本 章 小 结

一、基本内容

1.库仑定律 $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{e}_r$

2.电场强度 $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$

3.场叠加原理 $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i$

4.电偶极矩 $\vec{p} = q\vec{l}$

5.电通量 $\Phi = \iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$

6.电场力的功 $A = q_0\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = q_0U_{ab}$

7. 电势能 $W = q_0U$

8.电势 $U=\dfrac{W}{q_0}=\int_a^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}$

9.电势差 $U_{ab}=U_a-U_b=\int_a^{b}\vec{E}\cdot d\vec{l}$

三、两个重要定理

1.真空中静电场的高斯定理

$$\Phi = \oint\!\!\!\oint_S \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \frac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0}$$ 有源场

2.静电场中的环路定理

$$\oint_L \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = 0$$ 保守场

四、两个重要的物理量

I.电场强度计算方法

1. 定义 $$\vec{\boldsymbol{E}}=\frac{\vec{\boldsymbol{F}}}{q_0}$$

点电荷： $$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{\mathbf{e}}_r$$

点电荷系： $$\vec{\boldsymbol{E}}=\sum_{i=1}^{n}\vec{\boldsymbol{E}}_i=\sum\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\vec{\boldsymbol{e}}_{ri}$$

连续带电体：矢量积分法

$$\vec{\boldsymbol{E}}=\int_V d\vec{\boldsymbol{E}}=\int_V\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{\boldsymbol{e}}_r$$

2.利用高斯定理——具有高度对称的场

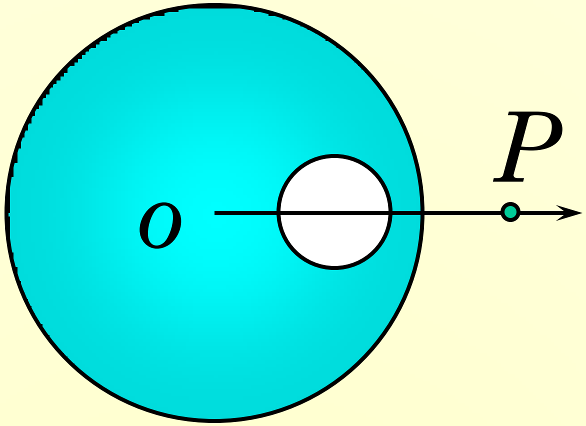
$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}$$

3.场强与电势的微分关系——已知电势

$$\vec{\mathrm{E}} = -\nabla U$$

4.灵活运用场叠加原理

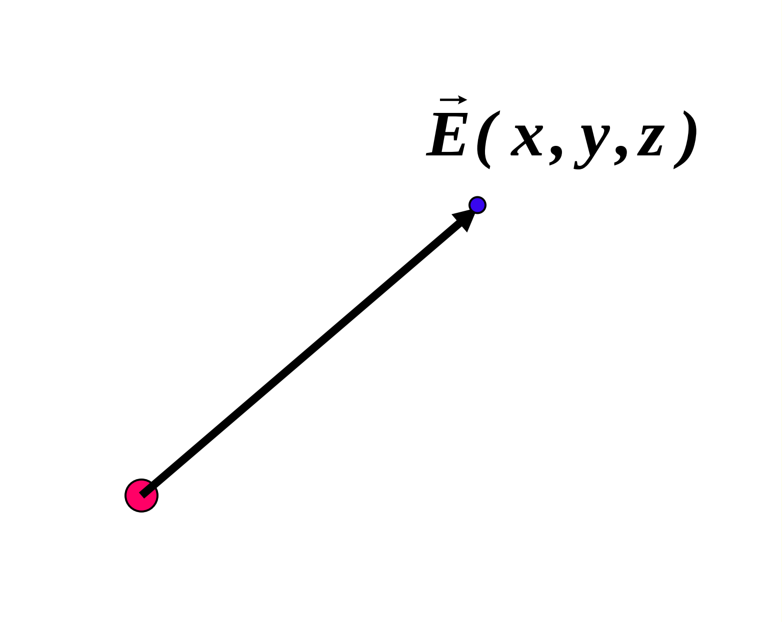
如



典型带电体场强:

（1）点电荷的电场

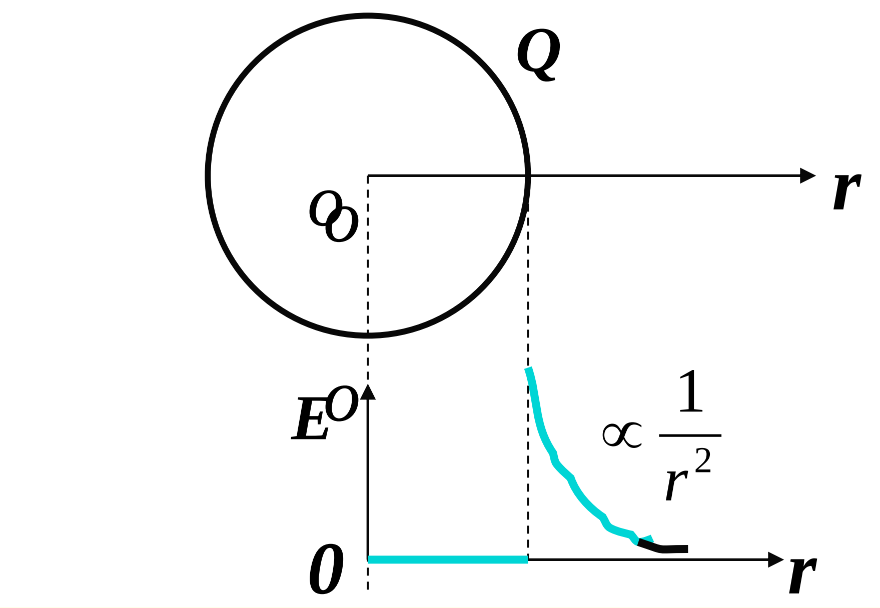
$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{r}^2}$$



