蜂考速成课

《复变函数与积分变换》

课时一　复数

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 复数的表示、几何意义	★★★★	6～12	选择、填空
2. 复数的运算		3～4	选择、填空
3. 复数的方根		3～8	计算题、选择、填空

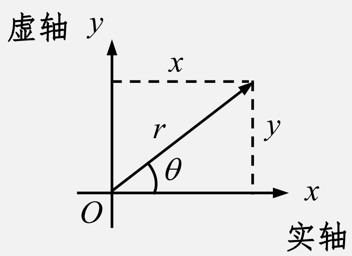
1. 复数的表示、几何意义

（1）$z=x+iy$

x:实部，$Re(z)$

y:虚部，$Im(z)$

r: z 的模长，$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$



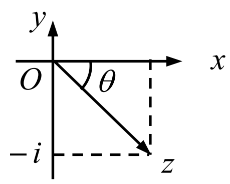
θ: z 的辐角 $\begin{cases}\mathrm{Arg}\,z=\theta+2k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots \\ \arg z=\theta, -\pi<\theta\le\pi,\ \text{辐角主值，也叫主辐角}\end{cases}$

（2）$z=re^{i\theta}$　　指数表示

（3）$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　　三角表示

题 1. 设 $z=1-i$,则 $\arg z=$（　　）。

$A.\ -1$　　$B.\ \dfrac{\pi}{2}$　　$C.\ -\dfrac{\pi}{4}$　　$D.\ \dfrac{\pi}{4}$

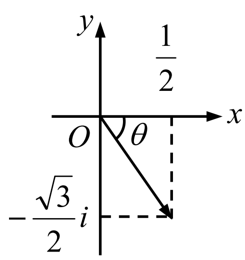


解：$\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$　　$\arg z=-\dfrac{\pi}{4}$

答案: C

题 2. 数 $\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 的指数形式为________，三角形式为________。

解：$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$



$\arctan\left|\dfrac{y}{x}\right|=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow\theta=-\dfrac{\pi}{3}$

$z=re^{i\theta}=e^{-\frac{\pi}{3}i}$

$=r(\cos\theta+i\sin\theta)=\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$

题 3. $\sin\alpha + i\cos\alpha$ 的三角表示式__________，指数表示式__________。

解：$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$　　$\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

$$\sin\alpha + i\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$

题 4. 把方程 $|z-2i| = |z+2i|$ 表示成直角坐标方程。

解：令 $z = x+iy$，代入得 $|x+iy-2i| = |x+iy+2i|$

整理得 $|x+i(y-2)| = |x+i(y+2)|$

$$\sqrt{x^2+(y-2)^2} = \sqrt{x^2+(y+2)^2}$$

两边平方得：$x^2+(y-2)^2 = x^2+(y+2)^2$

化简得 $y=0$

题 5. 方程 $|z+2-3i| = \sqrt{2}$ 所代表的曲线是（　）。

$A.$ 中心为 $2-3i$，半径为 $\sqrt{2}$ 的圆周　　$B.$ 中心为 $-2+3i$，半径为 2 的圆周

$C.$ 中心为 $-2+3i$，半径为 $\sqrt{2}$ 的圆周　　$D.$ 中心为 $2-3i$，半径为 2 的圆周

解：$|z-(-2+3i)| = \sqrt{2}$，z 点到 $(-2+3i)$ 点的距离等于 $\sqrt{2}$

答案：C

2、复数的运算

题 1. 设 $z_1 = 1+2i$，$z_2 = 3+4i$，则 $z_1+z_2 =$__________，$\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) =$__________。

解：$z_1+z_2 = (1+2i)+(3+4i) = (1+3)+(2+4)i = 4+6i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+2i}{3+4i} = \frac{(1+2i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}$$

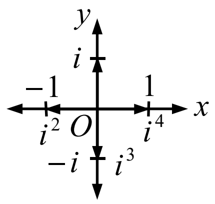
$$= \frac{1\times3-1\times4i+2i\times3+2i\times(-4i)}{3^2-(4i)^2} = \frac{3+(-4+6)i-(-8)}{3^2+4^2}$$

$$= \frac{11+2i}{25} \qquad \Rightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{11}{25}$$

1. $i^2 = -1$
2. $z = x+iy$，$\bar{z} = x-iy$
3. $(x_1+iy_1)\pm(x_2+iy_2)$
   $= (x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$
4. $(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)$
   $= (x_1x_2-y_1y_2)+i(x_2y_1+x_1y_2)$
5. $\dfrac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \dfrac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}$

题 2. 当 $z=\dfrac{1+i}{1-i}$ 时，$z^{100}+z^{75}+z^{50}$ 的值等于（ ）。

$A.\ i$ $B.\ -i$ $C.\ 1$ $D.\ -1$



解：$z=\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1+2i-1}{2}=i$

$i^1=i \qquad i^2=-1 \qquad i^3=-i \qquad i^4=1 \qquad i^5=i \qquad \cdots$

$z^{100}+z^{75}+z^{50}=i^{4\times25}+i^{4\times18+3}+i^{4\times12+2}=i^0+i^3+i^2=1-i-1=-i$

答案：B

$z_1=r_1e^{i\theta_1} \qquad z_2=r_2e^{i\theta_2}$

1. $z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

2. $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

题 3. 复数 $\dfrac{(\cos4\theta+i\sin4\theta)^2}{(\cos3\theta-i\sin3\theta)^3}$ 的指数形式为__________。

解：原式 $=\dfrac{(\cos4\theta+i\sin4\theta)^2}{[\cos(-3\theta)+i\sin(-3\theta)]^3}=\dfrac{(e^{i4\theta})^2}{(e^{-i3\theta})^3}=\dfrac{e^{2\times4i\theta}}{e^{3\times(-3i\theta)}}=e^{2\times4i\theta-3\times(-3i\theta)}=e^{17i\theta}$

3. 复数的方根

题 1. 设 $z=1+\sqrt{3}i$，求 $z^{\frac{1}{6}}$

$\omega=\sqrt[n]{x+iy}=(x+iy)^{\frac{1}{n}}$

(1) $x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

(2) 设 $\omega=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

$=[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^{\frac{1}{n}}$

(3) 代入 $\rho=r^{\frac{1}{n}}$，$\varphi=\dfrac{\theta+2k\pi}{n}$，

$k=0,1,\ldots,n-1$

解：把 z 化成三角表示式 $z=1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

设 $\omega=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\left[2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\right]^{\frac{1}{6}}$

代入 $\rho=2^{\frac{1}{6}}$ $\qquad \varphi=\dfrac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{6},k=0,1,\ldots,5$

$\varphi_1=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{18} \quad \omega_1=2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\dfrac{\pi}{18}+i\sin\dfrac{\pi}{18}\right) \quad \varphi_2=\dfrac{1}{6}\times\left(\dfrac{\pi}{3}+2\pi\right)=\dfrac{7}{18}\pi \quad \omega_2=2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\dfrac{7}{18}\pi+i\sin\dfrac{7\pi}{18}\right)$

$\varphi_3=\dfrac{1}{6}\times\left(\dfrac{\pi}{3}+2\times2\pi\right)=\dfrac{13}{18}\pi \qquad \omega_3=2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\dfrac{13}{18}\pi+i\sin\dfrac{13}{18}\pi\right)$

$\varphi_4=\dfrac{1}{6}\times\left(\dfrac{\pi}{3}+2\times3\pi\right)=\dfrac{19}{18}\pi \qquad \omega_4=2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\dfrac{19}{18}\pi+i\sin\dfrac{19}{18}\pi\right)$

$\varphi_5=\dfrac{1}{6}\times\left(\dfrac{\pi}{3}+2\times4\pi\right)=\dfrac{25}{18}\pi \qquad \omega_5=2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\dfrac{25}{18}\pi+i\sin\dfrac{25}{18}\pi\right)$

$\varphi_6=\dfrac{1}{6}\times\left(\dfrac{\pi}{3}+2\times5\pi\right)=\dfrac{31}{18}\pi \qquad \omega_6=2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\dfrac{31}{18}\pi+i\sin\dfrac{31}{18}\pi\right)$

题 2.求方程 $z^3+8=0$ 的所有根。

解：$z^3=-8 \Rightarrow \left(z^3\right)^{\frac{1}{3}}=(-8)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow z=(-8)^{\frac{1}{3}}$

$-8=8(\cos\pi+i\sin\pi)$

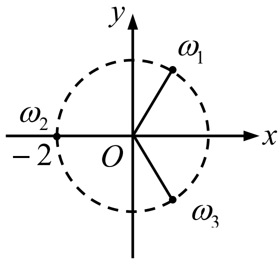
设 $\omega=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\left[8(\cos\pi+i\sin\pi)\right]^{\frac{1}{3}}$ 为 $z^3+8=0$ 的根

$\rho=8^{\frac{1}{3}}=2$　　　$\varphi=\dfrac{\pi+2k\pi}{3}, k=0,1,2$

$\varphi_1=\dfrac{\pi}{3}$　　　$\omega_1=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=1+\sqrt{3}i$

$\varphi_2=\dfrac{1}{3}(\pi+2\pi)=\pi$　　　$\omega_2=2(\cos\pi+i\sin\pi)=-2$

$\varphi_3=\dfrac{1}{3}(\pi+4\pi)=\dfrac{5}{3}\pi$　　　$\omega_3=2\left(\cos\dfrac{5}{3}\pi+i\sin\dfrac{5}{3}\pi\right)=1-\sqrt{3}i$



课时一　练习题

1. 复数 $z=-\dfrac{16}{25}-\dfrac{16}{25}i$ 的主辐角为（　）。

$A.\ \dfrac{\pi}{4}$　　$B.\ -\dfrac{\pi}{4}$　　$C.\ \dfrac{3\pi}{4}$　　$D.\ -\dfrac{3\pi}{4}$

2. 复数 i 的模为______，主辐角为______，指数表示为______。

3. 已知 $|z|=\sqrt{2}, \arg z=\dfrac{3\pi}{4}$，则指数表示 $z=$______。

4. 求复数 $z=2e^{\frac{\pi}{3}i}$ 的实部、虚部、模以及辐角的值。

5. 方程 $|z+2|=|z-2|$ 在 z 平面上表示（　）。

$A.$ 直线 $x=2$　　$B.$ 直线 $y=2$　　$C.$ 实轴　　$D.$ 虚轴

6. 方程 $|z+2i|=2$ 所代表的曲线是（　）。

$A.$ 直线　　$B.$ 圆　　$C.$ 椭圆　　$D.$ 双曲线

7. 满足方程 $|z-2|=7-|z+1|$ 表示一个______。

8．复数$\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$的模为________辐角为________指数形式为________。

9．$i^4-4i^{-17}+i=$________。

10．$\dfrac{(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)^3}{(\cos 2\varphi-i\sin 2\varphi)^4}=$________。

