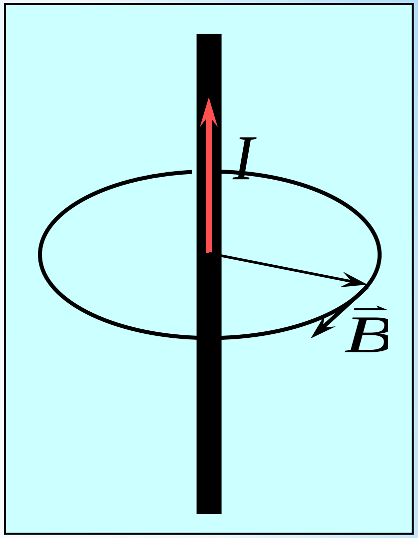
毕奥–萨伐尔定律及其应用

Boit-Savart Law & Its Application

毕奥和萨伐尔用实验的方法证明：长直载流导线周围的磁感应强度与距离成反比与电流强度成正比。



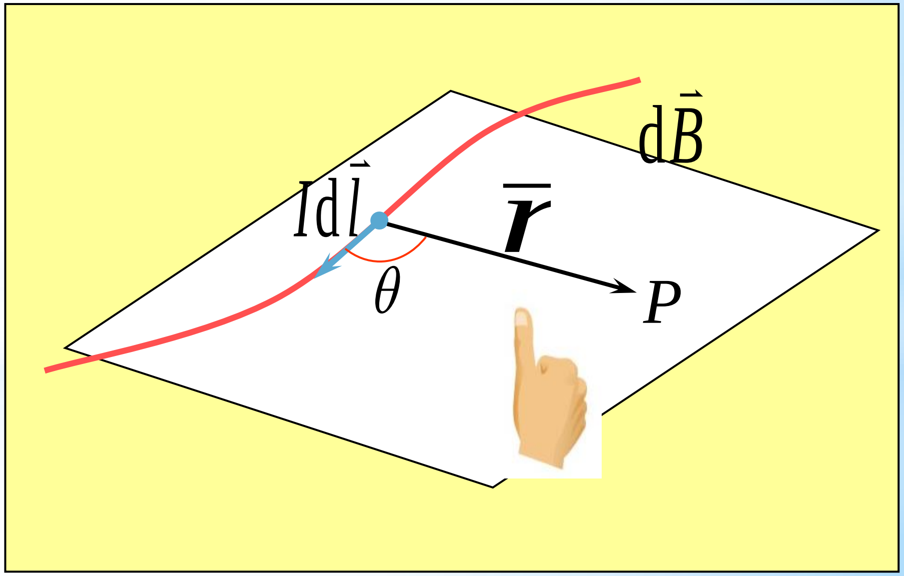
$$B \propto \frac{I}{r}$$

1. 毕奥–萨伐尔定律：

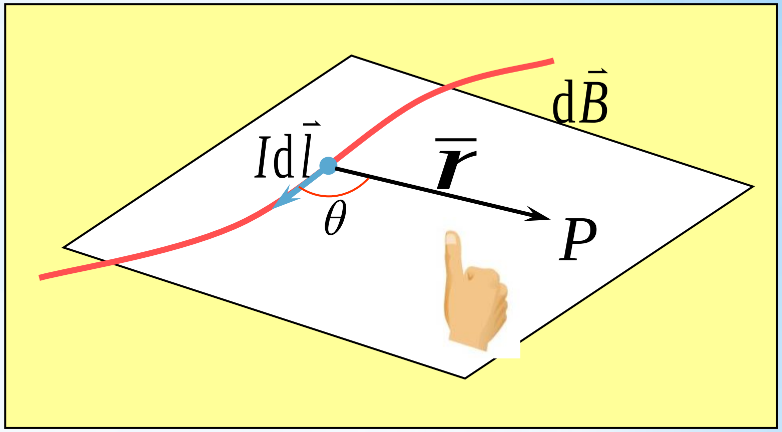
电流元 $Id\vec{l}$：

- 大小：Idl

- 方向：线元上通过的电流的方向。



电流元在空间任一点**P**产生的磁感应强度 $d\vec{B}$ 的大小与电流元 $Id\vec{l}$ 成正比，与距离***r*** 的平方成反比，与 $Id\vec{l}$和电流元 $d\vec{l}$ 到场点**P** 的位矢之间的夹角***θ***的正弦成正比。其方向与 $Id\vec{l}\times\vec{r}$ 一致。



$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}^{\,0}}{r^2}$$

真空中的磁导率：

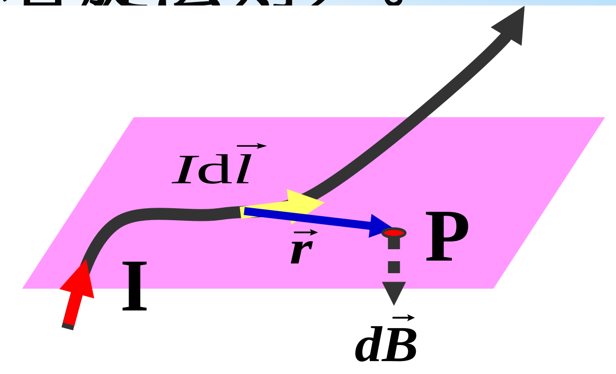
$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m\cdot A^{-1}}$

The direction of $d\vec{B}$ **is determined by** $Id\vec{l}\times\vec{r}$

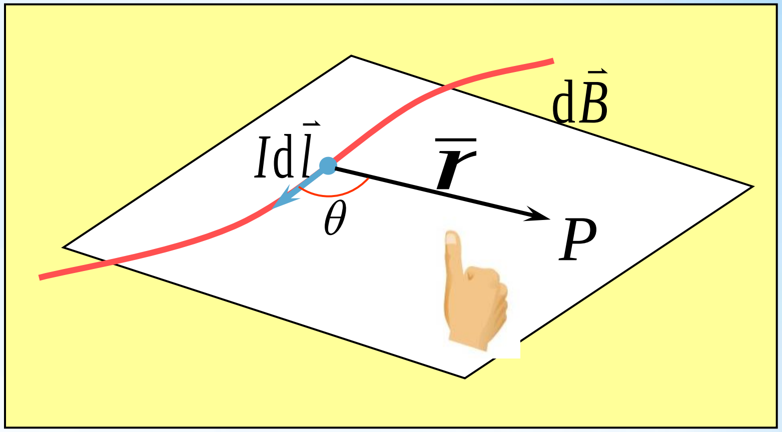
磁场的方向由矢量积 $Id\vec{l}\times\vec{r}$ 确定（右旋法则）。

