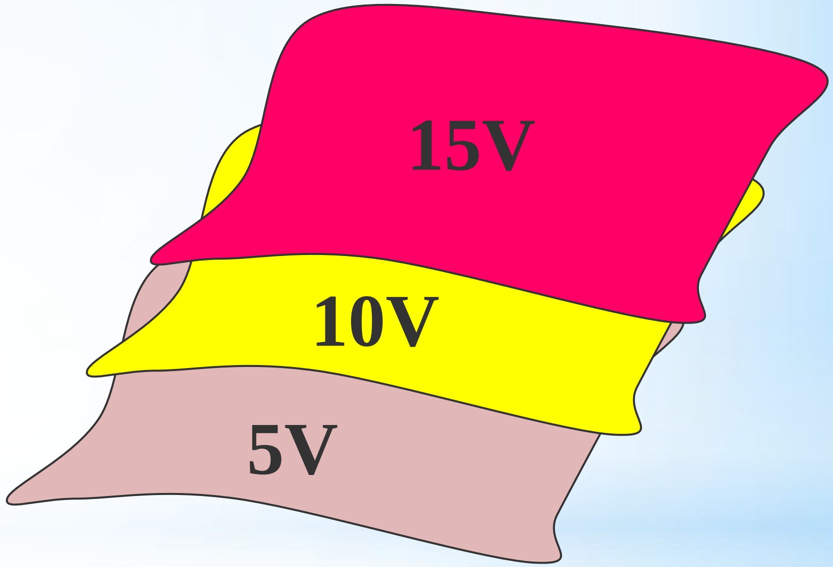
6 Equipotential Surface & Potential Gradient
等势面　电场强度与电势梯度的关系