11．设$\dfrac{3+i}{(1+i)^2}=re^{i\theta}$，则$r=$________。

12．求$\sqrt[4]{1+i}$的值。

13．若$z^3+8=0$，且$\mathrm{Im}(z)>0$，则________。

$A.\ z=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ $B.\ z=2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ $C.\ z=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ $D.\ z=2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

14．方程$z^4+1=0$的所有根为________。

课时二　复变函数

考点	重要程度	占分	常见题型
1. 导数	★★★	$3\sim4$	选择、填空
2. 解析函数	★★★★	$6\sim10$	大题
3. 调和函数	必考	$6\sim10$	大题

1. 导数

题 1. 已知 $f(0)=1, f'(0)=1+i$, 则 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{f(z)-1}{z}=$______。

解：$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{f(z)-1}{z}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{f(0+z)-f(0)}{z}=f'(0)=1+i$

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

题 2. 已知 $f(z)=\sin z-2ie^{-z}+z^2+3-i$，则 $f'(0)=$_____。

解：$f'(z)=\cos z+2ie^{-z}+2z$

$f'(0)=f'(z)|_{z=0}=1+2i$

题 3. 函数 $f(z)=xy+iy$ 仅在点 $z=$_____处可导，且在该点的导数值为_____。

解：$u(x,y)=xy, v(x,y)=y$

代入 $C-R$ 方程 $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$ 得 $\begin{cases}y=1\\ x=0\end{cases}$

$\Rightarrow$ 在点 $z=i$ 可导

$f'(z)\big|_{z=i}=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\Bigg|_{z=i}=(y+i0)\big|_{z=i}=1$

$f(z)=u+iv$ 在点 z 处可导

$\Leftrightarrow u,v$ 在该点可导且满足 $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$

柯西-黎曼方程（$C-R$ 方程）

$f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}$

2. 解析函数

$f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析

$\Leftrightarrow u$、v 在区域 D 内可导且满足 $C-R$ 方程

$\Leftrightarrow f(z)$ 在区域 D 内处处可导

题 1. 函数 $f(z)=x^2+iy^2$，判断 $f(z)$ 在何处可导，何处解析。

解：$u(x,y)=x^2$，$v(x,y)=y^2$

$$\text{代入 } C-R \text{ 方程}\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases} \text{得}\begin{cases}2x=2y\\ 0=0\end{cases}\Rightarrow x=y$$

$\therefore f(z)$ 在 $x=y$ 上可导，在复平面处处不解析

①写出 $u(x,y)$，$v(x,y)$

②代入 $C-R$ 方程 $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$

③求出可导/解析区域

题 2. 设函数 $f(z)=my^3+nx^2y+i\left(x^3+kxy^2\right)$ 在 z 平面上解析，求 m、n、k 的值

解：$u(x,y)=my^3+nx^2y$，$v(x,y)=x^3+kxy^2$

$$\text{代入 } C-R \text{ 方程}\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases} \text{得}\begin{cases}2nxy=2kxy\\ 3my^2+nx^2=-3x^2-ky^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=1\\ n=-3\\ k=-3\end{cases}$$

题 3. 下列说法正确的是（　　）

$A.$ 如果 $f(z)=u+iv$ 在 z_0 连续，则 $f(z)$ 在 z_0 可导

$B.$ 如果 $f(z)=u+iv$ 在 z_0 可导，则 $f(z)$ 在 z_0 解析

$C.$ 如果 $f(z)=u+iv$ 在 z_0 不解析，则 $f(z)$ 在 z_0 不可导

$D.$ 如果 $f(z)=u+iv$ 在 z_0 可导，则 $f(z)$ 在 z_0 连续

答案：D

连续 $\overset{\not\rightharpoonup}{\leftharpoondown}$ 可导 $\overset{\not\rightharpoonup}{\leftharpoondown}$ 解析

不连续 $\underset{\not\leftharpoondown}{\rightharpoonup}$ 不可导 $\underset{\not\leftharpoondown}{\rightharpoonup}$ 不解析

题 4. 函数 $f(z)$ 在点 z_0 可导是 $f(z)$ 在点 z_0 解析的（　　）

$A.$ 必要但不充分条件　　$B.$ 充分但不必要条件

$C.$ 充分必要条件　　$D.$ 既不充分也不必要条件

答案：A

3. 调和函数

1. 调和函数 $\varphi(x,y)$：$\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$

2. 解析函数 $f(z)=u+iv$ 满足 $\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0\end{cases}$

3. 解析函数的虚部 v 称为实部 u 的共轭调和函数

题 1. 函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内解析，则下列命题中错误的是（　）

$A.$ 函数 $f(z)$ 在区域 D 内可导

$B.$ 函数 $u(x,y)$、$v(x,y)$ 是区域 D 的调和函数

$C.$ 函数 $u(x,y)$、$v(x,y)$ 在区域 D 内满足柯西黎曼方程

$D.$ 函数 $u(x,y)$ 是 $v(x,y)$ 在区域 D 内的共轭调和函数

答案：D

题 2. 验证 $u(x,y)=x^2-y^2+xy$ 是调和函数，并求相应的解析函数，$f(z)=u+iv$，使其满足 $f(0)=0$。

解：验证：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+y$　　$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2$

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-2y+x$　　$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad \Rightarrow u(x,y)$是调和函数

由 $C-R$ 方程 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 得 $v=\int\dfrac{\partial u}{\partial x}dy=\int(2x+y)dy=2xy+\dfrac{1}{2}y^2+C(x)$

由 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 得 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=2y+C'(x)=-(-2y+x)=2y-x \Rightarrow C'(x)=-x$

$\Rightarrow C(x)=\int -x\,dx=-\dfrac{1}{2}x^2+C_1$

$\therefore v=2xy+\dfrac{1}{2}y^2-\dfrac{1}{2}x^2+C_1$

$\therefore f(z)=u+iv=x^2-y^2+xy+i\left(2xy+\dfrac{1}{2}y^2-\dfrac{1}{2}x^2+C_1\right)$　　$z=x+iy$

由$f(0)=0$　得$C_1=0$

$\therefore f(z)=u+iv=x^2-y^2+xy+i\left(2xy+\dfrac{1}{2}y^2-\dfrac{1}{2}x^2\right)=z^2-\dfrac{1}{2}iz^2$

课时二　练习题

1. 设 $f(z)=z^5+z^3+2$，则 $f'(1+i)=$________。

$A.-20+6i$　　$B.\ 20+6i$　　$C.-20-6i$　　$D.\ 20-6i$

2. $f(z)=\left(z^2+\sin z\right)^2$，求 $f'(z)$

3. （判断）如果 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 可导，那么 $f=u+iv$ 也可导（　）。

4. 柯西黎曼方程是指（　）。

$A.\ \dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$　　$B.\ \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x}$

$C.\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{\partial v}{\partial y}$　　$D.\ \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$

5. 设 $f(z)=3x+y+i(3y-x)$，则 $f'(-1+i)=$__________。

6. 设 $f(z)=y^3-3x^2y+i\left(x^3-3xy^2\right)$，则 $f'(1+i)=$__________。

7. （判断）若 $f(z)$ 在 z_0 点不解析，则 $f(z)$ 在 z_0 点必不可导。

8. 若 $f(z)=xy^2+ix^2y$，则 $f(z)$ 满足（　）。

$A.$ 仅在直线 $y=x$ 上可导　　$B.$ 仅在直线 $y=-x$ 上可导

$C.$ 仅在 $z=0$ 点解析　　$D.$ 仅在 $z=0$ 点可导

9. 函数 $f(z)=2x^2+3y^2i$ 在何处可导，在何处解析。

10. 设函数 $f(z)=x^2+axy+by^2+i\left(cx^2+dxy+y^2\right)$，则 a，b，c，d 取何值时，$f(z)$ 在平面处处解析。

11. 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 是解析函数，则 u 与 v 的关系是________。

12. 证明 $u=3x^2-3y^2-2y$ 是调和函数，并求满足 $f(0)=i$ 的解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

13. 设 $v=2x^2-2y^2+x$，求解析函数 $f(z)=u+iv$，且满足 $f(1)=3i$

课时三　初等函数

考点	重要程度	分值	常见题型
1. exp 指数函数 2. Ln 对数函数 3. a^b 幂函数 4. 三角函数	★★★	3～8	选择、填空、计算题

1. exp指数函数

> 1. $\exp z = e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$
>
> 2. $\exp z$ 以 $2k\pi i$ 为周期

题 1. $f(z)=e^z$ 是周期函数。（　）

答案：√

题 2. 计算 $e^{1-\frac{\pi}{3}i}$

解：原式 $=e\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]=e\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

2. Ln对数函数

> $e^{\omega}=z$，则 $\omega=\mathrm{Ln}z$
>
> $\mathrm{Ln}z=\ln|z|+i\mathrm{Arg}z$
>
> $\ln z=\ln|z|+i\arg z$　　主值

题 1. $\ln(1+i)=$________

解：原式 $=\ln|1+i|+i\arg(1+i)=\ln\sqrt{2}+i\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{2}\ln 2+i\dfrac{\pi}{4}$

题 2. $e^z-1-\sqrt{3}i=0$，则 $\mathrm{Re}(z)=$（　）

$A.\ 2\ln 2$　　$B.\ \ln 2$　　$C.\ \dfrac{\pi}{3}$　　$D.\ \dfrac{2\pi}{3}$

解：$e^z=1+\sqrt{3}i$

$$z=\mathrm{Ln}\left(1+\sqrt{3}i\right)=\ln\left|1+\sqrt{3}i\right|+i\mathrm{Arg}\left(1+\sqrt{3}i\right)=\ln 2+i\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right),\quad k=0,\pm1,\pm2,\dots$$

实部 $\mathrm{Re}(z)=\ln 2$

答案：B

题 3. 下列等式中成立的是（　）

$A.\ \ln z^2=2\ln z$　　$B.\ \mathrm{Ln}z^2=2\mathrm{Ln}z$　　$C.\ \mathrm{Arg}(2i)=2\mathrm{Arg}(i)$　　$D.\ e^{i\pi}-1=0$

解：设 $z=re^{i\theta}$，则 $z^2=r^2e^{2i\theta}$

$$A:\ln z^2=\ln\left|z^2\right|+i\arg(z+z)=\ln r^2+i2\theta$$

$$=2\ln r+2i\theta=2(\ln r+i\theta)=2\ln z$$

$$B:\operatorname{Ln} z^2=\ln\left|z^2\right|+i\operatorname{Arg}(2z)=2\ln r+i(2\theta+2k\pi),$$

$$2\operatorname{Ln} z=2\left[\ln r+i(\theta+2k\pi)\right]=2\ln r+i(2\theta+4k\pi)$$

$$C:\operatorname{Arg}(2i)=\operatorname{Arg}i=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

$$D:e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1\quad\therefore e^{i\pi}-1\neq0$$

答案：A

3. a^b 幂函数 $a^b=e^{b\operatorname{Ln}a}$

题 1. 计算 $(-1)^i$ 的值

解：原式 $=e^{i\times\operatorname{Ln}(-1)}=e^{i\left[\ln|-1|+i\operatorname{Arg}(-1)\right]}=e^{-(\pi+2k\pi)}$,$k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

