$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=R_1}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\quad(n=1,2,\cdots),$$

估计右端的模得到

$$|f^{(n)}(z_0)|\leqslant\frac{n!}{2\pi}\oint_{|z-z_0|=R_1}\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}}|dz|\leqslant\frac{n!M}{R_1^n}.$$

令 $R_1\to R$ 便得

$$|f^{(n)}(z_0)|\leqslant\frac{n!M}{R^n}\quad(n=1,2,\cdots).$$

从柯西不等式可以推出另一重要的定理.

定理 3.11（刘维尔(Liouville)定理） 设函数 $f(z)$在全平面上为解析且有界，则 $f(z)$为一常数.

证 设 z_0 是平面上任意一点，对任意正数 R，$f(z)$在$|z-z_0|<R$内为解析. 又 $f(z)$在全平面有界，设$|f(z)|\leqslant M$，由柯西不等式得到

$$|f'(z_0)|\leqslant\frac{M}{R},$$

令 $R\to\infty$，即得 $f'(z_0)=0$. 由 z_0 的任意性，知在全平面上有$f'(z)\equiv 0$. 故 $f(z)$为一常数.

本章小结

本章研究了解析函数的积分理论. 在引入复变函数积分概念与积分基本性质的基础上，对解析函数积分及运算性质等一系列特性进行了讨论. 给出了柯西积分定理，从而揭示了区域与沿其内任一闭曲线积分的联系，进而得到柯西积分公式，使得闭区域上一点的函数值与其边界上的积分相联系，从而揭示了解析函数的一些内在联系.

从柯西积分公式又得出一系列推论，如平均值公式、最大模原理等，每一推论都有独立的应用和理论价值. 其中最大模原理就是复变函数论一个很重要而且具有实用价值的原理，它在流

扫描全能王 创建

而稳定流动在无源无旋的区域内流速的最大值不能在区域内达到，而只能在边界上达到，除非它是等速流动.

从本章的讨论可知高阶导数是柯西积分公式的发展，它是一个十分重要的结果.它证明了解析函数的导数仍是解析函数，它显示了解析函数的导数可用函数本身的某种积分来表达，这样就有可能从函数的积分性质推出导数的积分性质.

在对本章理论体系作系统分析的同时，必须注意与积分理论密切结合的积分计算问题.除了将复积分化为二元函数的曲线积分、或利用积分曲线的方程进行实际计算外，在绝大多数情况下，都是应用某些定理、公式来计算复积分的.只有弄清楚了在各种情况下：何时用单连通区域的柯西定理？何时用多连通区域的柯西定理？柯西积分公式适用于计算怎样的积分？高阶导数公式又适用于计算怎样的积分？怎样选择最方便的方法计算可用多种方法计算的积分？等等这些问题，我们才能真正掌握计算积分的技能.

思考题

3.1 复变函数积分和实平面曲线积分有什么不同？又有什么联系？$\int_C dz$ 与 $\int_C ds$ 的含义和结果是否相同？$\int_C |dz|$ 与 $\int_C ds$ 的含义和结果是否相同(其中 ds 是曲线 C 的弧元素)？

3.2 柯西定理的条件和结论是什么？复合闭路定理的条件和结论又是什么？后者是如何证明的？

3.3 柯西积分定理与柯西积分公式有什么联系？

习题三

3.1 计算积分 $\int_0^{1+i}[(x-y)+ix^2]dz$. 积分路径为(1) 自原点至 $1+i$ 的直线段；(2) 自原点沿实轴至 1，再由 1 铅直向上至 $1+i$；(3) 自原点沿虚轴至 i，再由 i 沿水平方向向右至 $1+i$.

扫描全能王 创建

3.2 计算积分$\oint_C \frac{\bar{z}}{|z|}dz$的值，其中$C$为(1) $|z|=2$；(2) $|z|=4$.

3.3 求证：$\left|\int_C \frac{dz}{z^2}\right| \leqslant \frac{\pi}{4}$，其中$C$是从$1-i$到$1$的直线段.

3.4 试用观察法确定下列积分的值，并说明理由. C为$|z|=1$.

(1) $\oint_C \frac{1}{z^2+4z+4}dz$；　(2) $\oint_C \frac{1}{\cos z}dz$；　(3) $\oint_C \frac{1}{z-\frac{1}{2}}dz$.

3.5 求积分$\int_C \frac{e^z}{z}dz$的值，其中C为由正向圆周$|z|=2$与负向圆周$|z|=1$所组成.

3.6 计算$\oint_C \frac{1}{z^2-z}dz$，其中$C$为圆周$|z|=2$.

3.7 计算$\oint_{|z|=3} \frac{1}{(z-i)(z+2)}dz$.

3.8 计算下列积分值：

(1) $\int_0^{\pi i} \sin z dz$；　(2) $\int_1^{1+i} ze^z dz$；　(3) $\int_0^i (3e^z+2z)dz$.

3.9 计算$\int_C \frac{1}{z^2}dz$，其中C为圆周$|z+i|=2$的右半周，走向为从$-3i$到i.

3.10 计算下列积分：

(1) $\oint_{|z-2|=1} \frac{e^z}{z-2}dz$；　(2) $\oint_{|z|=2} \frac{2z^2-z+1}{z-1}dz$；

(3) $\oint_{|z-i|=1} \frac{dz}{z^2-i}$；　(4) $\oint_{|z|=r} \frac{dz}{(z-1)^n}$　$(r \neq 1)$.

3.11 计算$I=\oint_C \frac{z dz}{(2z+1)(z-2)}$，其中$C$是(1) $|z|=1$；(2) $|z-2|=1$；(3) $|z-1|=\frac{1}{2}$；(4) $|z|=3$.

3.12 若$f(z)$是区域G内的非常数解析函数，且$f(z)$在G内无零点，则$f(z)$不能在G内取到它的最小模[提示：考虑函数$g(z)=\frac{1}{f(z)}$，利用最大模原理.]

3.13 计算下列积分：

(1) $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{100}}dz$；

(2) $\oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}dz$；

扫描全能王 创建

(3) $\oint_{C=C_1+C_2^-}\frac{\cos z}{z^3}dz$，其中 $C_1:|z|=2$，$C_2:|z|=3$．

3.14 设 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant 1$ 上解析，且在 $|z|=1$ 上有 $|f(z)-z|<|z|$，试证：$\left|f'\left(\frac{1}{2}\right)\right|\leqslant 8$.

3.15 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在区域 D 内处处解析，C 为 D 内的任何一条简单闭曲线，它的内部全含于 D. 如果 $f(z)=g(z)$ 在 C 上所有的点处成立，试证：在 C 内所有的点处 $f(z)=g(z)$ 也成立.

扫描全能王 创建