山东科技大学 2008—2009 学年第一学期

《线性代数》考试试卷（A 卷）

班级＿＿＿＿＿＿＿＿　　姓名＿＿＿＿＿＿＿　　学号＿＿＿＿＿＿

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总得分	评卷人	审核人
得分											

一、填空题（每题 4 分，共 20 分）

1、已知向量组$\alpha_1=(1,\ 2,\ -1,\ 1)^T$，$\alpha_2=(2,\ 0,\ t,\ 0)^T$，$\alpha_3=(0,\ -4,\ 5,\ -2)^T$的秩为2，则$t=$＿＿＿＿＿＿＿＿。

2、A为n阶方阵，且$|A|=2$，则$|AA^*|=$＿＿＿＿＿＿。

3、设三阶矩阵A有三个特征值$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，如果$|A|=36$，$\lambda_1=2,\lambda_3=3$，则$\lambda_3=$＿＿＿＿。

4．写出四级行列式中含有因子$a_{11}a_{23}$的项＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

5．已知二次型$f(x_1,\ x_2,\ x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$是正定二次型，则$t$的取值范围＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

二、选择题（每题 4 分，共 20 分）

1．设向量组$I:\alpha_1=(a_1,a_2,a_3)^T,\alpha_2=(b_1,b_2,b_3)^T,\alpha_3=(c_1,c_2,c_3)^T$；

$II:\beta_1=(a_1,a_2,a_3,a_4)^T,\beta_2=(b_1,b_2,b_3,b_4)^T,\beta_3=(c_1,c_2,c_3,c_4)^T$，则（　　）。

A. (I)线性相关，则(II)线性相关　　B. (I)线性无关，则(II)线性无关

C. (II)线性无关，则(I)线性无关　　D. (I)线性无关的充要条件是(II)线性无关

2．设A是三阶方阵，P是三阶可逆矩阵，则（　）。

A．秩$(PA)<$秩(A)　　B．秩$(PA)>$秩(A)　　C．秩$(PA)=$秩(A)　　D．秩$(PA)=3$

3．设A是数域P上n阶可逆矩阵，则A的不同特征值的个数（　）。

A．小于等于n　　B．大于等于n　　C．等于n　　D．不等于n

4．设A是n阶可逆矩阵，则（　）。

A．A与E相似　　B．A与E合同　　C．A与E等价　　D．A与E相等

5．设n元齐次线性方程组$Ax=0$中$R(A)=r$，则$Ax=0$有非零解的充要条件是（　　）。

A. $r=n$　　B. $r<n$　　C. $r\geq n$　　D. $r>n$

三、（8分）计算n阶行列式$\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$的值。

四、（8分）解矩阵方程$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} X=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$。

五、（12分）问λ取何值时，非齐次线性方程组$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda \\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2 \end{cases}$，

（1）有唯一解；　（2）无解；　（3）无穷多个解并求通解。

六、（8分）证明：若a_1，a_2，a_3线性相关，而a_2，a_3，a_4线性无关.

则（1）a_1可由a_2，a_3线性表示；（2）a_4不能由a_1，a_2，a_3线性表示。

七、（12分）设矩阵$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{bmatrix}$，试求（1）矩阵$A$的秩；（2）矩阵$A$的列向量组的一个最大无关组；并把不属于最大无关组的列向量用最大无关组线性表示。

八、（12分）已知实二次型$f=-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$，

（1）写出f的矩阵；（2）求一个正交变换$x=py$把f化为标准形；

（3）写出f的正惯性指数。

山东科技大学 2008—2009 学年第一学期

《线性代数》考试试卷（A 卷答案）

一、1．3　　2．2^n　　3．6　　4．$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 与 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$　　5．$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$

二、B　C　A　C　B

三、原式= $\begin{bmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{bmatrix}$ ……………………3 分

$$=\left[x+(n-1)a\right]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$ ……………………5 分

$$=\left[x+(n-1)a\right]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}=\left[x+(n-1)a\right](x-a)^{n-1}$$ ……………8 分

四、解：由 $|A|=-3\neq 0$，A 可逆，故可用方程边左乘 A^{-1}

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$，……4 分，$$X=A^{-1}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -\frac{10}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$ ……8 分

五、解：$|A|=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$

当 $|A|\neq 0$ 时，即当 $\lambda\neq 1$，$\lambda\neq -2$ 时，$R(A)=3$，方程组有唯一解。　………3 分

当 $\lambda=1$ 时，增广矩阵 $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

可见 $R(A)=R(B)=1<3$，方程有无穷多解。　……………6 分

取$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\eta=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，则通解$X=C_1\xi_1+C_2\xi_2+\eta$ ……………9 分

当$\lambda=-2$时，$B=\begin{bmatrix}-2&1&1&1\\1&-2&1&-2\\1&1&-2&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&-2&4\\0&-3&3&-6\\0&3&-3&9\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&-2&4\\0&-3&3&-6\\0&0&0&3\end{bmatrix}$

可见$R(A)=2$，$R(B)=3$，$R(A)\neq R(B)$，于是方程组无解。 ……12 分

六、证明：1）$\because a_2$，a_3，a_4线性无关，$\therefore$ a_2，a_3线性无关，

且a_1，a_2，a_3线性相关，故a_1可由a_2，a_3线性表示。 …………4 分

2）反证，设a_4可由a_1，a_2，a_3线性表示，$a_4=l_1a_1+l_2a_2+l_3a_3$，

由 1）可设$a_1=k_1a_2+k_2a_3$，代入上式$a_4=(l_1k_1+l_2)a_2+(l_1k_2+l_3)a_3$，

这与a_2，a_3，a_4线性无关矛盾，所以a_4不能由a_1，a_2，a_3线性表示。 ……8 分

七、解：（1）对A实行初等行变换化为行阶梯形矩阵

$$A\sim\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\quad 知 R(A)=3$$ …………4 分

（2）由$R(A)=3$知列向量组的最大无关组含 3 个向量，而三个非零行的非零首元在 1，2，4 三列，故a_1，a_2，a_4为列向量组的一个最大无关组。………8 分

对A实行初等行变换化为行最简形矩阵

$A\sim\begin{bmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$，故$a_3=-a_1-a_2$，$a_5=4a_1+3a_2-3a_4$…………12 分

八、解：1）$A=\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$ ………………………2 分

2）由$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&-1&1\\-1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1+\lambda&0\\-1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)$

求得A的特征值为$\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$ ………5 分

对应$\lambda_1=-2$解方程$(A+2E)X=0$得基础解系$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，

将ξ_1单位化，得$P_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，　　　　…………7 分

对应$\lambda_2=\lambda_3=1$解方程$(A-E)X=0$得基础解系$\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

将ξ_2，ξ_3正交化，$\eta_2=\xi_2$，$\eta_3=\xi_3-\frac{[\eta_2,\xi_3]}{\|\eta_2\|^2}\eta_2=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$，将$\eta_2$，$\eta_3$单位化，

得$P_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$，$P_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$ 故$P=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$，

所求正交变换$x=py$，标准形$f=-2y_1^2+y_2^2+y_3^2$　　　　…………10 分

3）2　　　　……12 分

山东科技大学 2008—2009 学年第一学期

《线性代数》考试试卷（B 卷）

班级________________　　姓名_____________　　学号____________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总得分	评卷人	审核人
得分											

一、填空题（每题 4 分，共 20 分）

1．已知 $a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{24}$ 是四阶行列式中的一项，且带负号，则 $i=$________，$k=$_________。