（2）均匀带电球面的电场：

$$E_{内} = 0$$

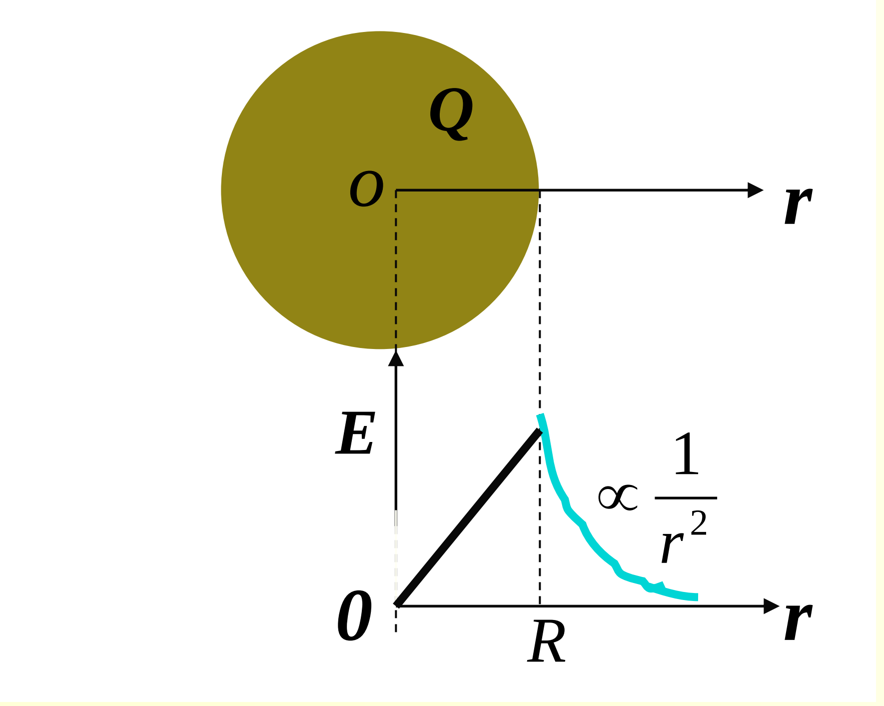
$$E_{外} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$



（3）均匀带电球体的电场：

$$E_{内} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Qr}{R^3}$$

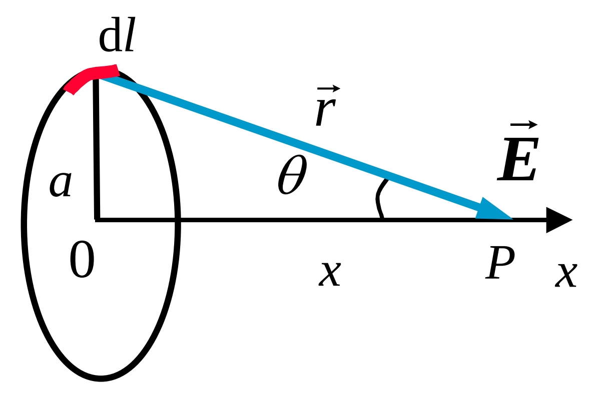
$$E_{外} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$



（4）均匀带电圆环（ R,λ ）的电场：

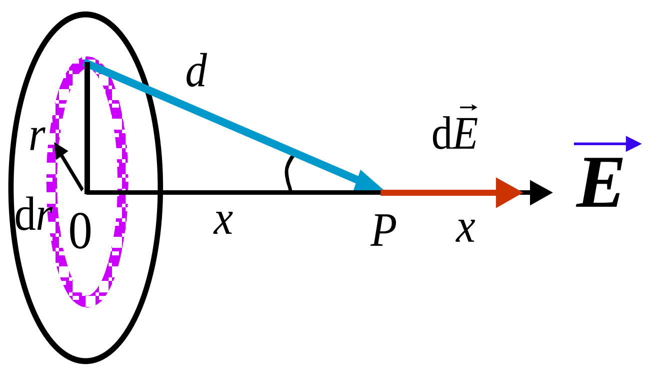
$$E=\int dE_x$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{qx}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$



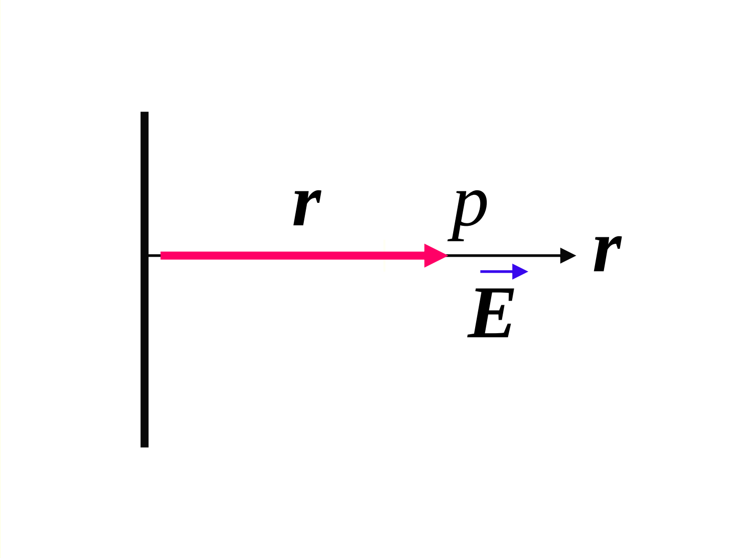
（5）均匀带电圆盘（ R,σ ）的电场：

$$E = E_x$$
$$= \int dE_x$$
$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right]$$



（6）无限长带电直线（ λ ）的电场：

$$\boldsymbol{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \boldsymbol{r}}$$

