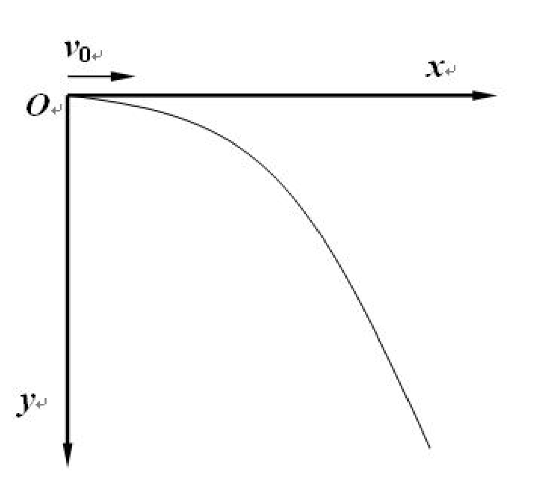
§1-3 曲线运动的描述

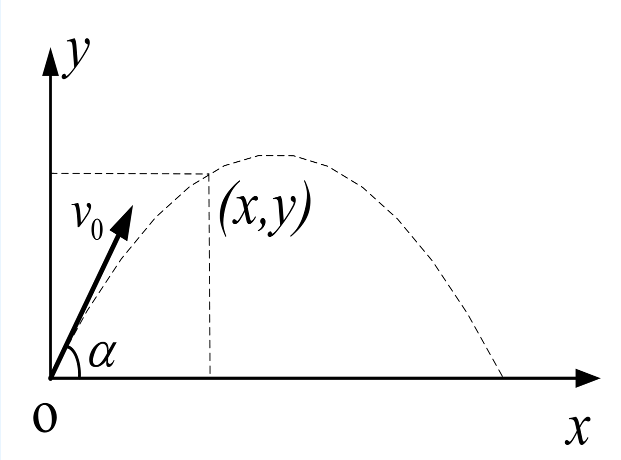
General curvilinear motion

1-3-1 一般平面曲线运动的描述

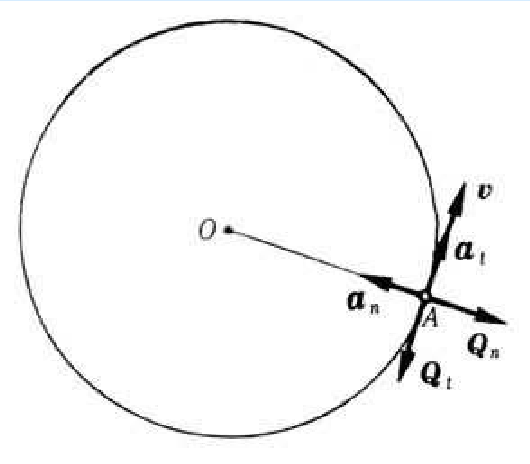
曲线运动：质点的运动轨迹是曲线，而不是直线。



平抛运动



斜抛运动



圆周运动

特点：（1）位移不等于路程

（2）速度的方向是轨迹的切线方向

（3）加速度的方向总是指向曲线凹进的一边。

我们以抛体运动为例介绍曲线运动的描述。

一　曲线运动用直角坐标系描述：

1、运动方程　$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

2、速度　$\vec{v} = v(x)\vec{i} + v(y)\vec{j}$

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v}, \quad \cos\beta = \frac{v_y}{v}$$

3、加速度

$$\vec{a} = a(x)\vec{i} + a(y)\vec{j}$$

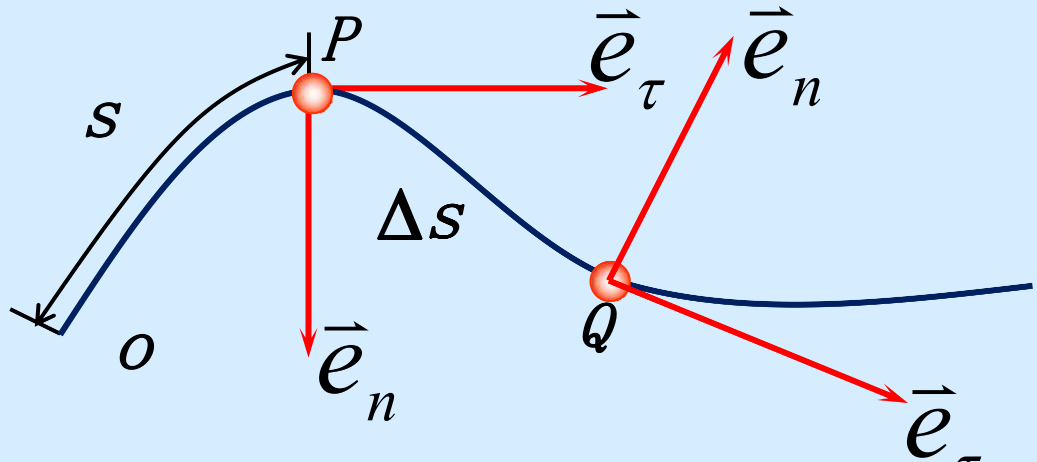
$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{a}$$