2．设 A 为 n 阶矩阵，E 为 n 阶单位矩阵，若 A 有特征值 λ，则 A^2+A+E 必将有特征值_________________。

3．设 A 为 3 阶方阵，且 $|A|=1$，则 $\left|2A^{-1}+3A^*\right|=$ _____________。

4．$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$ 的 充分必要条件是 ____________。

5．已知 $a_1=(a,\ 1,\ 1)^T$，$a_2=(1,\ a,\ -1)^T$，$a_3=(1,\ -1,\ a)^T$ 线性相关，则 a 为_____________。

二、选择题（每题 4 分，共 20 分）

1．设 A 是正交矩阵，则运算（　）正确。

A．$|A|=1$　B．$|A|=-1$　C．A 是对称矩阵 D．A^T 与 A 是可交换矩阵

2．设 A、B 都是 n 阶方阵，$AB=0$，则（　）。

A．秩 $(A)+$ 秩 $(B)=n$　　B．秩 $(A)+$ 秩 $(B)\le n$

C．秩 $(A)+$ 秩 $(B)\ge n$　　D．秩 $(A)+$ 秩 $(B)=0$

3．设 A 是三阶矩阵，P 是三阶初等矩阵，则（　）。

A．秩 $(PA)<$ 秩 (A)　　B．秩 $(PA)>$ 秩 (A)

C．秩 $(PA)=$ 秩 (A)　　D．秩 $(PA)=3$

4．设 A 是 n 阶矩阵，如果 $|A|=0$，则 A 的特征值（　）。

A．全是零　　B．全不是零　　C．至少有一个是零　　D．可以是任意数

5．如果 n 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 的秩小于 n，则（　）。

A．方程组有无穷多解　　B．方程组有唯一解

C．方程组无解　　D．不能断定解的情况

三、（8 分）求解矩阵方程 $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\3&2&1\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}2&-1&1\\0&1&2\\1&-2&3\end{bmatrix}$。

四、（8 分）计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix}a&1&1&\cdots&1\\1&a&1&\cdots&1\\1&1&a&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&1&\cdots&a\end{vmatrix}$ 的值。

五、（12 分）设有线性方程组 $\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0\\x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3\\x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda\end{cases}$ 问 λ 取何值时，

方程组（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无限多个解，并在无限多解时求通解。

六、（12分）设有向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_5=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

试求（1）该向量组的秩；　　（2）该向量组的一个最大无关组；

（3）用（2）中选定的最大无关组表示其余向量。

七、（12分）设有二次型 $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$

（1）写出 f 的矩阵；　（2）求一个正交变换 $x=py$ 把 f 化为标准形。

八、（8 分）证明：若 a_1，a_2，a_3 线性相关，而 a_2，a_3，a_4 线性无关，

则（1）a_1 可由 a_2，a_3 线性表示；（2）a_4 不能由 a_1，a_2，a_3 线性表示。

山东科技大学 2008—2009 学年第一学期

《线性代数》考试试卷（B 卷答案）

一、1．$i=3$，$k=1$　　2．$\lambda^2+\lambda+1$　　3．125　　4．$AB=BA$　5．-1 或 2

二、D　B　C　C　D

三、解：由$|A|=-3\neq 0$，A可逆，故可用方程两边左乘A^{-1}

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}\cdots\cdots 4\text{ 分，}\quad X=A^{-1}\begin{bmatrix}2&-1&1\\0&1&2\\1&-2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&1\\-\frac{10}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{5}{3}&\frac{1}{3}&\frac{4}{3}\end{bmatrix}\cdots\cdots\cdots 8\text{ 分}$$

四、原式$=\begin{vmatrix}a+(n-1)&a+(n-1)&\cdots&\cdots&a+(n-1)\\1&a&\cdots&\cdots&1\\1&1&\cdots&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&\cdots&\cdots&a\end{vmatrix}$ ……………3 分

$$=[a+(n-1)]\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\1&a&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&a\end{bmatrix}$$ ………………………………5 分

$$=[a+(n-1)](a-1)^{n-1}$$ …………………………………8 分

五、$|A|=\begin{vmatrix}1+\lambda&1&1\\1&1+\lambda&1\\1&1&1+\lambda\end{vmatrix}=(3+\lambda)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1+\lambda&1\\1&1&1+\lambda\end{vmatrix}=(3+\lambda)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=(3+\lambda)\lambda^2$

因此，当$\lambda\neq 0$且$\lambda\neq -3$时，方程组有唯一解。　……………………3 分

当$\lambda=0$时，$B=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&3\\1&1&1&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$知$R(A)=1$，$R(B)=2$

故方程组无解。　……………………6 分

当$\lambda=-3$时，$B=\begin{bmatrix}-2&1&1&0\\1&-2&1&3\\1&1&-2&-3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ ……………9 分

知$R(A)=R(B)=2$，故方程组有无限多个解，

且通解为$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\end{bmatrix}(c\in R)$ ………12 分

六、解：令 A=$(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4\quad\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&2&3&0&1\\2&1&1&2&1\\1&3&4&0&1\end{pmatrix}$，利用初等行变换

得$A\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1&\frac{1}{2}\\0&1&0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&1&-1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ ………6 分

故（1）该向量组的秩为 3 ………8 分

（2）该向量组的一个最大无关组为α_1，α_2，α_3 ………10 分

（3）$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3\quad\alpha_5=\frac{1}{2}\alpha_1-\frac{1}{2}\alpha_2+\frac{1}{2}\alpha_3$ ………12 分

七、解：（1）二次型 f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ …………2 分

（2）求 A 的特征值：

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&2\\2&1-\lambda&2\\2&2&1-\lambda\end{vmatrix}\overset{r_1+r_2+r_3}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}5-\lambda&5-\lambda&5-\lambda\\2&1-\lambda&2\\2&2&1-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)(\lambda+1)^2$$

A 的特征值为 5，-1，-1 ………… 5 分

求 3 个标准正交的特征向量：

对于$\lambda_1=5$，解得特征向量 $\xi_1=(1,\ 1,\ 1)^T$，标准化得$P_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$…6 分

对于$\lambda_2=\lambda_3=-1$，解得特征向量 $\xi_2=(-1,\ 1,\ 0)^T$，$\xi_3=(-1,\ 0,\ 1)^T$

正交化后再单位化有 $P_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)^T$，$P_3=\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^T$ …9 分

求正交变换矩阵

令 $P=\left(P_1,\ \ P_2,\ \ P_3\right)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ 于是 $P^{-1}AP=P^TAP=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ……10 分

做正交变换 $x=PY$，则 $f=X^TAX=Y^T\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}Y=5y_1^2-y_2^2-y_3^2$ ………12 分

八、证明：1）$\because a_2$，a_3 线性无关，且 a_1，a_2，a_3 线性相关，

故 a_1 可由 a_2，a_3 线性表示。 ……………………4 分

2）反证，设 a_4 可由 a_1，a_2，a_3 线性表示，$a_4=l_1\,a_1+l_2\,a_2+l_3\,a_3$，由 1）可设 $a_1=k_1\,a_2+k_2\,a_3$，代入上式 $a_4=$（$l_1\,k_1+l_2$）a_2+（$l_1\,k_2+l_3$）a_3，这与 a_2，a_3，a_4 线性无关矛盾，所以 a_4 不能由 a_1，a_2，a_3 线性表示。 ……………8 分

山东科技大学 2010—2011 学年第一学期

《线性代数》考试试卷（B 卷）

班级________________ 姓名______________ 学号____________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总得分	评卷人	审核人
得分											

