§5.3 教材习题同步解析

5.1 问 $z=0$ 是否为下列函数的孤立奇点？

(1) $e^{1/z}$； (2) $\cot \dfrac{1}{z}$； (3) $\dfrac{1}{\sin z}$.

解 (1) $e^{1/z}$ 在 $0<|z|<\infty$ 解析，在 $z=0$ 处不解析，$z=0$ 是 $e^{1/z}$ 的孤立奇点

(2) 因 $\cot \dfrac{1}{z}=\dfrac{\cos(1/z)}{\sin(1/z)}$，在 $\dfrac{1}{z}=k\pi$ 处，即 $z_k=\dfrac{1}{k\pi}(k=\pm1,\pm2,\cdots)$，$z=0$ 处 $\cot\dfrac{1}{z}$ 不解析，且 $\lim\limits_{k\to\infty}z_k=0$，故 0 不为 $\cos\dfrac{1}{z}$ 的孤立奇点.

(3) 因 $\dfrac{1}{\sin z}$ 除 $z=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 外处处解析，所以 0 为其孤立奇点

5.2 找出下列各函数的所有零点，并指明其阶数.

(1) $\dfrac{z^2+9}{z^4}$； (2) $z\sin z$； (3) $z^2(e^{z^2}-1)$.

解 (1) $\dfrac{z^2+9}{z^4}=\dfrac{(z+3i)(z-3i)}{z^4}$，显然 $z=\pm3i$ 为其一阶零点.

(2) 因

$$z\sin z=z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$=z\left(z-\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)=z^2\left(1-\frac{z^2}{3!}+\cdots\right),$$

所以 $z=0$ 为 $z\sin z$ 的二阶零点. 又 $z=k\pi$ 时，$z\sin z=0$，所以

$z=k\pi$ 为 $z\sin z$ 的零点，$k=\pm1,\pm2,\cdots$.

令 $f(z)=z\sin z$，$f'(z)=\sin z+z\cos z$，

$$f'(k\pi)=\sin z+z\cos z\Big|_{z=k\pi}$$
$$=(-1)^k\cdot k\pi\neq0\ (k=\pm1,\pm2,\cdots).$$

故 $z=k\pi$ 为 $z\sin z$ 的一阶零点.

（3）令

$$f(z)=z^2(e^{z^2}-1),$$

由 $f(z)=0$ 可解得

$$z=0 \quad 或 \quad z^2=2k\pi i,$$

即 $z=\sqrt{2k\pi i}\,(k=\pm1,\pm2,\cdots)$. 因

$$f(z)=z^2(e^{z^2}-1)=z^2\left(z^2+\frac{z^4}{2!}+\cdots\right)$$

$$=z^4\left(1+\frac{z^2}{2!}+\cdots\right),$$

所以 $z=0$ 为 $f(z)$ 的四阶零点. 又

$$f'(z)=2z(e^{z^2}-1)+z^2\cdot 2z\cdot e^{z^2},$$

$$f'(\sqrt{2k\pi i})=2\cdot(\sqrt{2k\pi i})^3\neq 0\ (k=\pm1,\pm2,\cdots),$$

所以 $z=\sqrt{2k\pi i}\ (k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 为 $f(z)$ 的一阶零点.

5.3 下列各函数有哪些有限奇点？各属何类型（如是极点，指出它的阶数）.

（1）$\dfrac{z-1}{z(z^2+4)^2}$；（2）$\dfrac{\sin z}{z^3}$；（3）$\dfrac{1}{\sin z+\cos z}$；

（4）$\dfrac{1}{z^2(e^z-1)}$；（5）$\dfrac{\ln(1+z)}{z}$；（6）$\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$；

（7）$\dfrac{\tan(z-1)}{z-1}$.

解 （1）令 $f(z)=\dfrac{z-1}{z(z^2+4)^2}$，$z=0,\pm2i$ 为 $f(z)$ 的奇点，因 $\lim\limits_{z\to0}zf(z)=-\dfrac{1}{16}$，所以 $z=0$ 为简单极点. 又

$$\lim_{z\to2i}(z-2i)^2\frac{z-1}{z(z^2+4)^2}=\lim_{z\to2i}\frac{z-1}{z(z+2i)^2}=-\frac{i+2}{32},$$

所以 $z=2i$ 为二阶极点，同理，$z=-2i$ 亦为二阶极点.