二 自然坐标系The nature coordinate system

自然坐标系： 把坐标建立在运动轨迹上的坐标系统。



规定：

- **切向坐标轴：** 沿质点前进方向的切向为正，单位矢量为 $\vec{e}_\tau$
- **法向坐标轴：** 沿轨迹的法向凹侧为正，单位矢量为 $\vec{e}_n$

质点位置：$s = s(t)$　　　路程：$\Delta s = s_Q - s_P$

速度：$\vec{v} = v\vec{e}_\tau = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\tau$

$$\vec{v} = v\vec{e}_\tau = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\tau$$

质点的加速度：

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(v\vec{e}_\tau)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\tau + v\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\tau}{\mathrm{d}t}$$

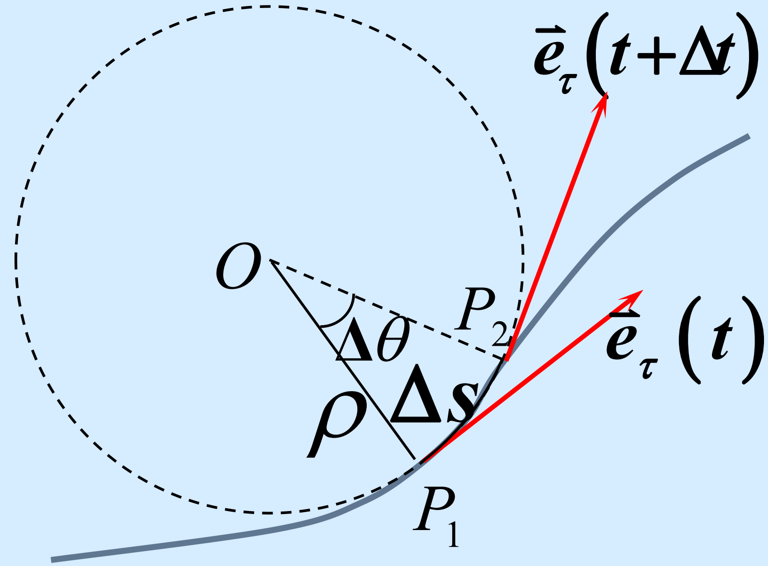
$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\tau$ ：速度大小的变化率，
其方向指向曲线的切线方向。

切向加速度： tangential acceleration

$$\boxed{\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\vec{e}_\tau = \frac{d^2 s}{dt^2}\vec{e}_\tau}$$

Changes the magnitude of the velocity

讨论：$\dfrac{d\vec{e}_\tau}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{e}_\tau}{\Delta t}$

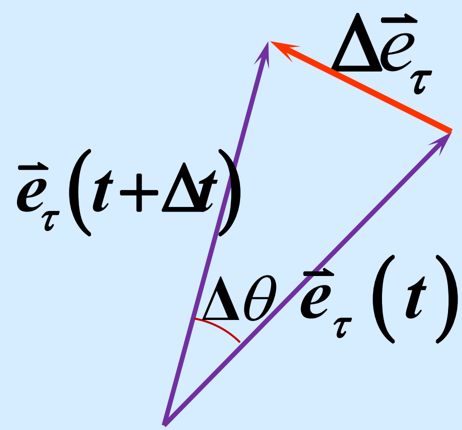


$$\Delta \vec{e}_\tau = \vec{e}_\tau(t+\Delta t) - \vec{e}_\tau(t)$$

当：$\Delta t \to 0$ ， $\Delta\theta \to 0$

有 $\boxed{\left|\Delta \vec{e}_\tau\right| = \left|\vec{e}_\tau\right| \cdot \Delta\theta = \Delta\theta}$