一、填空题（每题 4 分，共 16 分）

1．已知 $a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{24}$ 是四阶行列式中的一项，且带负号，则 $i=$________，$k=$__________。

2.设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$，则 $A^TB=$__________。

3．设 A 为 3 阶方阵，且 $|A|=1$，则 $\left|2A^{-1}+3A^*\right|=$ ______________。

4．已知 $a_1=(a,\ 1,\ 1)^T$，$a_2=(1,\ a,\ -1)^T$，$a_3=(1,\ -1,\ a)^T$ 线性相关，则 a 为______________。

二、选择题（每题 4 分，共 16 分）

1．设 A 是正交矩阵，则运算（　）正确。

A．$|A|=1$　B．$|A|=-1$　C．A 是对称矩阵 D．A^T 与 A 是可交换矩阵

2．设 $A=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{bmatrix}$，$B$，$C$ 都是方阵，且 BAC 有意义，则（　）

A．B，C 都是二阶方阵　　B．B，C 分别是二、三阶方阵

C．B，C 都是三阶方阵　　D．B，C 分别是三、二阶方阵

3．设 A 是三阶矩阵，P 是三阶初等矩阵，则（　）。

A．秩$(PA)<$秩(A)　　B．秩$(PA)>$秩(A)

C．秩$(PA)=$秩(A)　　D．秩$(PA)=3$

4．如果n元非齐次线性方程组$Ax=b$的系数矩阵A的秩小于n，则（　）。

A．方程组有无穷多解　　　　B．方程组有唯一解

C．方程组无解　　　　　　　D．不能断定解的情况

三、（10 分）求解矩阵方程$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\3&2&1\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}2&-1&1\\0&1&2\\1&-2&3\end{bmatrix}$。

四、（12 分）计算n阶行列式$\begin{vmatrix}a&1&1&\cdots&1\\1&a&1&\cdots&1\\1&1&a&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&1&\cdots&a\end{vmatrix}$的值。

五、（12 分）设有线性方程组$\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0\\x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3\\x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda\end{cases}$问$\lambda$取何值时，

方程组（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无限多个解，并在无限多解时求通解。

六、（12分）设有向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_5=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

试求（1）该向量组的秩；　　（2）该向量组的一个最大无关组；

（3）用（2）中选定的最大无关组表示其余向量。

七、（10 分）证明：若a_1，a_2，a_3线性相关，而a_2，a_3，a_4线性无关,

则（1）a_1可由a_2，a_3线性表示；（2）a_4不能由a_1，a_2，a_3线性表示。

八、（12 分）设$A=\begin{bmatrix}3&-1\\-1&3\end{bmatrix}$求特征值及对应的特征向量.

2010-2011B卷

《线性代数》考试试卷（B 卷答案）

一、1．$i=3$，$k=1$　　2．2．$\begin{pmatrix}0&3\\2&1\end{pmatrix}$　　3．125　　4．-1 或 2

二、D　　B　　C　　D

三、解：由$|A|=-3\neq 0$，A可逆，故可用方程两边左乘A^{-1}

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}\cdots\cdots 4\text{分},\quad X=A^{-1}\begin{bmatrix}2&-1&1\\0&1&2\\1&-2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&1\\-\frac{10}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{5}{3}&\frac{1}{3}&\frac{4}{3}\end{bmatrix}\cdots\cdots\cdots 10\text{分}$$

四、原式$=\begin{vmatrix}a+(n-1)&a+(n-1)&\cdots&\cdots&a+(n-1)\\1&a&\cdots&\cdots&1\\1&1&\cdots&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&\cdots&\cdots&a\end{vmatrix}$ ……………4 分

$=\left[a+(n-1)\right]\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&a&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&a\end{vmatrix}$ ………………8 分

$=\left[a+(n-1)\right](a-1)^{n-1}$ ……………………12 分

五、$|A|=\begin{vmatrix}1+\lambda&1&1\\1&1+\lambda&1\\1&1&1+\lambda\end{vmatrix}=(3+\lambda)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1+\lambda&1\\1&1&1+\lambda\end{vmatrix}=(3+\lambda)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=(3+\lambda)\lambda^2$

因此，当$\lambda\neq 0$且$\lambda\neq -3$时，方程组有唯一解。 ……………………3 分

当$\lambda=0$时，$B=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&3\\1&1&1&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$知$R(A)=1$，$R(B)=2$

故方程组无解。 ……………………6 分

当$\lambda=-3$时，$B=\begin{bmatrix}-2&1&1&0\\1&-2&1&3\\1&1&-2&-3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ ……………9 分

知$R(A)=R(B)=2$，故方程组有无限多个解，

且通解为$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\end{bmatrix}(c\in R)$ ·········12 分

六、解：令 A=$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&0&1\\2&1&1&2&1\\1&3&4&0&1\end{pmatrix}$，利用初等行变换

得$A\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1&\frac{1}{2}\\0&1&0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&1&-1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ ·········6 分

故（1）该向量组的秩为 3 ·········8 分

（2）该向量组的一个最大无关组为α_1，α_2，α_3 ·········10 分

（3）$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2—\alpha_3$ $\alpha_5=\frac{1}{2}\alpha_1—\frac{1}{2}\alpha_2+\frac{1}{2}\alpha_3$ ·········12 分

七、证明：1）$\because a_2$，a_3，a_4线性无关，$\therefore$ a_2，a_3线性无关，

且a_1，a_2，a_3线性相关，故a_1可由a_2，a_3线性表示。 ···········4 分

2）反证，设a_4可由a_1，a_2，a_3线性表示，$a_4=l_1 a_1+l_2 a_2+l_3 a_3$，

由 1）可设$a_1=k_1 a_2+k_2 a_3$，代入上式$a_4=$（$l_1 k_1+l_2$）a_2+（$l_1 k_2+l_3$）a_3，

这与a_2，a_3，a_4线性无关矛盾，所以a_4不能由a_1，a_2，a_3线性表示。···10 分

八、解：由$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda & -1\\-1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)(2-\lambda)$

求得A的特征值为$\lambda_1=2$，$\lambda_2=4$ ·········4 分

对应$\lambda_1=2$解方程$(A-2E)X=0$得基础解系$\xi_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$， ·········7 分

对应$\lambda_2=4$ 解方程$(A-4E)X=0$得基础解系$\xi_2=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$， ·········10 分

显然，若ξ_i是A的对应于特征值λ_i的特征向量，则$k\xi_i(k\neq 0)$也是对应于特征值λ_i的特征向量。 ······12 分

山东科技大学 2011—2012 学年第一学期

《线性代数》考试试卷（A 卷）

班级________________ 姓名_____________ 学号____________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总得分	评卷人	审核人
得分											

一、填空题（每题 4 分，共 16 分）

1. 写出四级行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项____________________。

2.设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$，则 $A^TB=$__________。

3. 设三阶矩阵 A 有三个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，如果 $|A|=6$，$\lambda_1=-1,\lambda_3=3$，则 $\lambda_3=$________。

4. 已知二次型 $f(x_1,\ x_2,\ x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$ 是正定二次型，则 t 的取值范围_________________。

二、选择题（每题 4 分，共 16 分）

1．设 $A=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4\end{bmatrix}$，$B$，$C$ 都是方阵，且 BAC 有意义，则（ ）

