§2-3　动量　　动量守恒定律

Momentum　Conservation of Momentum

§ 1 Momentum Impulse Momentum Theorem

动量 冲量 动量定理

§ 2 Conservation of Momentum

动量守恒定律

§ 3 Collision 碰撞

教学基本要求

- 明确冲量是力对时间的积累效应，掌握动量定理，注意动量的瞬时性、矢量性和相对性。
- 掌握系统动量守恒定律，包括动量分量守恒的情况，会分析动量守恒条件，包括当内力远大于外力时的情况。
- 会用动量守恒定律、机械能守恒定律（或功能原理）解决碰撞等质点在平面内运动的力学问题。

2-3-1 动量 Momentum

车辆超载容易
引发交通事故

车辆超速容易
引发交通事故

结论： 物体的运动状态不仅取决于速度，而且与物体的质量有关。

动量： 运动质点的质量与速度的乘积。

$$\vec{p} = m\vec{v}$$ 单位：$\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$

由n个质点所构成的质点系的动量：

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i$$

2-3-2 动量定理 Momentum Theorem

1. 质点的动量定理

牛顿运动定律：$\vec{F}=m\vec{a}$

$$\vec{F}=m\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{dt}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{F}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{p}$$

冲量$\vec{I}$ impulse:作用力与作用时间的乘积。

冲量是反映力对时间的累积效应。

运动员在投掷标枪时，伸直手臂，尽可能的延长手对标枪的作用时间，以提高标枪出手时的速度。

恒力的冲量：$\vec{I}=\vec{F}(t_2-t_1)$

变力的冲量： $\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}(t)\mathrm{d}t$ 单位：N·s

动量定理的微分式：$\vec{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p}$

两边积分：$\int_{t_o}^{t} \vec{F}\mathrm{d}t = \int_{\vec{p}_o}^{\vec{p}} \mathrm{d}\vec{p}$

$$\vec{I} = \int_{t_o}^{t} \vec{F}\mathrm{d}t = \vec{p} - \vec{p}_0 = m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \Delta\vec{p}$$

质点动量定理：

质点在运动过程中，所受合外力的冲量等于质点动量的增量。

The increment in momentum of a particle is equal to the impulse delivered(供给） by the net force.