方向 $\Delta \vec{e}_\tau \perp \vec{e}_\tau \Rightarrow \vec{e}_{\mathrm{n}}$

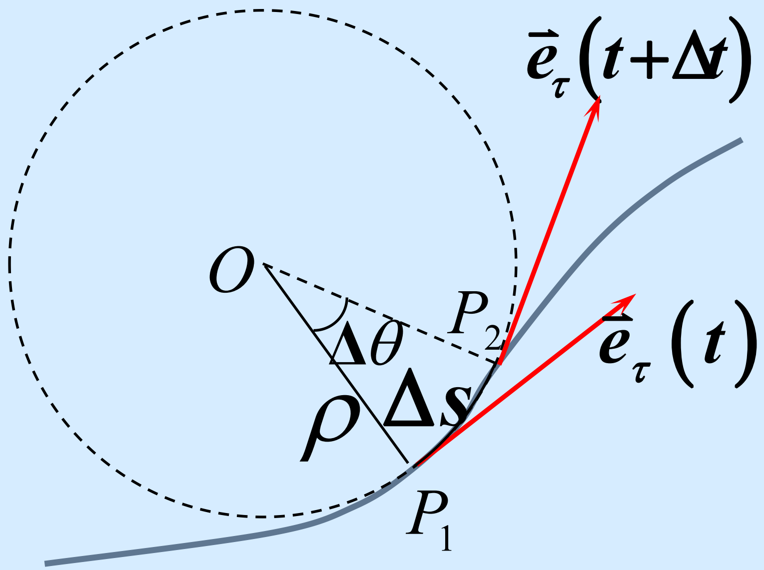


$$\therefore \frac{\mathrm{d}\vec{e}_\tau}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{e}_\tau}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \vec{e}_{\mathrm{n}}$$

$$\because \quad \Delta\theta = \frac{\Delta s}{\rho}$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}\vec{e}_\tau}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\rho \Delta t}\vec{e}_\mathrm{n}$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\mathrm{n} = \frac{V}{\rho}\vec{e}_\mathrm{n}$$



$$V\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{V^2}{\rho}\vec{e}_\mathrm{n}$$ 沿法线方向

法向加速度： normal acceleration

$$\boxed{\vec{a}_n = V\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{V^2}{\rho}\vec{e}_\mathrm{n}}$$

Changes the direction of the velocity.

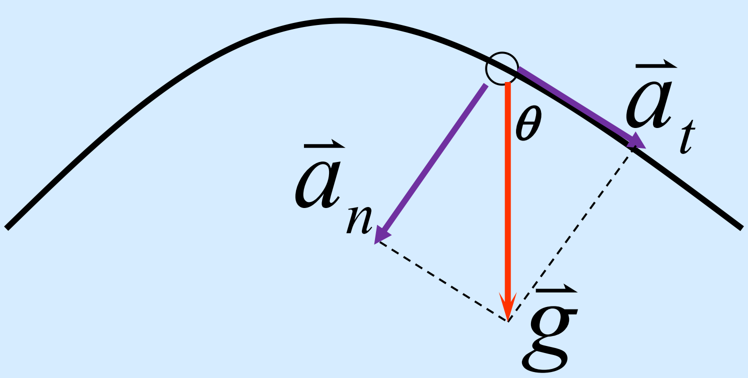
综上所述：$$\boxed{\vec{a}=\vec{a}_\tau+\vec{a}_n=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\tau+\frac{V^2}{\rho}\vec{e}_\mathrm{n}}$$

加速度的大小：$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}$

加速度的方向（以与切线方向的夹角表示）：

$$\theta=\arctan\frac{a_n}{a_\tau}$$

例：抛体运动



summary: 曲线运动用**自然坐标系的**描述

质点位置： $s = s(t)$

路程： $\Delta s = s_Q - s_P$

速度： $\vec{v} = v\vec{e}_\tau = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\tau$