The magnitude of $d\vec{B}$ is given by

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l\sin\theta}{r^2}$$



一段载流导线产生的磁场：



$$\vec{B} = \int_L d\vec{B} = \int_L \frac{\mu_o I d\vec{l} \times \vec{r}^{\,0}}{4\pi r^2}$$

Note:

(1) It is a linear integral(线积分）;

(2) It is also a vector integral(矢量积分）.

直角坐标系：

$$B_x = \int dB_x, \qquad B_y = \int dB_y, \qquad B_z = \int dB_z$$

$$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k},$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$$

2. 毕萨定律的应用：

$$\vec{B}=\int_L d\vec{B}=\int_L \frac{\mu_o I d\vec{l}\times\vec{r}^{\,0}}{4\pi r^2}$$

计算一段载流导体的磁场：

1.建立坐标系；

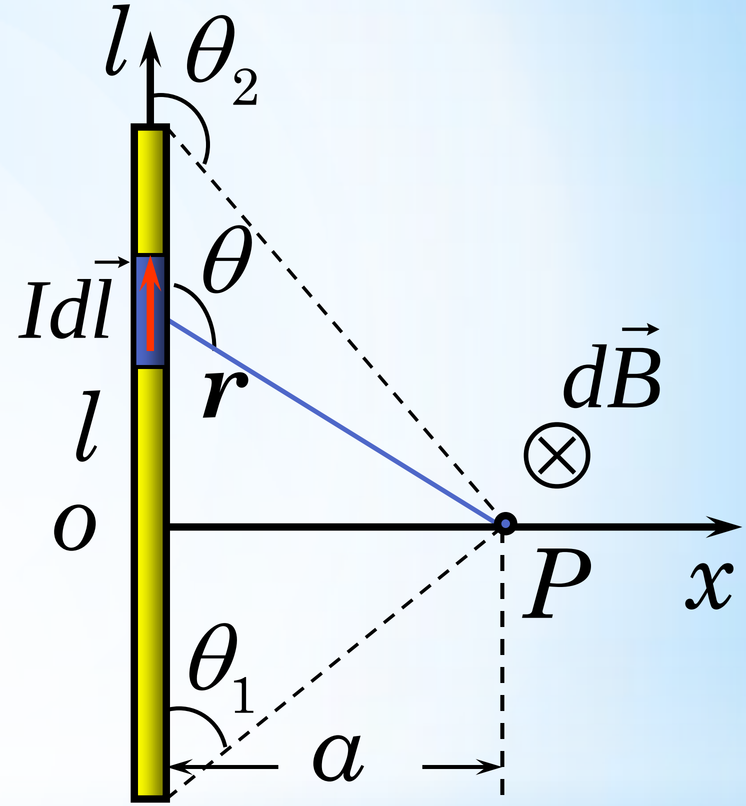
2.分割电流元；

3. 确定电流元的磁场 $d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}^{\,0}}{r^2}$

4.求 $\boldsymbol{B}$ 的分量 B_x、B_y、B_z；

5.由 $B=\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}$ 求总场。

例1:一段有限长载流直导线,通有电流为 I ,求距 a 处的 P 点磁感应强度。



解: 建立坐标系，分割电流元

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\theta}{r^2}$$

方向：垂直纸面向里

$$\because l = a\tan(\pi-\theta) = -a\tan\theta$$

$$\therefore dl = a\csc^2\theta d\theta$$

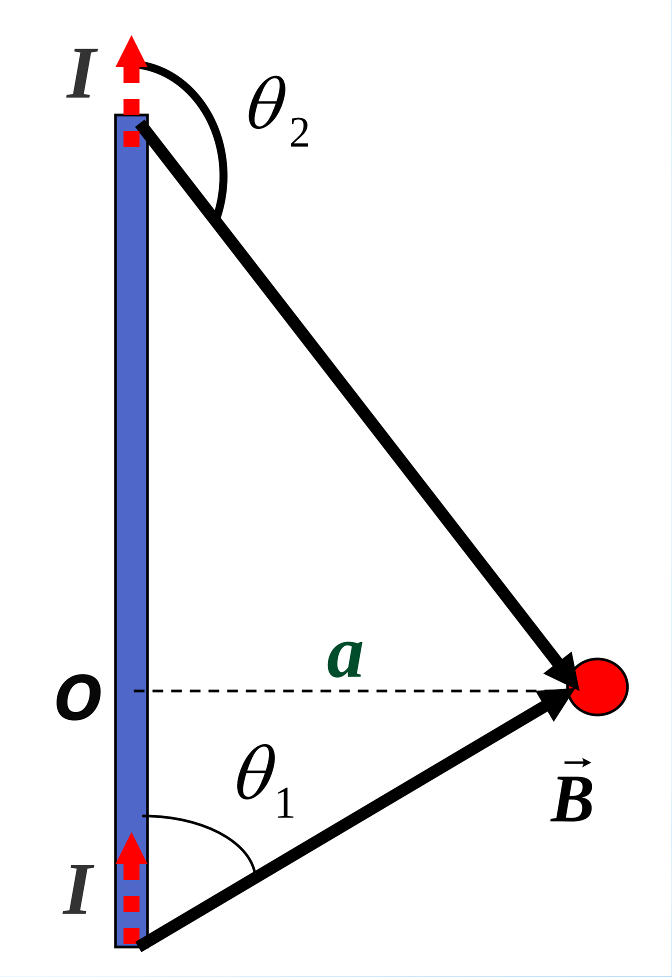
$$r = a\csc\theta$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ia\cancel{\csc^2\theta}\sin\theta d\theta}{a^2\cancel{\csc^2\theta}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\sin\theta d\theta$$

$$B = \int dB = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\sin\theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