题 2. 计算 $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{1+i}$ 的主值

解：主值 $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{1+i}=e^{(1+i)\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}=e^{(1+i)\left(\ln\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|+i\arg\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)}=e^{(1+i)\cdot i\frac{\pi}{3}}=e^{-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}i}$

4. 三角函数

题 1. $2\sin i$ 的值等于

A. $\left(e-e^{-1}\right)i$ B. $\left(e+e^{-1}\right)^i$

C. $e-e^{-1}$ D. $e+e^{-1}$

解：原式 $=2\frac{e^{i\times i}-e^{-i\times i}}{2i}=\frac{e^{-1}-e}{i}=\left(e-e^{-1}\right)i$

答案：A

1. $\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

2. $\sin iy=\dfrac{e^{-y}-e^{y}}{2i}=i\operatorname{sh}y$ 双曲正弦函数

$\cos iy=\dfrac{e^{-y}+e^{y}}{2}=\operatorname{ch}y$ 双曲余弦函数

3. $|\sin z|\le1$，$|\cos z|\le1$ 不成立

题 2.若 z 为任意复数，则 $|\sin z|\le1$（ ）

答案：×

题 **3.** $\sin^2 z+\cos^2 z=1$（　　）

$A.$仅在实轴上成立　　$B.$在第一象限成立

$C.$在上半复平面成立　　$D.$在复平面上成立

解：由定义：$\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$，$\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

$$\sin^2 z=\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2=\frac{e^{2iz}-2e^{iz}\cdot e^{-iz}+e^{-2iz}}{-4}$$

$$\cos^2 z=\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2=\frac{e^{2iz}+2e^{iz}\cdot e^{-iz}+e^{-2iz}}{4}$$

$$\begin{aligned}\sin^2 z+\cos^2 z&=\frac{e^{2iz}-2e^{iz}\cdot e^{-iz}+e^{-2iz}}{-4}+\frac{e^{2iz}+2e^{iz}\cdot e^{-iz}+e^{-2iz}}{4}\\&=\frac{4e^{iz}\cdot e^{-iz}}{4}\\&=1\end{aligned}$$

答案：D

课时三　练习题

1. 设 $z=e^{-1+i}$，则辐角主值__________。

$A.-\dfrac{\pi}{4}$　　$B.\dfrac{3\pi}{4}$　　$C.1$　　$D.\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi$（k 为整数）

2. （判断题）e^z 是以 $2\pi i$ 为周期的函数。（　　）

3. （判断题）复数 $\exp\left(\dfrac{1+i\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}e^{\frac{1}{4}}(1+i)$。（　　）

4. 计算 $\exp\left[\dfrac{i(\pi+i)}{3}\right]$

5. $\ln(3-4i)$ 的虚部为__________。

6. 求 $\mathrm{Ln}(\sqrt{3}+i)$ 的值及主值。

7. 解方程 $ie^z+1+i=0$

8. （判断题）$\mathrm{Ln}z^2 = 2\mathrm{Ln}z$。（ ）

9. 计算 $\left(1+\sqrt{3}i\right)^i$ 的值。

10. 计算 3^i 的值

11. $(1-i)^{2i}$ 的主值为_________（写成三角形式）

12. $\sin i =$_________

13. $\mathrm{Im}(\cos i) =$_________

14. 利用三角函数的定义证明：$\sin(2z) = 2\sin z \cdot \cos z$。

15. 证明：在复数域中，$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

16. 下列复数中，为实数的是（ ）

$A.(1-i)^3$　　$B.\cos i$　　$C.\ln i$　　$D.\ e^{1+\frac{\pi}{2}i}$

课时四　级数

考点	重要程度	占分	常见题型
1. 复数列的极限	★★	3~4	选择、填空
2. 收敛、收敛半径	★★★★	3~4	选择、填空
3. 和函数、幂级数	★★★★	6~10	大题
4. 洛朗级数	必考	6~12	大题

1. 复数列的极限

1. 复数列 $\{\alpha_n = a_n + ib_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = a + ib$

2. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n + i\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛

收敛 $\Leftrightarrow$ 实部收敛，虚部收敛

题 1. 设 $a_n = \dfrac{n}{n+1} + i\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-2n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$ ________。

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1} = 1$，　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right]^{-2} = e^{-2}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 + ie^{-2}$

题 2. 复数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是 $\mathrm{Re}\{a_n\}$, $\mathrm{Im}\{a_n\}$ 收敛（　）

答案：√

2. 收敛、收敛半径

1. 绝对收敛：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛

2. 条件收敛：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 不收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

3. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n z^n$ 在 z_0 发散，则 $|z|>|z_0|$ 处发散

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n z^n$ 在 z_0 收敛，则 $|z|<|z_0|$ 处绝对收敛

题 1. 数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2i)^n}{n!}$ 的敛散性是________。

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{(2i)^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{(2i)^n}{n!}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(2i)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\dfrac{n!}{(2i)^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{2i}{n+1}\right| = 0 < 1$

$\therefore \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|\dfrac{(2i)^n}{n!}\right|$ 收敛，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2i)^n}{n!}$ 绝对收敛

题 2. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z=2i$ 点收敛，则级数在（ ）

$A.\ z=1+i$ 点绝对收敛 $B.\ z=-2$ 点条件收敛

$C.\ z=-2i$ 点绝对收敛 $D.\ z=1+2i$ 点一定发散

答案：A

题 3. 求收敛半径。

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}(3-4i)^n z^n$ （2）$\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{n}} z^n$

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho,\quad R=\dfrac{1}{\rho}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho,\quad R=\dfrac{1}{\rho}$

解：（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(3-4i)^{n+1}}{(3-4i)^n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}|3-4i|=5 \quad\Rightarrow$ 收敛半径 $R=\dfrac{1}{5}$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|e^{i\frac{\pi}{n}}\right|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1}=1 \quad\Rightarrow$ 收敛半径 $R=1$

3. 和函数、幂级数

幂级数展开（泰勒级数展开）

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad |z|<1$$

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-\cdots+(-1)^n z^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \quad |z|<1$$

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \quad 0<|z|<+\infty$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{(2n+1)}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{(2n+1)}}{(2n+1)!} \quad 0<|z|<+\infty$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{2n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{2n!} \quad 0<|z|<+\infty$$

题 1. 将函数 $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$ 在 $z=2$ 处展开为幂级数，并指出收敛半径。

解：$f(z)=\dfrac{2}{z+2}-\dfrac{1}{z+1}$

$$\frac{2}{z+2}=\frac{2}{4+(z-2)}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-2}{4}}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{z-2}{4}+\left(\frac{z-2}{4}\right)^2+\cdots\right]=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{4}\right)^n$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{4}\right)^n(z-2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{-2n-1}(z-2)^n \qquad ,\left|\frac{z-2}{4}\right|<1 \text{ 即}|z-2|<4$$

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{3+(z-2)}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{z-2}{3}}=\frac{1}{3}\left[1-\frac{z-2}{3}+\left(\frac{z-2}{3}\right)^2+\cdots\right]=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{3}\right)^n$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3}\right)^n(z-2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3^{-n-1}(z-2)^n \qquad ,\left|\frac{z-2}{3}\right|<1 \text{ 即}|z-2|<3$$

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(2^{-2n-1}-3^{-n-1}\right)(z-2)^n$，收敛半径 $|z-2|<3$

题 2. 将 $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2}$ 展开成 z 的幂级数，并求收敛半径。

解：$\dfrac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots \quad |z|<1$

两边求导：$\dfrac{1}{(1-z)^2}=1+2z+3z^2+4z^3+\cdots+nz^{n-1}+\cdots \quad |z|<1$

$$\therefore f(z)=\frac{z}{(z-1)^2}=z\cdot\left(1+2z+3z^2+\cdots+nz^{n-1}+\cdots\right)$$

$$=z+2z^2+3z^3+\cdots+nz^n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot z^n \quad |z|<1$$

题 3. 求函数 $f(z)=\ln(1+z)$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式，并求出收敛域。

解：$\because\left[\ln(1+z)\right]'=\dfrac{1}{1+z}$

而 $\dfrac{1}{1+z}=1-z+z^2-\cdots+(-1)^n z^n+\cdots \quad |z|<1$

两边积分：$\ln(1+z)=z-\dfrac{z^2}{2}+\dfrac{z^3}{3}-\dfrac{z^4}{4}+\cdots+(-1)^n\dfrac{z^{n+1}}{n+1}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{z^n}{n}$

4. 洛朗级数

题 1. 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 分别在指定的圆环域内展开成洛朗级数。

（1）$0<|z-1|<1$ （2）$1<|z-2|<+\infty$ （3）$2<|z|<+\infty$

解：（1）在 $0<|z-1|<1$ 上

$$f(z)=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{(z-1)-1}=\frac{-1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-(z-1)}=\frac{-1}{z-1}\left[1+(z-1)+(z-1)^2+\cdots+(z-1)^n+\cdots\right]$$

$$=\frac{-1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^{n-1}$$

（2）在 $1<|z-2|<+\infty$ 上，$0<\left|\dfrac{1}{z-2}\right|<1$

$$f(z)=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{1+(z-2)}=\frac{1}{(z-2)^2}\frac{1}{1+\dfrac{1}{z-2}}$$

$$=\frac{1}{(z-2)^2}\cdot\left[1-(z-2)^{-1}+(z-2)^{-2}-\cdots+(-1)^n(z-2)^{-n}+\cdots\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^{-n-2}$$

（3）在 $2<|z|<+\infty$ 上，$0<\left|\dfrac{1}{z}\right|<1$，$0<\left|\dfrac{2}{z}\right|<1$

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{2}{z}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}$$

$$\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{2}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}2^n z^{-n-1}$$

$$\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n-1}$$

$$\therefore\ f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^n-1\right)z^{-n-1}$$

课时四 练习题

1．复数列的通项 $a_n=\frac{n^2+1}{n^2-1}+\frac{(-1)^n}{n}i$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$________。

2．级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n+i\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛的充要条件是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛（ ）。

3．下列级数中，条件收敛的是（ ）。

$A.\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\sqrt{3}i)^n}{n!}$ $B.\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+i}{n+1}$ $C.\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$ $D.\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3+4i}{3}\right)^n$

4．级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(3+5i)^n}{n!}$ 的敛散性情况为（ ）。

$A.$绝对收敛 $B.$条件收敛 $C.$发散 $D.$敛散性不能确定

5．若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，$z=5-3i$ 绝对收敛，则该级数在 $z=2+5i$ 处的敛散性为（ ）。

$A.$绝对收敛 $B.$条件收敛 $C.$发散 $D.$不能确定

6．级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^3}$ 的收敛半径 $R=$________。

7．级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2+i)^n z^n$ 的收敛半径为________。

8．函数 $f(z)=\frac{z}{(z+2)(z-3)}$ 在 $z=1$ 内的泰勒展开式的收敛圆为（ ）。

$A.|z|=2$ $B.|z-1|=2$ $C.|z|=3$ $D.|z-1|=3$

9．幂级数 $S=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$，则当 $|z|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}S=$________。

