第二章　刚体的转动

习 题 课

1. 刚体定轴转动的角量描述：

角位移

$$d\theta$$

角速度

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

续表

质点的直线运动(刚体的平动)	刚体的定轴转动
匀变速直线运动	匀变速转动
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \beta t$
$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$	$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \beta t^2$
$v^2 - v_0^2 = 2as$	$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\beta\theta$

角加速度

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

角量和线量的转换：

$$s = \theta r \qquad v = \omega r$$

$$a_t = \beta r \qquad a_n = \omega^2 r$$

2.刚体定轴转动的角动量: $L_z = I_z \omega$

I_z 为刚体对 Oz 轴的**转动惯量:** $I_z = \sum_i m_i r_i^2$ $\quad I = \int r^2 \mathrm{d}m$

3. 刚体对定轴的角动量定理:

$$M_z = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(I\omega)}{\mathrm{d}t} \qquad \int_{t_1}^{t_2} M_z \mathrm{d}t = L_2 - L_1$$

4. 刚体对定轴转动定律: $M = I\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$ 或 $M = I\beta$

5. 刚体对定轴的角动量守恒定律:

当 $M_z = 0$ 时 $\quad L_z = I\omega =$ 恒量

6.力矩对刚体所作的功：$W=\int_{o}^{\theta}M\mathrm{d}\theta$

7.刚体的转动动能：$E_k=\frac{1}{2}I\omega^2$

8. 刚体绕定轴转动的动能定理：

$$W=\int_{\omega_1}^{\omega_2}I\omega\mathrm{d}\omega \quad =\frac{1}{2}I\omega_2^2-\frac{1}{2}I\omega_1^2$$

9.刚体的重力势能：$E_P=Mgh_C$

10.机械能守恒定律：$\frac{1}{2}I\omega^2+\text{势能}=constant$

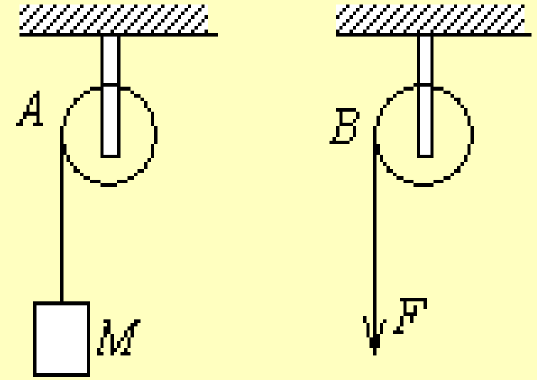
直线运动与定轴转动规律对照

质点的直线运动	刚体的定轴转动
$v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$	$\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ $\beta=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$
$P=mv$ $E_K=\dfrac{1}{2}mv^2$	$L=I\omega$ $E_K=\dfrac{1}{2}I\omega^2$
F m	M I
$\mathrm{d}A=F\,\mathrm{d}x$ $F\,\mathrm{d}t$	$\mathrm{d}A=M\,\mathrm{d}\theta$ $M\,\mathrm{d}t$
$F=ma$	$M=I\beta$
$\int F\,\mathrm{d}t=P-P_0$	$\int M\,\mathrm{d}t=L-L_0$
$\int F\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}mv^2-\dfrac{1}{2}mv_0^2$	$\int M\,\mathrm{d}\theta=\dfrac{1}{2}I\omega^2-\dfrac{1}{2}I\omega_0^2$

单选题 1分

设置

1.如图所示，A、B为两个相同的绕着轻绳的定滑轮．A滑轮挂一质量为M的物体，B滑轮受拉力F，而且$F = Mg$．设A、B两滑轮的角加速度分别为β_A和β_B，不计滑轮轴的摩擦，则有



A $\beta_A = \beta_B$.

B $\beta_A > \beta_B$.

C $\beta_A < \beta_B$.

D 开始时$\beta_A = \beta_B$，以后$\beta_A < \beta_B$.

提交

2. 一作定轴转动的物体，对转轴的转动惯量I＝3.0 kg·m²，角速度ω_0＝6.0 rad/s．现对物体加一恒定的制动力矩M ＝－12 N·m，当物体的角速度减慢到ω＝2.0 rad/s时，求物体已转过的角度$\Delta\theta$

解：由转动定律 $$M = I\beta$$

$$\beta = \frac{M}{I} = \frac{-12}{3} = -4rad.s^{-2}$$

$$\because \omega^2 - \omega_0^2 = 2\beta\Delta\theta$$

$$\therefore \Delta\theta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\beta} = \frac{4-36}{-2\times 4} = 4rad$$

3. 一个作定轴转动的物体，对转轴的转动惯量为I. 正以角速度w_0＝10 rad·s^{-1}匀速转动. 现对物体加一恒定制动力矩 M ＝－0.5 N·m，经过时间t＝5.0 s后，物体停止了转动. 求物体的转动惯量。

