 受迫振动 共振

Damped Vibration Forced Vibration and Resonance

10.3.1 阻尼振动*Damped Vibration*

1、 固体在介质中所受阻力在一般情况下为

$$f_r = -\gamma_1 v - \gamma_2 v^2$$

我们只讨论其中的线性部分，即在低速情况下的振动

$$f_r = -\gamma v = -\gamma \frac{dx}{dt}$$

2、以弹簧振子为例，其运动微分方程为

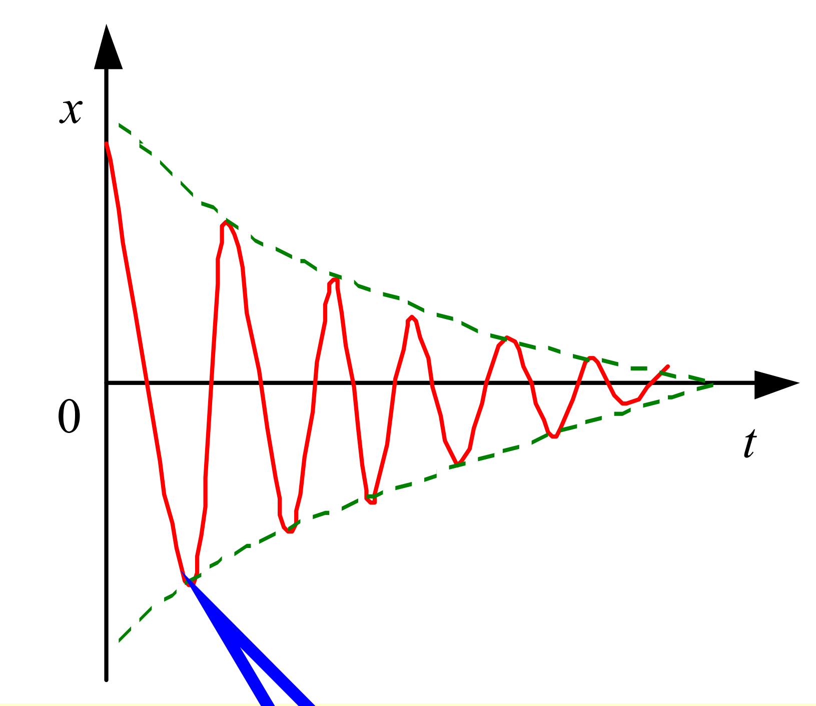
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\gamma\frac{dx}{dt} - kx \qquad 令 \ \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad , 2\beta = \frac{\gamma}{m} \qquad 则有$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

式中β——阻尼系数 ω_0——系统固有角频率。

*方程的解及其物理意义

Underdamped vibration（欠阻尼）：



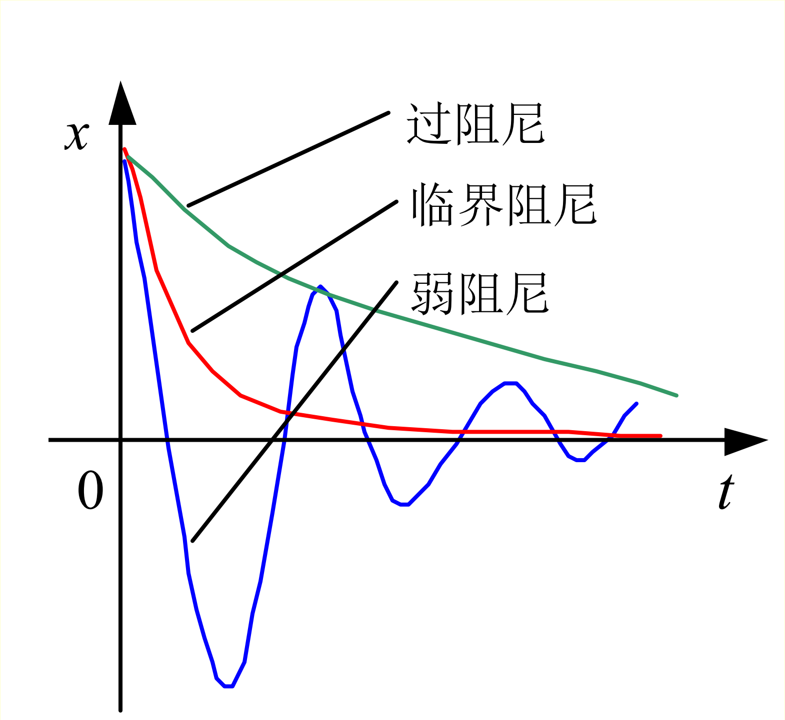
特征:

- *γ小, 振动很多次;*
- *振幅逐渐减小;*
- *不是周期运动, 但可引入周期.*

$$x = Ae^{-\frac{\gamma t}{2m}}\cos(\omega t+\varphi) = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi)$$

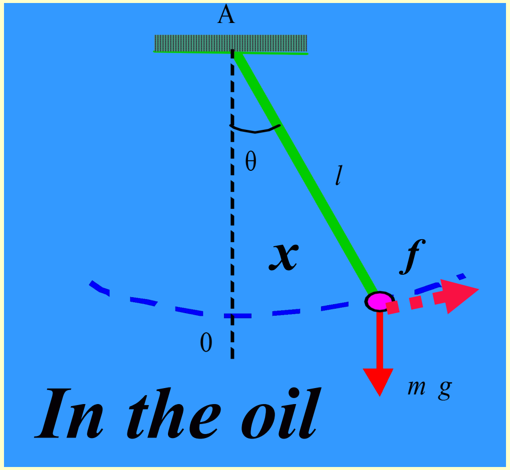
$$\beta = \frac{\gamma}{2m}$$ ——*阻尼系数, 由阻力系数决定。*

Overdamped vibration（过阻尼）and critical damping:



特征:

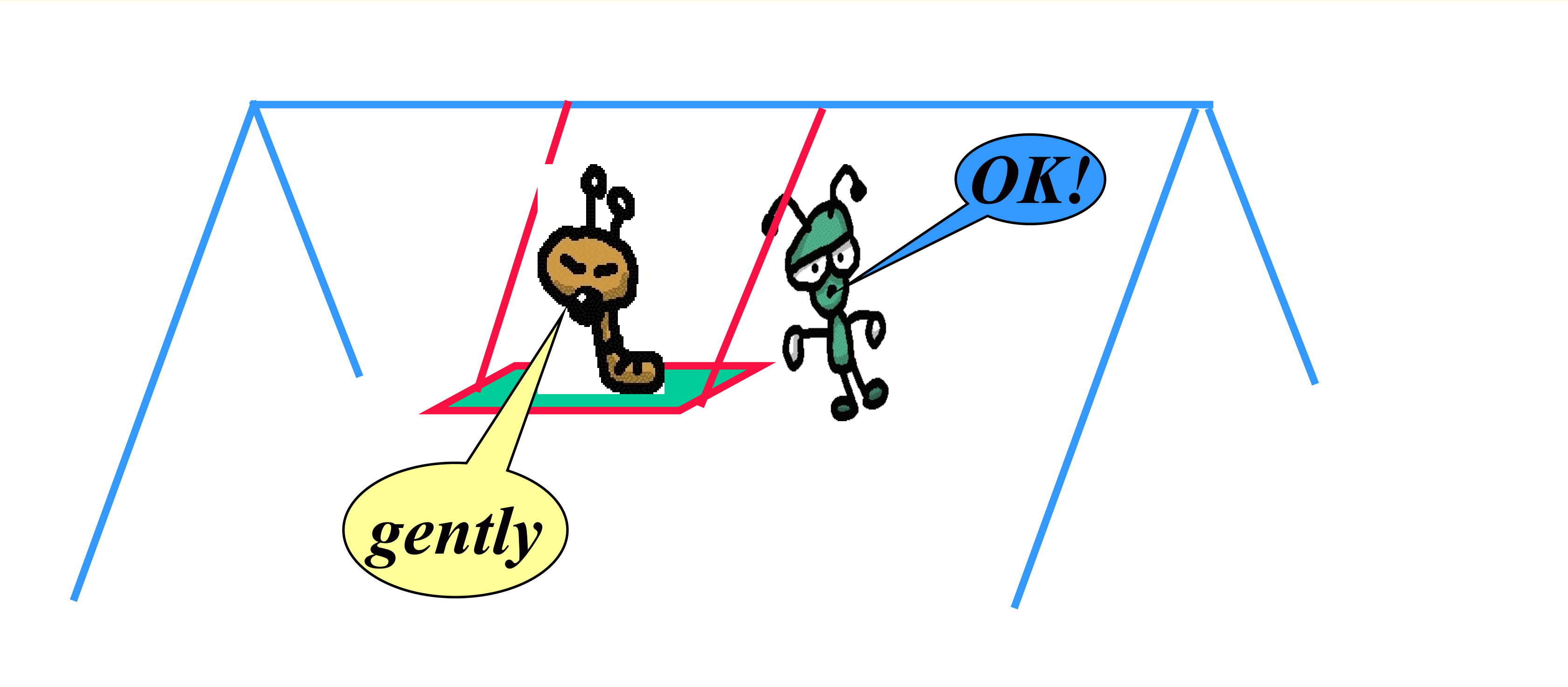
- ***Critical damping:能回到平衡位置;***
- ***Overdamped vibration:不能回到平衡位置(需无限长时间);***



10.3.2　　受迫振动*Forced Vibration*

——振动系统在周期性外力作用下发生的振动

Example: a girl(child) sitting on a swing(秋千).