注 意：θ_1 和 θ_2 的意义如图。

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$



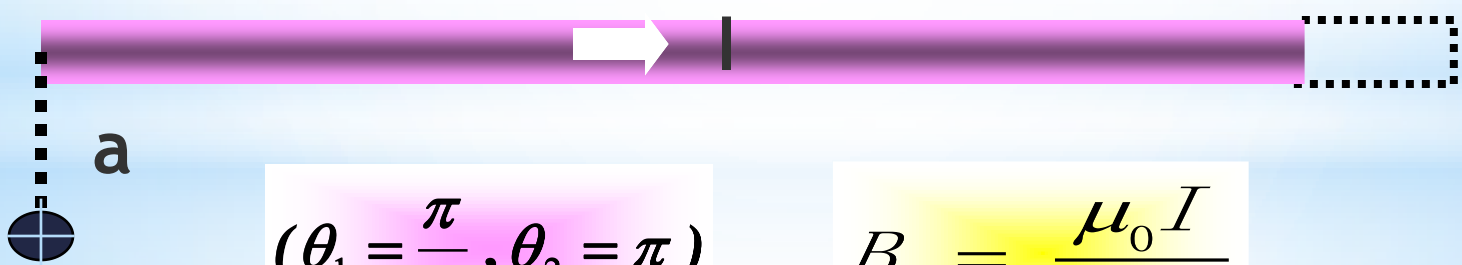
$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

Note:

(1) 在导线延长线上的磁场:

$$\because I d\vec{l} \,//\, \vec{r}, \quad I d\vec{l}\times\vec{r}=0 \quad \therefore \vec{B}=0$$

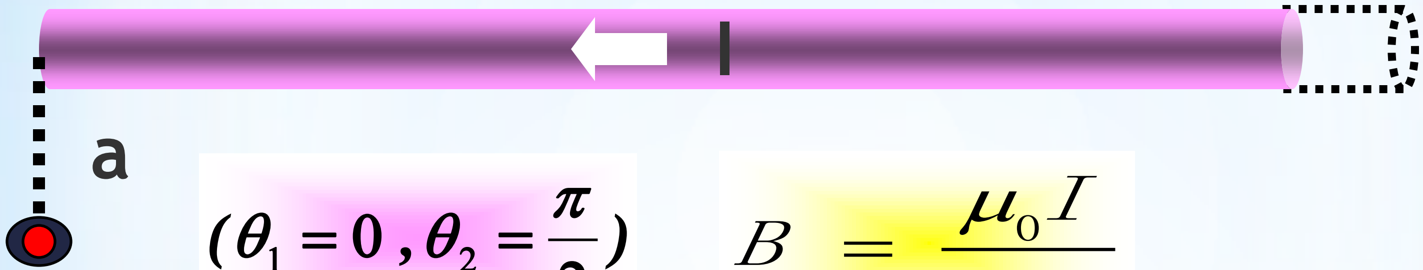
(2) 载流半无限长直导线产生的磁场



$$\left(\theta_1=\frac{\pi}{2}, \theta_2=\pi\right)$$

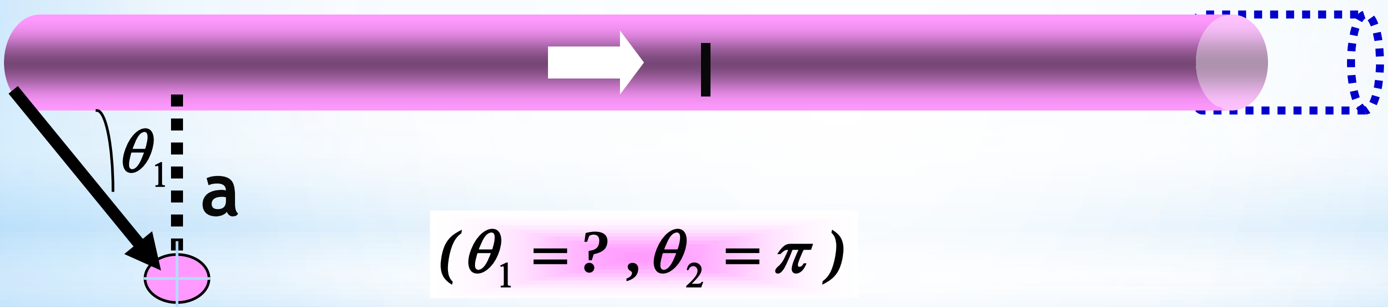
$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}$$

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$



$$(\theta_1=0\,,\theta_2=\frac{\pi}{2})$$

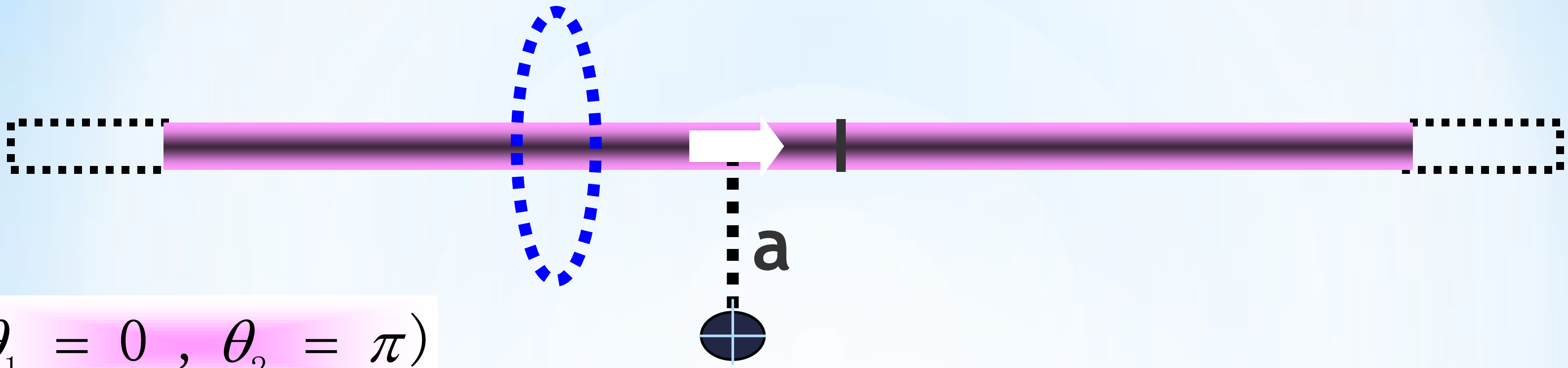
$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}$$