$$I_x = \int_{t_o}^{t} F_x \mathrm{d}t = mv_x - mv_{xo}$$

$$I_y = \int_{t_o}^{t} F_y \mathrm{d}t = mv_y - mv_{yo}$$

$$I_z = \int_{t_o}^{t} F_z \mathrm{d}t = mv_z - mv_{zo}$$

常用来研究碰撞问题

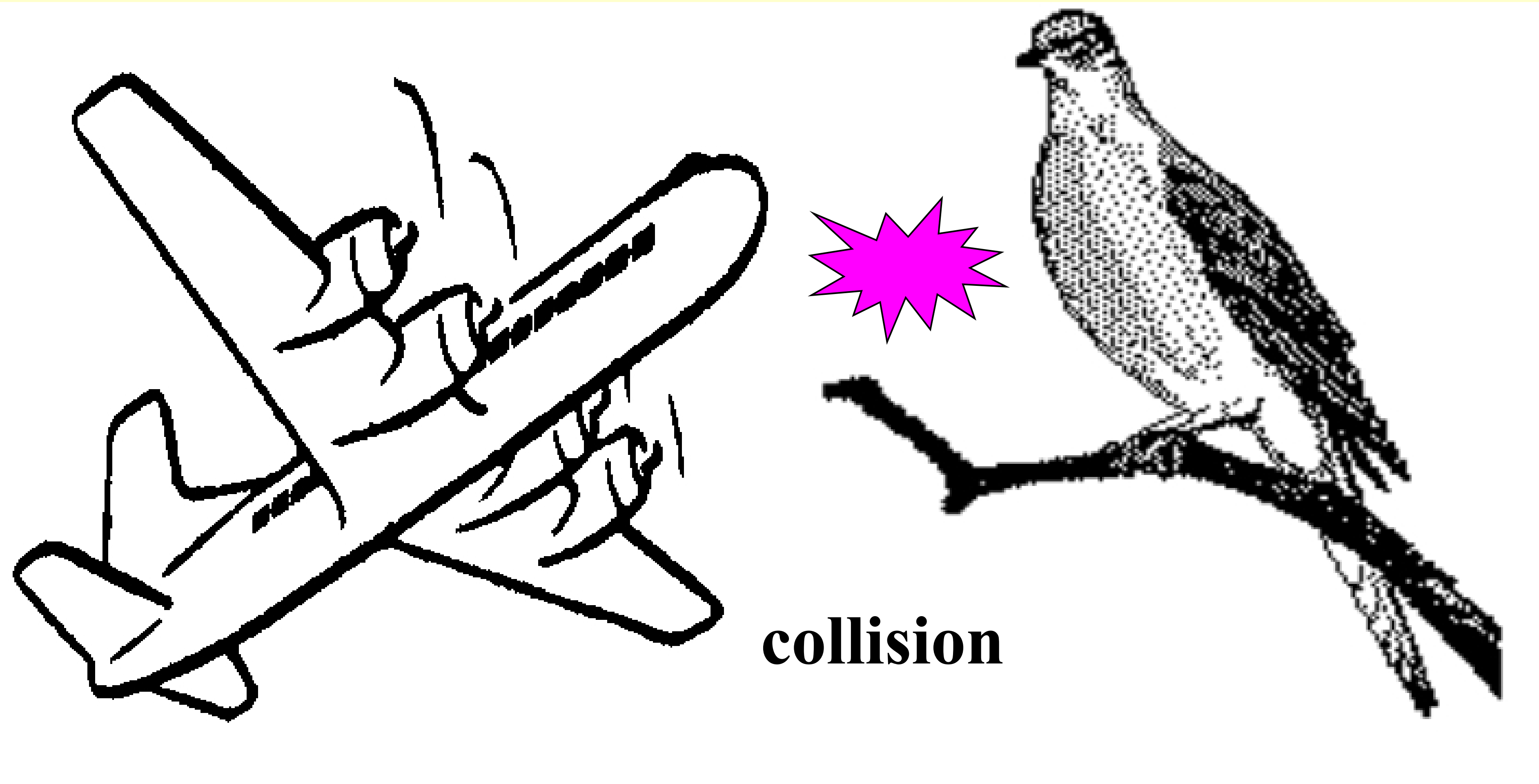
$$\vec{I} = \Delta\vec{p}$$

说明：

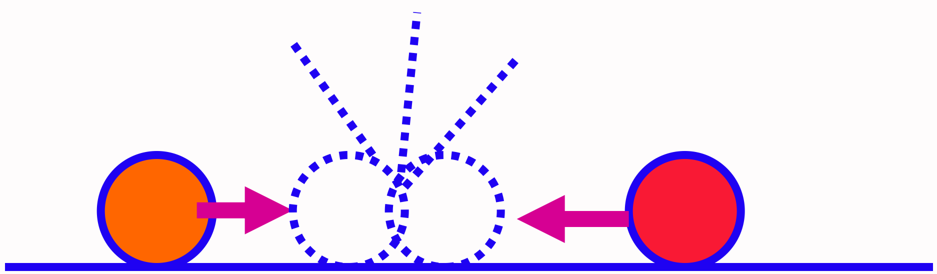
（1） 冲量的方向 $\vec{I}$ 与动量增量 $\Delta\vec{p}$ 的方向一致。

（2） 动量定理中的动量和冲量都是矢量，符合矢量叠加原理。因此在计算时可采用平行四边形法则。或把动量和冲量投影在坐标轴上以分量形式进行计算。

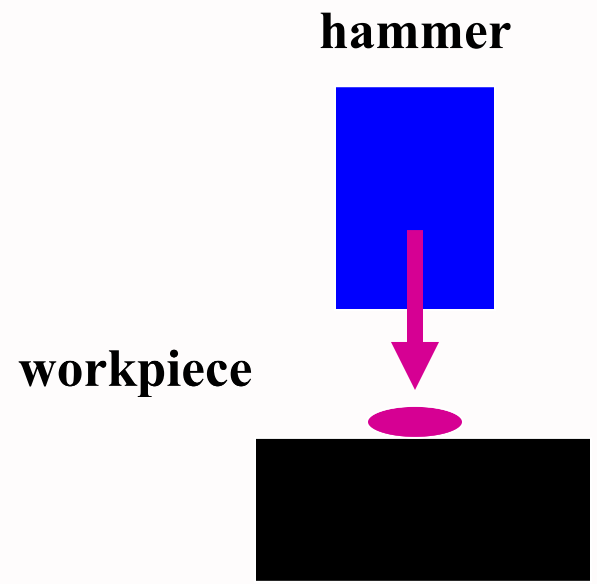
2.平均力 Average Force (useful to collisions)



As shown in the below figure, the collision has finished（完成） in a very small time interval so that the force between two body is usually very great and varies rapidly（快速） with time.



Collision between two ball



For these cases, it is very useful to introduce the average force as discussed as follows.