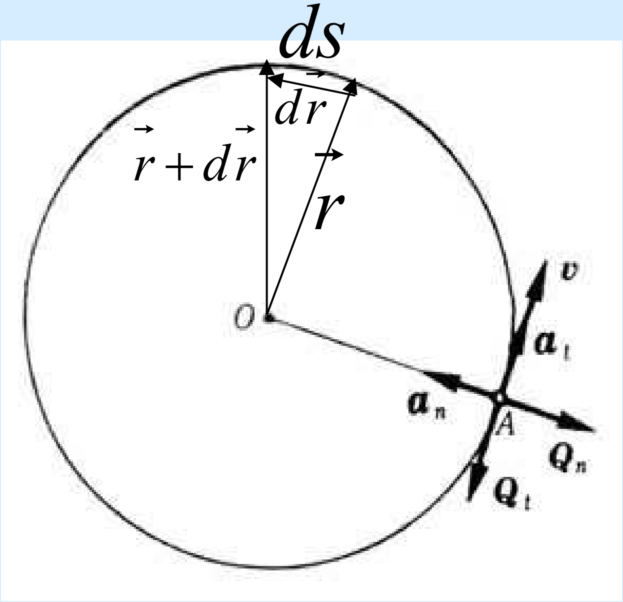
加速度： $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\tau + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_\mathrm{n}$

加速度的**大小**： $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$

加速度的**方向**： （以与切线方向的夹角表示）

$$\theta = \arctan\frac{a_n}{a_\tau}$$

1-3-2　圆周运动 Circular Motion



圆周运动的特点：

（1）轨道曲率半径处处相等

（2）速度方向始终在圆周的切线上

对圆周运动描述：可以采用直角坐标系描述；

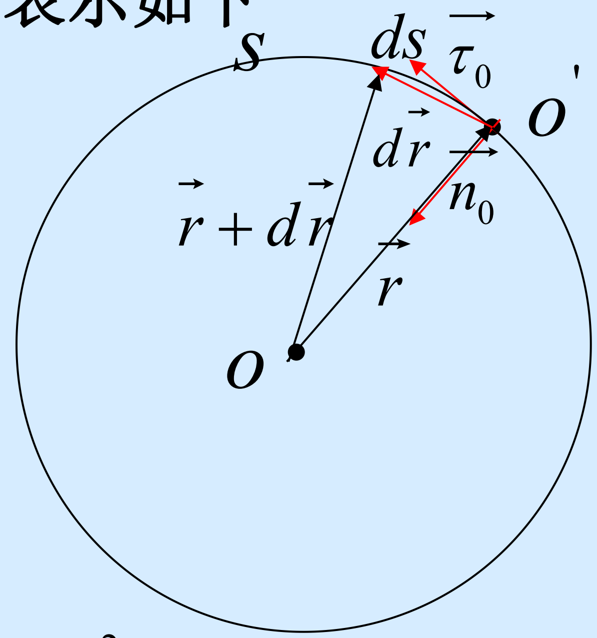
更方便的方法：以自然坐标系为基准的线性描述；

以平面极坐标系为基准的角量描述。

1、自然坐标系下的线量描述

O' 为自然坐标系原点，以 $\overrightarrow{n_0}$ 表示法线方向的单位矢量，$\overrightarrow{\tau_0}$ 表示切线方向的单位矢量。

在自然坐标系中，位移、速度、加速度分别表示如下



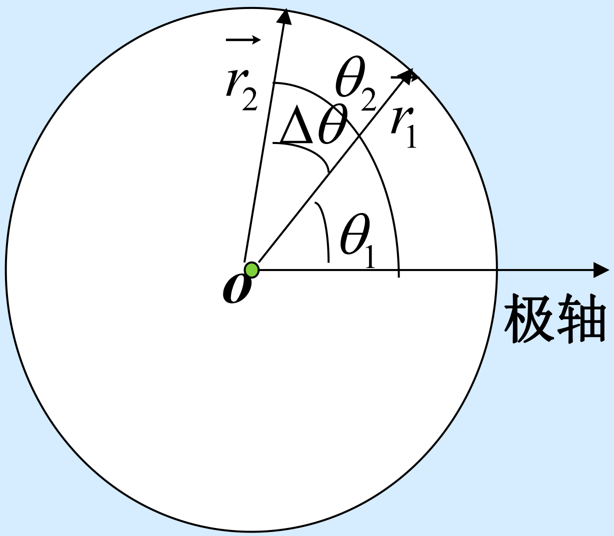
$$d\vec{r} = ds\overrightarrow{\tau_0}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds\overrightarrow{\tau_0}}{dt} = v\vec{\tau}_0$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{\tau_0} + \frac{v^2}{\rho}\overrightarrow{n_0}$$

$$\overrightarrow{a_\tau} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{\tau_0} = \frac{d^2 s}{dt^2}\overrightarrow{\tau_0} \qquad \overrightarrow{a_n} = \frac{v^2}{\rho}\overrightarrow{n_0} = \frac{v^2}{R}\overrightarrow{n_0}$$

