质点运动学

一、描述运动的三个必要条件

参考系(坐标系)

物理模型

初始条件

二、描述质点运动的四个物理量

位矢 $\vec{r}$

位移 $\Delta\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$

速度 $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

加速度 $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

(1)在直角坐标系中

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

（2）曲线运动用自然坐标系的描述

质点位置： $s = s(t)$

路程： $\Delta s = s_Q - s_P$

速度： $\vec{v} = v\vec{e}_\tau = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\tau$

加速度： $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\tau + \dfrac{v^2}{\rho}\vec{e}_\mathrm{n}$

加速度的大小： $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$

加速度的方向： （以与切线方向的夹角表示）

$$\theta = \arctan\frac{a_n}{a_\tau}$$

三、圆周运动的两种描述

(1)线量描述(与自然坐标系同)

(2)角量描述

角位置 θ

角位移 $\Delta\theta$

角速度 $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$

角加速度 $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

(3)角量与线量的关系 $ds = Rd\theta$

$$v = \frac{ds}{dt} = R\omega \qquad a_\tau = R\alpha, \quad a_n = R\omega^2$$

四、运动学中的两类问题

(1)根据运动方程求速度、加速度，用求导的方法。

(2)根据加速度或速度及初始条件求运动方程，用积分的方法。

单选题 1分

设置

1、关于加速度的物理意义，下列说法正确的是（　　）

A 加速度是描述物体运动快慢的物理量；

B 加速度是描述物体位移变化率的物理量；

C 加速度是描述物体速度变化的物理量；

D 加速度是描述物体速度变化率的物理量.

提交

单选题 1分

设置

2.一质点作抛体运动，忽略空气阻力，在运动过程中，该质点的$\frac{dv}{dt}$和$\frac{d\vec{v}}{dt}$的变化情况是（　）

A $\frac{dv}{dt}$ 的大小和 $\frac{d\vec{v}}{dt}$ 的大小都不变；

B $\frac{dv}{dt}$ 的大小改变，$\frac{d\vec{v}}{dt}$的大小不变；

C $\frac{dv}{dt}$ 的大小和$\frac{d\vec{v}}{dt}$ 的大小均改变；

D $\frac{dv}{dt}$ 的大小不变，$\frac{d\vec{v}}{dt}$的大小改变。

提交

单选题 1分

设置

3.一沿直线运动的物体，其速度与时间成反比，则其加速度大小与速度大小的关系是（　）

A 与速度成正比；

B 与速度平方成正比；

C 与速度成反比；

D 与速度平方成反比。

提交

单选题 1分

设置

4.作匀变速圆周运动的物体（ ）

A 法向加速度大小不变；

B 切向加速度大小不变；

C 总加速度大小不变；

D 以上说法都不对。

提交

单选题 1分

设置

5.作圆周运动的物体（ ）

A 加速度的方向必指向圆心；

B 切向加速度必定等于零；

C 法向加速度必定等于零；

D 总加速度必定不总等于零。

提交

单选题 1分

设置

6.一质点在平面上运动，已知质点位置矢量的表达式为 $\vec{r} = at^2\vec{i} + bt^2\vec{j}$ （其中a、b为常量），则该质点作（ ）

A 匀速直线运动；

B 变速直线运动；

C 抛物曲线运动；

D 一般曲线运动。

提交

两类问题：第一类问题 由位矢求其它状态量---求导

1. 已知质点的运动学方程为$\vec{r} = 4t^2\,\vec{i} + (2t+3)\,\vec{j}$ (SI)，求该质点的轨道方程？速度和加速度的表达式？

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

2.已知质点的运动学方程为 $\vec{r}=(5+2t-\frac{1}{2}t^2)\vec{i}+(4t+\frac{1}{3}t^3)\vec{j}$ (SI)

当 $t = 2$ s 时，加速度的大小为 a =_________ ；

加速度 $\vec{a}$ 与 x 轴正方向间夹角 α =____________。

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

第二类问题：由状态量求位矢或速度----积分

1.在 x 轴上作变加速直线运动的质点，已知其初速度为υ_0，初始位置为 x_0，加速度$a=Ct^2$（其中 C 为常量），则其速度与时间的关系为$\upsilon=$____________，运动学方程为$x=$____________.

$$\because a=\frac{dv}{dt}$$

$$\therefore dv=adt$$

$$\because v=\frac{dx}{dt}$$

$$\therefore dx=vdt$$

2.一艘正在沿直线行驶的电艇，在发动机关闭后，其加速度方向与速度方向相反，大小与速度平方成正比，即 $\mathrm{d}\upsilon/\mathrm{d}t=-K\upsilon^2$， 式中 K 为常量. 试证明电艇在关闭发动机后又行驶 x 距离时的速度为 $\upsilon=\upsilon_0\exp(-Kx)$， 其中 υ_0 是发动机关闭时的速度.