$$(\theta_1=?\,,\theta_2=\pi)$$

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1+1)$$

(3) 导线无限长时，即载流长直导线产生的磁场



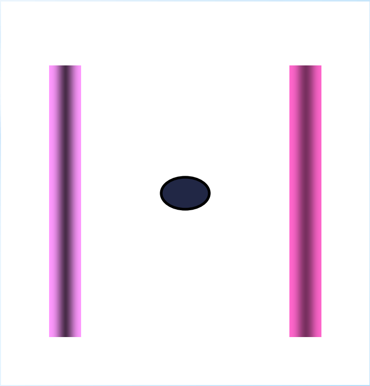
$(\theta_1 = 0\ ,\ \theta_2 = \pi)$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

磁场线为一系列垂直于导线的同心圆，圆心在导线上，B线与I的方向成右旋关系。

如有许多无限长载流直线，总磁场等于：

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \ldots\ldots$$



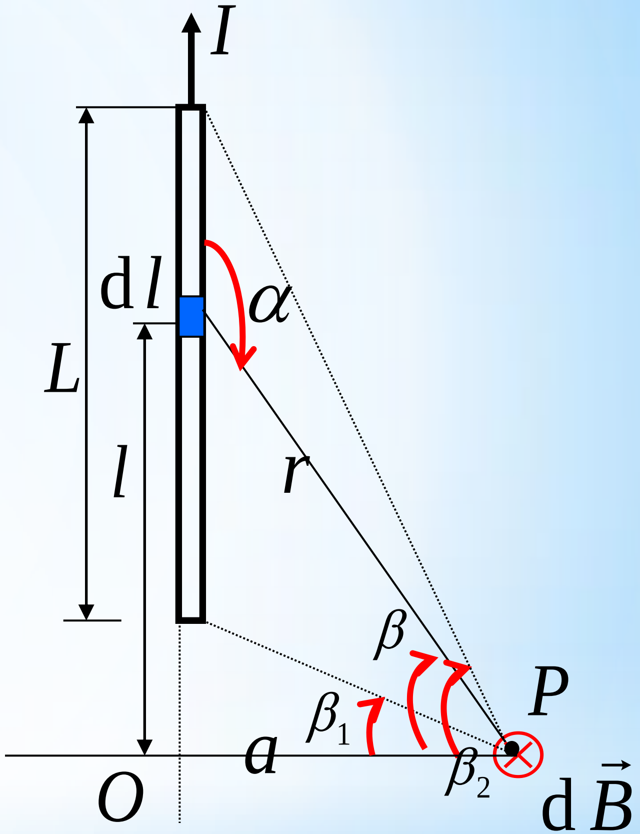
教材说明：

$$B=\int_L \mathrm{d}B=\int_L \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}l\sin\alpha}{r^2}$$

由几何关系有：

$$\sin\alpha=\cos\beta \qquad r=a\sec\beta$$

$$l=a\tan\beta \qquad \mathrm{d}l=a\sec^2\beta\,\mathrm{d}\beta$$



$$\Rightarrow B=\int_L \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}l\sin\alpha}{r^2}$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\frac{I}{a}\cos\beta\,\mathrm{d}\beta=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\sin\beta_2-\sin\beta_1\right)$$

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\sin\beta_2-\sin\beta_1)$$

考虑三种情况：

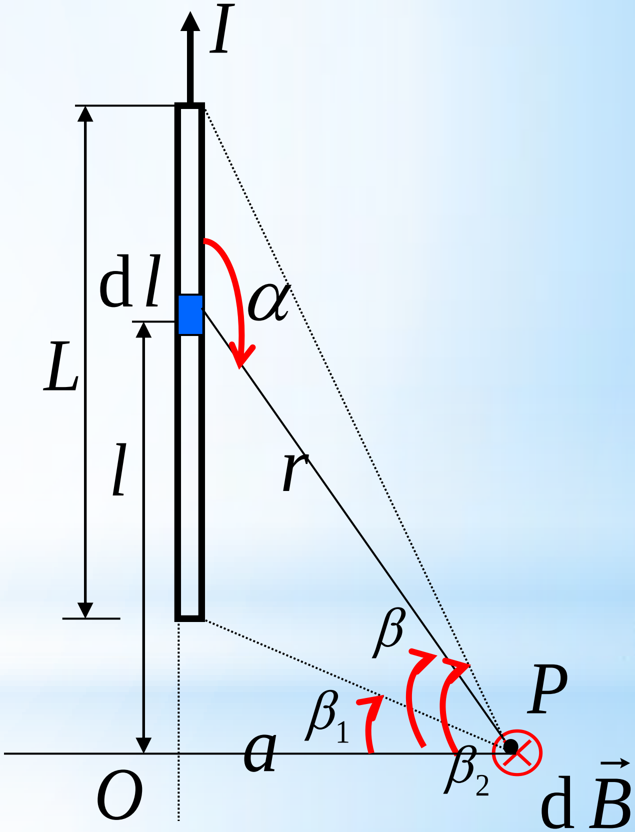
(1) 导线无限长，即 $\beta_1=-\frac{\pi}{2}$ $\beta_2=\frac{\pi}{2}$