A．B，C 都是二阶方阵　　B．B，C 分别是二、四阶方阵

C．B，C 都是四阶方阵　　D．B，C 分别是四、二阶方阵

2．设 A 是 n 阶方阵，P 是 n 阶可逆矩阵，则（ ）。

A．秩 $(PA)<$ 秩 (A)　B．秩 $(PA)>$ 秩 (A)　C．秩 $(PA)=$ 秩 (A)　D．秩 $(PA)=n$

3．设向量组 $I:\alpha_1=(a_1,a_2,a_3)^T,\alpha_2=(b_1,b_2,b_3)^T,\alpha_3=(c_1,c_2,c_3)^T$；

$II:\beta_1=(a_1,a_2,a_3,a_4)^T,\beta_2=(b_1,b_2,b_3,b_4)^T,\beta_3=(c_1,c_2,c_3,c_4)^T$，则（ ）。

A. (I) 线性相关，则 (II) 线性相关　B. (I) 线性无关，则 (II) 线性无关

C. (II) 线性无关，则 (I) 线性无关　D. (I) 线性无关的充要条件是 (II) 线性无关

4．设 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 中 $R(A)=r$，则 $Ax=0$ 有非零解的充要条件是（　　）。

A. $r=n$　　B. $r<n$　　C. $r\geq n$　　D. $r>n$

三、（12 分）计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$ 的值。

四、（10 分）解矩阵方程 $X\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$。

五、（12 分）问 λ 取何值时，非齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda \\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2 \end{cases}$，

（1）有唯一解；　（2）无解；　（3）无穷多个解并求通解。

六、（10 分）证明：若 a_1，a_2，a_3 线性相关，而 a_2，a_3，a_4 线性无关.

则（1）a_1 可由 a_2，a_3 线性表示；（2）a_4 不能由 a_1，a_2，a_3 线性表示。

七、（12 分）设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{bmatrix}$，试求（1）矩阵 A 的秩；（2）矩阵 A 的列向量组的一个最大无关组；并把不属于最大无关组的列向量用最大无关组线性表示。

八、（12 分）设 $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 求一个正交阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角阵。

山东科技大学 2011—2012 学年第一学期

《工程数学(线性代数)》考试试卷（B 卷）

班级＿＿＿＿＿＿＿＿　　姓名＿＿＿＿＿＿＿　　学号＿＿＿＿＿＿＿

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总得分	评卷人	审核人
得分											

一、填空题（每题 4 分，共 16 分）

1．已知 $a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{24}$ 是四阶行列式中的一项，且带负号，则 $i=$＿＿＿＿＿，$k=$＿＿＿＿＿。

2.设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$，则 $A^TB=$＿＿＿＿＿。

3．设 A 为 3 阶方阵，且 $|A|=1$，则 $\left|2A^{-1}+3A^*\right|=$ ＿＿＿＿＿＿＿。

4．已知 $a_1=(a,\ 1,\ 1)^T$，$a_2=(1,\ a,\ -1)^T$，$a_3=(1,\ -1,\ a)^T$ 线性相关，则 a 为＿＿＿＿＿＿＿。

二、选择题（每题 4 分，共 16 分）

1．设 A 是正交矩阵，则运算（　）正确。

A．$|A|=1$　B．$|A|=-1$　C．A 是对称矩阵 D．A^T 与 A 是可交换矩阵

2．设 $A=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{bmatrix}$，$B$，$C$ 都是方阵，且 BAC 有意义，则（　）

A．B，C 都是二阶方阵　　B．B，C 分别是二、三阶方阵

C．B，C 都是三阶方阵　　D．B，C 分别是三、二阶方阵

3．设 A 是三阶矩阵，P 是三阶可逆矩阵，则（　）。

A．秩 $(PA)<$ 秩 (A)　　B．秩 $(PA)>$ 秩 (A)

C．秩 $(PA)=$ 秩 (A)　　D．秩 $(PA)=3$

4．如果n元非齐次线性方程组$Ax=b$的系数矩阵A的秩小于n，则（　）。

A．方程组有无穷多解　　　　B．方程组有唯一解

C．方程组无解　　　　　　　D．不能断定解的情况

三、（10 分）求解矩阵方程$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\3&2&1\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}2&-1&1\\0&1&2\\1&-2&3\end{bmatrix}$。

四、（12 分）计算n阶行列式$\begin{vmatrix}a&1&1&\cdots&1\\1&a&1&\cdots&1\\1&1&a&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&1&\cdots&a\end{vmatrix}$的值。

五、（12 分）设有线性方程组$\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0\\x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3\\x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda\end{cases}$问$\lambda$取何值时，

方程组（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无限多个解，并在无限多解时求通解。

六、（12分）设有向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_5=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

试求（1）该向量组的秩；

（2）该向量组的一个最大无关组；

（3）用（2）中选定的最大无关组表示其余向量。

七、（10 分）证明：若a_1，a_2，a_3线性相关，而a_2，a_3，a_4线性无关,

则（1）a_1可由a_2，a_3线性表示；（2）a_4不能由a_1，a_2，a_3线性表示。

八、（12 分）设$A=\begin{bmatrix}3&-1\\-1&3\end{bmatrix}$求特征值及对应的特征向量.

山东科技大学 2012—2013 学年第一学期

《线性代数》考试试卷（A 卷）

适用班级 2012 计算机科学技术 1.2.3 班　　姓名＿＿＿＿＿＿　　学号＿＿＿＿＿＿

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总得分	评卷人	审核人
得分											

一、填空题（每题 4 分，共 20 分）

1.若 3 阶行列式 $|A|=2$，则 $|2A^*|=$＿＿＿＿＿＿＿＿.

2.已知向量 $\vec{x}=(5,\quad -1,\quad 2)^T$，$\vec{y}=(1,\quad -1,\quad -1)^T$，则 $[\vec{x},\vec{y}]=$＿＿＿＿＿＿.

3.设 n 阶方阵 A,B，若存在可逆阵 P，使 $A=P^{-1}BP$，则 A,B 具有＿＿＿＿＿关系

4.已知 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$，则其标准型为＿＿＿.

5.设三阶矩阵 A 有三个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，如果 $|A|=12$，$\lambda_1=-1,\lambda_3=3$，则 $\lambda_2=$＿＿＿＿.

二、选择题（每题 4 分，共 20 分）

1．设 A 是正交矩阵，则运算（　　）正确.

A．$|A|=1$　　B．$|A|=-1$　　C．A 是对称矩阵　　D．A^T 与 A 是可交换矩阵

2．设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，则 $A^*=$（　　）

A．$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$　　B．$\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$　　C．$\begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$　　D．$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

3．3．下列向量集合是向量空间的是（　　）

A．$S=\{\vec{x}\mid A\vec{x}=\vec{0}\}$　　B．$S=\{\vec{x}\mid A\vec{x}=\vec{b}\}$

C．$V=\{\vec{x}=(1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_2,\cdots,x_n\in R\}$

D．$V=\{\vec{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_1,\cdots,x_n\in R\text{满足}x_1+\cdots+x_n=1\}$

4．如果n元非齐次线性方程组$Ax=b$的系数矩阵A的秩小于n，则（　）.

A．方程组有无穷多解　　B．方程组有唯一解

C．方程组无解　　D．不能断定解的情况

5. 设 α_1， α_2， α_3, α_4线性无关，则下列向量组线性相关的是（　　）。

A. α_1， α_2， α_3;　　B. α_2， α_3， α_4;

C. $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_4$　$\alpha_4+\alpha_1$　;　　D. α_2，α_3

三、计算题（共 22 分）

1.（10 分）求解矩阵方程$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

2.（12 分）计算n阶行列式$\begin{vmatrix} x & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & x & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & x & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & x \end{vmatrix}$的值.