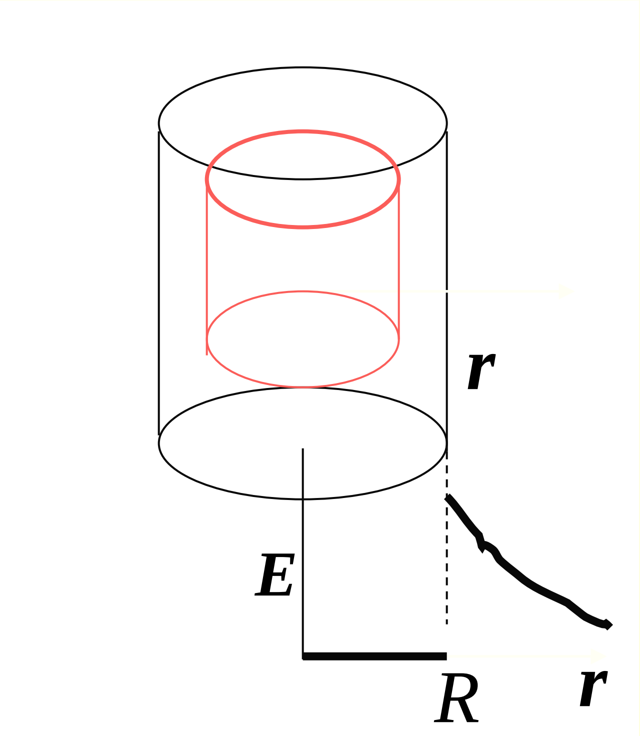


有何对称性？

（7）无限长带电圆柱面（ R, λ ）的电场：

$$E_{内} = 0$$

$$E_{外} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$



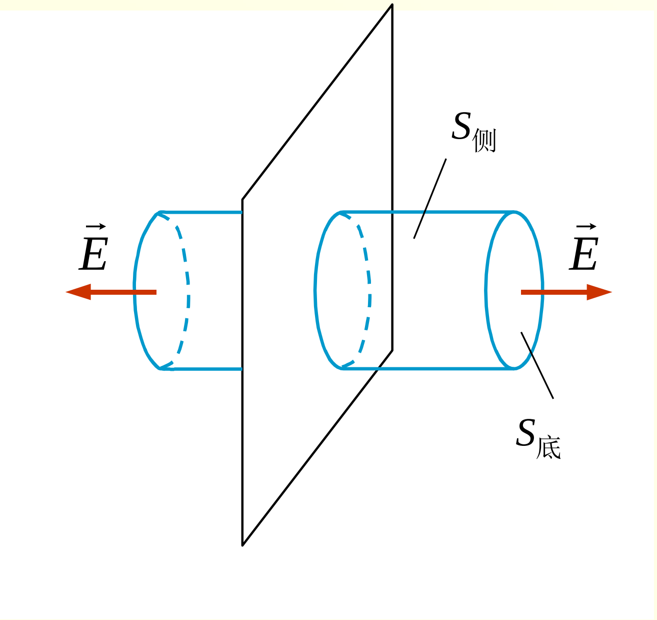
有何对称性？

电场线的方向？

无限长带电圆柱体的电场?

（8）无限大带电平面（ σ ）的电场：

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



有何对称性？

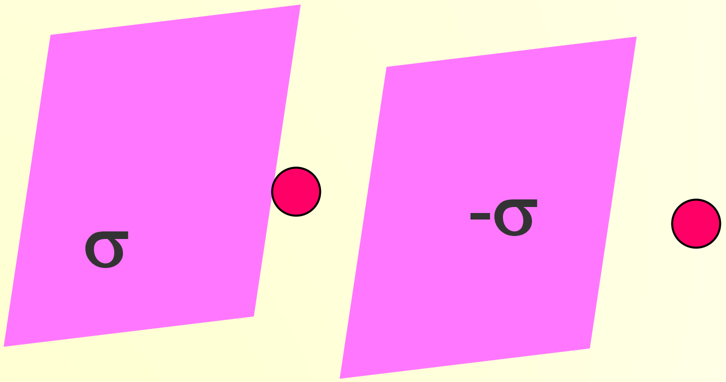
电场线的方向？

其他情况：

$$\boldsymbol{E}_{内} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

正极板指向负极板

$$\boldsymbol{E}_{外} = 0$$



II.电势的计算方法

1.定义 $$U_a = \frac{W_a}{q_0} = \int_a^{势能零点} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\ell}$$

2.点电荷电势和电势叠加原理

点电荷系： $$U = \sum_{i=1}^{n} U_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

连续带电体：代数积分法

$$U = \int_{V_{体}} dU = \int_{V_{体}} \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

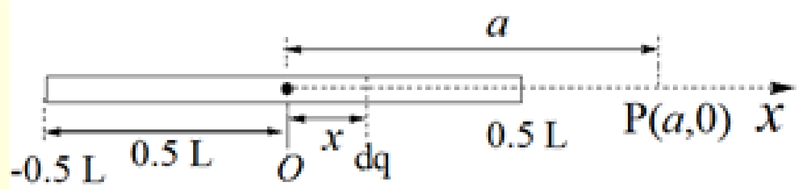
典型带电体的电势？

习　题

1 电场强度的计算--------叠加原理和积分 作业:4. 7

作业:7

(1)在棒的延长线上，离棒中心为a处的场强为 $E=\dfrac{1}{\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{4a^2-L^2}$



(a)

解: (1)以棒的中心为坐标原点，沿棒的方向建立坐标系--x轴

(2)在距离原点x处分割线元dx,其带电量为dq,

故x的变化范围: -0.5L----0.5L

(3)电荷元dq在p点产生的场强为 $dE=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dq}{(a-x)^2}$ 方向沿x轴，