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

(2) 导线半无限长，场点与一端的连线垂直于导线

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}$$

(3) P点位于导线延长线上，$B=0$

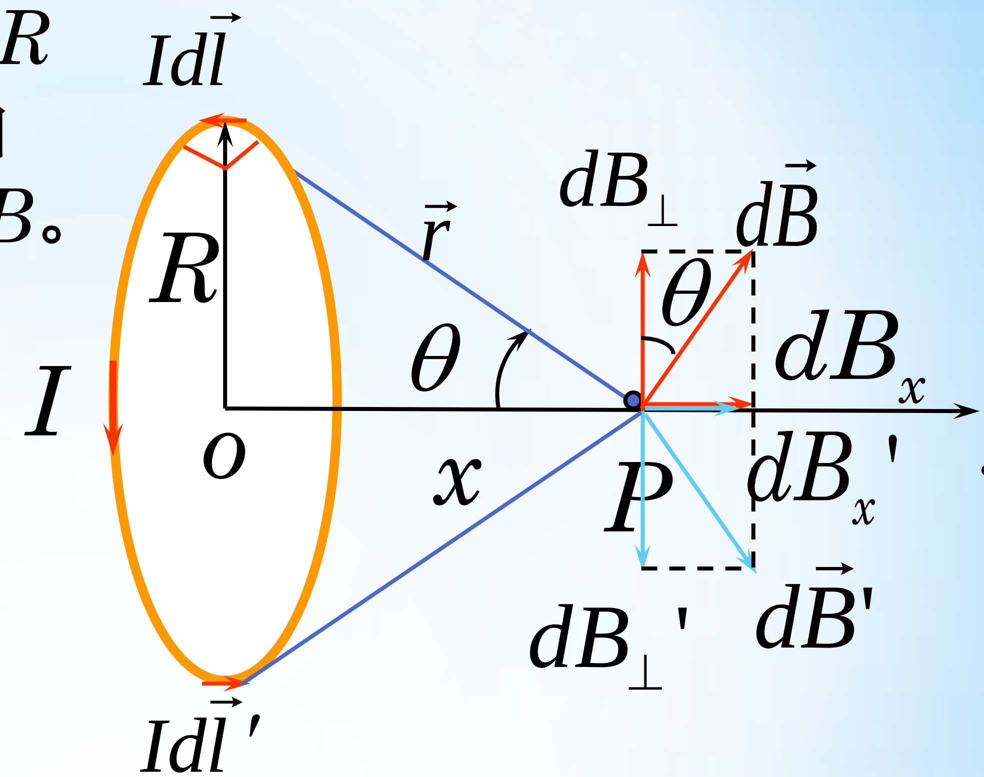


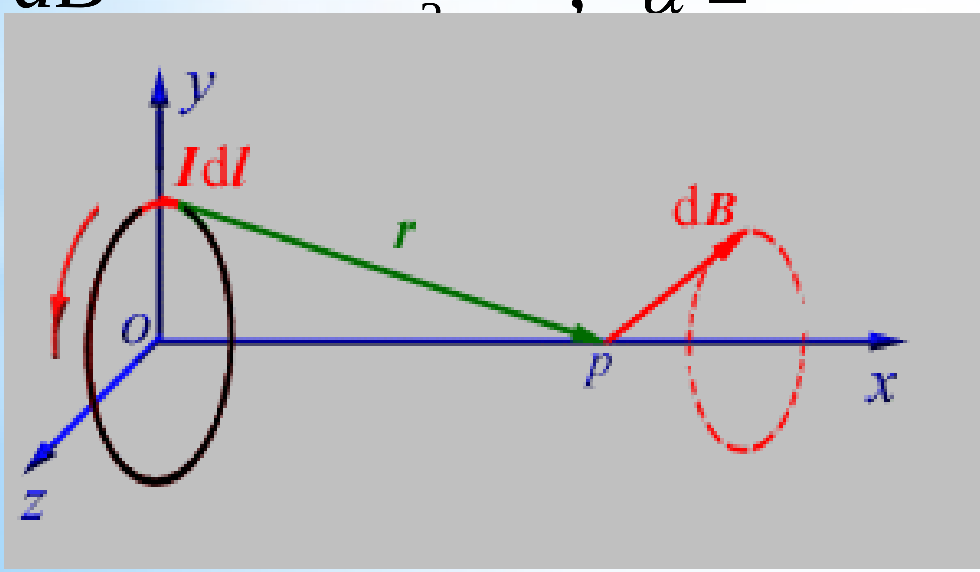
例2：一载流圆环半径为R通有电流为 I，求圆环轴线上一点的磁感应强度 B。

解：将圆环分割为无限多个电流元；

电流元在轴线上产生的磁感应强度 dB 为：

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin\alpha}{\ \ ^2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{\ }$$





对称的一个电流元 Idl'，

在 P 点产生的 dB 在 x

直x方向大小相等方向相

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_\perp^2} = B_x$$

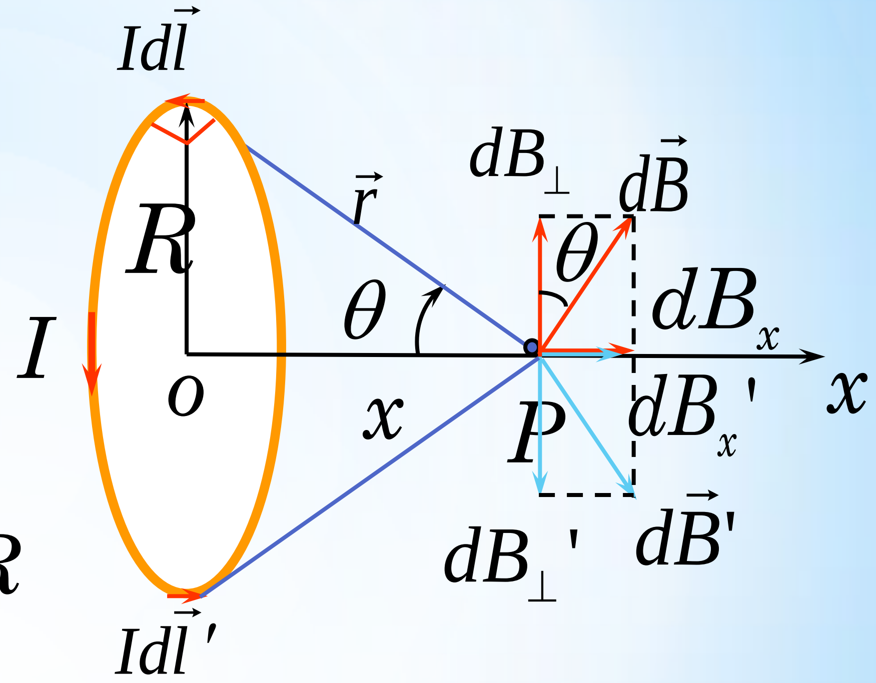
$$B=\int dB_x=\int dB\sin\theta$$

$$\because \sin\theta=\frac{R}{r}$$

$$B=\int dB_x=\int_0^{2\pi R}\frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\frac{R}{r}dl$$

$$=\frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3}\int_0^{2\pi R}dl=\frac{\mu_0 IR}{4\cancel{\pi} r^3}2\cancel{\pi}R$$

