山东科技大学 2013—2014 学年第一学期

《高等数学 A(1)》考试试卷（A 卷）答案

一、填空题（每小题 5 分，共 15 分）

1. $\underline{e^{3a}}$　2. $\underline{5f'(x_0)}$　　3. $\underline{4}$

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}\cdot\frac{3ax}{x-a}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}}\right]^{\frac{3ax}{x-a}}=e^{3a}$

二、单项选择题（在每个小题的四个备选答案中选出一个正确答案，填在题末的括号中，每小题 5 分，共 15 分）

1. (B)　2. (B)　3. D

三、计算题（每小题 8 分，共 32 分）

1．解：$f'(x)=3x^2+6x-24=3(x+4)(x-2)$，令 $f'(x)=0$,得驻点 $x_1=-4,\quad x_2=2$………3 分

$f''(x)=6x+6$………4 分

$f''(-4)=-18<0$, 所以极大值 $f(-4)=60$………6 分

$f''(2)=18>0$,所以极小值 $f(2)=-48$………8 分

2．解：$\int x\ln x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\ln x dx^2$

$=\dfrac{1}{2}\left(x^2\ln x-\int x^2 d\ln x\right)$………3 分

$=\dfrac{1}{2}\left(x^2\ln x-\int xdx\right)$ ………5 分

$=\dfrac{1}{2}\left(x^2\ln x-\dfrac{x^2}{2}\right)+C$

………8 分

3. 解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}=\dfrac{1}{t}$…………3 分.

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}(\dfrac{dy}{dx})\Big/\dfrac{dx}{dt}$

$=\dfrac{-1}{t^2}\cdot\dfrac{1+t^2}{t}=\dfrac{-(1+t^2)}{t^3}$………8 分

4. 解：1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x\cos x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1-\cos x)}{x^3}$ ………2 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\dfrac{x^2}{2}}{x^3}$ ………6 分

$=\dfrac{1}{2}$ ………8 分

四、解答题（每小题 10 分，共 20 分）

1. 解： $s=\int_0^{2\pi}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$

$=2\int_0^{2\pi}\sqrt{(\sin t)^2+(1-\cos t)^2}dt$ ………4 分

$=2\int_0^{2\pi}2\left|\sin\dfrac{t}{2}\right|dt$ ………7 分

$=4\int_0^{2\pi}\sin\dfrac{t}{2}dt$

$=8\left(-\cos\dfrac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}=16$ ………10 分

2. 解：令 $t=2a-x$，则

$\int_0^a f(2a-x)dx=-\int_{2a}^a f(t)dt=\int_a^{2a}f(t)dt=\int_a^{2a}f(x)dx$ ………3 分

于是，$\int_0^a[f(x)+f(2a-x)]dx=\int_0^a f(x)dx+\int_0^a f(2a-x)dx$

$=\int_0^a f(x)dx+\int_a^{2a}f(x)dx=\int_0^{2a}f(x)dx$ …………5 分

从而，$\int_0^{\pi}\dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x}+\dfrac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}]dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x\sin x+(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ ………8 分

$=-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{d\cos x}{1+\cos^2 x}=-\pi\arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi/2}=\dfrac{\pi^2}{4}$ ………………10 分

五、应用题（本大题 10 分）解：设点 M 的坐标为 $(\xi,1-\xi^2)$，则过该点的切线方程为

$y=-2x\xi+\xi^2+1$，…………………3 分

其在两坐标轴上的截距分别为 $a=\dfrac{1}{2}(\xi+\dfrac{1}{\xi})$，$b=\xi^2+1$，

所围图形的面积为 $A=\frac{1}{2}ab-\int_0^1(-x^2+1)dx=\frac{1}{4}(\xi^3+2\xi+\frac{1}{\xi})-\frac{2}{3}$ …………5 分

$\frac{dA}{d\xi}=\frac{1}{4}(3\xi^2+2-\frac{1}{\xi^2})=\frac{1}{4}(3\xi-\frac{1}{\xi})(\xi+\frac{1}{\xi})$，

令 $\frac{dA}{d\xi}=0$，得唯一驻点 $\xi=\frac{1}{\sqrt{3}}$，……………7 分

又 $\frac{d^2A}{d\xi^2}=\frac{1}{4}(6\xi+\frac{2}{\xi^3})$，当 $\xi=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时，$\frac{d^2A}{d\xi^2}>0$，故当 $\xi=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时，A 取唯一的极小值即最小值。因此

所求的点为 $M(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{2}{3})$。………………10 分

六、证明题（本大题 8 分）证明：

令 $f(x)=e^x+\sin x-1-x$ 则 $f'(x)=e^x+\cos x-1$………2 分

$f''(x)=e^x-\sin x>0,\therefore f'(x)$ 单调递增. ……4 分

又$\because f'(0)>0\therefore f'(x)>0$ 从而 $f(x)$ 单调递增.又 $f(0)=0\therefore f(x)>0$

即 $e^x+\sin x>1+x\quad(x>0)$. ……8 分