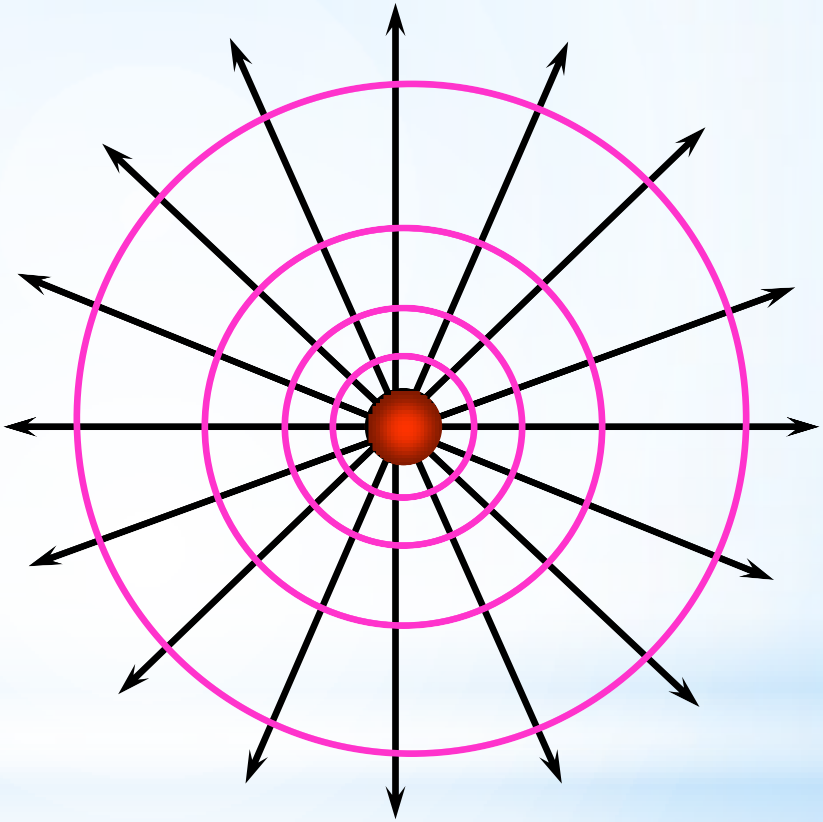
一 Equipotential Surface　等势面

由电势相等的点组成的面叫等势面，$U(x,y,z)=C$，当常量C取等间隔数值时可以得到一系列的等势面。

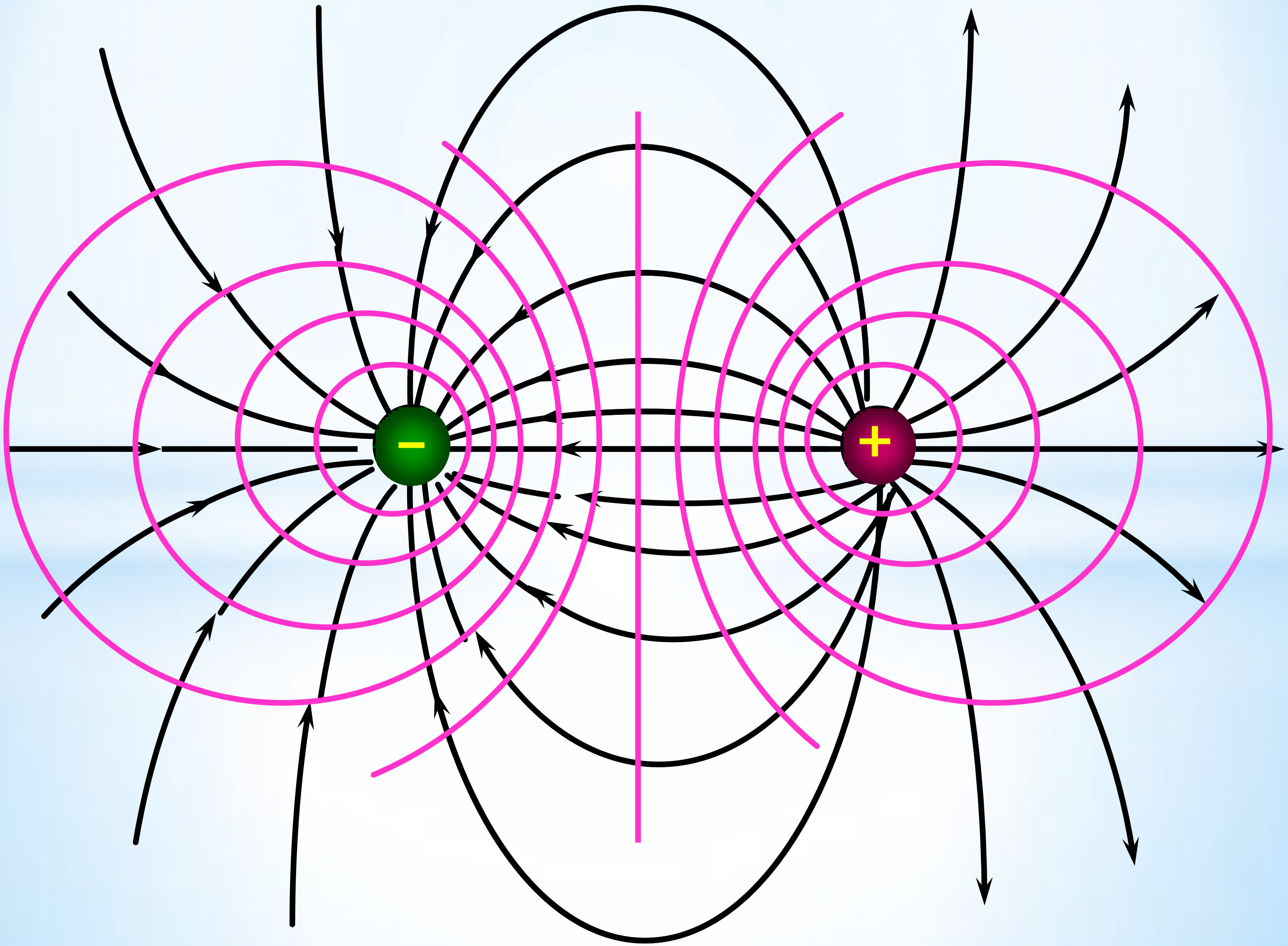


1 典型等势面

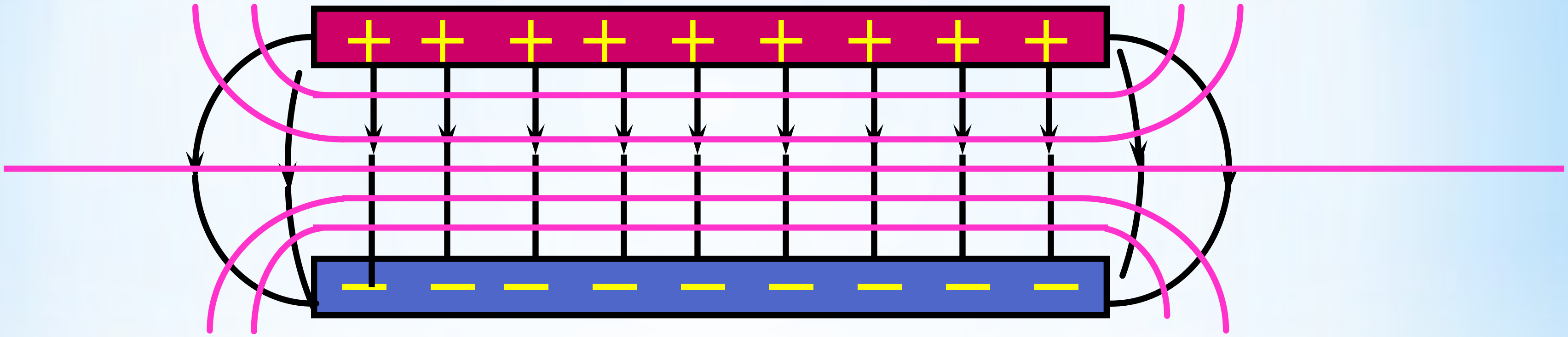
点电荷的等势面



电偶极子的等势面



电平行板电容器电场的等势面



2 等势面与电场线的关系:

- 等势面与电场线处处正交。
- 电场线指向电势降低的方向。
- 等势面和电场线密集处场强量值大，稀疏处场强量值小。