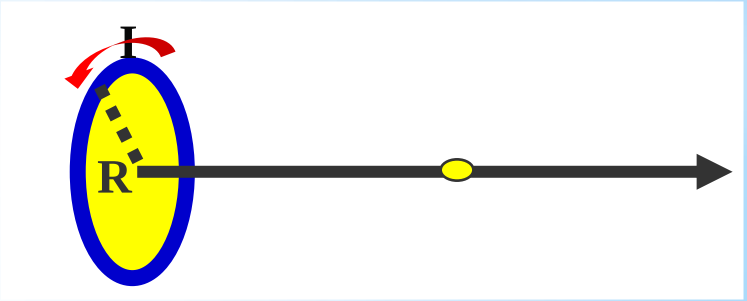
$$=\frac{\mu_0 IR^2}{2r^3}=\frac{\mu_0 IR^2}{2\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}$$

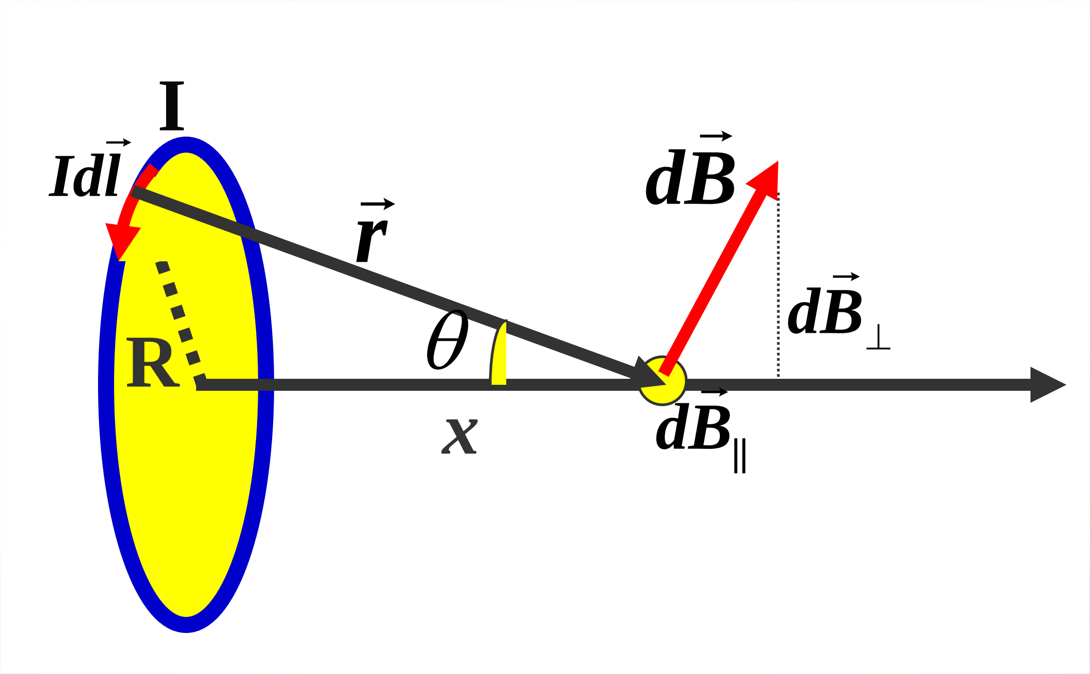


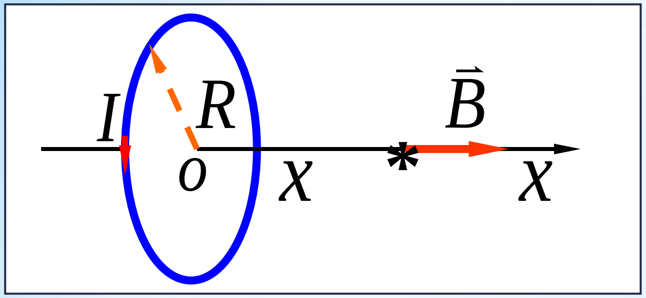
$$\therefore \boldsymbol{B}=\frac{\boldsymbol{\mu_0 IR^2}}{\boldsymbol{2\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}}$$

方向：由右手螺旋定则判

定沿x轴方向




I
$Id\vec{l}$
$\vec{r}$
$d\vec{B}$
$d\vec{B}_{\perp}$
θ
R
x
$d\vec{B}_{\parallel}$



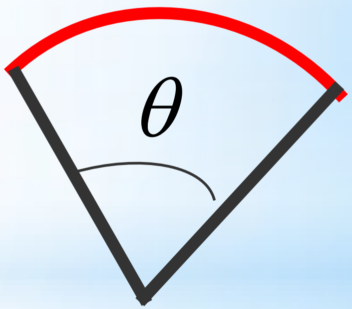
$$B=\frac{\mu_0 IR^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$$

讨论

1）$x=0$ $\quad B=\dfrac{\mu_0 I}{2R}$ （圆心处）

(2) 圆电流的一部分在o点的场：

$$B=\frac{\mu_0 I}{2R}\cdot\frac{\theta}{2\pi(or\,360)}$$



$$B=\frac{\mu_0 IR^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$$

3）若线圈有 N 匝

$$B=\frac{N\ \mu_0 IR^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$$

4）在远离线圈处 $x>>R,x\approx r$

$$B=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{IS}{x^3}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{IS}{r^3}$$

引入 $\vec{p}_m=IS\vec{e}_n$ $\qquad \vec{B}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\vec{p}_m}{r^3}$

载流线圈的磁矩

Example 1:在真空中，一无限长载流导线的**AB**，**DE**部分平直，中间弯曲部分为半径**R=4.00 cm**的半圆环，各部分均在同一平面内，如图**5.14**所示．若通以电流**I＝20.0 A**，求半圆环的圆心**O**处的磁感应强度.