10．函数 $f(z)=\frac{z-1}{z+1}$ 在 $z=1$ 时展开成泰勒级数为（ ）。

$A.\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{n+1},|z-1|<1$ $B.\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{2}\right)^{n+1},|z-1|<2$

$C.\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(z^{n+1}-z^n\right),|z-1|<1$

11．求 $f(z)=\dfrac{1}{4z-3}$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式。

12．求 $\ln(z+1)$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式。

13．将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z-5}$ 在圆环域（1）$0<|z-2|<3$（2）$3<|z-2|<+\infty$ 内展开成洛朗级数。

14．将 $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z-i)}$ 在去心解析邻域（1）$0<|z-i|<1$（2）$1<|z-i|<+\infty$ 内分别展开成洛朗级数。

课时五　求积分

考点	重要程度	占分	常见题型
1. 简单方法	★★★	$3\sim8$	选择、填空、计算题
2. 柯西-古萨定理	★★★★	$3\sim8$	选择、填空、计算题
3. 柯西积分公式	必考	$6\sim20$	计算题
4. n 阶导数	★★★	$6\sim10$	计算题

1. 简单方法

题 1. 计算积分 $\int_0^1 z\sin zdz$　　参数方程法

解：原式 $=\int_0^1 -zd\cos z=-z\cos z\big|_0^1+\int_0^1\cos zdz=-z\cos z\big|_0^1+\sin z\big|_0^1=\sin1-\cos1$

题 2. 分别沿 $y=x, y=x^2$，计算积分 $\int_0^{1+i}\left(x^2+iy\right)dz$

解：（1）沿 $y=x$，令 $\begin{cases}x=t\\y=t\end{cases}$，则 $dz=d\left(x+iy\right)=\left(1+i\right)dt$

$$原式=\int_0^1\left(t^2+it\right)\left(1+i\right)dt=\int_0^1\left(t^2+it^2+it-t\right)dt=\int_0^1\left(1+i\right)t^2+\left(-1+i\right)tdt$$

$$=\left[\left(1+i\right)\frac{1}{3}t^3+\left(-1+i\right)\frac{1}{2}t^2\right]\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}\left(1+i\right)+\frac{1}{2}\left(-1+i\right)=-\frac{1}{6}+\frac{5}{6}i$$

（2）沿 $y=x^2$，令 $\begin{cases}x=t\\y=t^2\end{cases}$，则 $dz=d\left(x+iy\right)=\left(1+2it\right)dt$

$$原式=\int_0^1\left(t^2+it^2\right)\left(1+2it\right)dt=\int_0^1\left[\left(2i-2\right)t^3+\left(1+i\right)t^2\right]dt$$

$$=\left(\frac{-1+i}{2}t^4+\frac{1+i}{3}t^3\right)\Bigg|_0^1=-\frac{1}{6}+\frac{5}{6}i$$

2. 柯西-古萨基本定理　$\oint_c f(z)dz=0$

若 $f\left(z\right)$ 在曲线 c 围成的区域内解析，

$$\oint_c f\left(z\right)dz=0$$

题 1. 设 $c:\left|z-1\right|=\frac{1}{2}$，则 $\oint_c\frac{\cos z}{z^3}dz=$（　　）

$A.\ 2\pi i$　　$B.\ \pi i$　　$C.\ 0$　　$D.\ 1$

解：$f\left(z\right)=\frac{\cos z}{z^3}$ 只在 $z=0$ 处不解析，在 $\left|z-1\right|=\frac{1}{2}$ 内处处解析

答案　C

题 2. $\oint_{|z|=1}\frac{1}{\cos z}dz=$________

解：$\cos z=0$ 的点为 $z=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

$f(z)=\dfrac{1}{\cos z}$ 在 $|z|=1$ 内处处解析 答案：0

3. 柯西积分公式

$f(z)$ 在曲线 c 的内部解析，z_0 在 c 内

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

$$\oint_c \frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0)$$

题 1. $\oint_{|z|=1}\dfrac{e^z}{z}dz=$（ ）

A. $2\pi i$ B. $-2\pi i$ C. 2π D. -2π

解：原式 $=\oint_{|z|=1}\dfrac{e^z}{z-0}dz=2\pi i e^z\Big|_{z=0}=2\pi i$

答案 A

题 2. 若 $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$，则 $\oint_{|z|=5}f(z)dz=$（ ）

A. 0 B. $-i$ C. i D. $\dfrac{1}{4}$

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

解 1：原式 $=\oint_{|z|=5}\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}dz=\oint_{|z|=5}\dfrac{1}{(z-3)}-\dfrac{1}{(z-2)}dz$

$$=\oint_{|z|=5}\frac{1}{(z-3)}dz-\oint_{|z|=5}\frac{1}{(z-2)}dz=2\pi i-2\pi i=0$$

解 2：原式 $=\oint_{c_1}\dfrac{\frac{1}{z-3}}{z-2}dz+\oint_{c_2}\dfrac{\frac{1}{z-2}}{z-3}dz$

令 c_1,c_2 分别是以 $z=2,z=3$ 为圆心的小圆域

$$\text{原式}=2\pi i\frac{1}{z-3}\Big|_{z=2}+2\pi i\frac{1}{z-2}\Big|_{z=3}=2\pi i-2\pi i=0$$

答案：A

题 3. 求 $\oint_{|z|=3}\dfrac{z+1}{z(z-i)}dz$

解：令 c_1,c_2 分别是以 $z=0$ 和 $z=i$ 为圆心的小圆域

$$\text{原式}=\oint_{c_1}\frac{\frac{z+1}{z-i}}{z}dz+\oint_{c_2}\frac{\frac{z+1}{z}}{z-i}dz=2\pi i\frac{z+1}{z-i}\Big|_{z=0}+2\pi i\frac{z+1}{z}\Big|_{z=i}=2\pi i\cdot i+2\pi i\cdot(1-i)=2\pi i$$

4. n 阶导数

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

题 1. 设 c 表示正向圆周 $|\zeta|=2f(z)=\oint_c \frac{\sin 2\zeta}{(\zeta-z)^3}d\zeta$ ，求 $f'(i)$ 的值。

解：设 $\sin 2\zeta = f_1(\zeta)$

$$f(z)=\oint_c \frac{\sin 2\zeta}{(\zeta-z)^3}d\zeta=\frac{2\pi i}{2!}f_1''(z)=-4\pi i\sin 2z$$

$$f'(z)=-8\pi i\cos 2z$$

$$f'(i)=-8\pi i\cos 2i=-8\pi i\operatorname{ch}2$$

课时五　练习题

1. 计算积分 $\int_1^{1+i} ze^z dz$ （提示：利用分部积分）

2. 计算 $\int_0^1 z\cos z dz$

3. 求积分 $\int_c \bar{z}dz$ ， c 为从 0 到 $1+3i$ 的直线段

4. 设曲线 c 是从原点到 $2+3i$ 的直线段，计算积分 $\int_c (x^2+iy^2)dz$

5. $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2-4}=$______

6. $\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z-2}dz=$______

7. $\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2+2z+4}dz=$______

8. 计算 $\oint_c \frac{z}{z^2+3z-4}dz$, $c:|z|=5$

9. 计算 $\oint_{|z|=2} \frac{2z+1}{z^2+2}dz$

10. 计算 $\oint_{|z|=3} \frac{z}{(z+1)(z-2)}dz$

11. $\oint_{|z|=2} \frac{1}{z-1}dz=$______

12. 计算 $\oint_c\left(\dfrac{2}{z-2}+\dfrac{3}{z+2i}\right)dz, c:|z|=3$

13.设函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，在 D 内的曲线 C 上连续，则对任意 $z\in D$（ ）

$A.\ \dfrac{n!}{2\pi i}\oint_c\dfrac{f(z)d\zeta}{(\zeta-z)^n}=f^{(n)}(z)$

$B.\ \dfrac{n!}{2\pi i}\oint_c\dfrac{f(z)d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}}=f^{(n)}(z)$

$C.\ \dfrac{n!}{2\pi i}\oint_c\dfrac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^n}=f^{(n)}(z)$

$D.\ \dfrac{n!}{2\pi i}\oint_c\dfrac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}}=f^{(n)}(z)$

14. 设函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，C 是 D 内一条简单正向闭曲线，z_0 在 c 的内部，则积分 $\oint_c\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{2009}}dz=$ ________

课时六　留数

考点	重要程度	占分	题型
1. 奇点和零点	★★★	3～8	选择、填空、大题
2. 留数的含义	★★★	6～10	计算题
3. 求留数规则 I、II	必考		
4. 求留数规则III、IV	★★★★		

1. 奇点和零点

题 1. 设 $z=-1$ 是函数 $f(z)=5z^2+10z+5$ 的 m 级零点，则 $m=$________。

解：$f(z)\big|_{z=-1}=\left(5z^2+10z+5\right)\big|_{z=-1}=0$

$f'(z)\big|_{z=-1}=(10z+10)\big|_{z=-1}=0$

$f''(z)\big|_{z=-1}=10\neq 0$

$\therefore m=2$

1. m 级零点：$\begin{cases} f^{(m)}(z_0)\neq 0 \\ f^{(n)}(z_0)=0, \quad n<m \end{cases}$

2. z_0 是 $f(z)$ 的 m 级零点

$\Rightarrow z_0$ 是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 级极点

3. z_0 是 $f(z)$ 的 m 级零点，$g(z)$ 的 n 级零点

$\Rightarrow z_0$ 是 $\dfrac{g(z)}{f(z)}$ 的 $m-n$ 级极点

题 2. $z=0$ 是 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^4}$ 的三级极点（　）

解：$z=0$ 是 z^4 的 4 级零点

$(\sin z)'\Big|_{z=0}=\cos z=1\neq 0$　　　$z=0$ 是 $\sin z$ 的 1 级零点

$\therefore z=0$ 是 $\dfrac{\sin z}{z^4}$ 的 3 级极点

答案：√

题 3. 设函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 分别以 $z=a$ 为 m 级与 n 级极点，那么下列三个函数：1）$f(z)g(z)$；

2）$\dfrac{f(z)}{g(z)}$；3）$f(z)+g(z)$ 在 $z=a$ 处有什么性质？

解：设 $f(z)=\dfrac{f_1(z)}{(z-a)^m}, g(z)=\dfrac{g_1(z)}{(z-a)^n}$，　$f_1(z)\neq 0$，　$g_1(z)\neq 0$

1）$f(z)g(z)=\dfrac{f_1(z)g_1(z)}{(z-a)^{m+n}}$，　$m+n$ 级极点

2）$\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{f_1(z)/g_1(z)}{(z-a)^{m-n}}$