In Fig.1, an impact(冲击) force is illustrated（图解说明） roughly（粗略地）. When dealing with such a variable force , it is helpful to introduce an average force $\overline{\vec{F}}$,defined by

$$\overline{\vec{F}} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

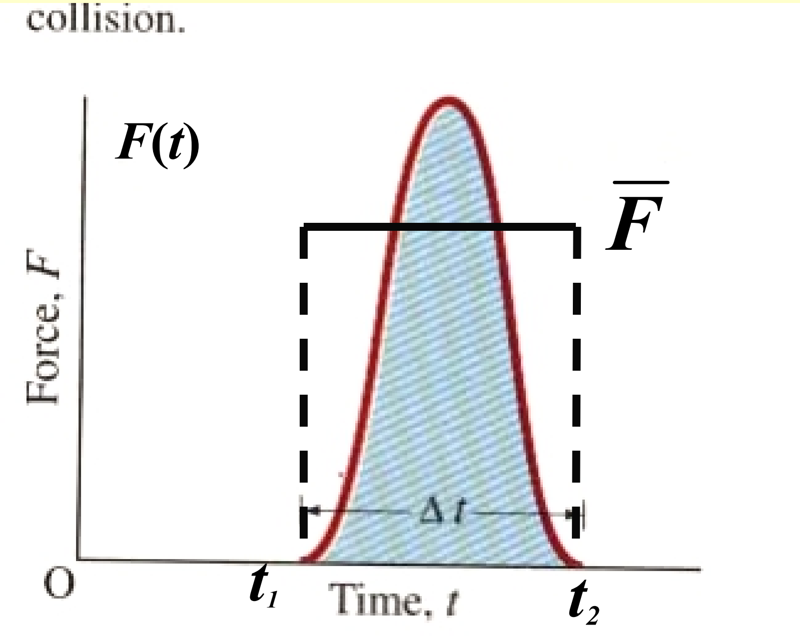


Fig.1

which is represented by a straight(直的） line in Fig.1.

Using the average force, Momentum Theorem can be rewritten as

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \mathrm{d}t = \overline{\vec{F}}(t_2 - t_1) = m\vec{V}_2 - m\vec{V}_1$$

用平均力表示的动量原理。

so $$\overline{\vec{F}}=\frac{m\vec{V}_2-m\vec{V}_1}{t_2-t_1}=\frac{m\vec{V}_2-m\vec{V}_1}{\Delta t}$$

The component forms of equation are as follows

分量式 $$I_x=\int_{t_1}^{t_2}F_x\mathrm{d}t=\overline{F}_x(t_2-t_1)=mV_{2x}-mV_{1x}$$

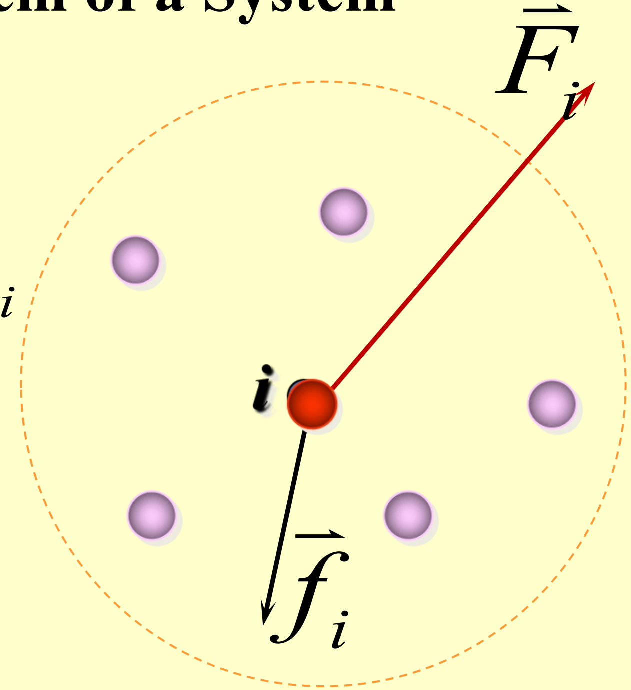
$$I_y=\int_{t_1}^{t_2}F_y\mathrm{d}t=\overline{F}_y(t_2-t_1)=mV_{2y}-mV_{1y}$$

可见，引起相同的动量改变，相互作用时间愈短，平均力愈大。

常见的实际问题还有射击、打炮的反冲力问题等。

海绵垫子可以延长运动员下落时与其接触的时间，这样就减小了地面对人的冲击力。

3．质点系的动量定理Momentum Theorem of a System



设有n个质点构成一个系统

第i个质点：质量 m_i

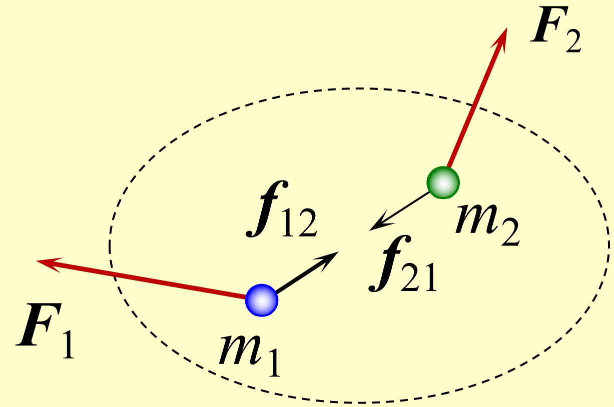
内力 $\vec{f}_i$　外力 $\vec{F}_i$　初速度 $\vec{v}_{io}$　末速度 $\vec{v}_i$