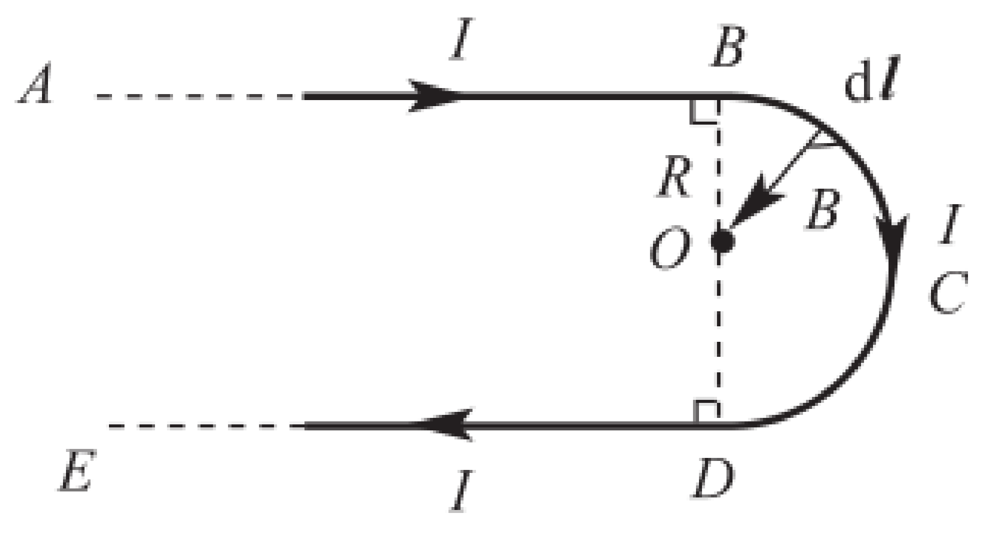


图 5. 14

【解】由磁场叠加原理，**O**点处的磁感应强度**B**是由**AB**，**BCD**和**DE**三部分电流产生的磁感应强度的叠加.

AB部分为“半无限长”直线电流，在**O**点产生的$\vec{B}_1$ 大小为:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 20.0}{4\pi \times 4.00 \times 10^{-2}}$$

$$= 5.00 \times 10^{-5} (T)$$

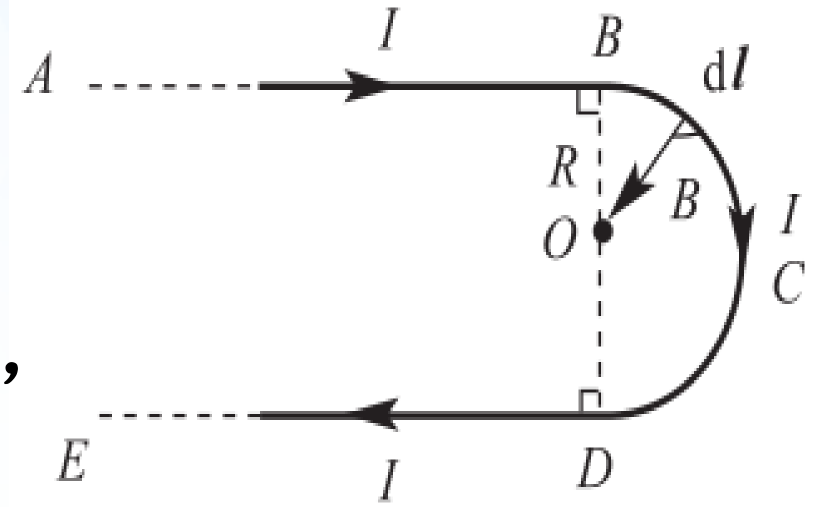


图 5.14

$\vec{B}_1$的方向垂直纸面向里．同理，**DE**部分在**O**点产生的 $\vec{B}_2$的大小与方向均与 $\vec{B}_1$ 相同，即

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} = 5.00 \times 10^{-5} (T)$$

BCD部分在**O**点产生的 $\vec{B}_3$用积分计算，为 $B_3=\int dB$

式中，**dB**为半圆环上任一电流元**Idl**在**O**点产生的磁感强度，其大小为

$$dB=\frac{\mu_0 Idl\sin\theta}{4\pi R^2}$$ 因，$\theta=\frac{\pi}{2}$ 故 $dB=\frac{\mu_0 Idl}{4\pi R^2}$

dB的方向垂直纸面向里.半圆环上各电流元在**O**点产生**dB**方向都相同.则

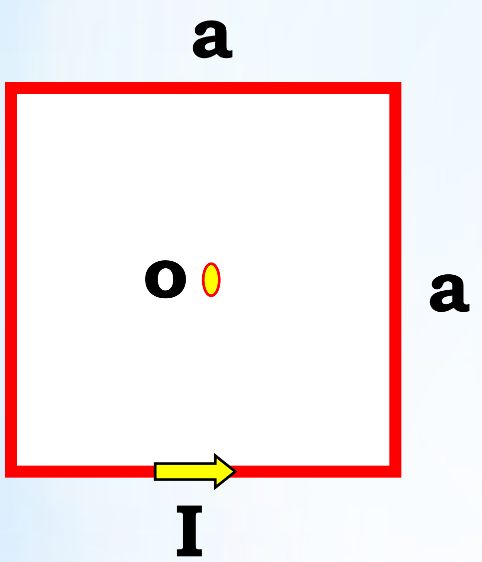
$$B_3=\int dB=\int_0^{\pi R}\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}dl=\frac{\mu_0 I}{4R}=\frac{4\pi\times10^{-7}\times20.0}{4\times4.00\times10^{-2}}=1.57\times10^{-4}(T)$$