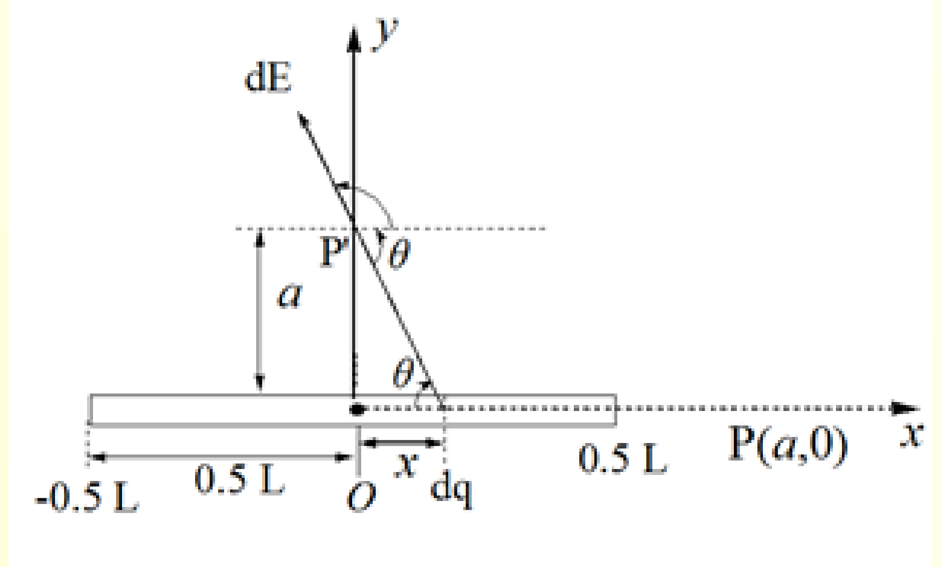
(4)电棒在p点的场强为 $E=\int dE=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\int_{-\frac{1}{2}L}^{\frac{1}{2}L}\dfrac{dx}{(a-x)^2}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\left[\dfrac{1}{a+\frac{L}{2}}-\dfrac{1}{a-\frac{L}{2}}\right]$

$$=\frac{1}{\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{4\mathrm{a}^2-L^2}$$

(2)在棒的垂直平分线上，离棒为a处的场强为 $E=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 a}\frac{Q}{\sqrt{L^2+4a^2}}$

电荷元dq在p'点产生的场强为

$$d\vec{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\int_{-\frac{1}{2}L}^{\frac{1}{2}L}\frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)}\cdot\vec{r_0}$$



(b)

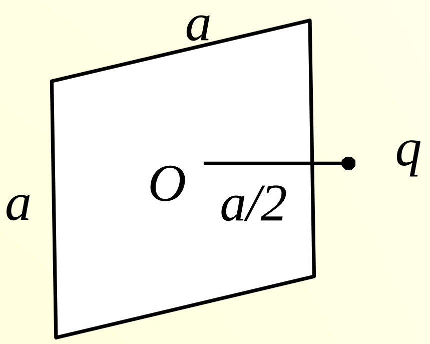
分析dE的对称性, 可知场强沿y轴方向

$$E_y=\int_{\frac{1}{2}L}^{\frac{1}{2}L}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\cdot\frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$=\frac{aQ}{4\pi\varepsilon_0 L}\cdot\int_{-\frac{1}{2}L}^{\frac{1}{2}L}\frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}}\quad=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 \mathrm{a}}\cdot\frac{Q}{\sqrt{L^2+4\mathrm{a}^2}}$$

二 高斯定理的理解和应用 作业:10. 11. 15. 18

例题1.有一边长为a的正方形平面，在其中垂线上距中心O点$a/2$处，有一电荷为q的正点电荷，如图所示，则通过该平面的电场强度通量为



(A) $\dfrac{q}{3\varepsilon_0}$. (B) $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}$

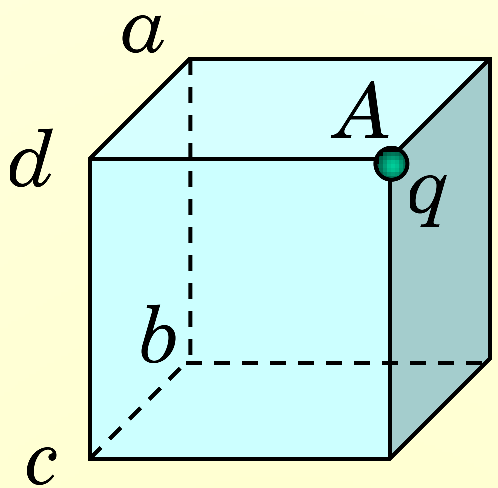
(C) $\dfrac{q}{3\pi\varepsilon_0}$. (D) $\dfrac{q}{6\varepsilon_0}$

[D]

例题2.如图所示，一个带电量为 q 的点电荷位于正立方体的 A 角上，则通过侧面 $abcd$ 的电场强度通量等于：

（A）$q/6\varepsilon_0$；　　（B）$q/12\varepsilon_0$ ；

（C）$q/24\varepsilon_0$；　　（D）$q/36\varepsilon_0$.



[C]

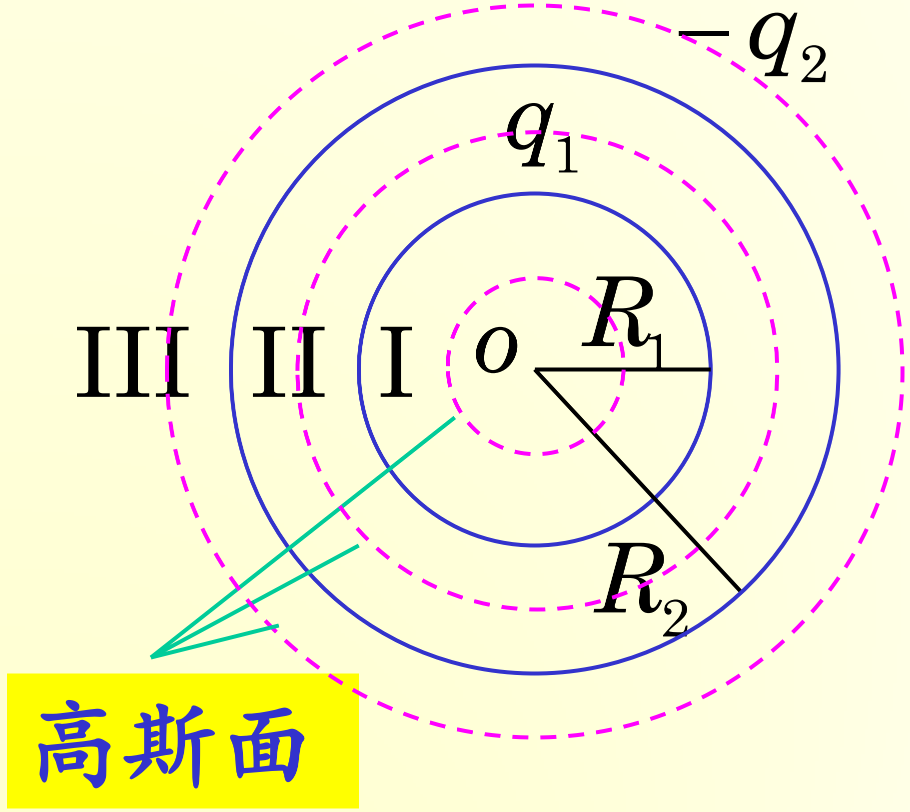
例题3: 两同心均匀带电球面，带电量分别为 q_1、$-q_2$，半径分别为 R_1、R_2，求各区域内的场强和电势。