由质点动量定理：

$$\int_{t_o}^{t}\left(\vec{F}_i+\vec{f}_i\right)\mathrm{d}t=m_i\vec{v}_i-m_i\vec{v}_{io}$$

$$\int_{t_o}^{t}\left(\sum_i\vec{F}_i+\sum_i\vec{f}_i\right)\mathrm{d}t=\sum_i m_i\vec{v}_i-\sum_i m_i\vec{v}_{io}$$

其中：$\sum_i\vec{f}_i=0$



合外力的冲量：$\int_{t_0}^{t}\sum_i\vec{F}_i\mathrm{d}t$

系统总末动量：$\vec{P}=\sum_i m_i\vec{v}_i$

系统总初动量：$\vec{P}_0=\sum_i m_i\vec{v}_{io}$

$$\int_{t_0}^{t}\sum \vec{F}_i \mathrm{d}t = \vec{P} - \vec{P}_0 = \Delta\vec{P}$$

质点系的动量定理：

质点系统所受合外力的冲量等于系统总动量的增量。

微分式：

$$\sum \vec{F}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}$$

注意：系统的内力不能改变整个系统的总动量。

summary:

质点的动量定理：

$$\int_{t_0}^{t} \vec{F}\mathrm{d}t \Longleftarrow \vec{I} = \Delta\vec{p} \Longrightarrow \vec{p} - \vec{p}_0 = m\vec{v} - m\vec{v}_0$$

质点系的动量定理：

$$\int_{t_0}^{t} \sum \vec{F}_i \mathrm{d}t = \vec{P} - \vec{P}_0 = \Delta\vec{P}$$

例1　一质量为10 kg的物体沿x轴无摩擦地滑动，t＝0时物体静止于原点，(1)若物体在力F＝3＋4t N的作用下运动了3 s，它的速度增为多大？(2)物体在力F＝3＋4x N的作用下移动了3 m，它的速度增为多大？

解　(1)由动量定理 $\int_0^t F dt = mv$ **，得**

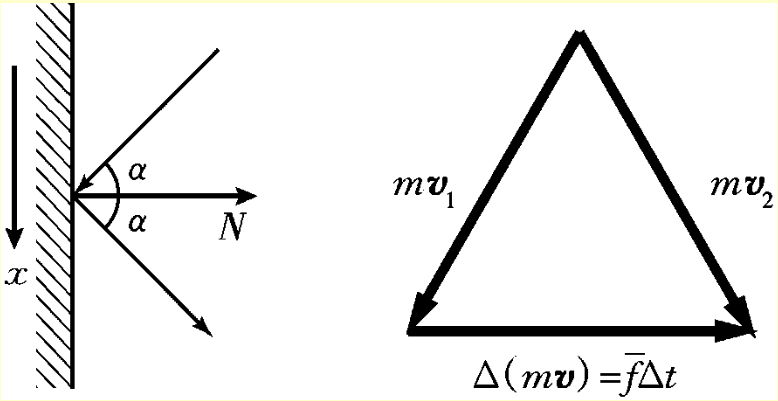
$$v = \int_0^t \frac{F}{m} dt = \int_0^3 \frac{3+4t}{10} dt = 2.7\ m/s$$

(2) 由动能定理 $\int_0^x F dx = \frac{1}{2} m v^2$ **，得**

$$v = \sqrt{\int_0^x \frac{2F}{m} dx} = \sqrt{\int_0^3 \frac{2(3+4x)}{10} dx} = 2.3\ m/s$$

例2　一弹性球，质量m＝0.20 kg，速度v＝5 m/s，与墙碰撞后弹回.设弹回时速度大小不变，碰撞前后的运动方向和墙的法线所夹的角都是α，设球和墙碰撞的时间Δt＝0.05 s，α＝60°，求在碰撞时间内，球和墙的平均相互作用力.

解　以球为研究对象. 设墙对球的平均作用力为f，球在碰撞前后的速度为 v_1 和 v_2，由动量定理可得



$$\bar{\vec{f}}\Delta t = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = m\Delta\vec{v}$$

将冲量和动量分别沿图中N和x两方向分解得：

$$\overline{f_x}\Delta t = mv\sin\alpha - mv\sin\alpha = 0$$

$$\overline{f_N}\Delta t = mv\cos\alpha - (-mv\cos\alpha) = 2mv\cos\alpha$$

解方程得

$$\overline{f_x} = 0$$

$$\overline{f_N} = \frac{2mv\cos\alpha}{\Delta t} = \frac{2\times0.2\times5\times0.5}{0.05} = 20\ \ N$$

按牛顿第三定律，球对墙的平均作用力和 $\overline{f_N}$ 的方向相反而等值，即垂直于墙面向里.