证明：等势面与电场线处处正交

q_0在等势面上移动，$\vec{E}$ 与 $\mathrm{d}\vec{l}$成 θ 角。

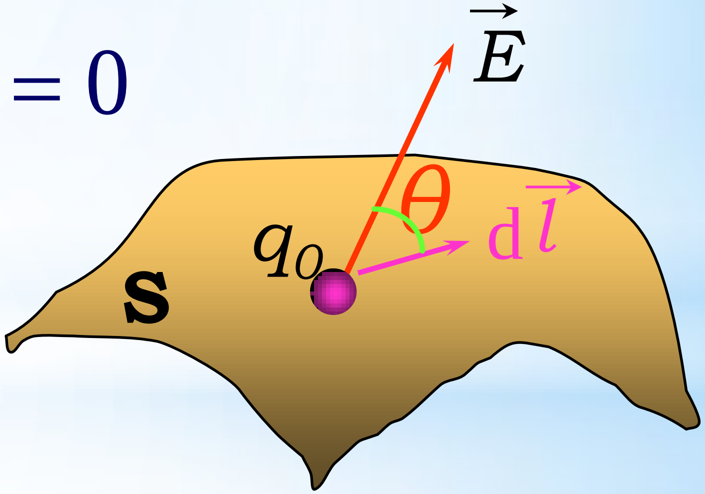
在等势面上移动不作功

$$\mathrm{d}W = q_0\vec{\mathbf{E}}\cdot\mathrm{d}\vec{\mathbf{l}} = q_0 E\cdot\mathrm{d}l\cdot\cos\theta = 0$$

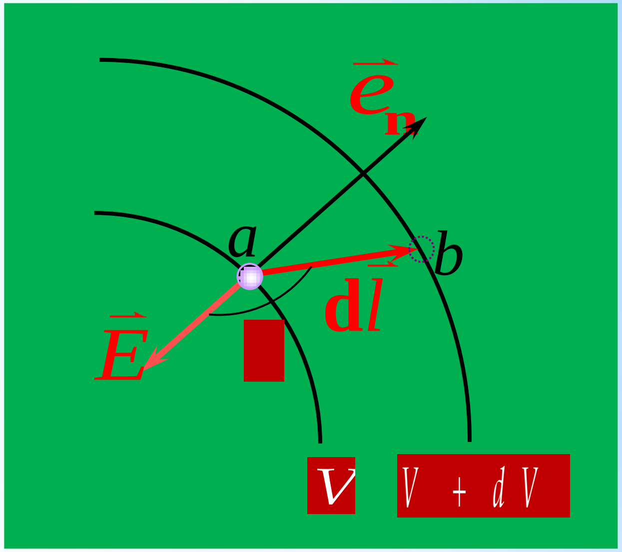
$q_0 \neq 0 \qquad E \neq 0 \qquad \mathrm{d}l \neq 0$