当 $m>n$ 时，$m-n$ 级极点；

当 $m=n$ 时，可去奇点（或解析点）；

当 $m<n$ 时，$n-m$ 级零点。

3）当 $m>n$ 时，m 级极点；

当 $m=n$ 时，m 级极点或低于 m 级极点；

当 $m<n$ 时，n 级极点。

2. 留数的定义

若 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n$，

则 $\mathbf{Res}\left[f(z),z_0\right]=c_{-1}$

题 1. $\mathbf{Res}\left[\dfrac{\sin z}{z^2},0\right]=$______

解：$\dfrac{\sin z}{z^2}$ 在 $z=0$ 处展开

$$\frac{\sin z}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(\cdots+z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)=\frac{1}{z}-\frac{z}{3!}+\frac{z^3}{5!}-\cdots$$

$c_{-1}=1$　　　$\therefore \mathbf{Res}\left[\dfrac{\sin z}{z^2},0\right]=1$

答案：1

题 2. $\mathbf{Res}\left[\dfrac{e^z-1}{z^5},0\right]=$______

解：$\dfrac{e^z-1}{z^5}$ 在 $z=0$ 处展开

$$\frac{e^z-1}{z^5}=\frac{1}{z^5}\left(\cdots+(-1)+1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}\cdots\right)=\cdots+z^{-4}+\frac{z^{-3}}{2!}+\frac{z^{-2}}{3!}+\frac{z^{-1}}{4!}+\cdots$$

$c_{-1}=\dfrac{1}{4!}=\dfrac{1}{24}$　　　$\therefore \mathbf{Res}\left[\dfrac{e^z-1}{z^5},0\right]=\dfrac{1}{24}$

答案：$\dfrac{1}{24}$

3. 求留数规则 I、II

题 1. 函数 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}$ 在 $z=\dfrac{\pi}{2}$ 处的留数 $\mathbf{Res}\left[f(z),\dfrac{\pi}{2}\right]=$______

> 1. 规则 I：
>
> z_0 为 $f(z)$ 的一级极点，则
>
> $\mathbf{Res}\left[f(z),z_0\right]=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$
>
> 2. 规则 II：
>
> z_0 是 $f(z)$ 的 m 级极点，则
>
> $\mathbf{Res}\left[f(z),z_0\right]$
>
> $=\dfrac{1}{(m-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left\{(z-z_0)^m f(z)\right\}$
>
> 3. $\oint_c f(z)\,dz=2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbf{Res}\left[f(z),z_k\right]$

解：$z=\dfrac{\pi}{2}$ 是 $f(z)$ 的一级极点

$$原式=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)f(z)=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin z}{z}=\frac{2}{\pi}$$

答案：$\dfrac{2}{\pi}$

题 2. 用留数计算积分 $\oint_{|z|=2}\dfrac{5z-2}{z(z-1)^2}dz$

解：$f(z)=\dfrac{5z-2}{z(z-1)^2}$，在 $|z|=2$ 内有 $z=0$ 和 $z=1$ 两个极点

$$\mathbf{Res}\left[f(z),0\right]=\lim_{z\to0}zf(z)=\lim_{z\to0}\frac{5z-2}{(z-1)^2}=-2$$

$$\mathbf{Res}\left[f(z),1\right]=\lim_{z\to1}\left[(z-1)^2f(z)\right]'=\lim_{z\to1}\left(\frac{5z-2}{z}\right)'=\lim_{z\to1}\frac{2}{z^2}=2$$

$$原式=2\pi i\left\{\mathbf{Res}\left[f(z),0\right]+\mathbf{Res}\left[f(z),1\right]\right\}=0$$

4. 求留数规则Ⅲ、Ⅳ

> 1. 规则 III：
>
> 若 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$，z_0 是 $f(z)$ 的一级极点，$\mathbf{Res}\left[f(z),z_0\right]=\dfrac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$
>
> 2. 规则 IV：$\mathbf{Res}\left[f(z),\infty\right]=-\mathbf{Res}\left[f\left(\dfrac{1}{z}\right)\cdot\dfrac{1}{z^2},0\right]$
>
> 3. $\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbf{Res}\left[f(z),z_i\right]=0$

题 1. 函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^n-1}$ 在 $z_0=1$ 的留数为（　）

$A.\ n$　　　$B.\ \dfrac{1}{n+1}$　　　$C.\ \dfrac{1}{n}$

解：$\mathbf{Res}\left[f(z),1\right]=\left.\dfrac{1}{(z^n-1)'}\right|_{z=1}=\left.\dfrac{1}{nz^{n-1}}\right|_{z=1}=\dfrac{1}{n}$

答案：C

题 2. $\mathbf{Res}\left[\dfrac{2z}{3+z^2},\infty\right]=$________

解：原式 $=-\mathbf{Res}\left[\dfrac{2\frac{1}{z}}{3+\left(\frac{1}{z}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{z^2},0\right]=-\mathbf{Res}\left[\dfrac{2}{3z^3+z},0\right]=-2$

答案：-2

题 3. 函数 $f(z)=\dfrac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}$ 在复平面内的所有有限孤立奇点处的留数和是________

解：$\sum\limits_{i=1}\mathbf{Res}[f(z),z_i]=-\mathbf{Res}[f(z),\infty]=\mathbf{Res}\left[f\left(\dfrac{1}{z}\right)\cdot\dfrac{1}{z^2},0\right]$

$$=\mathbf{Res}\left[\frac{1}{z(1+z^2)^2(1+2z^4)^3},0\right]=\lim_{z\to0}z\frac{1}{z(1+z^2)^2(1+2z^4)^3}=1$$

课时六　练习题

1．点 $z=0$ 是 $f(z)=1-\cos z$ 的（　　）级零点。

$A.1$　　$B.2$　　$C.3$　　$D.4$

2．已知 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)^2}$ 在圆环域 $|z-1|>1$ 上的洛朗级数为

$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^3}-\dfrac{1}{(z-1)^4}+\dfrac{1}{(z-1)^5}-\cdots$，则 $z=1$ 是 $f(z)$ 的________。

3．$z=0$ 为函数 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z(z+1)^2}$（　）

$A.$可去奇点　　$B.$本性奇点　　$C.$极点　　$D.$解析点

4．$z=0$ 为函数 $f(z)=\dfrac{(e^z-1)\sin z}{z^5}$ 的__________（奇点类型）

5．设函数 $f(z)=z\cos\dfrac{1}{z}$，则 $\mathbf{Res}\left[f(z),0\right]=$________

6．设函数 $f(z)=\dfrac{e^{2z}-1}{z}$，则 $\mathbf{Res}\left[f(z),0\right]=$________

7．$\oint_{|z|=5}\dfrac{e^{z}}{z^{3}-2z^{2}-3z}dz$

8．函数 $f(z)=\dfrac{e^{z}}{(z-1)^{2}}$，则 $\mathbf{Res}\left[f(z),1\right]=$________

9．用留数定理计算 $\oint_{C}\dfrac{e^{z}}{z(z-1)^{2}}dz$ 的值，其中 C 为 $|z|=5$ 的正向圆周

10．设函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z^{4}-1)(z-3)}$，判断 $f(z)$ 的所有有限奇点的类型，并利用留数定理计算 $\oint_{C}f(z)dz$，其中 C 为正向圆周：$|z|=2.5$

课时七　利用留数求积分

考点	重要程度	占分	题型
1. 利用留数求积分	★★★	6～12	计算题
2. 求积分方法总结	★★★★★		

1. 利用留数求积分

1. $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\,d\theta$，$d\theta=\dfrac{dz}{iz}$

令 $\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{z-z^{-1}}{2i}\\ \cos\theta=\dfrac{z+z^{-1}}{2}\end{cases}\Rightarrow \oint_{|z|=1} f(z)\,dz$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx=2\pi i\sum \mathbf{Res}\left[R(z),z_k\right]$

z_k 为 $R(z)$ 在上半平面内的奇点

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{aix}dx$

$=2\pi i\sum \mathbf{Res}\left[R(z)e^{aiz},z_k\right]$

$=\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos ax\,dx+i\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin ax\,dx$

题 1. 计算积分 $I=\int_0^{2\pi}\dfrac{\cos 2\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}d\theta$，$(0<p<1)$

解：$\cos 2\theta=\dfrac{1}{2}\left(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}\right)=\dfrac{1}{2}\left(z^2+z^{-2}\right)$

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{1}{2}\left(z^2+z^{-2}\right)\cdot\frac{1}{1-2p\cdot\dfrac{z+z^{-1}}{2}+p^2}\cdot\frac{dz}{iz}$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{1+z^4}{2iz^2(1-pz)(z-p)}dz$$

令 $f(z)=\dfrac{1+z^4}{2iz^2(1-pz)(z-p)}$

在 $|z|=1$ 内有 $z=0$，$z=p$ 两个极点

$$\mathbf{Res}\left[f(z),0\right]=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[z^2\cdot\frac{1+z^4}{2iz^2(1-pz)(z-p)}\right]=-\frac{1+p^2}{2ip^2}$$

$$\mathbf{Res}\left[f(z),p\right]=\lim_{z\to p}\left[(z-p)\cdot\frac{1+z^4}{2iz^2(1-pz)(z-p)}\right]=\frac{1+p^4}{2ip^2(1-p^2)}$$

$$I=2\pi i\left[-\frac{1+p^2}{2ip^2}+\frac{1+p^4}{2ip^2(1-p^2)}\right]=\frac{2\pi p^2}{1-p^2}$$

题 2. 利用留数理论计算实反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x^2}{(x^2+4)^2}dx$

解：令 $f(z)=\dfrac{z^2}{(z^2+4)^2}=\dfrac{z^2}{(z+2i)^2(z-2i)^2}$

在上半平面内有 $z=2i$ 一个 2 级极点

$$\mathbf{Res}\left[f(z),2i\right]=\lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left[(z-2i)^2\frac{z^2}{(z+2i)^2(z-2i)^2}\right]=-\frac{i}{8}$$

$\therefore$ 原式$=2\pi i\times\left(-\dfrac{i}{8}\right)=\dfrac{\pi}{4}$

题 3.用留数计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}dx$

解：令 $f(z)=\frac{e^{iz}}{z^2+1}=\frac{e^{iz}}{(z+i)(z-i)}$，则 $f(z)$ 在上半平面内有 $z=i$ 一个极点

$$\mathbf{Res}\left[f(z),i\right]=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{iz}}{(z+i)(z-i)}=\lim_{z\to i}\frac{e^{iz}}{z+i}=\frac{-i}{2e}$$

$$\therefore\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+1}dx=2\pi i\mathbf{Res}\left[f(z),i\right]=2\pi i\cdot\frac{-i}{2e}=\frac{\pi}{e}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{e}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{2e}$$