By giving the girl a little push once each cycle, you can maintain a nearly constant amplitude.

弱阻尼谐振子系统谐受迫振动微分方程
——以弹簧振子为例

其运动方程为 $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt} + F_0\cos\omega t$$

令 $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, $2\beta = \dfrac{\gamma}{m}$, $f_0 = \dfrac{F_0}{m}$

则得 $$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0\cos\omega t$$

Its solution consists of two parts:

$$Ae^{-\beta t}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

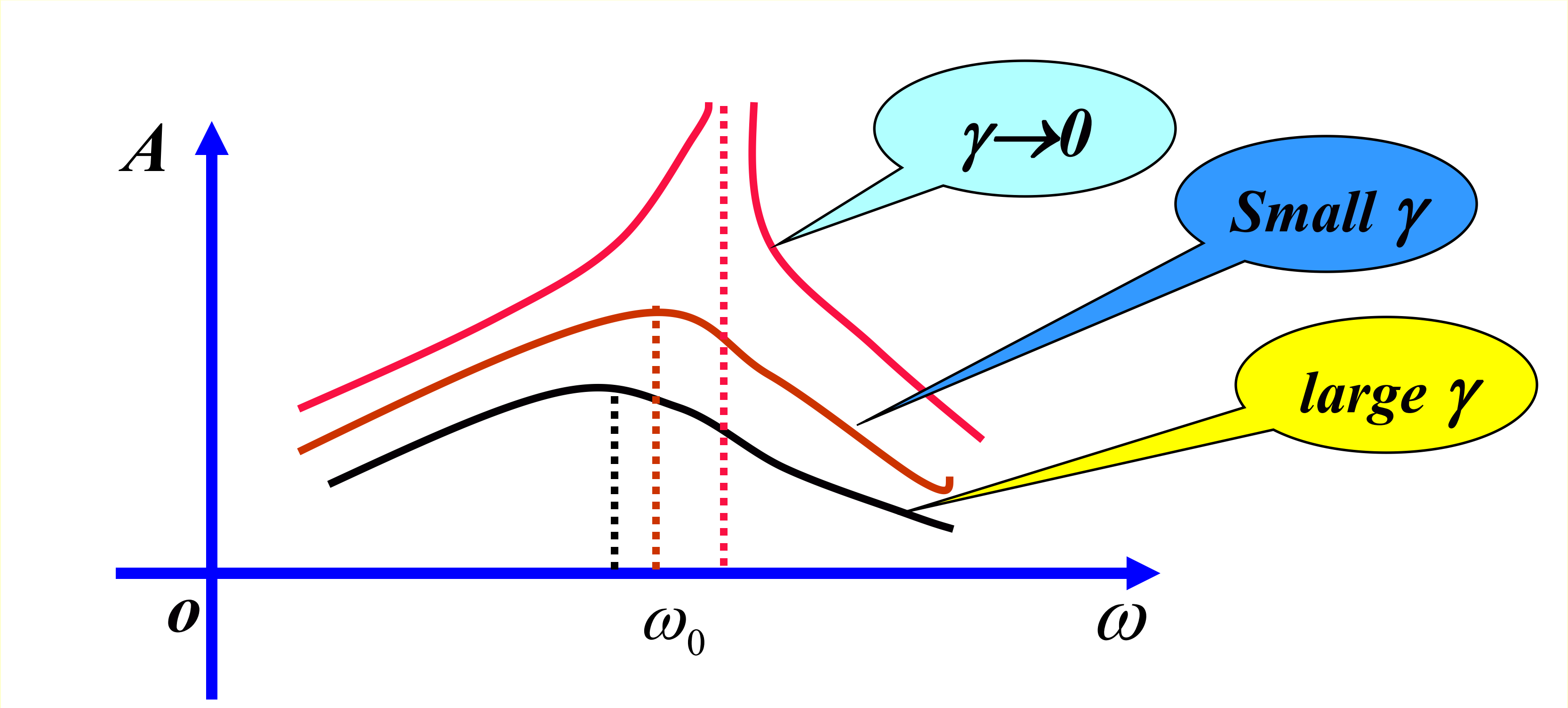
$$x = \text{稳态部分} + \text{阻尼部分}$$

$$A(\omega, \omega_0, \gamma, F_0)\cos(\omega t + \varphi)$$

$$x = A(\omega, \omega_0, \gamma, F_0)\cos(\omega t + \varphi)$$

特征:

- ***频率与驱动力的频率相同;***
- ***振幅A与ω、 ω_0、γ 和F_0有关，特别是ω的函数。***



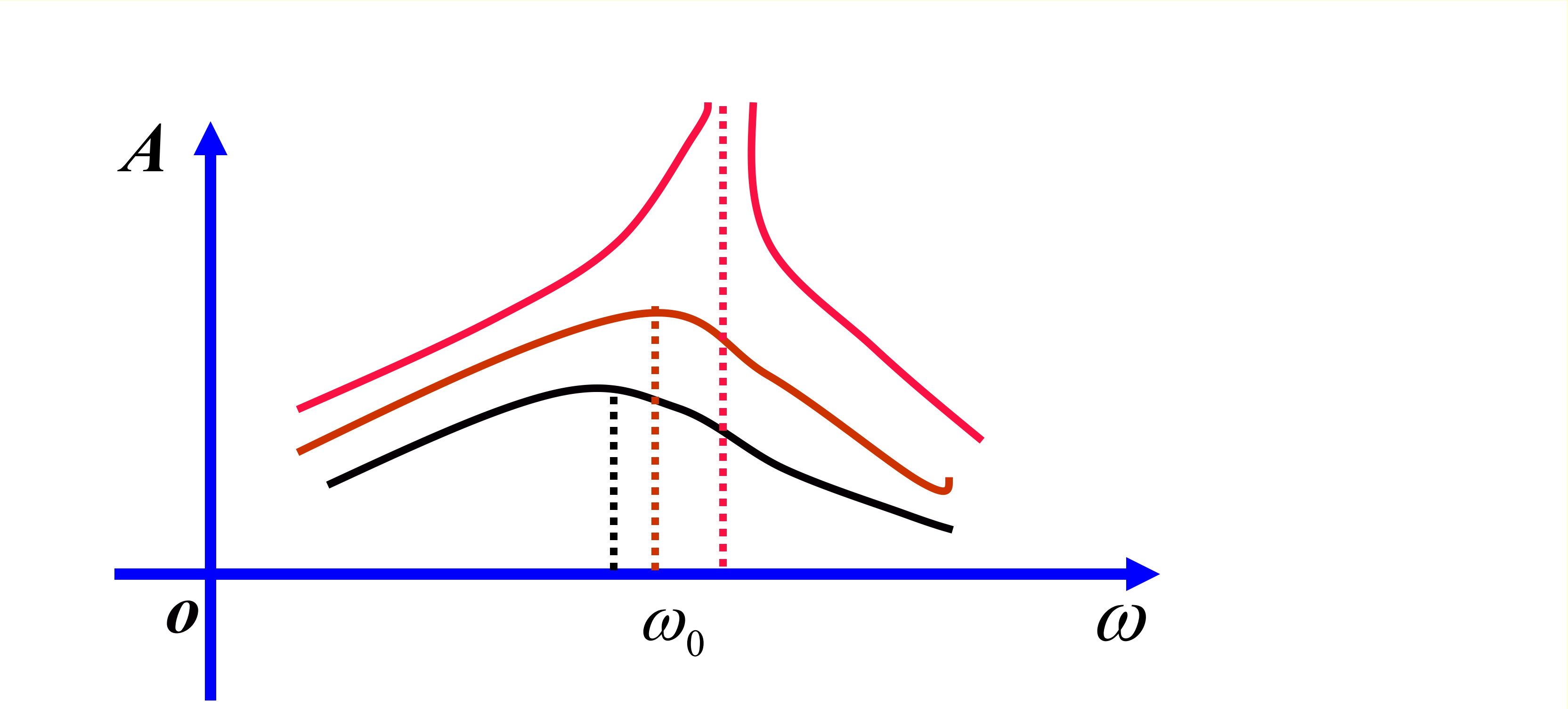
Resonance(共振):

From the following figure, the amplitude is greatest when

$$\omega = \omega_0$$

depending on γ.

A condition called Resonance.



总结：方程的解及其物理意义

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi_0)+A\cos(pt+\varphi)$$

1）自由振动的能量是外界一次性输入

$$\begin{cases}\text{无阻尼:能量守恒,等幅振动}\\ \text{有阻尼:有能量损耗,减幅振动}\end{cases}$$

2）受迫振动过程中，外界在不断地向振动系统补充能量

$A_0e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi_0)$--就是由初始能量所维持的固有项,
当其衰减完毕时,与初始条件相关的A_0,φ_0也就不存在了。
$A\cos(pt+\varphi)$--是由谐和策动力所维持的稳定受迫振动。