2-3-3 动量守恒定律Conservation of Momentum

质点系的动量定理： $\int_{t_0}^{t}\sum \vec{F}_i \mathrm{d}t = \vec{P} - \vec{P}_0$

当 $\sum \vec{F}_i = 0$ 时， 有 $\vec{P} = \vec{P}_0$

动量守恒定律：

系统所受合外力为零时，系统的总动量保持不变。

数学表示：$\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i =$ 常矢量　　条件：$\sum \vec{F}_i = 0$

动量守恒的分量式：

$$\sum F_{ix} = 0 \qquad P_x = \sum m_i v_{ix} = \text{常量}$$

$$\sum F_{iy} = 0 \qquad P_y = \sum m_i v_{iy} = \text{常量}$$

$$\sum F_{iz} = 0 \qquad P_z = \sum m_i v_{iz} = \text{常量}$$

说明：

（1）系统的总动量守恒并不意味着系统内各个质点的动量不变，而是指系统动量总和不变。

（2）系统中所有质点的动量都必须对同一个惯性参考系而言。

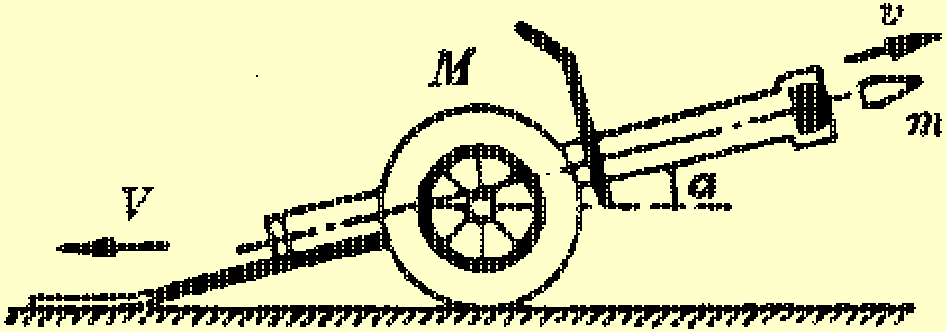
（3）系统所受合外力不等于零，但在某方向合外力为零，则系统在该方向动量守恒。

（4）系统所受的合外力并不为零，但当外力作用远小于内力作用时，可近似认为系统的总动量守恒。（如：碰撞，打击等）。

动量守恒定律是物理学中最重要、最普遍的规律之一，它不仅适合宏观物体，同样也适合微观领域。