四、解答题（共38分）

1.（12 分）设有线性方程组$\begin{cases} (2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1 \\ 2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2 \\ -2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1 \end{cases}$，问$\lambda$取何值时，

方程组（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无限多个解，并在无限多解时求通解.

2.（14 分）设矩阵$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{bmatrix}$，试求（1）矩阵$A$的秩；

（2）矩阵A的列向量组的一个最大无关组；并把不属于最大无关组的列向量用最大无关组线性表示.

3.（12 分）设$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$，求矩阵 A 的特征值及对应的特征向量.

山东科技大学 2012—2013 学年第一学期

《线性代数》试卷 A 卷参考答案及评分标准

一、填空题（每题 4 分，共 20 分）

1．32　　2．4　　3．相似　　4．$f(x_1,x_2,x_3)=2{z_1}^2-2{z_2}^2+6{z_3}^2$　　5.　−4

二、选择题（每题 4 分，共 20 分）

1.D　　2.B　　3.A　　4.D　　5.C

三、计算题（共 22 分）

1.解：因为

$$\begin{bmatrix}0&1&2&1&1\\1&1&4&0&1\\2&-1&0&-1&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&4&0&1\\0&1&2&1&1\\2&-1&0&-1&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&4&0&1\\0&1&2&1&1\\2&-3&-8&-1&-2\end{bmatrix}\sim$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&1&1\\0&1&0&3&2\\0&0&1&-1&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\cdots\cdots 8\text{ 分}$$

所以 $X=\begin{bmatrix}1&1\\3&2\\-1&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ ……10 分

2.解：原式 $=\begin{vmatrix}x+2(n-1)&x+2(n-1)&\cdots&\cdots&x+2(n-1)\\1&x&\cdots&\cdots&1\\1&1&\cdots&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&\cdots&\cdots&x\end{vmatrix}$ ……3 分

$$=\left[x+2(n-1)\right]\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\1&x&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&x\end{bmatrix}\cdots\cdots 8\text{ 分}$$

$$=\left[x+2(n-1)\right](x-1)^{n-1}\cdots\cdots 12\text{ 分}$$

四、解答题（共38分）

1. 解：$|A|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -2\\ 2 & 5-\lambda & -4\\ -2 & -4 & 5-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -4\\ 2 & 5-\lambda & \lambda-9\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=-(1-\lambda)^2(\lambda-10)$

因此，当$\lambda\neq 1$且$\lambda\neq 10$时，方程组有唯一解. ························3 分

当$\lambda=1$时，$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & 1\\ 2 & 4 & -4 & 2\\ -2 & -4 & 4 & 2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$知$R(A)=R(B)=2$，故方程组有无限多个解. ························6 分

且通解为$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\left(c_1,c_2\in R\right)$ ························9 分

当$\lambda=10$时，$B=\begin{bmatrix}-8 & 2 & -2 & 1\\ 2 & -5 & -4 & 2\\ -2 & -4 & -5 & -11\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2 & -5 & -4 & 2\\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

知$R(A)=2$， $R(B)=3$故方程组无解. ···············12 分

2. 解：（1）对A实行初等行变换化为行阶梯形矩阵

$$A\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$ 知$R(A)=3$ ············4 分

（2）由$R(A)=3$知列向量组的最大无关组含 3 个向量，而三个非零行的非零首元在 1，2，4 三列，故a_1，a_2，a_4为列向量组的一个最大无关组。·········8 分

对A实行初等行变换化为行最简形矩阵

$A\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，故$a_3=-a_1-a_2$，$a_5=4a_1+3a_2-3a_4$············14 分

3. 解：由$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 2\\ -2 & -2-\lambda & 4\\ 2 & 4 & -2-\lambda\end{vmatrix}=-(7+\lambda)(2-\lambda)^2$得

特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=-7$ ···4 分

对应$\lambda_1=\lambda_2=2$解方程$(A-2E)X=0$得基础解系$\xi_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}$，$\xi_2=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$ ·········7 分

所以$c_1\xi_1+c_2\xi_2$是对应于$\lambda_1=\lambda_2=2$的全部特征向量.

对应$\lambda_2=-7$　解方程$(A+7E)X=0$得基础解系$\xi_3=\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}$，·········10 分

所以$c_3\xi_3$是对应于$\lambda_2=-7$的全部特征向量···12 分

山东科技大学 2012—2013 学年第一学期

《线性代数》考试试卷（B 卷）

适用班级 2012 计算机科学技术 1.2.3 班　　姓名______________　　学号______

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总得分	评卷人	审核人
得分											

一、填空题（每题 4 分，共 20 分）

1. 若 3 阶行列式 $|A|=3$，则 $|2A^*|=$________________.

2. 已知 $\alpha_1=(1,0,2)^T$ $\alpha_2=(-4,2,t)^T$ 正交，则 t 的值为________________.

3. 设三阶矩阵 A 有三个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，如果 $|A|=8$，$\lambda_1=2,\lambda_3=1$，则 $\lambda_2=$_______.

4. 设有二次型 $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$，写出 f 的矩阵__________.

5. 已知 4 阶行列式 $|A|=8$ 的第二行元素分别为-1，0，2，4，第 2 行元素的余子式依次为 2，10，y，4，则 $y=$ ________

二、选择题（每题 4 分，共 20 分）

1．若 A，B 为同阶方阵，且满足 AB=0，则有（　　）

A. $A=0$或$B=0$　　B. $|A|=0$或$|B|=0$

C. $(A+B)^2=A^2+B^2$　　D. A与B 均可逆

2．设 α_1，α_2，α_3，α_4 线性无关，则下列向量组线性相关的是（　　）。

A. α_1，α_2，α_3;　　B. α_2，α_3，α_4;

C. $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_4$　$\alpha_4+\alpha_1$;　　D. α_2，α_3

3．设 α_1，α_2 是 n 元线性方程组 Ax=0 的两个不同的解向量，秩 A=n-1，k 为任意常数，则方程组 Ax=0 的通解为（　　）.

A. $k\alpha_1$;　　B. $k\alpha_2$;　　C. $k(\alpha_1-\alpha_2)$;　　D. $k(\alpha_1+\alpha_2)$

4. 设 A 是 n 阶可逆矩阵，则（　　）

A. A 与 E 等价　　B. A 与 E 合同　　C. A 与 E 相似　　D. A 与 E 相等

5. 设向量组 $\{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \ldots \quad \alpha_m\}$ 线性相关，且一组数 k_i 使 $k_1\alpha_1+\ldots+k_m\alpha_m=0$，则（　　）

A. $k_1=k_2=\ldots=k_m=0$　　B. $k_1,k_2,..,k_m$ 不全为零

C. $k_1,k_2,..,k_m$ 全不为零　　D. 情形A,B，C均可能出现

三、计算题（共 22 分）

1.（12 分）计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$ 的值.

2.（10 分）解矩阵方程 $X\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

四、解答题（共38分）

1.（12分）设有向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

试求（1）该向量组的秩；（2）该向量组的一个最大无关组；

（3）用（2）中选定的最大无关组表示其余向量.

2.（12 分）设有线性方程组 $\begin{cases} (2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1 \\ 2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2 \\ -2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1 \end{cases}$，问 λ 取何值时，

方程组（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无限多个解，并在无限多解时求通解.