$\therefore \qquad \cos\theta = 0$

即 $\vec{E} \perp \mathrm{d}\vec{l}$



二 The relation between electrical field and potential 场强与电势的微分关系



$$\mathrm{d}W = q_0(U_a - U_b)$$

$$= -q_0\,\mathrm{d}U \quad = q_0 E\cos\theta\,\mathrm{d}l$$

$$E\cos\theta = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}l}$$

$$\therefore E_l = -\frac{\partial U}{\partial l}$$

结论：电场中给定点的电场强度沿某一方向的分量，等于这一点电势沿该方向变化率的负值。

If the displacement $d\vec{\ell}$ is in the x direction, $d\ell = dx$ and

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -E\cos\theta = -E_x \quad \Longrightarrow \quad E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

Likewise(同样地）:

$$E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

In vector notation(记号）, we have

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) = -gradU = -\nabla U$$

梯度算子: $$\mathrm{grad} = \nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) = -gradU = -\nabla U$$

Thus, if we know U for all points in the electric field, we can find the components of electric field at any point by taking partial derivatives.

上式表明电场强度等于电势梯度的负值 ，为电势与电场的微分关系。

为我们提供了一种计算场强的方法:

已知$U=U(x,y,z)$时，用微分法求 E。

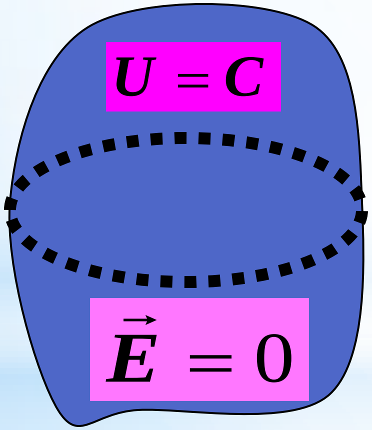
$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) = -gradU = -\nabla U$$

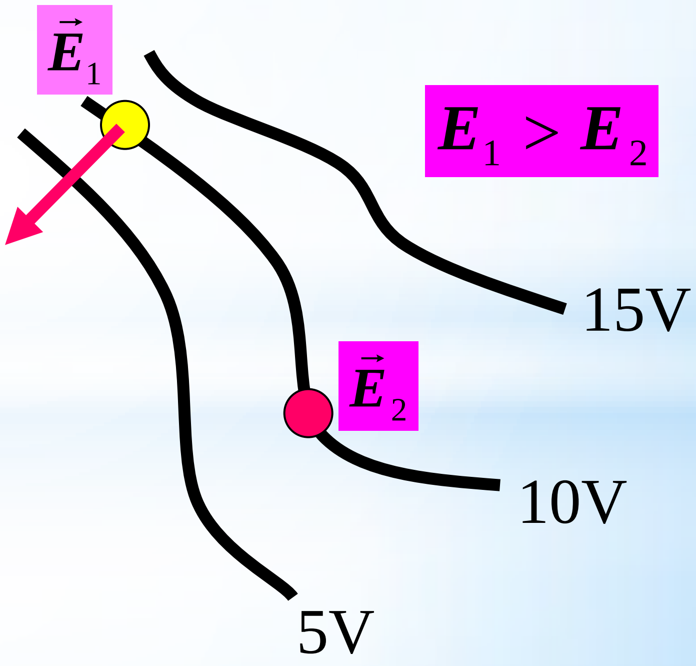
Note:

1) 电势不变的空间，电场等于零；

2)“–”号表示场强指向电势降落的方向；

3）等势面密处电场强，等势面疏处电场弱；





三 场强与电势梯度的关系的应用

电势叠加为标量叠加，故可先计算电势，再应用场强与电势梯度的关系计算场强。

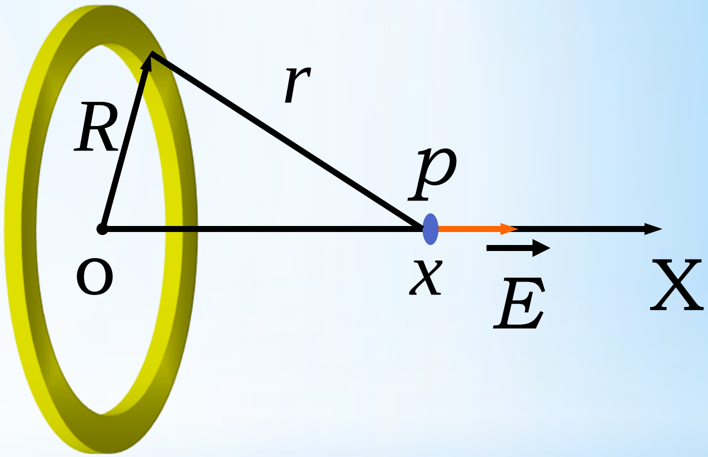
例1 均匀带电圆环轴线上的电场

例2 电偶极子较远处的电场

例3 均匀带电圆盘轴线上的电场

【例1】计算均匀带电圆环轴线上的电场。

解：*P*点电势



$$U=\int\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r}=\int\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{(R^2+x^2)^{1/2}}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{1/2}}$$

*P*点电场

$$E=E_x=-\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}}$$

与用叠加原理得到的结果一致。

例2　计算电偶极子较远处任一点的电场强度。

解： 在直角坐标系中先写出电势的表达式，

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_+}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{r_-}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_- - r_+}{r_- r_+}$$

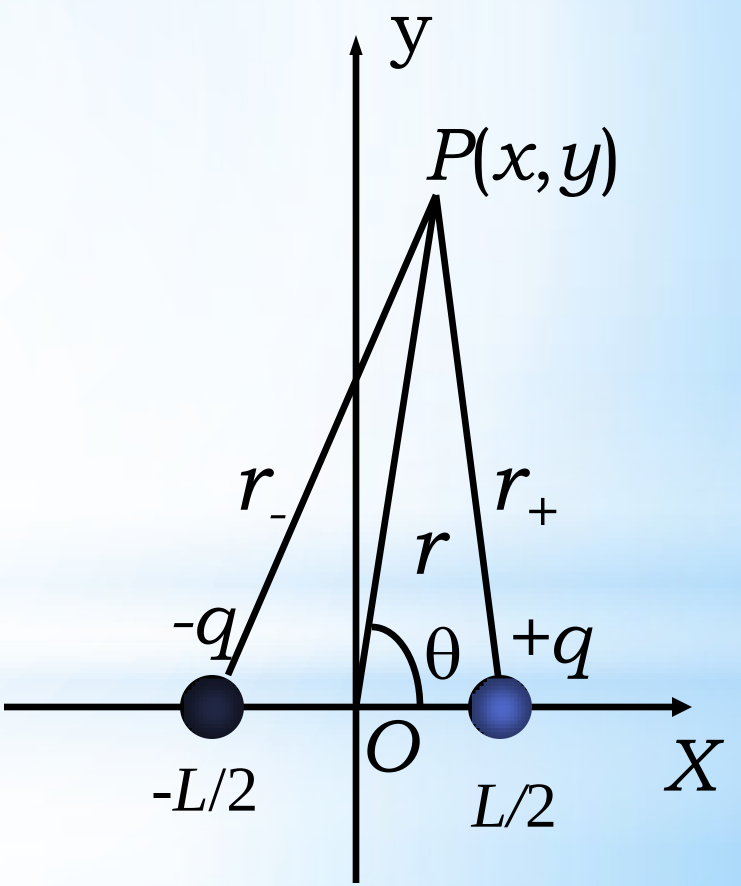
$$\approx\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{L\cos\theta}{r^2}=\frac{P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$=\frac{Px}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$E_x=-\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{P(2x^2-y^2)}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)^{5/2}}$$

$$E_y=-\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{3Pxy}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)^{5/2}}$$