2、极坐标系下的角量描述



以圆心为**极点**，任意引一条射线为**极轴**，则

角位置：质点位置对极点的矢径与极轴之间的夹角θ；

Angular position

角位移：位矢在Δt时间内转过的角度$\Delta\theta$；

Angular displacement

θ的单位为弧度（**rad**）。

角位移有正负。

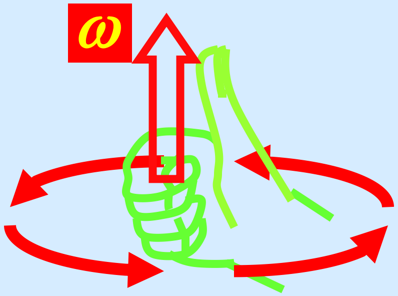
角速度：
$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

angular velocity

角速度矢量的方向：由右手螺旋法规确定。

角加速度：
$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

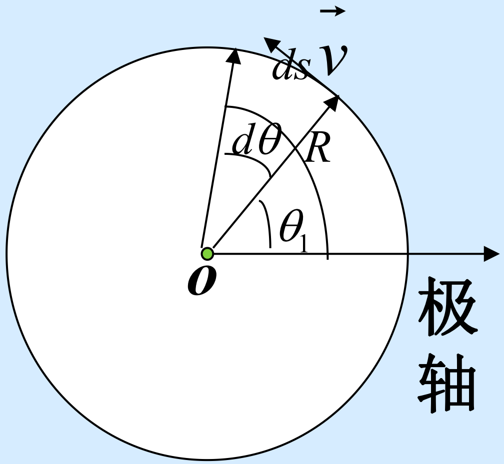
angular acceleration



在圆周运动中，线量和角量之间存在如下关系：

$$ds = Rd\theta$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{Rd\theta}{dt} = R\omega$$

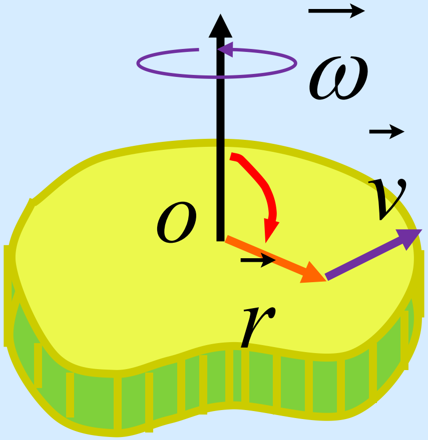


$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{Rd\omega}{dt} = R\alpha$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2$$

角速度矢量与线速度的关系：

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$



例1 一质点沿半径为R的圆周运动，其路程s随时间t的变化规律为 $s = bt - (ct^2/2)$ ，式中b，c为大于零的常数，且 $b^2 > Rc$ 。求（1）质点的切向加速度和法向加速度。（2）经过多长时间，切向加速度等于法向加速度。

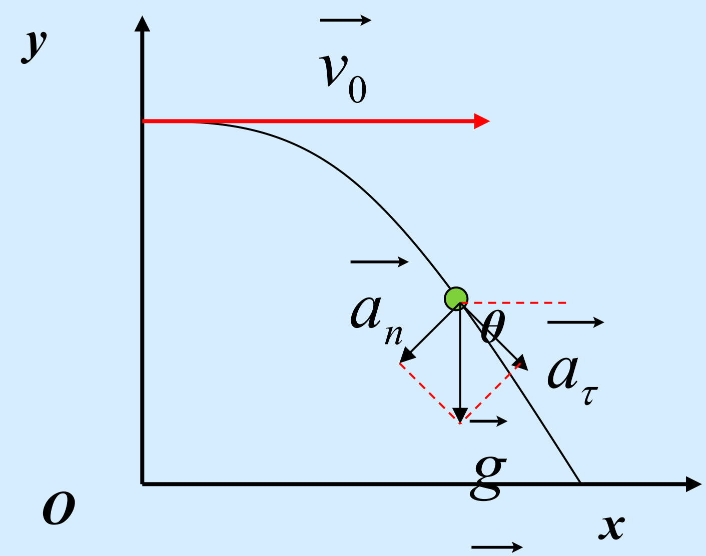
解：（1） $$V = \frac{ds}{dt} = b - ct$$

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = -c \qquad a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{(b-ct)^2}{R}$$