3. 如图所示，炮车发射炮弹，已知子弹相对地面的速度为v_1，与地面倾角为 α ，求炮车的反冲速度。忽略炮车与地面的摩擦。

解：水平方向分动量守恒



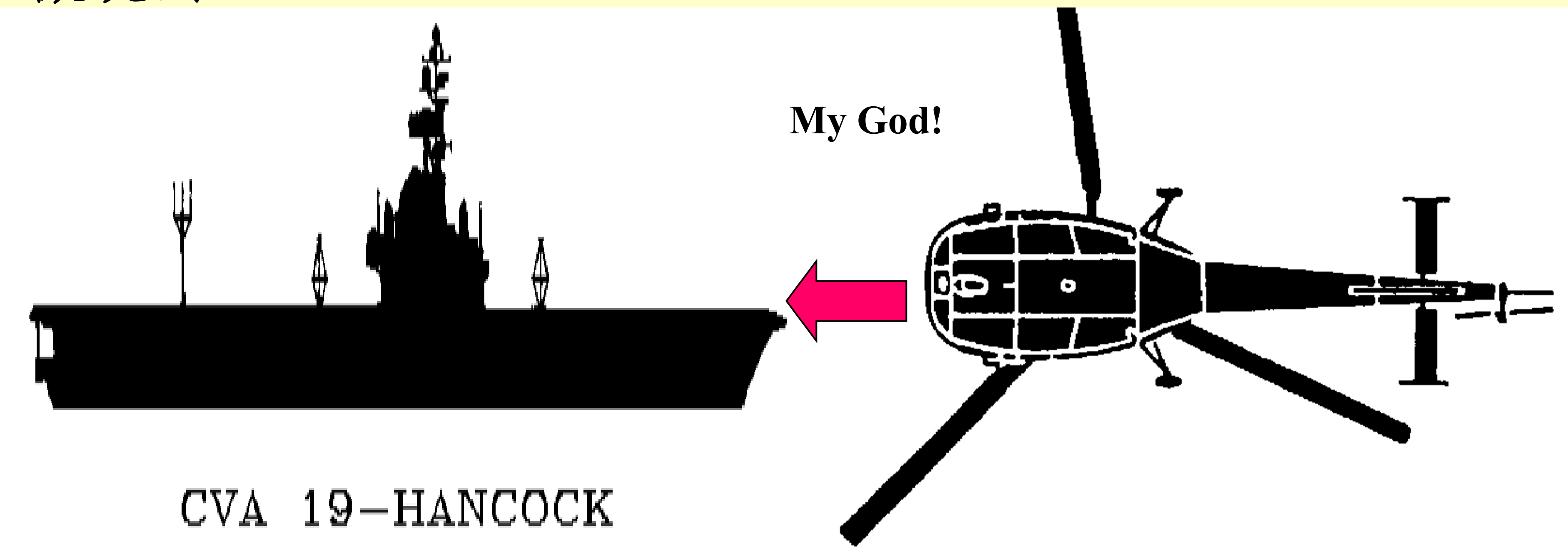
$$mv_1\cos\alpha - MV_2 = 0$$

$$V_2 = \frac{m}{M}V_1\cos\alpha$$

§ 2-3-4 Collision 碰撞

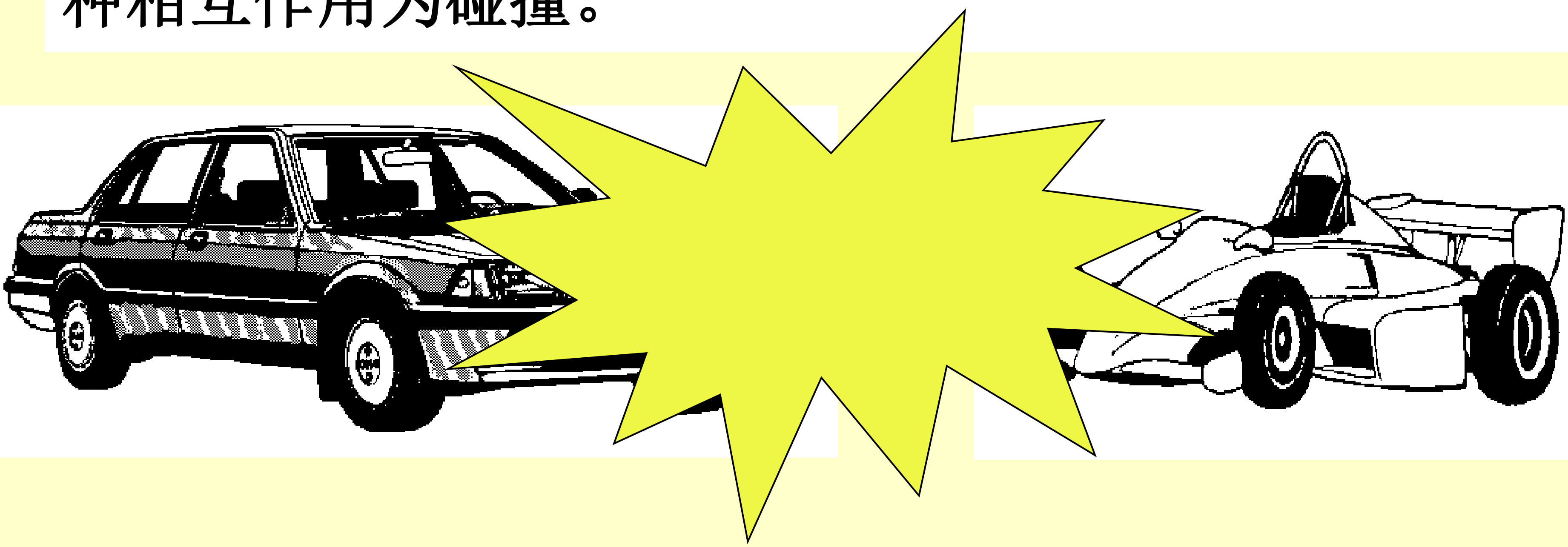
1. The types of collision:

As shown in below figure, collisions can be divided into two kinds: macroscopic and microscopic(宏观的和微观的）.



A collision: a relatively strong force (variable) acts on each colliding particle for a relatively short time, and a observable sudden or abrupt(突然的） change in the motion of the colliding particles occurs.

两个或两个以上的物体发生相互作用，使它们的运动状态在极短的时间内发生了显著的变化，物理学上称这种相互作用为碰撞。



No matter what is the nature of the objects that collide, the common rule of collisions is that the momentum of the system is always conserved.