$$\vec{E}=\vec{E}_x+\vec{E}_y$$



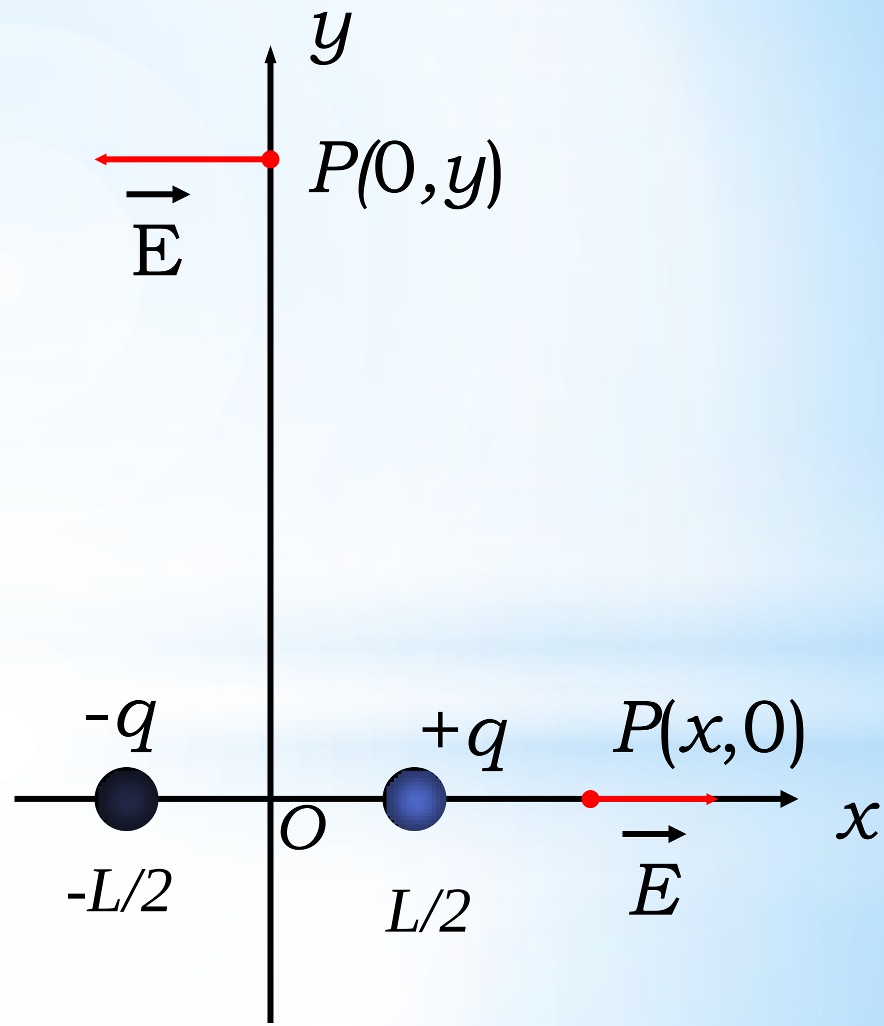
讨论：

1. 在X轴上，y=0，则

$$E_x=\frac{P}{2\pi\varepsilon_0 x^3}\qquad E_y=0$$

2. 在Y轴上，x=0，则

$$E_x=-\frac{P}{4\pi\varepsilon_0 y^3}\qquad E_y=0$$



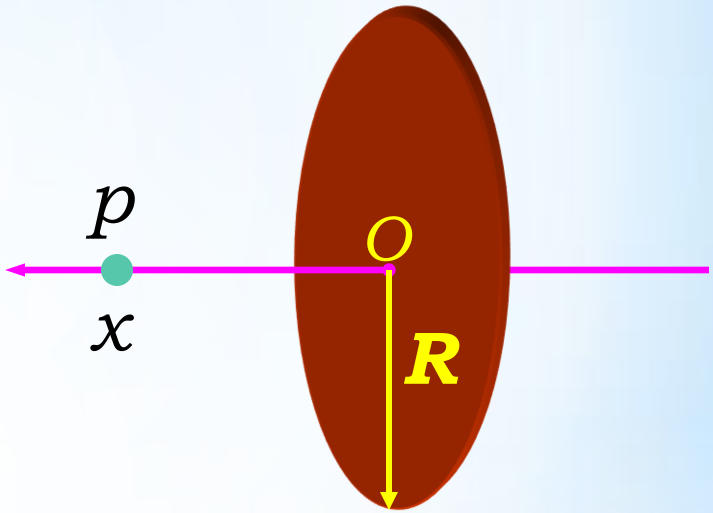
与用叠加原理得到的结果一致。

例3 计算均匀带电圆盘轴线上的电场。

解： $$U=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R^2+x^2}-x)$$

$$E=E_x=-\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}})$$



与用叠加原理得到的结果一致。

讨论： 当R→∞时， $E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

即无穷大均匀带电平面的电场。

作业：29