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dt}\frac{dx}{dx}=v\frac{dv}{dx}$$

3. 一质点沿 x 轴运动，其加速度 a 与位置坐标 x 的关系 $a=2+6x^2$ (SI)，如果质点在原点处的速度为零，试求其在任意位置处的速度.

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dt}\frac{dx}{dx}=v\frac{dv}{dx}$$

4.质点 P 在水平面内沿一半径为 R=2 m 的圆轨道转动. 转动的角速度 ω 与时间 t 的函数关系为 $\omega = kt^2$ (k 为常量). 已知 $t = 2s$ 时，质点 P 的速度值为 32 m/s. 试求 $t = 1s$ 时，质点 P 的速度与加速度的大小.

解：

$$\because v = R\omega = Rkt^2 \qquad t = 2s, v = 32m/s \Rightarrow k = 4rad/s^2$$

$$\therefore \omega = 4t^2$$

$$v = R\omega = 4Rt^2 \qquad t = 1s, v = 4R = 8m/s$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 8Rt, a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(4Rt^2)^2}{R} = 16Rt^4$$

$$\therefore t = 1s, a_\tau = 8R = 16m/s^2, a_n = 32m/s^2$$

$$a = \sqrt{{a_\tau}^2 + {a_n}^2} = \sqrt{16^2 + 32^2} = 35.8m/s^2$$

质点动力学

一 牛顿第二定律及其应用

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

在直角坐标系*Oxyz*中： **在自然坐标系中：**

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = ma_x \\ \sum F_{iy} = ma_y \\ \sum F_{iz} = ma_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_t = ma_t = m\dfrac{dv}{dt} \\ F_n = ma_n = m\dfrac{v^2}{R} \end{cases}$$

二 功和能

1.功的定义式： $W=\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}$

2.保守力的功等于系统势能增量的负值。

$$\int_{r_1}^{r_2}\vec{F}_{保}\cdot d\vec{r}=-(E_{p2}-E_{p1})=-\Delta E_P$$

3.质点的动能定理： $W=E_{k2}-E_{k1}=\Delta E_k$

合外力对质点所做的功等于质点动能的增量。

质点系的动能定理： $W_{内}+W_{外}=E_{k2}-E_{k1}$

质点系动能的增量等于作用于系统的所有外力和内力作功之代数和。

4.质点系的功能原理： $W_{外} + W_{非保内} = E_2 - E_1$

质点系机械能的增量等于所有外力和所有非保守内力所作功的代数和。

5. 机械能守恒定律 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{\mathbf{k}} + \boldsymbol{E}_{\mathbf{p}} =$ 恒量

当系统只受保守内力作功时，质点系的总机械能保持不变。

三　动量

1. 质点的动量定理：

$$\int_{t_o}^{t} \vec{F}\mathrm{d}t \Leftarrow \vec{I} = \Delta\vec{p} \Rightarrow \vec{p} - \vec{p}_0 = m\vec{v} - m\vec{v}_0$$

质点在运动过程中，所受合外力的冲量等于质点动量的增量。

2. 质点系的动量定理：

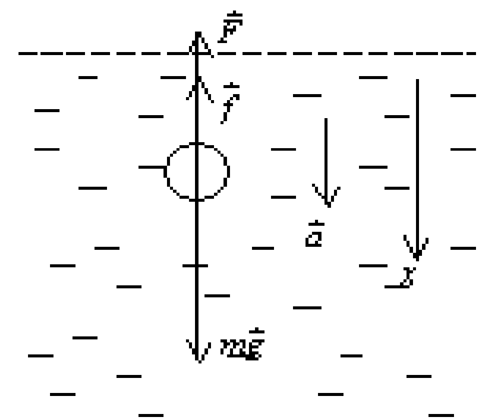
$$\int_{t_0}^{t} \sum \vec{F}_i \mathrm{d}t = \vec{P} - \vec{P}_0 = \Delta\vec{P}$$

3. 动量守恒定律：

系统所受合外力为零时，系统的总动量保持不变。

质量为m的小球，在水中受的浮力为常力F，当它从静止开始沉降时，受到水的粘滞阻力大小为$f = kv$（k为常数）．证明小球在水中竖直沉降的速度v与时间t的关系为 $v = \frac{mg - F}{k}(1 - e^{-kt/m})$，

式中t为从沉降开始计算的时间.