2. 求积分方法总结

方法	特点
柯西古萨基本定理：$\oint_C f(z)=0$	$f(z)$ 在 C 内解析
柯西积分公式：$\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0)$	z_0 是 $\frac{f(z)}{z-z_0}$ 的一级极点，z_0 在 C 内
求留数的规则 I： $\oint_C f(z)dz=2\pi i\mathbf{Res}\left[f(z),z_0\right]$ $=2\pi i\left[\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)\right]$	z_0 是 $f(z)$ 的一级极点，z_0 在 C 内
n 阶导数公式：$\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)$	z_0 是 $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ 的 $n+1$ 级极点，z_0 在 C 内
求留数规则 II： $\oint_C f(z)dz=2\pi i\mathbf{Res}\left[f(z),z_0\right]$ $=\frac{2\pi i}{n!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^n}{dz^n}\left\{(z-z_0)^{n+1}f(z)\right\}$	z_0 是 $f(z)$ 的 $n+1$ 级极点，z_0 在 C 内
$\oint_C f(z)dz=2\pi i\sum\mathbf{Res}\left[f(z),z_k\right]$	z_k 是 $f(z)$ 在 C 内的奇点
$\oint_C f(z)dz=-2\pi i\sum\mathbf{Res}\left[f(z),z_i\right]$	z_i 是 $f(z)$ 在 C 外的奇点（包括 ∞）

$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \cdot C_{-1}$	C_{-1}是$f(z)$在z_0点洛朗展开的系数 z_0是$f(z)$在C内的奇点
利用留数求积分： ①$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\,d\theta$ ②$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx$ ③$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{aix}\,dx$	只能用留数的规则求

课时七 练习题

1. 计算积分$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos\theta}d\theta$，$a>1$

2. 利用留数求积分的值$I=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+5x^2+4}dx$

3. 利用留数定理，计算积分$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+16)}$

4. 利用留数计算积分$\int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+x^2}dx$

5. $\oint_{|z|=2} \frac{z}{z^4-1}dz$

6. 计算积分$\oint_{|z|=4} \frac{z^{15}}{(1+z^2)^2(1+z^4)^3}dz$（曲线为正向）

课时八 Fourier 傅里叶变换

考点	重要程度	占分	题型
1. $\delta(t)$ 函数	★	$3\sim6$	选择、填空
2. Fourier 傅里叶变换	★★★	$3\sim10$	选择、填空、大题

1. $\delta(t)$ 函数

$\delta(t)$ 单位脉冲函数

1. $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt=1$
2. $f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\delta(t-t_0)dt=f(t_0)$

题 1. $\delta(t)\cdot\cos t=$______。

解：原式 $=\cos 0\cdot\delta(t)=\delta(t)$

题 2. $\delta(t)$ 是单位脉冲函数，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\sin t\,dt=$______。

解：原式 $=\sin\frac{\pi}{2}=1$

2. Fourier 傅里叶变换

1. $F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}\,dt=\mathcal{F}[f(t)]$
2. $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}\,dt=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$

题 1. 求函数 $f(t)=\begin{cases}2e^{-3t} & ,t\ge0\\ 0 & ,t<0\end{cases}$ 的 Fourier 变换，并证明下式：

$$\int_0^{+\infty}\frac{3\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{9+\omega^2}d\omega=\pi e^{-3t},(t>0)$$

解：$F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_0^{+\infty}2e^{-3t}e^{-j\omega t}dt=\int_0^{+\infty}2e^{-(3+j\omega)t}dt$

$$=\frac{2}{3+j\omega}=\frac{2(3-j\omega)}{9+\omega^2}$$

对 $F(\omega)$ 求逆变换

$$f(t)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2(3-j\omega)}{9+\omega^2}e^{j\omega t}d\omega$$

$e^{j\omega t}=\cos\omega t+j\sin\omega t$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{3\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{9+\omega^2}d\omega$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{3\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{9+\omega^2}d\omega=2e^{-3t}\ (t>0)$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{3\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{9+\omega^2}d\omega=\pi e^{-3t}\ (t>0)$$

题 2. 求函数 $f(t)=\begin{cases} E, -\tau\le t\le\tau \\ 0 \qquad 其它\end{cases}$ 的傅里叶变换。

解：$F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$

$$=\int_{-\tau}^{\tau} Ee^{-j\omega t}dt=\int_{-\tau}^{\tau} E(\cos\omega t-j\sin\omega t)dt$$

$$=2E\int_0^{\tau}\cos\omega t dt=\frac{2E}{\omega}\sin\tau\omega$$

题 3. 函数 $f(t)=\sin t$ 的傅里叶变换________。

$$\sin t=\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}$$

$$e^{-jat}\xrightarrow{\mathcal{F}}2\pi\delta(\omega+a)$$

$$\delta(t+a)\xrightarrow{\mathcal{F}}e^{ja\omega}$$

解：$F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin t e^{-j\omega t}dt$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{2j}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jt}e^{-j\omega t}-e^{-jt}e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{2j}\left[2\pi\delta(\omega-1)-2\pi\delta(\omega+1)\right]=j\pi\left[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)\right]$$

常见 *Fourier* 傅里叶变换对

$$e^{-\beta t}(t\ge 0,\beta>0)\xrightarrow{\mathcal{F}}\frac{1}{\beta+j\omega} \qquad E(|t|\le\tau)\xrightarrow{\mathcal{F}}\frac{2E}{\omega}\sin\tau\omega$$

$$\delta(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}1 \qquad \sin\omega_0 t\xrightarrow{\mathcal{F}}j\pi\left[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)\right]$$

$$1\xrightarrow{\mathcal{F}}2\pi\delta(\omega) \qquad \cos\omega_0 t\xrightarrow{\mathcal{F}}\pi\left[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right]$$

常用 *Fourier* 傅里叶变换的性质

1. $\mathcal{F}[f(t+t_0)]=e^{j\omega t_0}\mathcal{F}[f(t)]$；　　$\mathcal{F}\left[e^{j\omega_0 t}f(t)\right]=F(\omega-\omega_0)$
2. $\mathcal{F}[f'(t)]=j\omega\mathcal{F}[f(t)]$；　　$\mathcal{F}[tf(t)]=j\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}[f(t)]=jF'(\omega)$
3. $\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t}f(t)dt\right]=\frac{1}{j\omega}\mathcal{F}[f(t)]$
4. $\mathcal{F}[f(at)]=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
5. $\mathcal{F}[f(t)*g(t)]=\mathcal{F}[f(t)]\cdot\mathcal{F}[g(t)]$　　$*$ 表示卷积

题 4.已知 $\mathcal{F}[\sin kt]=j\pi[\delta(\omega+k)-\delta(\omega-k)]$，利用傅里叶变换计算 $\mathcal{F}[\sin(t+2)]$。

解：利用性质1：

$$\mathcal{F}[\sin(t+2)]=e^{j2\omega}\mathcal{F}(\sin t)=e^{j2\omega}\cdot j\pi[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]$$

题 5.设 $f(t)=\cos^2 t$，则 $\mathcal{F}[f(t)]=$______。

解：$f(t)=\cos^2 t=\frac{1}{2}(\cos 2t+1)$

$$\mathcal{F}(\cos 2t)=\pi[\delta(\omega+2)+\delta(\omega-2)]$$

$$\mathcal{F}(1)=2\pi\delta(\omega)$$

$$\mathcal{F}[f(t)]=\frac{1}{2}[\mathcal{F}(\cos 2t)+\mathcal{F}(1)]=\frac{\pi}{2}\delta(\omega+2)+\frac{\pi}{2}\delta(\omega-2)+\pi\delta(\omega)$$

题 6.设函数 $f(t)$ 的 *Fourier* 变换为 $F(\omega)=\frac{1}{1+\omega^2}$，利用 *Fourier* 变换的性质，求下列函数的 *Fourier* 变换：（1）$2f'(t)-e^{3jt}f(t)$；（2）$[f(t-2)*f(t)]$

解：（1）利用性质2：$\mathcal{F}[f'(t)]=j\omega\mathcal{F}[f(t)]=j\omega\frac{1}{1+\omega^2}$

利用性质1：$\mathcal{F}[e^{3jt}f(t)]=F(\omega-3)=\frac{1}{1+(\omega-3)^2}$

$$\therefore \mathcal{F}[2f'(t)-e^{3jt}f(t)]=2j\omega\frac{1}{1+\omega^2}-\frac{1}{1+(\omega-3)^2}$$

（2）利用性质1：$\mathcal{F}[f(t-2)]=e^{-2j\omega}\mathcal{F}[f(t)]=e^{-2j\omega}\frac{1}{1+\omega^2}$

利用性质5：$\mathcal{F}[f(t-2)*f(t)]=\mathcal{F}[f(t-2)]\cdot\mathcal{F}[f(t)]$

$$=e^{-2j\omega}\frac{1}{1+\omega^2}\cdot\frac{1}{1+\omega^2}=\frac{e^{-2j\omega}}{(1+\omega^2)^2}$$

题 7.设函数 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(\omega)$，求函数 $g(t)=t^2f'(t)$ 的傅里叶变换。

解：利用性质2：

$$\mathcal{F}[f'(t)]=j\omega\mathcal{F}[f(t)]=j\omega F(\omega)$$

$$\mathcal{F}[tf'(t)]=j\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}[f'(t)]=j\frac{d}{d\omega}[j\omega F(\omega)]=-F(\omega)-\omega F'(\omega)$$

$$\mathcal{F}[t^2f'(t)]=j\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}[tf'(t)]=j\frac{d}{d\omega}[-F(\omega)-\omega F'(\omega)]=-2jF'(\omega)-j\omega F''(\omega)$$

课时八 练习题

1. $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-3)e^{-t}dt=$______。

2. $\int_{-\infty}^{+\infty}3\delta(t)dt=$______。

3. 求指数衰减函数 $f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ e^{-\beta t} & t\geq 0\end{cases}$ $(\beta>0)$ 的傅氏变换。

4. 函数 $f(t)=\begin{cases}e^{-2t}, & t>0\\ 0, & t\leq 0\end{cases}$ 的傅氏变换 $F(\omega)=$______。

5. 求矩形函数 $f(t)=\begin{cases}2, & 0<t<\tau\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ 的傅里叶变换。

6. $f(t)=\sin t\cos t$ 的 $Fourier$ 变换是（ ）

$A.\ \frac{\pi}{4}j\left[\delta(\omega+2)-\delta(\omega-2)\right]$　　$B.\ \frac{\pi}{2}j\left[\delta(\omega+2)-\delta(\omega-2)\right]$

$C.\ \pi j\left[\delta(\omega+2)-\delta(\omega-2)\right]$　　$D.\ 2\pi j\left[\delta(\omega+2)-\delta(\omega-2)\right]$

7. 求函数 $f(t)=\delta'(t-2)$ 的频谱。（$Fourier$ 变换）

8. 已知函数 $f(t)$ 的 $Fourier$ 变换为 $F(\omega)$，求函数 $g(t)=f(2t-5)$ 的 $Fourier$ 变换。

9. 已知函数 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(\omega)=\mathcal{F}\left[f(t)\right]$，则 $\mathcal{F}\left[tf(t)\right]=$______。

10. 已知 $f(t)=e^{-t^2}$ 的傅里叶变换为 $F(\omega)=\sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$，求函数 $g(t)=te^{-t^2}$ 和 $h(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$ 的傅里叶变换。