解: 在三个区域中分别作高斯球面，

$$\oint_S \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}$$

$$E 4\pi r^2 = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sum q}{r^2}$$



$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sum q}{r^2}$$

$r < R_1,\qquad \sum q = 0,$

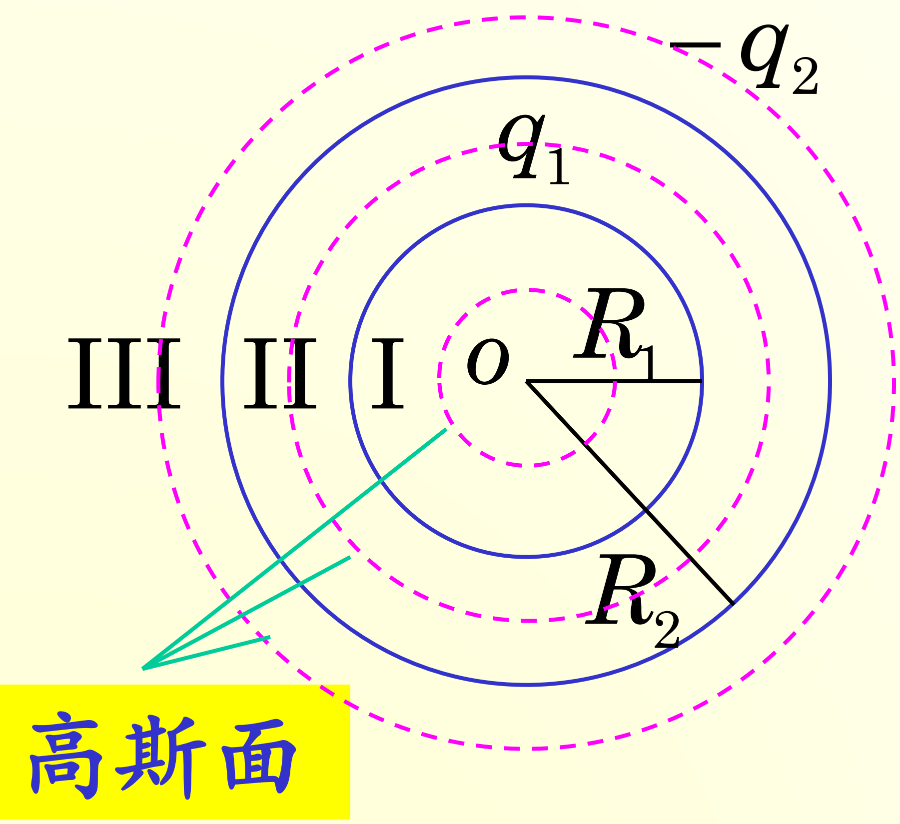
$$E_1 = 0$$

$R_1 < r < R_2,\ \sum q = q_1$

$$E_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}$$

$r > R_2,\qquad \sum q = q_1 - q_2$

$$E_3=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1-q_2}{r^2}$$



I区电势

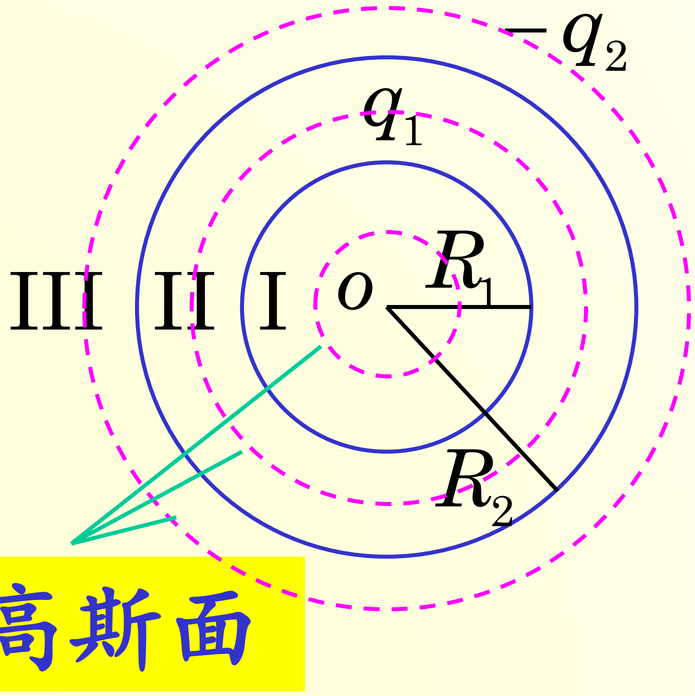
$$U_1=\int_r^{R_1}\vec{E}_1\cdot d\vec{r}+\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}_2\cdot d\vec{r}+\int_{R_2}^{\infty}\vec{E}_3\cdot d\vec{r}$$