（2） $a_\tau = a_n$ 解得 $t = \frac{b}{c} \pm \sqrt{\frac{R}{c}}$

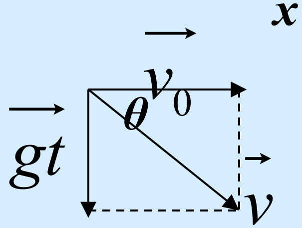
例2 以速度 $\vec{v}_o$平抛一小球，不计空气阻力，求t 时刻小球的切向加速度值a_τ，法向加速度值a_n和轨道的曲率半径 ρ 。

解： $a_\tau = g\sin\theta$



$$\sin\theta = \frac{v_y}{v} = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}} = \frac{gt}{\sqrt{v_0^2+(gt)^2}}$$

$$a_\tau = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2+(gt)^2}}$$



$$a_n = g\cos\theta = \frac{gv_0}{\sqrt{v_0^2+(gt)^2}}$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v_0^2+(gt)^2}{gv_0 \Big/ \sqrt{v_0^2+(gt)^2}} = \frac{(v_0^2+g^2t^2)^{3/2}}{gv_0}$$

总结：

一、描述运动的三个必要条件

参考系(坐标系)

物理模型

初始条件

二、描述质点运动的四个物理量

位矢 $\vec{r}$

位移 $\Delta\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$

速度 $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

加速度 $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

(1)在直角坐标系中

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

(2)在自然坐标系中

$$s = s(t) \qquad d\vec{r} = ds\overrightarrow{\tau_0}$$

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\overrightarrow{\tau_0} \qquad \vec{a} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{\tau_0} + \frac{v^2}{\rho}\overrightarrow{n_0} = \overrightarrow{a_\tau} + \overrightarrow{a_n}$$

三、圆周运动的两种描述

(1)线量描述(与自然坐标系同)

(2)角量描述

角位移 $\Delta\theta$

角速度 $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$

角加速度 $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

(3)角量与线量的关系

$$ds = Rd\theta \qquad v = \frac{ds}{dt} = R\omega$$

$$a_\tau = R\alpha, \quad a_n = R\omega^2$$

四、运动学中的两类问题

(1)根据运动方程求速度、加速度，用求导的方法。

(2)根据加速度或速度及初始条件求运动方程，用积分的方法。

运动学中的两类问题

Two Types Problems in Kinematics

1、已知运动学方程，求速度和加速度(求导法)

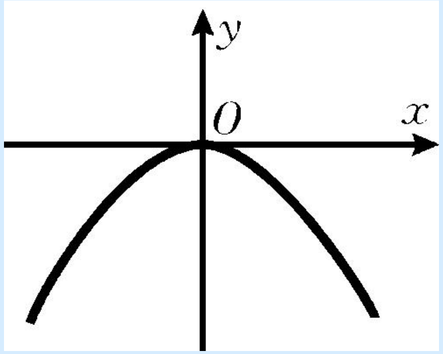
Given position vector, find the velocity and acceleration by using derivation method 微分法.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j}$$

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}_x}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}\vec{\boldsymbol{i}} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}_y}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}\vec{\boldsymbol{j}} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}^2}\vec{\boldsymbol{i}} + \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}^2}\vec{\boldsymbol{j}} = \boldsymbol{a}_x\vec{\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{a}_y\vec{\boldsymbol{j}}$$

例1、已知一质点的运动方程为$\vec{r}=3t\vec{i}-4t^2\vec{j}$（SI），求： 质点运动的轨道、速度、加速度。



解：将运动方程写成分量

$$\left.\begin{aligned} x&=3t \\ y&=-4t^2 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{消去}t} 4x^2+9y=0$$

$$\left.\begin{aligned} v_x&=\frac{dx}{dt}=3 \\ v_y&=\frac{dy}{dt}=-8t \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{aligned} & v=\sqrt{v_x^{\ 2}+v_y^2}=\sqrt{9+64t^2}\,(m\bullet s^{-1}) \\ & \text{与}x\text{轴夹角}\ \theta=arctg\frac{v_y}{v_x}=arctg\frac{-8t}{3} \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} a_x&=\frac{dv_x}{dt}=0 \\ a_y&=\frac{dv_y}{dt}=-8(m\bullet s^{-2}) \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{aligned} & a=\sqrt{a_x^{\ 2}+a_y^2}=8(m\bullet s^{-2}) \\ & \text{沿}y\text{轴负方向} \end{aligned}\right.$$