3.（14 分）设 $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 求一个正交阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角阵.

山东科技大学 2012—2013 学年第一学期

《线性代数》试卷 B 卷参考答案及评分标准

一、填空题（每题 4 分，共 20 分）

1. 72　**2.** 2　**3.** 4　**4.** $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$　**5.** 5

二、选择题（每题 4 分，共 20 分）

1.B　2.C　3.C　4. A　5.D

三、计算题（共 22 分）

1. 解：原式= $\begin{bmatrix}x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a\\ a & x & \cdots & a\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a & a & \cdots & x\end{bmatrix}$ ……………4 分

$$=\left[x+(n-1)a\right]\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a&x&\cdots&a\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$$ ……………8 分

$$=\left[x+(n-1)a\right]\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&x-a&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&x-a\end{vmatrix}=\left[x+(n-1)a\right](x-a)^{n-1}$$ ………12 分

2. 解：由 $|A|=5\neq 0$，A 可逆，故可用方程边右乘 A^{-1}

$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5}&0&0\\0&1&-1\\0&-2&3\end{bmatrix}$，……4 分，$X=\begin{bmatrix}2&-1&1\\0&1&2\\1&-2&3\end{bmatrix}A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}&-3&4\\0&-3&5\\\frac{1}{5}&-8&11\end{bmatrix}$……10 分

四、解答题（共38分）

1. 解：令 A=$\left(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4\right)=\begin{pmatrix}2&3&2&4\\0&1&1&2\\2&1&0&0\end{pmatrix}$，利用初等行变换

得 $A\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ ………6 分

故（1）该向量组的秩为 2 ………8 分

（2）该向量组的一个最大无关组为α_1，α_2 ………10 分

（3）$\alpha_3=-\frac{1}{2}\alpha_1+\alpha_2$ $\alpha_4=-\alpha_1+2\alpha_2$ ………12 分

2.解:$|A|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -2\\ 2 & 5-\lambda & -4\\ -2 & -4 & 5-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -4\\ 2 & 5-\lambda & \lambda-9\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=-(1-\lambda)^2(\lambda-10)$

因此，当$\lambda\neq1$且$\lambda\neq10$时，方程组有唯一解. ………………………3 分

当$\lambda=1$时，$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & 1\\ 2 & 4 & -4 & 2\\ -2 & -4 & 4 & 2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$知$R(A)=R(B)=2$，故方程组有无限多个解. ………………………6 分

且通解为$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\ (c_1,c_2\in R)$ ………………………9 分

当$\lambda=10$时，$B=\begin{bmatrix}-8 & 2 & -2 & 1\\ 2 & -5 & -4 & 2\\ -2 & -4 & -5 & -11\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2 & -5 & -4 & 2\\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

知$R(A)=2$， $R(B)=3$故方程组无解. ……………12 分

3. 解：由$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda & -1 & 1\\ -1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1+\lambda & 0\\ -1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)$

求得A的特征值为$\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$ ………5 分

对应$\lambda_1=-2$解方程$(A+2E)X=0$得基础解系$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$，

将ξ_1单位化，得$P_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，　　　　　　　　…………7 分

对应$\lambda_2=\lambda_3=1$解方程$(A-E)X=0$得基础解系$\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

将ξ_2，ξ_3正交化，$\eta_2=\xi_2$，$\eta_3=\xi_3-\frac{[\eta_2,\xi_3]}{\|\eta_2\|^2}\eta_2=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$，将$\eta_2$，$\eta_3$单位化，

得$P_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$，$P_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$ 故$P=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$…………14 分

山东科技大学 2015—2016 学年第一学期

《线性代数》考试试卷（A 卷）

适用班级金融学、会计学、国际贸易 2014 级班级________姓名______学号________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总得分	评卷人	审核人
得分											

一、填空题（每题 4 分，共 20 分）

1．$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$ 的充分必要条件是____________。

2．设 A 为 n 阶矩阵，E 为 n 阶单位矩阵，若 A 有特征值 λ，则 A^2+2A+E 必将有特征值_________________。

3．设 A 为 3 阶方阵，且 $|A|=3$，则 $|2A|$=_____________。

4．设有二次型 $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$，写出 f 的矩阵_____________。

5．已知 $a_1=(t,\ 1,\ 1)^T$，$a_2=(1,\ t,\ -1)^T$，$a_3=(1,\ -1,\ t)^T$ 线性相关，则 t 为_____________。

二、选择题（每题 4 分，共 20 分）

1．若 $A=A_{m\times n}$ 且 $R(A)=r$，则方程组 $Ax=0$ 的基础解系中的向量个数是（　）

A．r　　B．$m-r$　　C．$n-r$　　D．n

2．设 A 是正交矩阵，则运算（　）正确。

A．$|A|=1$　　B．$|A|=-1$　　C．A 是对称矩阵　　D．A^T 与 A 是可交换矩阵

3．设 A 是 5 阶矩阵，　P 是 5 阶可逆矩阵，则（　）

A．秩$(PA)<$秩(A)　　B．秩$(PA)>$秩(A)

C．秩$(PA)=$秩(A)　　D．秩$(PA)=3$

4．设 A 是 n 阶矩阵，如果 $|A|=0$，则 A 的特征值（　）

A．全是零　　B．全不是零　　C．至少有一个是零　　D．可以是任意数

5．如果 n 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 的秩小于 n，则（　　）

A．方程组有无穷多解　　B．方程组有唯一解

C．方程组无解　　D．不能断定解的情况

三、（10 分）设 $P^{-1}AP=\Lambda$，其中 $P=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$，求 A^{11}。

四、（8 分）计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & a & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & a & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a\end{vmatrix}$ 的值。

五、（12 分）非齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$ 问 λ 取何值时，方程组

（1）有唯一解；（2）无解；（3）无穷多个解并求通解。

六、（12分）设有向量组 $A:\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_5=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$，

试求（1）该向量组 A 的秩；　（2）该向量组 A 的一个最大无关组；
（3）求 A 中其余向量用所求出的最大无关组线性表示。

七、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$，求 A 的特征值及对应的特征向量。

八、（8 分）设 A、B 为 n 阶矩阵，且 A 为对称阵，证明：B^TAB 也是对称阵。

山东科技大学 2015—2016 学年第一学期

《线性代数》考试试卷参考答案及评分标准（A 卷）

一、 （每题 4 分，共 20 分）

1．$AB=BA$ 2．$\lambda^2+2\lambda+1$ 3．24 4．$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 5．-1 或 2

二、（每题 4 分，共 20 分）

C D C C D

三、（10 分）解：$P^{-1}AP=\Lambda$ 故 $A=P\Lambda P^{-1}$，所以 $A^{11}=P\Lambda^{11}P^{-1}$ ……………2 分

$|P|=3$ $P^*=\begin{pmatrix}1&4\\-1&1\end{pmatrix}$ $P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&4\\-1&-1\end{pmatrix}$……………6 分

而 $\Lambda^{11}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}^{11}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2^{11}\end{pmatrix}$……………8 分

故 $A^{11}=\begin{pmatrix}-1&-4\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&2^{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{4}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2731&2732\\-683&-684\end{pmatrix}$……………10 分

四、（8 分）解：原式 $=\begin{vmatrix}a+(n-1)&a+(n-1)&\cdots&\cdots&a+(n-1)\\1&a&\cdots&\cdots&1\\1&1&\cdots&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&\cdots&\cdots&a\end{vmatrix}$ ……………………3 分