$$=0+\int_{R_1}^{R_2}E_2dr+\int_{R_2}^{\infty}E_3dr$$

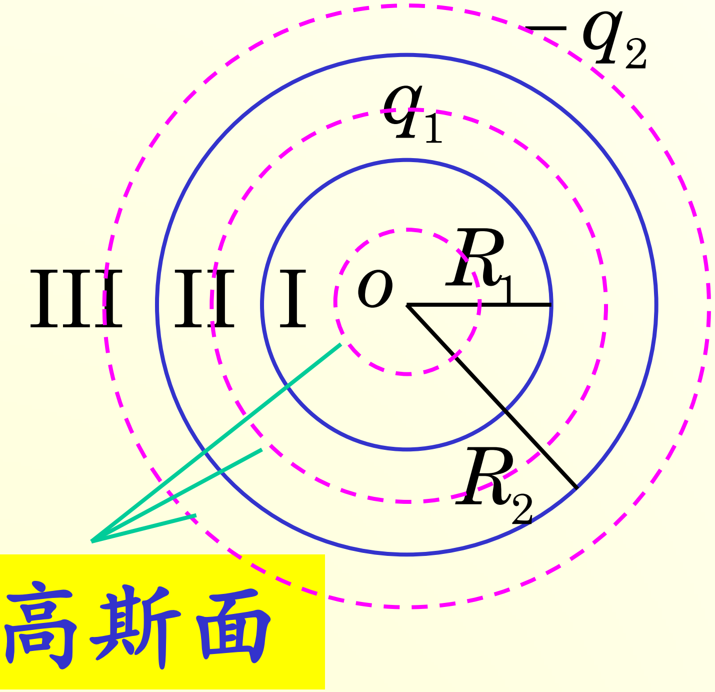
$$=\int_{R_1}^{R_2}\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr+\int_{R_2}^{\infty}\frac{q_1-q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{R_1}-\frac{q_1}{R_2}\right)+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1-q_2}{R_2}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{R_1}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{R_2}$$



II区电势



$$U_2 = \int_r^{R_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} + \int_{R_2}^{\infty} \vec{E}_3 \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_r^{R_2} E_2 dr + \int_{R_2}^{\infty} E_3 dr$$

$$= \int_r^{R_2} \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr + \int_{R_2}^{\infty} \frac{q_1 - q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{r} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2}{R_2}$$

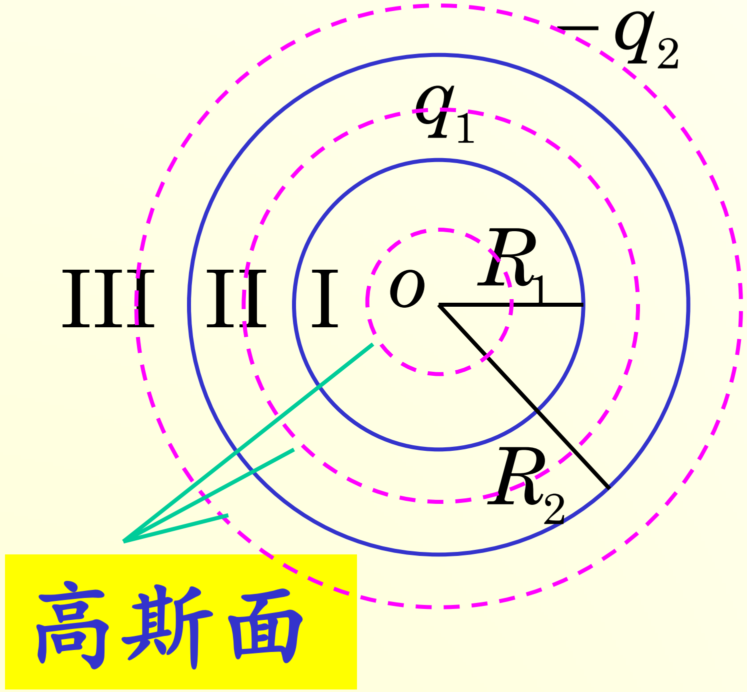
III 区电势

$$U_3 = \int_r^{\infty} \vec{\boldsymbol{E}}_3 \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$$

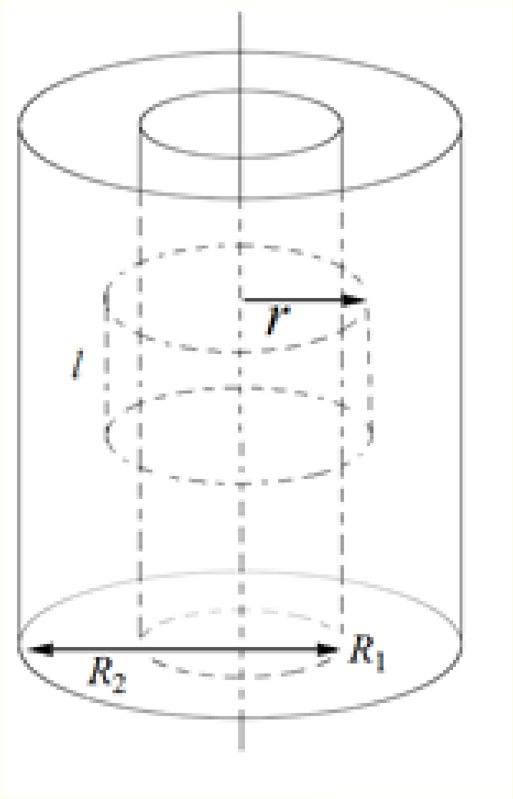
$$= \int_r^{\infty} E_3 dr$$

$$= \int_r^{\infty} \frac{q_1 - q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 - q_2}{r}$$



作业18题: 两个“无限长”同轴圆柱柱面，半径分别为R_1和R_2 ($R_2>R_1$)，带有等量异号电荷，每单位长度的电量为λ。试分别求出：$r<R_1$，$r>R_2$，$R_1<r<R_2$时离轴线的垂直距离为r处的场强。



解:分析得场是轴对称,故做一同轴圆柱高斯面，半径为r，长为l，由高斯定理得：

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \iint_{s(柱面)} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \iint_{s(上底)} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \iint_{s(下底)} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= \iint_{s(柱面)} \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2\pi r \ell E = \frac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0}$$

$r<R_1$时 $\quad \sum q_{内}=0 \quad E_1=0$

$r_1 \le r < R_2$时 $\quad \sum q_{内}=\lambda l \quad E_2=\dfrac{\lambda l}{2\pi r l \varepsilon_0}=\dfrac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}$