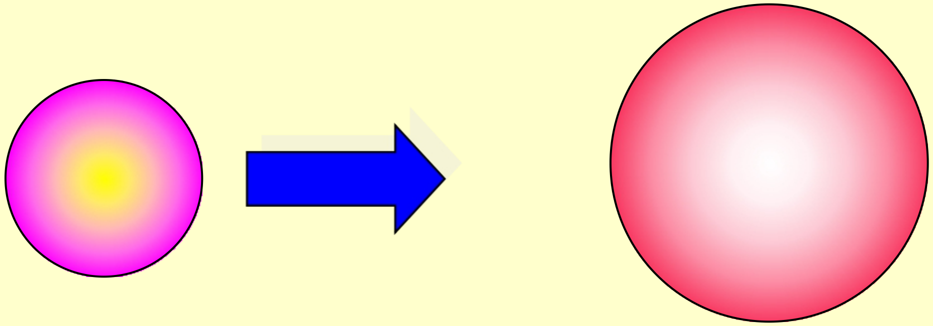
碰撞的共同规律：

在碰撞过程中，碰撞物体间的相互作用力>>外力，所以外力可以忽略不计，碰撞物体组成的系统动量守恒。

$$\text{动量} = constant$$

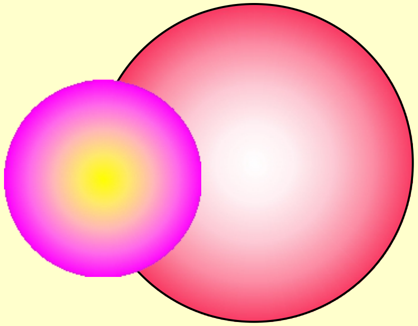
The category（分类） of collision（从能量的角度）:

(1) Completely elastic collision (briefly elastic弹性): The total kinetic energy of two colliding particles is conserved.



(2) Inelastic（非弹性） collision:

The total kinetic energy of two colliding particles is not conserved. If two colliding particles stick（粘连） together after collision, this type of collision is termed as completely inelastic or briefly inelastic collision.



碰撞的分类：

动能守恒的碰撞称为弹性碰撞。

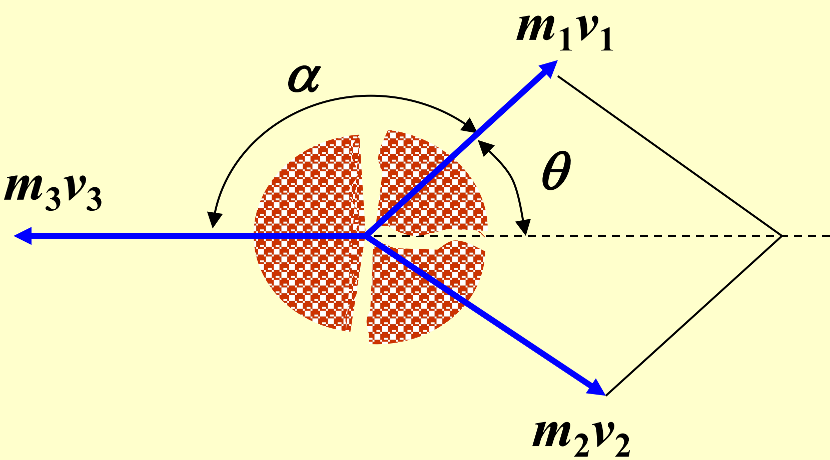
动能不守恒的碰撞称为非弹性碰撞，如果两物体碰撞后合二为一，以共同的速度运动，则称为完全非弹性碰撞。

例题4. 一个静止物体炸成三块，其中两块质量相等，且以相同速度30m/s沿相互垂直的方向飞开，第三块的质量恰好等于这两块质量的总和。试求第三块的速度（大小和方向）。