证：小球受力如图，根据牛顿第二定律

$$mg - kv - F = ma = m\frac{dv}{dt} \qquad \frac{dv}{(mg - kv - F)/m} = dt$$

初始条件： $t = 0,\ v = 0.$

$$-\frac{1}{k}\int_0^v \frac{d(mg - kv - F)}{mg - kv - F} = \int_0^t \frac{dt}{m}$$

$$\ln(mg - F - kv) - \ln(mg - F) = -\frac{k}{m}t$$

$$\frac{mg - F - kv}{mg - F} = e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$\therefore \quad v = (mg - F)(1 - e^{-kt/m})/k$$

单选题 1分

设置

1、牛顿第一定律告诉我们（ ）

A 物体受力后才能运动；

B 物体不受力也能保持本身的运动状态；

C 物体的运动状态不变，则一定不受力；

D 物体的运动方向必定和受力方向一致。

提交

单选题 1分

设置

2.下列说法中正确的是（ ）

A 运动的物体有惯性，静止的物体没有惯性；

B 物体不受外力作用时，必定静止；

C 物体作圆周运动时，合外力不可能是恒量；

D 牛顿运动定律只适用于低速、微观物体。

提交

单选题 1分

设置

3、A、B两质点mA>mB,受到相等的冲量作用，则（ ）

A A比B的动量增量少；

B A与B的动能增量相等；

C A比B的动量增量大；

D A与B的动量增量相等；

提交

单选题 1分

设置

4、牛顿定律和动量守恒定律的适用范围为（ ）

A 仅适用于宏观物体；

B 仅适用于宏观、低速物体；

C 牛顿定律适用于宏观低速物体，动量守恒定律普遍适用；

D 牛顿定律适用于宏观低速物体，动量守恒定律适用于宏观物体。

提交

单选题 1分

设置

5、用锤压钉不易将钉压入木块，用锤击钉则很容易将钉击入木块，这是因为（ ）

A 前者遇到的阻力大，后者遇到的阻力小；

B 前者动量守恒，后者动量不守恒；

C 后者锤的动量变化大，给钉的作用力就大；

D 后者锤的动量变化率大，给钉的作用力就大。

提交

单选题 1分

设置

6、质点组内部保守力做功量度了（ ）

A 质点组动能的变化；

B 质点组机械能的变化；

C 质点组势能的变化；

D 质点组动能和势能的变化；

提交

单选题 1分

设置

7、质点组内部非内部保守力做功量度了（ ）

A 质点组动能的变化；

B 质点组势能的变化；

C 质点组内动能与势能的转化；

D 质点组内部机械能与其它形式能量的转化。

提交

单选题 1分

设置

8、对于一个物体系统来说，在下列条件中，哪种情况下系统的机械能守恒？（ ）

A 合外力为0；

B 合外力不做功；

C 外力和非保守内力都不做功；

D 外力和保守力都不做功。

提交

单选题 1分

设置

9、一被压缩的弹簧，两端分别联接A、B两个不同的物体，放置在光滑水平桌面上，设mA=2mB，由静止释放，则物体A的动能与物体B的动能之比为（ ）

A 1 : 1

B 2:1

C 1:2

D 1:4

提交

二、计算题

1.一物体按规律 $x = ct^3$ 在流体媒质中作直线运动，式中 c 为常量，t 为时间. 设媒质对物体的阻力正比于速度的平方，阻力系数为 k，试求物体由 $x = 0$ 运动到 $x = l$ 时，阻力所作的功.