课时九 *Laplace* 拉普拉斯变换

考点	重要程度	占分	题型
1. 定义和性质	★★★	$3\sim8$	选择、填空
2. 应用	★★★★	$6\sim10$	大题

1. 定义和性质

$$F(s)=\mathcal{L}\left[f(t)\right]=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt$$
$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]$$

题 1. 求 $f=e^{kt}$ 的 *Laplace* 变换（k 为实数）

解：$F(s)=\mathcal{L}\left[f(t)\right]=\int_0^{+\infty}e^{kt}e^{-st}dt=\int_0^{+\infty}e^{-(s-k)t}dt=-\dfrac{1}{s-k}e^{-(s-k)t}\Big|_0^{+\infty}=\dfrac{1}{s-k}$

题 2. 求 $f(t)=\sin kt$ 的 *Laplace* 变换（k 为实数）

解：$F(s)=\mathcal{L}\left[f(t)\right]=\int_0^{+\infty}\sin kte^{-st}dt=\dfrac{e^{-st}}{s^2+k^2}(-s\sin kt-k\cos kt)\Big|_0^{+\infty}=\dfrac{k}{s^2+k^2}$

常见 *Laplace* 拉普拉斯变换对

$1\xrightarrow{\mathcal{L}}\dfrac{1}{s}$

$e^{at}\xrightarrow{\mathcal{L}}\dfrac{1}{s-a}$

$\cos at\xrightarrow{\mathcal{L}}\dfrac{s}{s^2+a^2}$

$\sin at\xrightarrow{\mathcal{L}}\dfrac{a}{s^2+a^2}$

$t^n,(n>-1)\xrightarrow{\mathcal{L}}\dfrac{n!}{s^{n+1}}$

常用 *Laplace* 拉普拉斯变换的性质 $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$

1.$\mathcal{L}\left[f(t-a)\right]=e^{-as}F(s)$; $\quad\mathcal{L}\left[e^{at}f(t)\right]=F(s-a)$

2.$\mathcal{L}\left[f'(t)\right]=sF(s)-f(0)$; $\quad\mathcal{L}\left[f''(t)\right]=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$

3.$\mathcal{L}\left[tf(t)\right]=-F'(s)$

4.$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right]=\dfrac{1}{s}F(s)$; $\quad\mathcal{L}\left[\dfrac{1}{t}f(t)\right]=\int_s^{+\infty}F(s)ds$

5.$\mathcal{L}\left[f(t)*g(t)\right]=\mathcal{L}\left[f(t)\right]\cdot\mathcal{L}\left[g(t)\right]$

题 3. 求 $t^3+te^{-t}+e^{2t}\cos 5t$ 的拉普拉斯变换。

解：$\mathcal{L}\left(t^3\right)=\dfrac{3!}{s^{3+1}}=\dfrac{6}{s^4}$

$$\mathcal{L}(t)=\frac{1}{s^{1+1}}=\frac{1}{s^2}\qquad \mathcal{L}\left(te^{-t}\right)=\frac{1}{[s-(-1)]^2}=\frac{1}{(s+1)^2}$$

$$\mathcal{L}(\cos 5t)=\frac{s}{s^2+5^2}\qquad \mathcal{L}\left(e^{2t}\cos 5t\right)=\frac{s-2}{(s-2)^2+5^2}$$

$$F(s)=\mathcal{L}\left(t^3+te^{-t}+e^{2t}\cos 5t\right)=\frac{6}{s^4}+\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{s-2}{(s-2)^2+5^2}$$

题 4. 利用拉普拉斯变换求积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos 2t}{t}e^{-2t}dt$

解：求 $\dfrac{1-\cos 2t}{t}$ 的 *Laplace* 变换 $F(s)$

$$F(s)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}(1)=\frac{1}{s}\qquad \mathcal{L}(\cos 2t)=\frac{s}{s^2+4}$$

利用性质 4 $\mathcal{L}\left(\dfrac{1-\cos 2t}{t}\right)=\displaystyle\int_s^{+\infty}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}\right)ds=\left[\ln s-\frac{1}{2}\ln\left(s^2+4\right)\right]\Bigg|_s^{+\infty}$

$$=\ln\frac{s}{\sqrt{s^2+4}}\Bigg|_s^{+\infty}=-\ln\frac{s}{\sqrt{s^2+4}}$$

原式 $=F(2)=-\ln\dfrac{2}{\sqrt{2^2+4}}=-\ln\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}\ln 2$

题 5. 已知 $f(t)$ 的 *Laplace* 变换 $F(s)=\dfrac{1}{(s-1)^4}$，则 $f(t)=$______。

解：$\because \mathcal{L}\left(t^3\right)=\dfrac{3!}{s^4}=\dfrac{6}{s^4}\qquad \therefore \dfrac{1}{6}\mathcal{L}\left(t^3\right)=\dfrac{1}{s^4}\qquad \mathcal{L}\left(\dfrac{t^3}{6}\right)=\dfrac{1}{s^4}$

利用性质 1：$\mathcal{L}\left(e^t\dfrac{t^3}{6}\right)=\dfrac{1}{(s-1)^4}$

$$\therefore f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^4}\right]=\frac{t^3}{6}e^t$$

题 6. 求下列函数的拉普拉斯逆变换

(1) $\dfrac{1}{s(s-1)}$ (2) $\dfrac{2s+5}{s^2+4s+13}$

解：(1) $\dfrac{1}{s(s-1)}=\dfrac{1}{s-1}-\dfrac{1}{s}$

$\because \mathcal{L}\left(e^t\right)=\dfrac{1}{s-1}$ $\quad \mathcal{L}(1)=\dfrac{1}{s}$

$\therefore f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s-1}-\dfrac{1}{s}\right)=e^t-1$

(2) $\dfrac{2s+5}{s^2+4s+13}=\dfrac{2(s+2)+1}{(s+2)^2+9}=\dfrac{2(s+2)}{(s+2)^2+9}+\dfrac{1}{(s+2)^2+9}$

利用性质 1

$\because \mathcal{L}(\cos 3t)=\dfrac{s}{s^2+9}$ $\quad \mathcal{L}(\sin 3t)=\dfrac{3}{s^2+9}$

$\therefore \mathcal{L}\left(e^{-2t}\cos 3t\right)=\dfrac{s+2}{(s+2)^2+9}$ $\quad \mathcal{L}\left(e^{-2t}\sin 3t\right)=\dfrac{3}{(s+2)^2+9}$

$\therefore \mathcal{L}\left(2e^{-2t}\cos 3t\right)=\dfrac{2(s+2)}{(s+2)^2+9}$ $\quad \mathcal{L}\left(\dfrac{1}{3}e^{-2t}\sin 3t\right)=\dfrac{1}{(s+2)^2+9}$

$\therefore f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{2s+5}{s^2+4s+13}\right)=2e^{-2t}\cos 3t+\dfrac{1}{3}e^{-2t}\sin 3t$

2. 应用

题 1. 用拉普拉斯变换求初值问题 $\begin{cases} y''-2y'+y=1 \\ y(0)=0 \quad y'(0)=1 \end{cases}$

解：对两边取 *Laplace* 变换，利用性质 2

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-2\left[sY(s)-y(0)\right]+Y(s)=\frac{1}{s}$$

代入 $y(0)=0, y'(0)=1$ 得 $\qquad s^2Y(s)-1-2sY(s)+Y(s)=\frac{1}{s}$

整理得 $(s^2-2s+1)Y(s)=\frac{1}{s}+1 \qquad Y(s)=\frac{1+s}{(s-1)^2 s}$

设 $Y(s)=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{(s-1)^2}+\frac{C}{s}$

$$A=\mathbf{Res}\left[Y(s),1\right]=\lim_{s\to1}\left[(s-1)^2\frac{1+s}{(s-1)^2 s}\right]'=\lim_{s\to1}-\frac{1}{s^2}=-1$$

$$B=\mathbf{Res}\left[Y(s)\cdot(s-1),1\right]=\lim_{s\to1}\frac{1+s}{(s-1)^2 s}(s-1)^2=\lim_{s\to1}\frac{1+s}{s}=2$$

$$C=\mathbf{Res}\left[Y(s),0\right]=\lim_{s\to0}s\frac{1+s}{(s-1)^2 s}=\lim_{s\to0}\frac{1+s}{(s-1)^2}=1$$

$\therefore Y(s)=\frac{-1}{s-1}+\frac{2}{(s-1)^2}+\frac{1}{s} \qquad$ 求 *Laplace* 逆变换 $y(t)=-e^t+2te^t+1$

题 2. 用拉氏变换解方程 $y(t)=e^t-\int_0^t y(t)dt$

解：两边取 *Laplace* 变换，利用性质 4 $\quad Y(s)=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}Y(s)$

整理得 $Y(s)=\frac{s}{(s-1)(s+1)} \qquad$ 设 $Y(s)=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+1}$

$$A=\mathbf{Res}\left[Y(s),1\right]=\lim_{s\to1}(s-1)\frac{s}{(s-1)(s+1)}=\frac{1}{2}$$

$$B=\mathbf{Res}\left[Y(s),-1\right]=\lim_{s\to-1}(s+1)\frac{s}{(s-1)(s+1)}=\frac{1}{2}$$

$\therefore Y(s)=\frac{\frac{1}{2}}{s-1}+\frac{\frac{1}{2}}{s+1} \qquad$ 求 *Laplace* 逆变换 $y(t)=\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{2}e^{-t}$

题 3. 利用 *Laplace* 变换求解方程 $y(t)=\sin t-2\int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)d\tau$

解：方程化简为 $y(t)=\sin t-2y(t)*\cos t$

两边取 *Laplace* 变换得：$Y(s)=\dfrac{1}{s^2+1}-2Y(s)\cdot\dfrac{s}{s^2+1}$

整理得 $Y(s)=\dfrac{1}{s^2+1+2s}=\dfrac{1}{(s+1)^2}$

求 *Laplace* 逆变换得 $y(t)=te^{-t}$

卷积：

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)\cdot g(t-\tau)d\tau$$
$$=\int_0^t f(t-\tau)\cdot g(\tau)d\tau$$

课时九　练习题

1. 利用拉普拉斯变换的定义求函数 $f(t)=\cos(3t)$ 的拉普拉斯变换 $F(s)$。

2. 已知 $f(t)=t^2$，则 $f(t)$ 的 *Laplace* 变换为（　）。

$A.\ \dfrac{3}{s^3}$　　$B.\ \dfrac{2}{s^3}$　　$C.\ \dfrac{6}{s^3}$　　$D.\ \dfrac{6}{s^4}$

3. 求函数 $f(t)=e^{-3t}\cos 4t$ 的拉普拉斯变换。

4. 求函数 $f(t)=t\sin 3t$ 的 *Laplace* 变换，并由此计算积分 $\int_0^{+\infty} te^{-3t}\sin 3t dt$。

5. 积分 $\int_0^{+\infty} te^{-2t}dt$ 的值为________。

6. 求 $F(s)=\dfrac{1}{s^2(s-1)}$ 的拉氏逆变换。

8. 用 *Laplace* 变换求解微分方程初值问题 $\begin{cases} y''+2y'-3y=e^{-t} \\ y(0)=0 \quad y'(0)=1 \end{cases}$。