解：　物体的初始动量等于零，炸裂时爆炸力是物体内力，它远大于重力，故在爆炸中，可认为动量守恒。由此可知，物体分裂成三块后，这三块碎片的动量之和仍等于零，即

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 = 0$$

所以，这三个动量必处于同一平面内，且第三块的动量必和第一、第二块的合动量大小相等方向相反，如图所示。



因为v_1和v_2相互垂直：

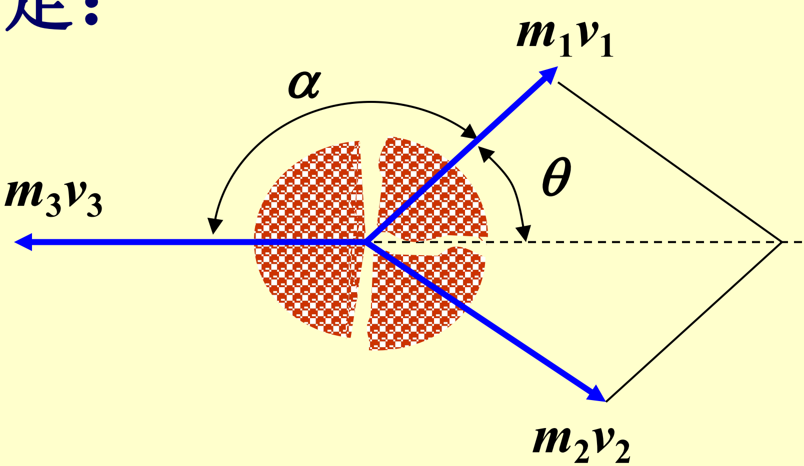
$$(m_3v_3)^2=(m_1v_1)^2+(m_2v_2)^2$$

由于$m_1=m_2=m, m_3=2m$，所以 $\vec{v}_3$ 的大小为

$$v_3=\frac{1}{2}\sqrt{v_1{}^2+v_2{}^2}=\frac{1}{2}\sqrt{30^2+30^2}=21.2m/s$$

由于$\vec{v}_1$和 $\vec{v}_3$ 所成角α由下式决定：

$$\alpha=180^0-\theta$$

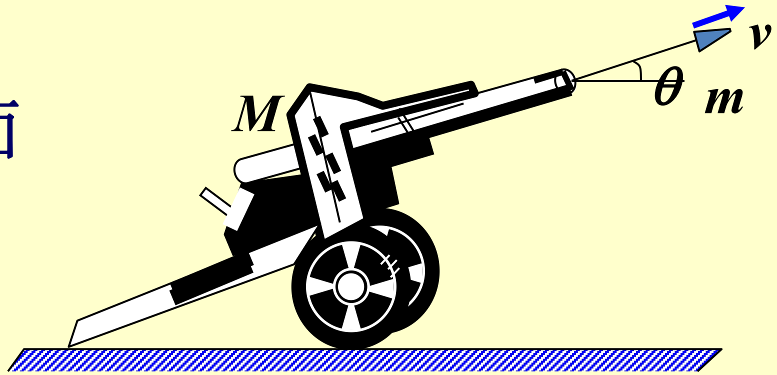


因 $tg\theta=\frac{v_2}{v_1}=1, \theta=45^0$，所以

$$\alpha=135^0$$

即$\vec{v}_3$和$\vec{v}_1$ 及$\vec{v}_2$都成135^0且三者都在同一平面内。

例题5　如图所示,设炮车以仰角θ发射一炮弹，炮车和炮弹的质量分别为M和m，炮弹的出口速度为v，求炮车的反冲速度V。炮车与地面间的摩擦力不计。



解：对地面参考系，炮弹相对地面的速度$\vec{u}$，按速度变换定理为

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{V}$$

它的水平分量为　$u_x = v\cos\theta - V$

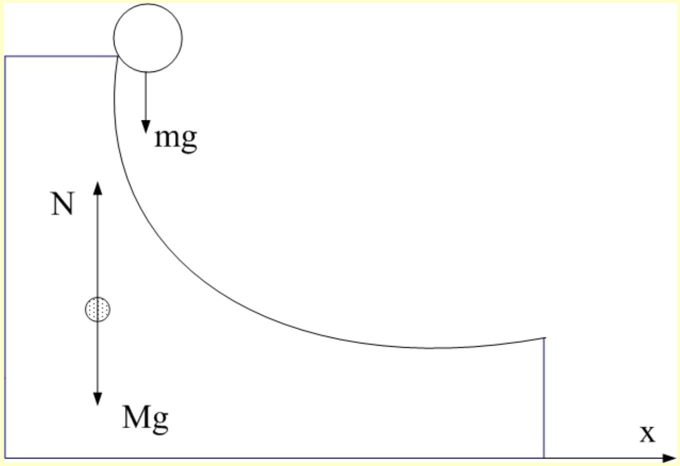
于是，炮弹在水平方向的动量为m(vcos θ-V)，而炮车在水平方向的动量为-MV。根据水平方向动量守恒，

$$-MV + m(v\cos\theta - V) = 0$$

由此得炮车的反冲速度为 $V = \dfrac{m}{m+M} v\cos\theta$

例6　如图所示，一质量为m的球在质量为M的1/4圆弧形滑槽中从静止滑下.设圆弧形槽的半径为R，如所有摩擦都可忽略，求当小球m滑到槽底时，M滑槽在水平上移动的距离.

解　以m和M为研究系统，其在水平方向不受外力(图中所画是m和M所受的竖直方向的外力)，故水平方向动量守恒.设在下滑过程中，m相对于M的滑动速度为v_x，M对地速度为V，并以水平向右为x轴正向，则在水平方向上有



$$m(v_x - V) - MV = 0$$

解得
$$v_x = \frac{m+M}{m}V$$

设m在弧形槽上运动的时间为t，而m相对于M在水平方向移动距离为R，故有

$$R = \int_0^t v_x dt = \frac{\mathrm{M+m}}{\mathrm{m}}\int_0^t V dt$$

于是滑槽在水平面上移动的距离

$$S = \int_0^t \mathrm{Vdt} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{M+m}}R$$