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad = \int F_x dx$$

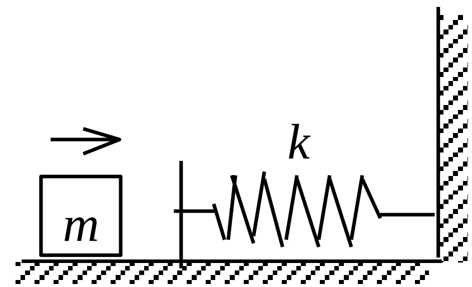
$$v = \frac{dx}{dt} = 3ct^2$$

统一变量到坐标 x上　　$f = 9kc^{2/3}x^{4/3}$

$$\therefore W = \int f(x)dx = \int_0^l -9kc^{2/3}x^{4/3}dx = \frac{-27kc^{2/3}l^{7/3}}{7}$$

2.质量 $m=2$ kg 的质点在力 $\vec{F}=12t\,\vec{i}$ (SI)的作用下，从静止出发沿 x 轴正向作直线运动，求前三秒内该力所作的功.

3. 如图所示，质量 m 为 0.1 kg 的木块，在一个水平面上和一个劲度系数 k 为 20 N/m 的轻弹簧碰撞，木块将弹簧由原长压缩了 $x = 0.4$ m. 假设木块与水平面间的滑动摩擦系数 μ_k 为 0.25，问在将要发生碰撞时木块的速率 v 为多少？



解：根据功能原理，木块在水平面上运动时，摩擦力所作的功等于系统（木块和弹簧）机械能的增量。

$$-f_r x = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}mv^2$$

$$f_r = \mu_k mg$$

$$\therefore v = \sqrt{2\mu_k gx + \frac{kx^2}{m}}$$

4.一颗子弹在枪筒里前进时所受的合力大小为$F=400-\frac{4\times10^5}{3}t$ (SI)子弹从枪口射出时的速率为 300 m/s．假设子弹离开枪口时合力刚好为零，则

(1)子弹走完枪筒全长所用的时间 t=____________，

(2)子弹在枪筒中所受力的冲量 I=________________，

(3)子弹的质量 m=__________________．

（1）F=0可得t

（2）$I=\int_0^t F(t)dt$

（3）$I=\Delta p=mv-0$

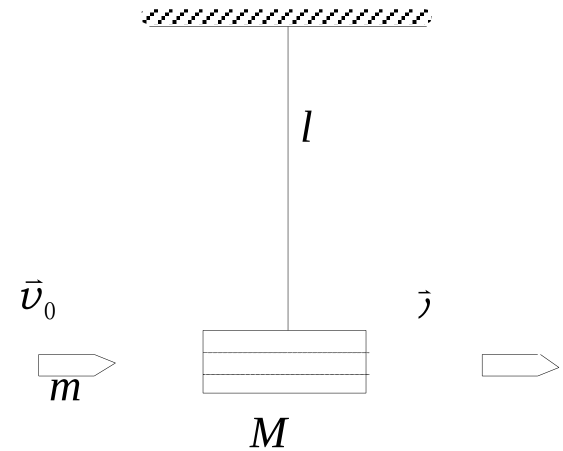
5.一物体质量 $M=2$ kg，在合外力 $F=(3+2t)\vec{i}$ （SI）的作用下，从静止开始运动，式中$\vec{i}$ 为方向一定的单位矢量，求当 $t=1$ s 时物体的速度。

$$I=\int_0^1 F(t)dt=mv-mv_0$$

6. 质量为 M＝1.5 kg 的物体，用一根长为 l＝1.25 m 的细绳悬挂在天花板上．今有一质量为 m＝10 g 的子弹以 v_0＝500 m/s 的水平速度射穿物体，刚穿出物体时子弹的速度大小 v ＝30 m/s，设穿透时间极短．求：

(1) 子弹刚穿出时绳中张力的大小；

(2) 子弹在穿透过程中所受的冲量．



解：(1) 因穿透时间极短，故可认为物体未离开平衡位置．因此,作用于子弹、物体系统上的外力均在竖直方向，故系统在水平方向动量守恒．令子弹穿出时物体的水平速度为 v'

有 $$mv_0 = mv + Mv'$$

$$v' = m(v_0 - v)/M = 3.13\ \mathrm{m/s}$$

$$T = Mg + Mv^2/l = 26.5\ \mathrm{N}$$

$$f\Delta t = mv - mv_0 = -4.7\ \mathrm{N\cdot s}$$

负号表示冲量方向与 v_0 方向相反．