（2）因 $\lim\limits_{z\to0}z^2\dfrac{\sin z}{z^3}=\lim\limits_{z\to0}\dfrac{\sin z}{z}=1$，所以 $z=0$ 为二阶极点.

(3) 令

$$f(z)=\frac{1}{\sin z+\cos z}=\frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(z+\frac{\pi}{4}\right)},$$

则$\frac{1}{f(z)}$的零点为 $z=k\pi-\frac{\pi}{4},k=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 因

$$\left(\frac{1}{f(z)}\right)'\Big|_{z=k\pi-\frac{\pi}{4}}=\left(\sqrt{2}\sin\left(z+\frac{\pi}{4}\right)\right)'\Big|_{z=k\pi-\frac{\pi}{4}}$$

$$=\sqrt{2}\cos\left(z+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_{z=k\pi-\frac{\pi}{4}}$$

$$=\sqrt{2}\cdot(-1)^k\neq0,$$

所以 $z=k\pi-\frac{\pi}{4}(k=0,\pm1,\cdots)$都为简单极点.

(4) 令

$$f(z)=\frac{1}{z^2(e^z-1)},\ \frac{1}{f(z)}=z^2(e^z-1),$$

则$\frac{1}{f(z)}$的零点为

$$z=2k\pi i,k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

因

$$\frac{1}{f(z)}=z^2\left(z+\frac{z^2}{2!}+\cdots\right)=z^3\left(1+\frac{z}{2!}+\cdots\right),$$

$z=0$ 为$\frac{1}{f(z)}$的三阶零点,故为$f(z)$的三阶极点. 又

$$\left(\frac{1}{f(z)}\right)'\Big|_{z=2k\pi i}=(2z(e^z-1)+z^2e^z)\Big|_{z=2k\pi i}\neq0,$$

故 $z=2k\pi i$ 为$\frac{1}{f(z)}$的一阶零点,即为$f(z)$的简单极点.

(5) 令$f(z)=\frac{\ln(1+z)}{\ }$

所以 $z=0$ 为可去奇点.

(6) 令

$$f(z)=\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}=\frac{z-e^z+1}{z(e^z-1)},$$

$z=0$ 和 $2k\pi i(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 为其孤立奇点. 因

$$\lim_{z\to0}f(z)=\lim_{z\to0}\frac{1-e^z}{e^z-1+ze^z}=\lim_{z\to0}\frac{-e^z}{2e^z+ze^z}=-\frac{1}{2},$$

所以 $z=0$ 为其可去奇点. 又

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{z(e^z-1)}{z-e^z+1}=\frac{z}{z-e^z+1}\cdot(e^z-1),$$

所以 $z=2k\pi i(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 为 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的一阶零点, 即为 $f(z)$ 的简单极点.

(7) 令

$$f(z)=\frac{\tan(z-1)}{z-1}=\frac{\sin(z-1)}{(z-1)\cos(z-1)},$$

$f(z)$ 的孤立奇点为 $z=1$ 和 $z_k=k\pi+\dfrac{\pi}{2}+1(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 因

$$\lim_{z\to1}f(z)=\lim_{z\to1}\frac{\sin(z-1)}{z-1}\cdot\frac{1}{\cos(z-1)}=1,$$

故 $z=1$ 为其可去奇点.

又 $z_k=k\pi+\dfrac{\pi}{2}+1$, z_k 为 $\cos(z-1)$ 的一阶零点, 故为 $f(z)$ 的简单极点.

另解:

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{(z-1)\cos(z-1)}{\sin(z-1)},$$

因

$$\left(\frac{1}{f(z)}\right)'=\frac{\cos(z-1)\sin(z-1)-\sin^2(z-1)(z-1)-\cos^2(z-1)(z-1)}{\sin^2(z-1)}$$

$$=\frac{-(z-1)+\sin(z-1)\cos(z-1)}{\sin^2(z-1)},$$

而 $\left(f(z)\right)\big|_{z=k\pi+\frac{\pi}{2}+1}$ ，故 z_k … 2 … 为 $f(z)$ 的 …

5.4 证明：设函数 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta(0<\delta<$ … 内解析，那么 z_0 是 $f(z)$ 的极点的充分必要条件是 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$.