例2、一质点沿半径为1 *m*的圆周运动，它通过的弧长 *s* 按*s*=*t*＋2*t*²的规律变化。问：它在2*s*末的速率、切向加速度、法向加速度大小各是多少？

解：由速率定义，有 $v = \dfrac{ds}{dt} = 1 + 4t$

将*t*＝2代入，得2 *s*末的速率 $v = 9(m \bullet s^{-1})$

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = 4(m \bullet s^{-2}) \qquad a_{n} = \frac{v^{2}}{R} = 81(m \bullet s^{-2})$$

2、已知加速度（或速度）和初始条件，求速度和运动方程（积分法）。

Given acceleration (or velocity) and initial condition, find the velocity and position vector by means of vector integration method 积分法.

$$\vec{V} = \int \vec{a}\,\mathrm{d}t + \vec{V}_0$$

$$\vec{r} = \int \vec{V}\,\mathrm{d}t + \vec{r}_0$$

例3.飞机在起飞前以一定的加速度在跑道上做直线运动，已知其加速度 $a=3t^2-6t+2$；在t=0的初始时刻，其位置在x=0处，速度为零.试求起飞前任意时刻飞机运动的速度和位置.

【解】已知 $t=0 \qquad x_0=0 \qquad v_0=0$

$$a=\frac{dv}{dt} \qquad \int_0^t adt=\int_0^v dv \qquad v=v_0+\int_0^t adt$$

$$v=\int_0^t (3t^2-6t+2)\,dt=t^3-3t^2+2t$$

同理，$x=x_0+\int_0^t vdt$ $\qquad x=\int_0^t (t^3-3t^2+2t)dt$

$$=\frac{1}{4}t^4-t^3+t^2$$

例4、一质点沿x轴运动，其速度与位置的关系为$v=-kx$，其中k为一正值常量.若t=0时质点在 $x=x_0$处，求在任意时刻t时质点的位置、速度和加速度.

【解】按题意有 $v=-kx$，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-kx$，$\frac{\mathrm{d}x}{x}=-k\mathrm{d}t$

对方程积分，按题意 t=0 时质点位置在 x_0 处，又设t时质点位置在 x 处，有 $\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_0^t -k\mathrm{d}t$

积分得：$\ln\frac{x}{x_0}=-kt$　　$x=x_0\mathrm{e}^{-kt}$

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-kx_0\mathrm{e}^{-kt}$$

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=k^2x_0\mathrm{e}^{-kt}$$

例5、一质点沿 x 轴运动，其加速度 $a = -kv^2$，式中k为正常数,设$t=0$时，$x=0$，$v=v_0$；

求（1）v和x作为 t 的函数的表示式；

（2）v作为x函数的表示式。

解:（1）
$$\left.\begin{array}{l} a = \dfrac{dv}{dt} \\ a = -kv^2 \end{array}\right\} \longrightarrow \frac{dv}{dt} = -kv^2 \longrightarrow \frac{dv}{v^2} = -kdt$$

两边积分 $$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2} = \int_0^t -kdt \longrightarrow \frac{1}{v_0} - \frac{1}{v} = -kt \longrightarrow v = \frac{v_0}{1+v_0 kt}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{1+v_0 kt} \longrightarrow dx = \frac{v_0}{1+v_0 kt} dt$$