$=[a+(n-1)]\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\1&a&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&a\end{bmatrix}$…………6 分，$=[a+(n-1)](a-1)^{n-1}$ ……………8 分

五、（12 分）解：$|A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$

当 $|A|\neq 0$ 时，即当 $\lambda\neq 1$，$\lambda\neq -2$ 时，$R(A)=3$，方程组有唯一解。 …………3 分

当 $\lambda=1$ 时，增广矩阵 $B=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ 可见 $R(A)=R(B)=1<3$，方程有无穷

多解…6 分

取$\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，$\eta=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，则通解$X=C_1\xi_1+C_2\xi_2+\eta$ ……………9 分

当$\lambda=-2$时，$B=\begin{bmatrix}-2&1&1&1\\1&-2&1&-2\\1&1&-2&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&-2&4\\0&-3&3&-6\\0&3&-3&9\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&-2&4\\0&-3&3&-6\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

可见$R(A)=2$，$R(B)=3$，$R(A)\neq R(B)$，于是方程组无解。 ……………12 分

六、(12 分) 解：令 $A=(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4\quad\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&-2&-1&-2&2\\4&1&2&1&3\\2&5&4&-1&0\end{pmatrix}$，利用初等行变换

得$A\sim\begin{pmatrix}1&-2&-1&-2&2\\0&9&6&9&-5\\0&0&0&-6&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{3}&0&\frac{8}{9}\\0&1&\frac{2}{3}&0&-\frac{7}{18}\\0&0&0&1&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}$ ………6 分

故（1）该向量组的秩为 3 ………8 分

（2）该向量组的一个最大无关组为α_1，α_2，α_4 ………10 分

（3）$\alpha_3=\frac{1}{3}\alpha_1+\frac{2}{3}\alpha_2$，　$\alpha_5=\frac{8}{9}\alpha_1-\frac{7}{18}\alpha_2-\frac{1}{6}\alpha_4$ ………12 分

七、(10 分) 解：

由$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&-1&1\\-1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1+\lambda&0\\-1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)$

求得A的特征值为$\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$， ……………3 分

对应$\lambda_1=-2$，解方程$(A+2E)X=0$得基础解系$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，

所以$c_1\xi_1$是对应$\lambda_1=-2$的全部特征向量， ……………6 分

对应$\lambda_2=\lambda_3=1$解方程$(A-E)X=0$得基础解系$\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，

所以$c_2\xi_2+c_3\xi_3$是对应$\lambda_2=\lambda_3=1$的全部特征向量。 ……………10 分

八、（8 分）证明：$(B^TAB)^T=B^TA^T(B^T)^T=B^TA^TB$， ……………………4 分

因为A为对称阵，有$A^T=A$，故$(B^TAB)^T=B^TAB$，即B^TAB是对称阵 ………8 分

山东科技大学 2015—2016 学年第一学期

《线性代数》考试试卷（B 卷）

适用班级金融学、会计学、国际贸易 2014 级班级________姓名______学号________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总得分	评卷人	审核人
得分											

一、填空题（每题 4 分，共 20 分）

1．设 A 为 n 阶方阵，则 $AA^* =$__________________.

2．设三阶矩阵 A 有三个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，如果 $|A|=6$，$\lambda_1=-1,\lambda_2=3$，则 $\lambda_3=$_______.

3．设 A 为 3 阶方阵，且 $|A|=2$，则 $|3A|$=______________。

4．设有二次型 $f=-2x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$，写出 f 的矩阵______________。

5．已知向量 $\vec{x}=(3,\quad -1,\quad 2)^T$，$\vec{y}=(1,\quad -1,\quad -1)^T$，则 $[\vec{x},\vec{y}]=$________.

二、选择题（每题 4 分，共 20 分）

1．设 A、B 均为 n 阶方阵，且 $|A+AB|=0$，则（　　）

(A)　$|A|=0$　(B)　$|B+E|=0$　(C)　$|A|=0$ 且 $|B+E|=0$　(D)　$|A|=0$ 或 $|B+E|=0$

2．以下关于矩阵秩的结论不正确的是（　　）

(A)　秩$(A)=$秩(A^{T})　　　　(B)　秩$(A,B)=$秩$(A)+$秩(B)

(C)　秩$(A+B)\le$秩$(A)+$秩(B)　　　(D)　秩$(AB)\le$秩(A)

3．齐次线性方程组 $AX=O$ 有非零解的充要条件是（　　）

(A)　A 中必有一列向量是其余列向量的线性组合

(B)　A 中任意列向量是其余列向量的线性组合

(C)　A 的任意两个列向量线性相关

(D)　A 的任意两个列向量线性无关

4．设 A 是 n 阶矩阵，如果 $|A|=0$，则 A 的特征值（　　）

(A) 全是零　(B) 全不是零　(C) 至少有一个是零　(D) 可以是任意数

5．设 $\vec{x}$、$\vec{y}$ 为 n 维列向量，则以下结论正确的是（　　）

(A) $\|\lambda\vec{x}\|=\lambda\|\vec{x}\|$　　　(B) $\|\vec{x}\|=\sqrt{[\vec{x},\vec{x}]}$

(C) $\|\vec{x}+\vec{y}\|=\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$　　　(D) $\|\vec{x}\|=\sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}^T}$

三、（8 分）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\3&2&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&-1&1\\0&1&2\\1&-2&3\end{bmatrix}$，已知 $AX=B$ 求 X.

四、（10 分）设 $D_n=\begin{vmatrix}x_1-m&x_2&\cdots&x_n\\x_1&x_2-m&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x_1&x_2&\cdots&x_n-m\end{vmatrix}$，求 D_n

五、（12 分）问 λ 取何值时，非齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3\\x_1+\lambda x_2+x_3=-2\\x_1+x_2+\lambda x_3=-2\end{cases}$

1）有唯一解；2）无解；3）有无穷多个解并求通解.

六、（10分）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&-4&3&5\\1&-2&1&3\\1&-2&4&0\end{bmatrix}$，求矩阵 A 的列向量组的一个最大无关组，并把其余列向量用最大无关组线性表示.

七、（12 分）设 $A=\begin{bmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&3\end{bmatrix}$，求 A 的特征值及对应的特征向量.

八、（8 分）设 A,B 都是正交阵，证明 AB 也是正交阵.

山东科技大学 2015—2016 学年第一学期

《线性代数》考试试卷参考答案及评分标准（B 卷）

一、 （每题 4 分，共 20 分）

1．$|A|E$　　2．-2　　3．54　　4．$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -6 & 0\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}$　　5．2

二、（每题 4 分，共 20 分）

1．（D）　2．（B）　3．（A）　4．（C）　5．（B）

三、（8 分） 解：由$|A|=-3\neq 0$，A 可逆 ……………………………2 分

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}M_{11} & -M_{21} & M_{31}\\ -M_{12} & M_{22} & -M_{32}\\ M_{13} & -M_{23} & M_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$ ……………………6 分

故 $X=A^{-1}B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ -\frac{10}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3}\end{bmatrix}$ ……………………8 分