证 先证条件是必要的. 如果 z_0 是 $f(z)$ 的极点，则 $f(z)$ 在 z_0 的洛朗展开式必有有限个负整次幂项，即

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{C_{-m}}{(z-z_0)^m}+\cdots+\frac{C_{-1}}{z-z_0}+C_0+C_1(z-z_0)+\cdots \\ &= \frac{1}{(z-z_0)^m}[C_{-m}+C_{-m+1}(z-z_0)+ \\ &\quad \cdots+C_0(z-z_0)^m+\cdots],\ m\geqslant 1,C_{-m}\neq 0. \end{aligned}$$

对上式取极限，右端的前一因式的极限为 ∞，后一因式的极限为非零常数 C_{-m}. 所以

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(z-z_0)^m}[C_{-m}+C_{-m+1}(z-z_0)+\cdots]=\infty.$$

再证条件是充分的. 如果 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$，令 $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$. 于是

$$\lim_{z\to z_0}g(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)}=0.$$

由定理 5.1，z_0 是 $g(z)$ 的可去奇点. 根据可去奇点的定义及 $\lim\limits_{z\to z_0}g(z)=0$，$g(z)$ 在 z_0 的洛朗展开式应为

$$\begin{aligned} g(z) &= b_m(z-z_0)^m+\cdots+b_{m+n}(z-z_0)^{m+n}+\cdots \\ &= (z-z_0)^m[b_m+b_{m+1}(z-z_0)+ \\ &\quad \cdots+b_{m+n}(z-z_0)^n+\cdots] \\ &= (z-z_0)^m\varphi(z), \end{aligned}$$

其中 $m\geqslant 1,b_m\neq 0$，$\varphi(z)$ 是上式方括号内的幂级数的和函数. 显然 $\varphi(z)$ 在 z_0 解析且 $\varphi(z_0)=b_m\neq 0$. 由于解析函数的商在分母不为零的点处仍为解析函数，因而 $\dfrac{1}{\varphi(z)}$ 在 z_0 处解析且不为零，则 $\dfrac{1}{\varphi(z)}$ 在 z_0 可展开成幂级数：

$$C_0 + C_1(z-z_0) + \cdots,$$

其中 $C_0 \neq 0$. 所以

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^m}\frac{1}{\varphi(z)}$$

$$= \frac{1}{(z-z_0)^m}[C_0 + C_1(z-z_0) + \cdots]$$

$$= \frac{C_0}{(z-z_0)^m} + \frac{C_1}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots.$$

由极点的定义知,z_0是$f(z)$的(m 阶)极点.

5.5 如果$f(z)$与 $g(z)$是以 z_0为零点的两个不恒为0的解析函数,则

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}\ (\text{或两端均为}\infty).$$

证 设 z_0为$f(z)$的 m 阶零点,为 $g(z)$的 n 阶零点,则

$f(z) = (z-z_0)^m\varphi(z)$,$\varphi(z)$在 z_0解析,$\varphi(z_0)\neq 0$,$m\geqslant 1$,

$g(z) = (z-z_0)^n\psi(z)$,$\psi(z)$在 z_0解析,$\psi(z_0)\neq 0$,$n\geqslant 1$.

因而

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)^{m-n}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \tag{1}$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{z\to z_0}\frac{m(z-z_0)^{m-1}\varphi(z) + (z-z_0)^m\varphi'(z_0)}{n(z-z_0)^{n-1}\psi(z) + (z-z_0)^n\psi'(z_0)}$$

$$= \lim_{z\to z_0}\frac{m}{n}\cdot(z-z_0)^{m-n}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}. \tag{2}$$

当 $m=n$ 时,(1)式 $=\dfrac{\varphi(z_0)}{\psi(z_0)}=$(2)式.

当 $m>n$ 时,(1)式 $=$(2)式 $=0$.

当 $m<n$ 时,(1)式 $=$(2)式 $=\infty$.

5.6 问∞是否为下列各函数的孤立奇点.

(1) $\dfrac{\sin z}{1+z^2+z^3}$; (2) $\dfrac{1}{e^z-1}$.

解 (1) 因$\dfrac{\sin z}{1+z^2+z^3}$在$|z|>1$时解析,故$\infty$是其孤立奇点.

(2) $\dfrac{1}{e^z-1}$的孤立奇点为$z_k=2k\pi i, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$,由于

$$\lim_{k\to\infty}2k\pi i=\infty,$$

故∞不是其孤立奇点.

5.7 求出下列函数在孤立奇点处的留数.

(1) $\dfrac{e^z-1}{z}$; (2) $\dfrac{z^7}{(z-2)(z^2+1)^2}$; (3) $\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$;

(4) $z^2\sin\dfrac{1}{z}$; (5) $\dfrac{1}{z\sin z}$; (6) $\dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$.