$r>R_2$时 $\quad \sum q_{内}=\lambda l-\lambda l=0 \quad E_3=0$

三 电势的计算　　作业:25, 26, 28

作业26题 :在3-26题图中，r =6 cm，a =8 cm，q_1=3×10^{-8} C，q_2=-3×10^{-8} C，问：

(1)将电量为2×10^{-9} C的点电荷从A点移到B点，电场力做功多少？

(2)将此电荷从C点沿任意路径移到D点，电场力做功多少？

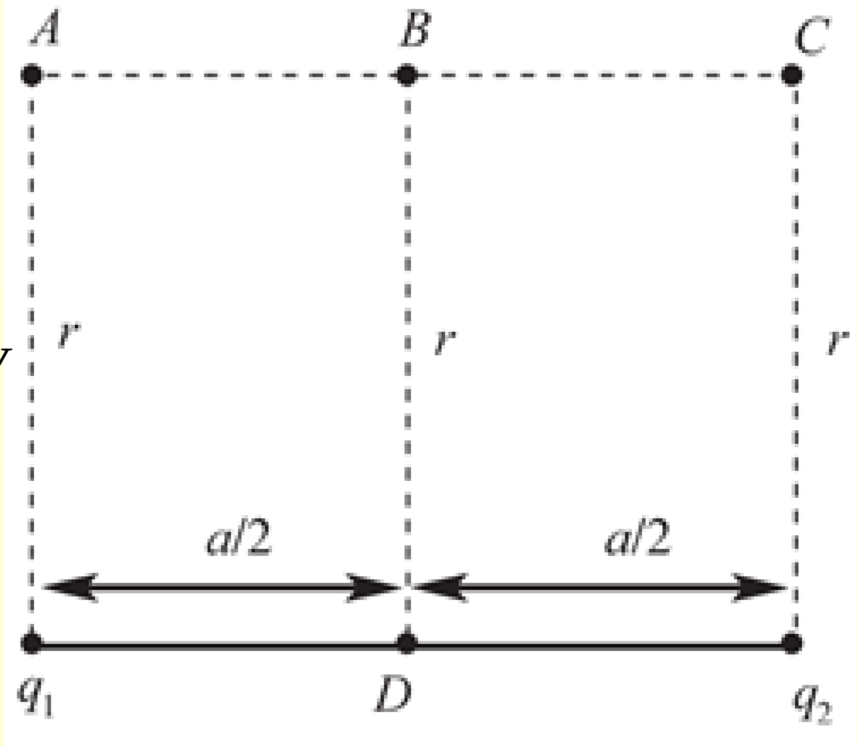
解：由电势叠加原理求得

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r} + \frac{q_2}{\sqrt{a^2 + r^2}}\right)$$

$$= 9\times10^9 \times \left(\frac{3}{0.06} - \frac{3}{\sqrt{(0.06)^2 + (0.08)^2}}\right)\times10^{-6}V$$

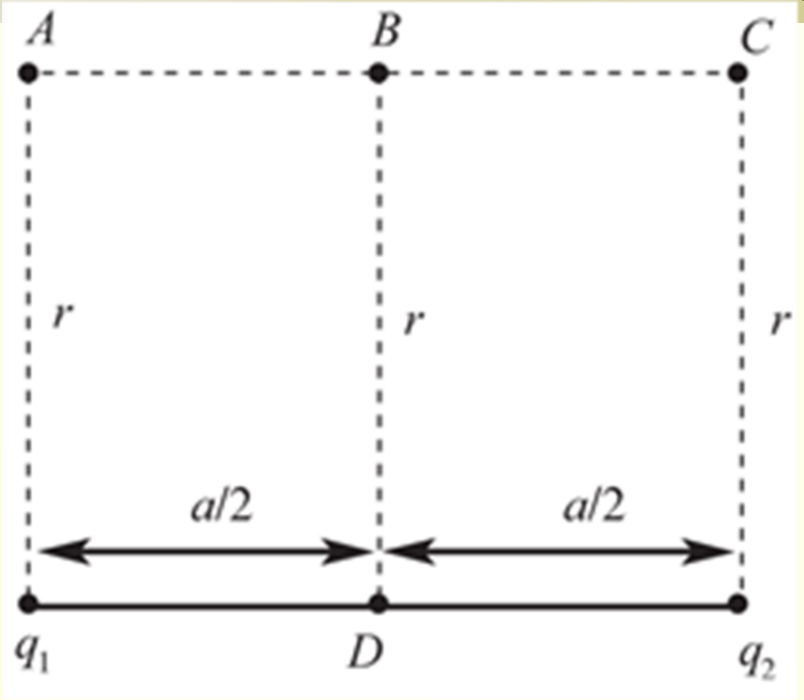
$$= 1.8\times10^3 V$$

$$V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 + q_2}{\sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4}}} = 0$$



$$V_C = V_A = -1.8\times10^3 V$$

$$V_D = V_B = 0$$



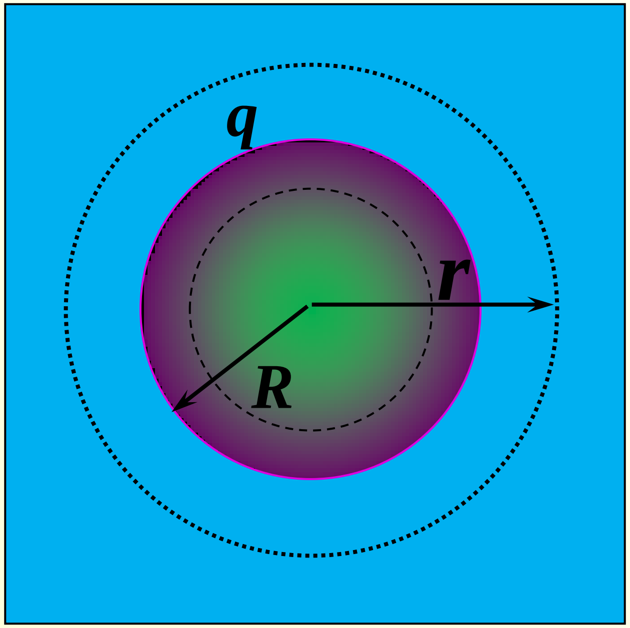
(1)将2×10^{-9} C的点电荷由A移到B点时，电场力做的功等于电势能增量的负值

$$A_1 = -(0 - qV_A) = 2\times1.8\times10^{-6} J = 3.6\times10^{-6}\ \mathrm{J}$$

(2)将电荷从C点移到D点时，电场力做的功

$$A_2 = -(0 - qV_C) = -3.6\times10^{-6}\ \mathrm{J}$$

例题4. 半径为$\boldsymbol{R}$的均匀带电球面，带电量为$\boldsymbol{q}$。求电势分布。



解：$\oint\!\!\!\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{s} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i \begin{cases} \vec{E}_{内} = 0 & (r<R) \\ \vec{E}_{外} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\hat{r} & (r>R) \end{cases}$