两边积分

$$\int_0^x dx = \int_0^t \frac{v_0}{1+v_0 kt} dt \longrightarrow x = \frac{v_0}{v_0 k} \int_0^t \frac{1}{1+v_0 kt} d(1+v_0 kt)$$

$$= \frac{1}{k} Ln(1+v_0 kt)$$

例5、一质点沿 x 轴运动，其加速度 $a=-kv^2$，式中k为正常数,设$t=0$时，$x=0$，$v=v_0$；

求（1）v和x作为 t 的函数的表示式；

（2）v作为x函数的表示式。

（2）
$$\left.\begin{aligned} a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dt}\frac{dx}{dx}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx} \\ a=-kv^2 \end{aligned}\right\} \longrightarrow v\frac{dv}{dx}=-kv^2$$

$$\longrightarrow \frac{dv}{v}=-kdx \longrightarrow \int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v}=\int_0^x -kdx$$

$$\longrightarrow v=v_0\exp(-kx)$$

例6、一质点沿 x 轴运动，其加速度和位置的关系为 $a=2+6x^2$，加速度的单位为ms^{-2}，x的单位为m。质点在$x=0$处，速度为10 ms^{-1}，试求质点在任何坐标处的速度值。

解：根据题意知就是求v作为x函数的表示式。

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}=2+6x^2 \longrightarrow vdv=(2+6x^2)dx$$

两边积分

$$\int_{10}^{v}vdv=\int_{0}^{x}(2+6x^2)dx \longrightarrow \frac{v^2}{2}-50=2x+2x^3$$

$$\longrightarrow v=2\sqrt{x^3+x+25}(m/s)$$

教材例题

【例1.3】 一质点沿半径为R的圆周运动，其路程用弧长 s 表示，s 随时间 t 的变化规律是 $S = v_0 t - \frac{1}{2}bt^2$，其中，$v_0$ 、b都是正常数，求：

(1) t 时刻质点的总加速度；

(2) 总加速度的大小达到 b 值时，质点沿圆周已运行的圈数.

【解】 (1)质点沿圆周运动的速率为

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(v_0 t - \frac{1}{2}bt^2) = v_0 - bt$$

速率随 t 变化，说明质点作变速率圆周运动.

切向加速度为

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(v_0 - bt) = -b$$

负号表示切向加速度的方向与速度方向相反.

法向加速度为

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(v_0 - bt)^2}{R}$$

t时刻质点的总加速度的大小为

$$a=\frac{1}{R}\sqrt{R^2b^2+(v_0-bt)^2}$$

其方向与速度方向的夹角θ为

$$\tan\theta=\frac{a_n}{a_\tau}=-\frac{(v_0-bt)^2}{Rb}$$

(2) a达到 b 值时用的时间 t 可由下式求出：

$$a=\frac{1}{R}\sqrt{R^2b^2+(v_0-bt)^2}=b$$

解出 $t=\dfrac{v_0}{b}$，代入路程 s 随 t 变化的方程式，从而求出质点转过的圈数为

$$N=\frac{S}{2\pi R}=\frac{\left[v_0\left(\frac{v_0}{b}\right)-\frac{b}{2}\left(\frac{v_0}{b}\right)^2\right]}{2\pi R}=\frac{v_0^2}{4\pi Rb}$$

【例1.4】已知质点的运动方程为 $x=5+2t-2t^2$，
式中，t以秒(s)计，x以米(m)计，试求：

(1)质点在第2 s末时的速度和加速度；

(2)质点在第2 s内的位移；

(3)质点作什么运动?

【解】先求出瞬时速度和加速度的表达式为

$$v=\frac{dx}{dt}=2-4t$$

$$a=\frac{dv}{dt}=-4$$

(1)第2 s末，即t=2 s时

$$v_2 = 2 - 4 \times 2 = -6 m \cdot s^{-1}$$

$$a = -4 m \cdot s^{-2}$$

(2)第2 s内是指从 $t_1 = 1s$ 到 $t_2 = 2s$ 这个时间间隔.

从运动方程可求得

$t_1 = 1s$ 时， $x_1 = 5 + 2t_1 - 2t_1^2 = 5m$

$t_2 = 2s$ 时， $x_2 = 5 + 2t_2 - 2t_2^2 = 1m$

所以，第2 s内的位移为

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 1 - 5 = -4m$$

负号表示沿x轴负方向.

(3)由x，v和 a 随 t 的变化函数式可知

$x_0 = 5m$ ， $v_0 = 2m \cdot s^{-1}$, $a = -4m \cdot s^{-2}$

而 $v = 2 - 4t = 0$ 的时刻为t＝0.5 s．由于初速度 v_0与加速度 a 异号，表明在0.5 s内质点沿x轴正向作匀减速运动．而在0.5 s以后，速度v变号，与加速度a同号，质点沿x轴负方向作加速运动．