解 (1) 令$f(z)=\dfrac{e^z-1}{z}$,孤立奇点仅有0.

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to0}zf(z)=\lim_{z\to0}(e^z-1)=0.$$

(2) $z=2$为简单极点,$z=\pm i$为二阶极点.

$$\operatorname{Res}[f(z),2]=\lim_{z\to2}(z-2)\frac{z^7}{(z-2)(z^2+1)^2}$$

$$=\lim_{z\to2}\frac{z^7}{(z^2+1)^2}=\frac{128}{25},$$

$$\operatorname{Res}[f(z),i]=\lim_{z\to i}\left(\frac{z^7}{(z-2)(z+i)^2}\right)'$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{7z^6(z-2)(z+i)^2-z^7(3z^2+4zi-4z-4i-1)}{(z-2)^2(z+i)^4}$$

$$=\frac{-56-33i}{100}$$

同理可计算$\operatorname{Res}[f(z),-i]=\dfrac{-56+33i}{100}$.

(3) $z=-1$为其三阶极点.

$$\operatorname{Res}[f(z),-1]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to-1}(\sin 2z)''=\frac{1}{2!}(-4\sin 2z)\Big|_{z=-1}$$

$$=2\sin 2.$$

(4) $z^2\sin\frac{1}{z}=z^2\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!\ z^3}+\frac{1}{5!\ z^5}-\cdots\right)$

$$=z-\frac{1}{3!\ z}+\frac{1}{5!\ z^3}-\cdots,$$

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=-\frac{1}{6}.$$

(5) $\frac{1}{z\sin z}$的孤立奇点为 $z=0,z_k=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$，其中，$z=0$为二阶极点，这是由于

$$\frac{1}{z\sin z}=\frac{1}{z\left(z-\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)}=\frac{1}{z^2\left(1-\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)}$$

$$=\frac{1}{z^2}\frac{1}{g(z)},$$ $\frac{1}{g(z)}$在 $z=0$ 处解析. 且$\frac{1}{g(0)}\neq0$.

所以

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to0}\left[z^2\frac{1}{z\sin z}\right]'$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{\sin z-z\cos z}{\sin^2 z}$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{\cos z+z\sin z-\cos z}{2\sin z\cos z}=0,$$

易知 $z_k=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$为简单极点，所以

$$\operatorname{Res}[f(z),k\pi]=\lim_{z\to k\pi}[(z-k\pi)/z\sin z]$$

$$=\lim_{z\to k\pi}\frac{1}{\sin z+z\cos z}=(-1)^k\frac{1}{k\pi}\ (k=\pm1,\pm2,\cdots).$$

(6) $\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}=\frac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}$在整个复平面上解析，无孤立奇点.

5.8 利用留数计算下列积分.

(1) $\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z\sin z}$;

(2) $\oint_{|z|=3/2}\frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}dz$;

(3) $\oint_{|z|=2}\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}dz$;

(4) $\oint_{|z|=1/2}\frac{\sin z}{z(1-e^z)}dz$;

(5) $\oint_{|z|=1}\frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^n}$（$n$ 为正整数，$|a|\neq1$，$|b|\neq1$，$|a|<|b|$）.

解 (1) $\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z\sin z}=2\pi i\text{Res}[f(z),0]$

$$=2\pi i\lim_{z\to0}\left(\frac{z}{\sin z}\right)'=2\pi i\lim_{z\to0}\frac{\sin z-z\cos z}{\sin^2 z}$$

$$=2\pi i\lim_{z\to0}\frac{\cos z-\cos z+z\sin z}{2\sin z\cdot\cos z}=2\pi i\lim_{z\to0}\frac{z}{2\cos z}=0.$$

(2) $\oint_{|z|=3/2}\frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}dz=2\pi i\text{Res}[f(z),1]$

$$=2\pi i\lim_{z\to1}\frac{e^z}{(z+3)^2}=\frac{1}{8}\pi ie.$$

(3) $\oint_{|z|=2}\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}dz=2\pi i\cdot\lim_{z\to1}\left((z-1)^2\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}\right)'$

$$=4\pi ie^2.$$

(4) $\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{\sin z}{z(1-e^z)}dz=2\pi i\lim_{z\to0}\frac{\sin z}{1-e^z}$

$$=2\pi i\lim_{z\to0}\frac{\cos z}{-e^z}=-2\pi i.$$

(5) 1° $1<|a|<|b|$，令 $f(z)=\frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}$，$f(z)$ 在 $|z|=1$ 内无奇点，故 $\oint_{|z|=1}f(z)dz=0$.