9.用拉普拉斯变换解常微分初值问题：$y''-4y'+3y=e^{-t}$，$y(0)=y'(0)=1$。

10.用 *Laplace* 变换求方程 $y''-y=\cos t+\sin t$ 满足初始条件 $y|_{t=0}=0$，$y'|_{t=0}=0$ 的特解。

11.用拉普拉斯变换求解微分方程 $f(t)=at+\int_0^t \sin(t-\tau)f(\tau)d\tau$。

12.求积分方程的解：$y(t)+\int_0^t y(t-\tau)e^{\tau}d\tau=2t-3$。

课时十　映射

考点	重要程度	占分	题型
1. 映射	★	3～5	选择、填空
2. 分式线性映射	★★	3～10	选择、填空、大题

1. 映射

题 1. 曲线 $x^2+y^2=4$ 在映射 $\omega=\frac{1}{z}$ 下所形成的图形为（　　）

$A.$ 圆　　$B.$ 直线　　$C.$ 射线　　$D.$ 圆弧

解：令 $z=x+iy,\ \omega=u+iv$, 则 $\omega=\frac{1}{z}$ 相当于

$$u+iv=\frac{1}{x+iy}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{iy}{x^2+y^2}$$

$$\begin{cases} u=\dfrac{x}{x^2+y^2}=\dfrac{x}{4} \\ v=\dfrac{-y}{x^2+y^2}=\dfrac{-y}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4u \\ y=-4v \end{cases}$$

当 $x^2+y^2=4$ 时，$(4u)^2+(-4v)^2=4$　　即 $u^2+v^2=\frac{1}{4}$

答案：A

题 2. 映射 $\omega=z^2+z$ 在 $z_0=-\frac{1}{2}+i$ 处的伸缩率为________，转动角为________。

解：$\omega'(z_0)=(2z+1)\big|_{z_0=-\frac{1}{2}+i}=2i$

伸缩率：$|\omega'(z_0)|=|2i|=2$

转动角：$\arg\omega'(z_0)=\frac{\pi}{2}$

伸缩率：$|\omega'(z_0)|$

转动角：$\arg\omega'(z_0)$

2. 分式线性映射

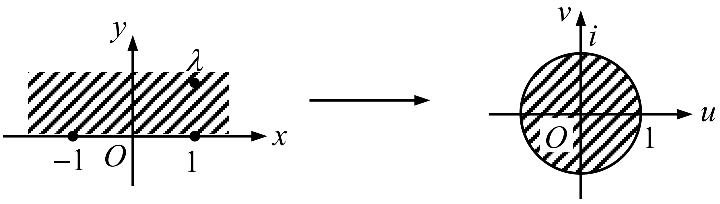
1.分式线性映射 $\omega=\frac{az+b}{cz+d}$，$ad-bc\neq 0$

2.唯一分式线性映射 ω

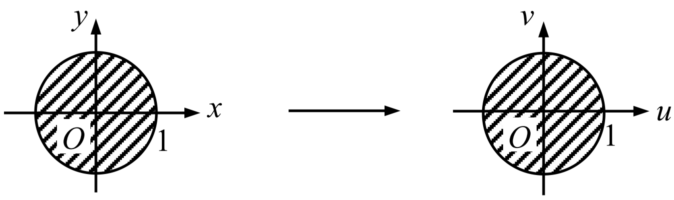
给定 ω 平面 3 个点 $\omega_1,\omega_2,\omega_3$, z 平面 3 个点 z_1,z_2,z_3, 则 $\frac{\omega-\omega_1}{\omega-\omega_2}\cdot\frac{\omega_3-\omega_2}{\omega_3-\omega_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$

3. 四个常见的映射

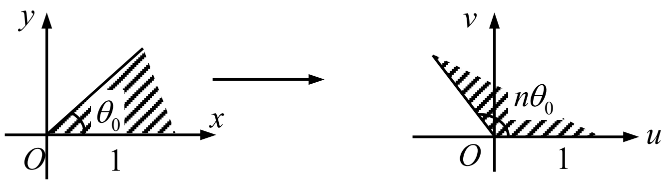
上半平面映射到单位圆 $\omega=e^{i\theta}(\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}})\quad(\mathrm{Im}(\lambda)>0)$



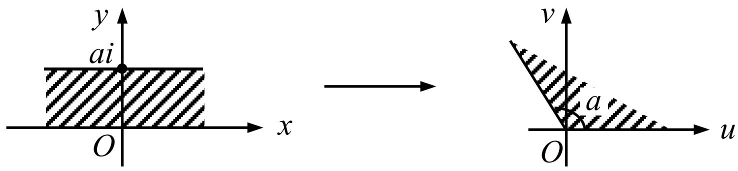
单位圆映射到单位圆 $\omega=e^{i\theta}(\frac{z-a}{1-\bar{\alpha}z})\quad(|\alpha|<1)$



角形域映射到角形域 $\omega=z^n$



带形域映射到角形域 $\omega=e^z$



题 1. 求将上半平面变换到单位圆的分式线性映射 $\omega=f(z)$，且满足 $f(i)=0,\ \arg f'(i)=\frac{\pi}{2}$。

解：设 $\omega=f(z)=e^{i\theta}\frac{z-i}{z+i}$

则 $f'(i)=e^{i\theta}\left.\frac{(z+i)-(z-i)}{(z+i)^2}\right|_{z=i}=-\frac{1}{2}ie^{i\theta}=\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}i}e^{i\theta}=\frac{1}{2}e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$

$\arg f'(i)=\theta-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\qquad\Rightarrow\theta=\pi\qquad\omega=f(z)=-\frac{z-i}{z+i}$

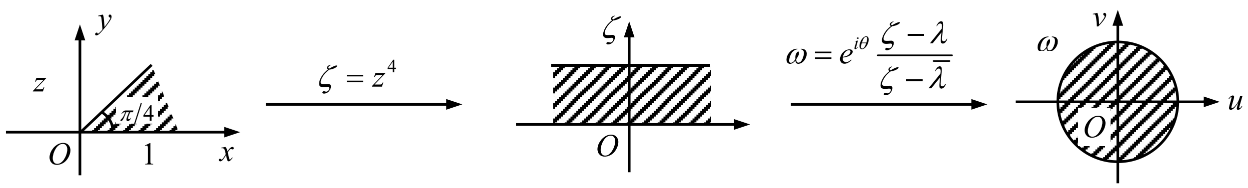
题 2. 求把单位圆映射成单位圆的分式线性映射，并满足条件：$f\left(\frac{1}{2}\right)=0,\arg f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$。

解：设 $\omega=f(z)=e^{i\theta}\dfrac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z}$，

则 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=e^{i\theta}\left[\left(1-\frac{1}{2}z\right)+\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{2}\right)\right]\Big/\left(1-\frac{1}{2}z\right)^2=\frac{4}{3}e^{i\theta}$

$\arg f'(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}$，故 $\omega=e^{i\frac{\pi}{2}}\dfrac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z}=i\dfrac{2z-1}{2-z}$

题 3. 求把平面的角形域 $0<\arg z<\frac{\pi}{4}$ 映射成单位圆域 $|\omega|<1$ 的一个映射 $\omega=f(z)$，如下图所示，并满足 $f\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)=0,f(0)=i$。



解：首先将 $0<\arg z<\frac{\pi}{4}$ 的角形域映射为上半平面，设 $\zeta=z^4$

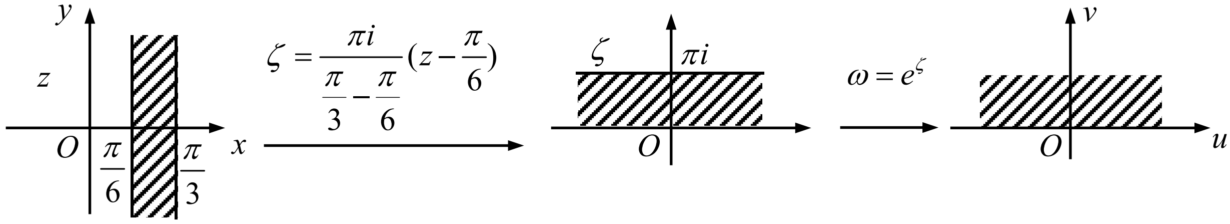
然后将上半平面映射为单位圆内，设 $\omega=e^{i\theta}\dfrac{\zeta-\lambda}{\zeta-\bar{\lambda}}$

则 $\omega=e^{i\theta}\dfrac{z^4-\lambda}{z^4-\bar{\lambda}}$

当 $z=e^{i\frac{\pi}{8}}$ 时，$f(z)=f\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)=e^{i\theta}\dfrac{i-\lambda}{i-\bar{\lambda}}=0$，可得 $\lambda=i$，$\omega=e^{i\theta}\dfrac{z^4-i}{z^4+i}$

当 $z=0$ 时 $f(z)=f(0)=e^{i\theta}\dfrac{0-i}{0+i}=-e^{i\theta}=i$，可得 $e^{i\theta}=-i,\omega=-i\dfrac{z^4-i}{z^4+i}$

题 4. 求一个将带形域$\frac{\pi}{6}<\mathrm{Re}(z)<\frac{\pi}{3}$映射成上半平面$\mathrm{Im}(\omega)>0$的共形映射。



解：首先将带形域$\frac{\pi}{6}<\mathrm{Re}(z)<\frac{\pi}{3}$映射为带形域$0<\mathrm{Im}(\zeta)<\pi$设$\zeta=\frac{\pi i}{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}}(z-\frac{\pi}{6})$，

然后将带形域映射成上半平面，设$\omega=e^{\zeta}$

则$\omega=e^{\frac{\pi i}{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}}(z-\frac{\pi}{6})}=e^{i(6z-\pi)}$

课时十　练习题

1. $\omega=\frac{i}{z}$将z平面上的直线$x=2$映射成ω平面上的曲线为（　）

A. $2(u^2+v^2)=v$　　B. $v^2=2(1-u)$　　C. $u^2=2(1-v)$　　D. $u^2+v^2=\frac{1}{3}u$

2. 映射$\omega=3z^2$在$z_0=i$处的伸缩率为________。

3. 在映射$\omega=2z^2+4z$下，曲线C在点$z_0=i$处的伸缩率是_______，旋转角是_______。

4. 称______构成的映射为分式线性映射。

5. 求把上半平面$\mathrm{Im}(z)>0$映射成单位圆$|\omega|<1$，且满足$\omega(2i)=0$，$\arg\omega'(2i)=-\frac{\pi}{2}$的分式线性映射。

6. 求将单位圆映射成单位圆且满足条件$\omega\left(\frac{1}{2}\right)=0$，$\omega'\left(\frac{1}{2}\right)>0$的分式线性映射。

7. 求在带型域$1<\mathrm{Re}(z)<2$的一个映射，映射为单位圆$|\omega|<1$。