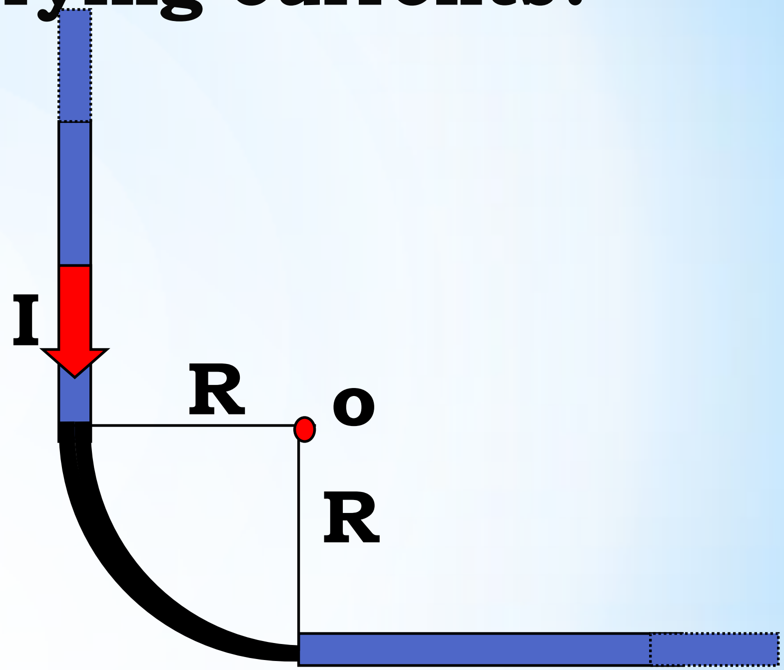
因**B1**，**B2**，**B3**的方向都相同，所以**O**点处总的磁感强度**B**的大小为

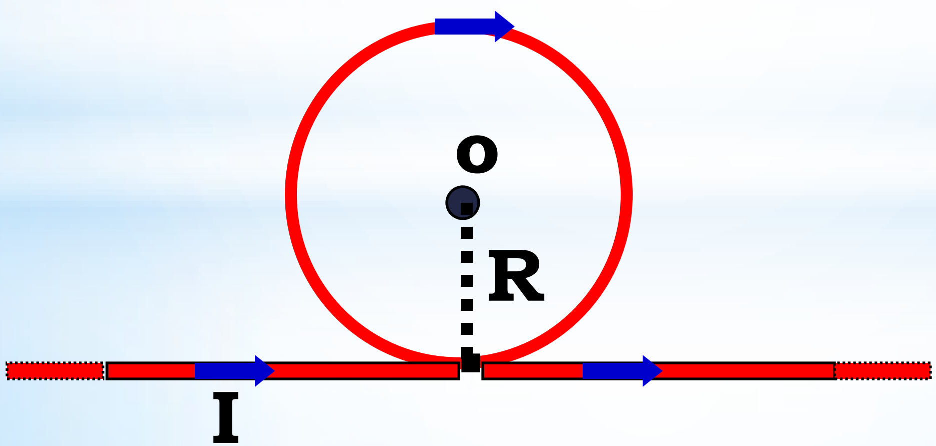
$$
\begin{aligned}
B &= B_1 + B_2 + B_3 \\
&= 5.00\times10^{-5} + 5.00\times10^{-5} + 1.57\times10^{-4} \\
&= 2.57\times10^{-4}(T)
\end{aligned}
$$

B的方向垂直纸面向里.

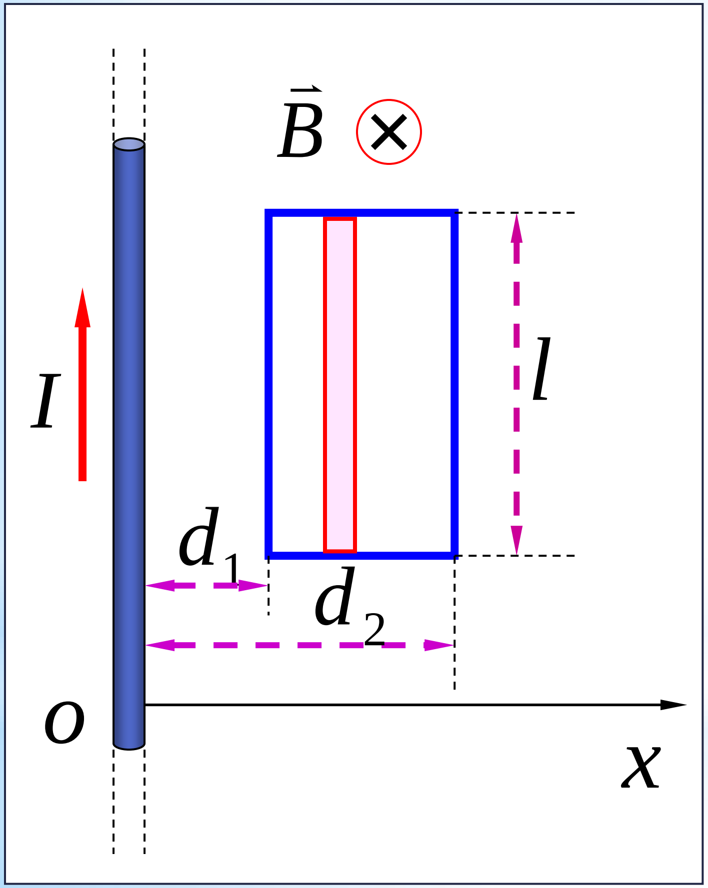
Example 2: What is the magnetic fields at point o of the below carrying currents?







例3： 如图载流长直导线的电流为 I ， 试求通过矩形面积的磁通量.



解： 对变化的磁场先求 $\mathrm{d}\Phi$ ，最后积分求 Φ

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi x} \qquad \vec{B}/\!/\vec{S}$$

$$\mathrm{d}\Phi = B\mathrm{d}S = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l\mathrm{d}x$$

$$\Phi = \iint_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi}\int_{d_1}^{d_2}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi}\ln\frac{d_2}{d_1}$$

作业：5、14、9、10