2° $|a|<1<|b|$ 时，

$$\oint_{|z|=1}f(z)dz=2\pi i\text{Res}[f(z),a]$$

$$=2\pi i\cdot\frac{1}{(n-1)!}\cdot\lim_{z\to a}\left[\frac{1}{(z-b)^n}\right]^{(n-1)}$$

$$=2\pi i\cdot(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2}\cdot(a-b)^{-2n+1}.$$

3° $|a|<|b|<1$ 时，

$$\oint_{|z|} f(z)\,dz = 2\pi i \mathrm{Res}[f(z),a] + 2\pi i \mathrm{Res}[f(z),b]$$

$$= 2\pi i(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2}(a-b)^{-2n+1}$$

$$+ 2\pi i(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2}\cdot(b-a)^{2n+1} = 0.$$

5.9 判定 $z=\infty$ 是下列各函数的什么奇点，并求出在∞的留数.

(1) $\sin z - \cos z$； (2) $\dfrac{1}{z(z+1)^2(z-1)}$； (3) $z+\dfrac{1}{z}$.

解 (1) $\lim\limits_{z\to\infty}(\sin z - \cos z)$ 不存在，故∞为 $\sin z - \cos z$ 的本性奇点.

$$\sin z - \cos z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!},$$

故 $\mathrm{Res}[\sin z - \cos z, \infty] = 0$.

(2) $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{1}{z(z+1)^2(z-1)} = 0$，故∞为其可去奇点.

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty] = -\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right]$$

$$= -\mathrm{Res}\left(\frac{z^2}{1-z^2},0\right) = 0.$$

(3) 显然∞为 $z+\dfrac{1}{z}$ 的简单极点

$$\mathrm{Res}\left[z+\frac{1}{z},\infty\right] = -1.$$

5.10 求下列积分

(1) $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz$； (2) $\displaystyle\oint_{|z|=3}\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}dz$.

解 (1) $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz$

$$= 2\pi i[\mathrm{Res}(f(z),0) + \mathrm{Res}(f(z),-1)]$$

$$= -2\pi i \mathrm{Res}(f(z),\infty)$$

$$=2\pi i\text{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right]$$

$$=2\pi i\text{Res}\left[e^z\cdot\frac{1}{z^3}\cdot\frac{1}{1+1/z}\cdot\frac{1}{z^2},0\right]$$

$$=2\pi i\text{Res}\left[\frac{e^z}{z^4(z+1)},0\right]$$

$$=2\pi i\cdot\lim_{z\to0}\frac{1}{3!}\left(\frac{e^z}{z+1}\right)'''=-\frac{2}{3}\pi i.$$

(2) $\oint_{|z|=3}\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}dz$

$=2\pi i\sum_{z_k}\text{Res}[f(z),z_k]$ （z_k为$f(z)$在$|z|<3$内的所有奇点）

$=-2\pi i\text{Res}[f(z),\infty]$

$$=2\pi i\text{Res}\left[\frac{(1/z^2)^{15}}{(1/z^2+1)^2(1/z^4+2)^3\cdot z^2},0\right]$$

$$=2\pi i\text{Res}\left[\frac{1}{z(1+z^2)^2(2z^4+1)^3},0\right]$$

$$=2\pi i\lim_{z\to0}\frac{1}{(1+z^2)^2(2z^4+1)^3}$$

$=2\pi i.$

5.11 设函数$f(z)$在$R<|z-z_0|<+\infty$的洛朗级数展开为

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-z_0)^n,$$

求证$\text{Res}[f(z),\infty]=-C_{-1}$.

证 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$由逐项积分定理及

$$\int_C\frac{dz}{(z-a)^n}=\begin{cases}2\pi i, & n=1,\\ 0, & n\neq1\text{ 的整数},\end{cases}$$

其中C是以a为心，以ρ为半径的圆周，故

$$\text{Res}[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-}f(z)dz=-C_{-1},$$

即$\text{Res}[f(z),\infty]$等于$f(z)$在点∞的洛朗展式中$\frac{1}{z}$这一项系数的反号.

5.12 求下列各积分之值.

(1) $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}(a>1)$;　　(2) $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+3\cos\theta}$;

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx\ (a>0)$;　　(4) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+4x+5}dx$;

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$;　　(6) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}dx\ (a>0,b>0)$.