$(r \geq R)$

$$U_{外} = \int_r^{\infty} \vec{E}_{外}\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_r^{\infty} E_{外} dr = \int_r^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r}$$

$(r < R)$

$$U_{内} = \int_r^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_r^{R} \vec{E}_{内}\cdot d\vec{r} + \int_R^{\infty} \vec{E}_{外}\cdot d\vec{r} = \int_r^{R} E_{内} dr + \int_R^{\infty} E_{外} dr$$

$$= \int_r^{R} 0 dr + \int_R^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o R}$$

自己推导均匀带电同心球面,各区域的电场和电势分布!

四 电场强度的计算——场强与电势梯度的关系的应用

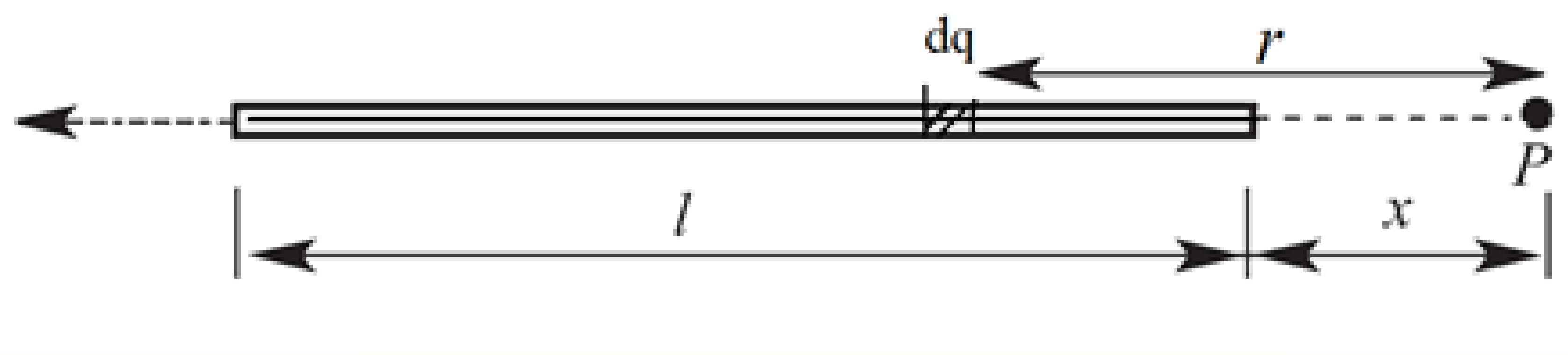
作业:29

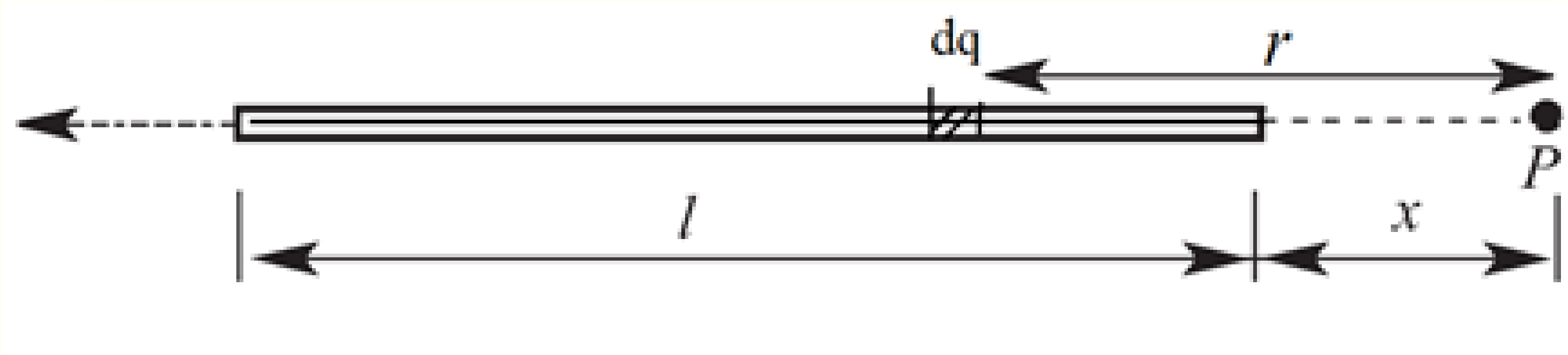
$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) = -gradU = -\nabla U$$

29题: 长为l的直线上每单位长度均匀分布电荷λ

(1)试确定在该段的延长线上与一段相距为x的一点P处的电势。

(2)应用(1)结果计算P点场强的x分量和y分量，如3-29题图所示。





解：以P点为坐标原点,建立如图坐标*r*轴,在轴上距P点为*r*处截取线元*dr*,该电荷元电量为 $dq = \lambda dr$

该电荷元在P点产生的电势为 $dV = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \dfrac{\lambda dr}{4\pi\varepsilon_0 r}$

整个电荷棒在P点产生的电势为

$$V = \int dV = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_x^{x+l}\frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{x+l}{x}$$

(2)由电势梯度，求得

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-l}{x(x+l)} = \frac{\lambda l}{4\pi\varepsilon_0 x(x+l)}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = 0$$