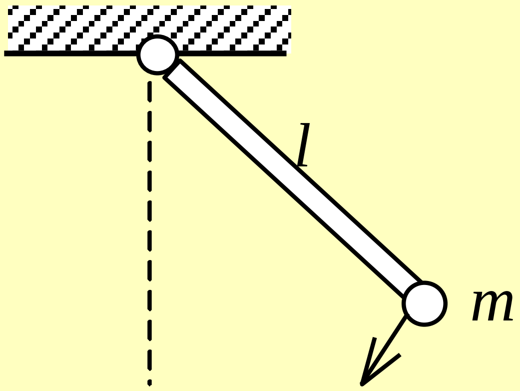
解: $\because \omega = \omega_0 + \beta t$

$$\therefore \beta = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{0-10}{5} = -2 rad.s^{-2}$$

由转动定律 $M = I\beta$

$$I = \frac{M}{\beta} = \frac{-0.5}{-2} = \frac{1}{4} kg.m^2$$

4.一长为l，质量可以忽略的直杆，可绕通过其一端的水平光滑轴在竖直平面内作定轴转动，在杆的另一端固定着一质量为m的小球，如图所示．现将杆由水平位置无初转速地释放．（1）试求杆刚被释放时的角加速度β_0；（2）杆与水平方向夹角为60°时的角加速度β是多少？



（1） $$M = I\beta$$

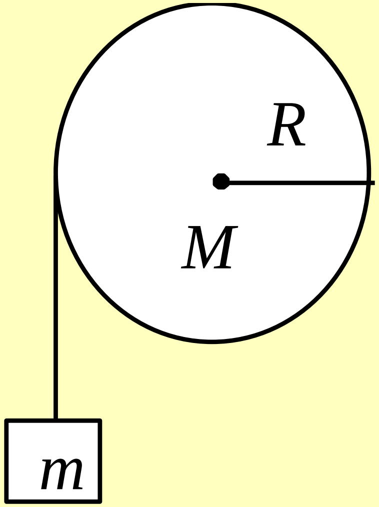
$$mgl = ml^2\beta$$

$$\therefore \beta = \frac{mgl}{ml^2} = \frac{g}{l}$$

（2） $$mgl\cos 60^0 = ml^2\beta$$

$$\therefore \beta = \frac{mgl\cos 60^2}{ml^2} = \frac{g}{2l}$$

5.如图所示，一个质量为m的物体与绕在定滑轮上的绳子相联，绳子质量可以忽略，它与定滑轮之间无滑动．假设定滑轮质量为M、半径为R，其转动惯量为 $\frac{1}{2}MR^2$ ，滑轮轴光滑．试求该物体由静止开始下落的过程中，下落速度与时间的关系．



对物体：$mg-T=ma$

对滑轮：$RT=I\beta$

运动学关系：$a=R\beta$

$$\therefore a=\frac{mg}{m+\frac{1}{2}M}$$

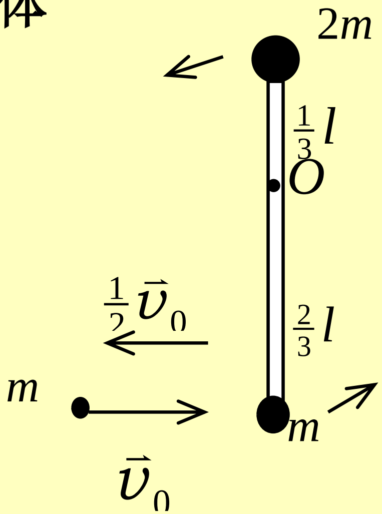
$$\because a=\frac{dv}{dt}$$

$$\therefore \int_0^v dv=\int_0^t adt$$

$$\therefore v=at=\frac{2mgt}{2m+M}$$

6.如图所示，长为l的轻杆，两端各固定质量分别为m和$2m$的小球，杆可绕水平光滑固定轴O在竖直面内转动，转轴O距两端分别为$\frac{1}{3}l$和$\frac{2}{3}l$．轻杆原来静止在竖直位置．今有一质量为m的小球，以水平速度$\vec{v}_0$与杆下端小球m作对心碰撞，碰后以$\frac{1}{2}\vec{v}_0$的速度返回，试求碰撞后轻杆所获得的角速度。

解：将杆与两小球视为一刚体，水平飞来小球与刚体视为一系统．由角动量守恒得



$$mv_0\frac{2}{3}l = -m\frac{v_0}{2}\cdot\frac{2}{3}l + I\omega$$

（逆时针为正向）

$$I = 2m\left(\frac{l}{3}\right)^2 + m\left(\frac{2l}{3}\right)^2$$

$$\omega = \frac{3v_0}{2l}$$

6. 一长为l，质量为M的杆可绕支点o自由转动。一质量为m，速度为v的子弹射入距支点为a的棒内。若棒偏转角为$30°$。问子弹的初速度为多少。