解　(1) $$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}\xlongequal{令\ z=e^{i\theta}}\oint_{|z|=1}\frac{1}{iz\left(a+\frac{z^2+1}{2z}\right)}dz$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{2}{i(z^2+2az+1)}dz$$

$$=\frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{2}{(z-\alpha)(z-\beta)}dz.$$

令 $f(z)=\frac{1}{i}\frac{2}{(z-\alpha)(z-\beta)}$，其中 $\alpha=-a-\sqrt{a^2-1}$，$\beta=-a+\sqrt{a^2-1}$ 为实系数二次方程 $z^2+2az+1=0$ 的两相异实根，显然 $|\alpha|>1$，$|\beta|<1$，被积函数 $f(z)$ 在 $|z|=1$ 上无奇点，在单位圆内部仅有一个简单极点 $z=\beta$，故

$$\mathrm{Res}[f(z),\beta]=\frac{1}{i}\cdot\frac{2}{z-\alpha}\bigg|_{z=\beta}=\frac{2}{i\cdot 2\sqrt{a^2-1}}$$

$$=-\frac{i}{\sqrt{a^2-1}},$$

即

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}=2\pi i\mathrm{Res}[f(z),\beta]=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

(2) $$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+3\cos\theta}\xlongequal{令\ z=e^{i\theta}}\oint_{|z|=1}\frac{2}{i(3z^2+10z+3)}dz$$

$$=\frac{2}{i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{(3z+1)(z+3)}dz$$

$$=2\pi i\cdot\frac{2}{i}\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(3z+1)(z+3)},-\frac{1}{3}\right]$$

$$=4\pi\cdot\lim_{z\to-\frac{1}{3}}\left(z+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{(3z+1)(z+3)}$$

$$=4\pi\cdot\frac{1}{8}=\frac{\pi}{2}.$$

(3) $f(z)=\dfrac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$,它共有两个二阶极点,且$(z^2+a^2)^2$在实轴上无奇点,在上半平面仅有二阶极点 ai,所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx=2\pi i\mathrm{Res}[f(z),ai]$$

$$=2\pi i\lim_{z\to ai}\left[\left(\frac{z}{z+ai}\right)^2\right]'$$

$$=2\pi i\lim_{z\to ai}\frac{2zai}{(z+ai)^3}=\frac{\pi}{2a}.$$

(4) 不难验证$f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2+4z+5}$满足若尔当引理条件,函数$f(z)$有两个一阶极点 $-2+i$, $-2-i$.

$$\mathrm{Res}[f(z),-2+i]=\left.\frac{e^{iz}}{(z^2+4z+5)'}\right|_{z=-2+i}$$

$$=\frac{e^{-2i-1}}{2i}=\frac{\cos 2-i\sin 2}{2ie},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+4x+5}dx=2\pi i\mathrm{Res}[f(z),-2+i]$$

$$=\frac{\pi}{e}(\cos 2-i\sin 2),$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+4x+5}dx=\frac{\pi\cos 2}{e}.$$

(5) 令$f(z)=\dfrac{z^2}{1+z^4}$,$f(z)$在实轴上无奇点,且$1+z^4$比z^2高二次,$f(z)$在上半平面共有

$$z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\quad z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$$

两个一阶极点，故

$$\operatorname{Res}[f(z),z_1]=\frac{z^2}{(z^4+1)'}\bigg|_{z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}=\frac{\sqrt{2}}{8}(1-i),$$

$$\operatorname{Res}[f(z),z_2]=\frac{z^2}{(z^4+1)'}\bigg|_{z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)}=-\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i).$$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx=2\pi i\left[\frac{\sqrt{2}}{8}(1-i)-\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

(6) 令 $f(z)=\dfrac{ze^{iaz}}{z^2+b^2}$，容易验证 $f(z)$ 满足若尔当引理条件. 故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{iax}}{x^2+b^2}dx=2\pi i[f(z),bi]$$

$$=2\pi i\frac{ze^{iaz}}{(z^2+b^2)'}\bigg|_{z=bi}$$

$$=2\pi i\cdot\frac{1}{2}e^{-ab}=\pi ie^{-ab},$$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}dx=\pi e^{-ab}.$$

§ 5.4 自 测 题

自测题 1

（一）填空题

1. $f(z)=\dfrac{1}{e^z-(1+i)}$ 的全部孤立奇点是________.

2. $z=0$ 是 $\dfrac{1}{\sin z-z}$ 的________阶极点.