四、（10 分） 解：原式

$$=\begin{vmatrix}x_1+x_2+\cdots+x_n-m & x_2 & \cdots & \cdots & x_n\\ x_1+x_2+\cdots+x_n-m & x_2-m & \cdots & \cdots & x_n\\ x_1+x_2+\cdots+x_n-m & x_2 & \cdots & \cdots & x_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1+x_2+\cdots+x_n-m & x_2 & \cdots & \cdots & x_n-m\end{vmatrix}$$ ………………………………4 分

$$=(x_1+x_2+\cdots+x_n-m)\begin{vmatrix}1 & x_2 & \cdots & x_n\\ 1 & x_2-m & \cdots & x_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & x_2 & \cdots & x_n-m\end{vmatrix}$$ ………………………………6 分

$$=(x_1+x_2+\cdots+x_n-m)\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -m & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -m\end{vmatrix}$$ ………………………………8 分

$$=(-m)^{n-1}(x_1+x_2+\cdots+x_n-m)$$ ………………………………10 分

五、（12 分）解：$|A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$……………2 分

当$|A|\neq 0$时，即当$\lambda\neq 1$，$\lambda\neq -2$时，$R(A)=3$，方程组有唯一解 ……………3 分

当$\lambda=1$时，增广矩阵$B=\begin{bmatrix}1&1&1&-2\\1&1&1&-2\\1&1&1&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

可见$R(A)=R(B)=1<3$，方程有无穷多解 ……………………………………………6 分

取$\xi_1=\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$则通解$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=C_1\xi_1+C_2\xi_2+\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}$……………………………9 分

当$\lambda=-2$时，$B=\begin{bmatrix}-2&1&1&-5\\1&-2&1&-2\\1&1&-2&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&-2&-2\\0&-3&3&0\\0&3&-3&-9\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&-2&-2\\0&-3&3&0\\0&0&0&-9\end{bmatrix}$

可见$R(A)=2$，$R(B)=3$，$R(A)\neq R(B)$，于是方程组无解 ……………………………12 分

六、（10 分）解：$A=\begin{bmatrix}2&-4&3&5\\1&-2&1&3\\1&-2&4&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&0&-5&5\\0&0&-3&3\\1&-2&4&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-2&4&0\\0&0&-3&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ ……6 分

由上可知a_1，a_3是A的列向量组的一个最大无关组……………………………………8 分

故$a_2=\frac{1}{2}a_1+2a_3,a_4=a_3$ ……………………………………………………10 分

（或$A=\begin{bmatrix}2&-4&3&5\\1&-2&1&3\\1&-2&4&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-2&0&4\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$此时$a_2=-2a_1,a_4=4a_1-a_3$）

七、（12 分）解：$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}5-\lambda&-1&3\\-1&5-\lambda&-3\\3&-3&3-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4-\lambda&4-\lambda&0\\-1&5-\lambda&-3\\2&2-\lambda&-\lambda\end{vmatrix}$

$=(4-\lambda)\begin{vmatrix}1&1&0\\-1&5-\lambda&-3\\2&2-\lambda&-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)\begin{vmatrix}1&1&0\\0&6-\lambda&-3\\0&-\lambda&-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(4-\lambda)\begin{vmatrix}6-\lambda&-3\\1&1\end{vmatrix}$

$=-\lambda(4-\lambda)(9-\lambda)$ 于是 A 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=4,\lambda_3=9$ ……………………………3 分

当 $\lambda_1=0$ 时，$A-\lambda E=A=\begin{bmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}4&4&0\\-1&5&-3\\2&2&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$……4 分

得基础解系 $\vec{p}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ ……………………………………………………………………5 分

所以 Cp_1 是对应 $\lambda_1=0$ 的全部特征向量 ……………………………………………………6 分

当 $\lambda_2=4$ 时，$A-\lambda E=A=\begin{bmatrix}1&-1&3\\-1&1&-3\\3&-3&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&3\\0&0&0\\0&0&-10\end{bmatrix}$ ………………7 分

得基础解系 $\vec{p}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ ……………………………………………………………8 分

所以 Cp_2 是对应 $\lambda_2=4$ 的全部特征向量 …………………………………………………9 分

当 $\lambda_3=9$ 时，$A-\lambda E=A=\begin{bmatrix}-4&-1&3\\-1&-4&-3\\3&-3&-6\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&15&15\\1&4&3\\0&-15&-15\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$…10 分

得基础解系 $\vec{p}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ ………………………………………………………………………11 分

所以 Cp_3 是对应 $\lambda_3=9$ 的全部特征向量 ……………………………………………………12 分

八、(8 分) 证明：因为 A,B 都是正交阵，则 $A^TA=AA^T=E,B^TB=BB^T=E$ ……3 分

$(AB)^T(AB)=B^TA^TAB=B^TB=E$ ……………………………6 分

AB 也是正交阵 ……………………………………………………………8 分

山东科技大学2017—2018学年第一学期

《线性代数》考试试卷（A卷）

适用班级金融学、会计学、国际贸易2016级班级________姓名______学号________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总得分	评卷人	审核人
得分											

一、填空题（每题4分，共20分）

1．已知$\begin{vmatrix} k & 3 & 4 \\ -1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix}=0$，则$k=$____________.

2．设A为3阶方阵，且$|A|=5$，则$|3A^{-1}-A^{*}|=$_________________.

3．若线性方程组$Ax=b$的增广矩阵$B\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda & 12 \end{pmatrix}$，则当常数$\lambda=$_____时，此线性方程组有无穷多解.

4．若二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$是正定的，则$t$的取值范围是__.

5．已知$a_1=(1,\ 1,\ 0)^T$，$a_2=(1,\ 3,\ -1)^T$，$a_3=(5,\ 3,\ t)^T$线性相关，则t为_____.

二、选择题（每题4分，共20分）

1．设n阶矩阵A, B和C，则下列说法正确的是———。

A. $AB=AC$, 则$B=C$　　B. $AB=0$, 则$|A|=0$或$|B|=0$

C. $(AB)^T=A^TB^T$　　D. $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

2．若方阵$A^2=A$，A不是单位方阵，则（　　）

A．$|A|=0$　　B．$|A|\neq 0$　　C．$A=O$　　D．$A\neq O$

3．设3阶方阵A，$A-E$，$E+2A$均不可逆，则$|A+E|=$（　　）

A．-4　　B．1　　C．3　　D．6

4．若线性方程组 $Ax=b$ 的增广矩阵 $B \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & \lambda & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$，则此线性方程组（　　）

A．可能有无穷多解　B．一定有无穷多解　C．可能无解　D．一定无解

5．若 A 为正交矩阵，则下列说法错误的是(　)

A．$|A|=1$或-1　B．$A^T=A^{-1}$　　C．A 是对称矩阵　D．A^T 与 A 是可交换矩阵

三、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$，且 $AXB=C$，求 X.

四、（8 分）计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$ 的值.

五、（12 分）问 λ 取何值时，非齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$

1）有唯一解；2）无解；3）有无穷多个解并求通解.

六、（12分）设有向量组 $A:\alpha_1=(2\ \ 1\ \ 4\ \ 3)^T$，$\alpha_2=(-1\ \ 1\ \ -6\ \ 6)^T$，$\alpha_3=(-1\ \ -2\ \ 2\ \ 9)^T$，$\alpha_4=(1\ \ 1\ \ -2\ \ 7)^T$，$\alpha_5=(2\ \ 4\ \ 4\ \ 9)^T$，试求（1）该向量组 A 的秩；（2）该向量组 A 的一个最大无关组；（3）求 A 中其余向量用所求出的最大无关组线性表示.

七、（10 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，求 A 的特征值及对应的特征向量，并判断矩阵 A 能否对角化.

八、（8 分）已知四元非齐次线性方程组，其增广矩阵的秩与系数矩阵的秩都等于 3，且向量 $\beta_1=(1\ \ 2\ \ 1\ \ 0)^T$ 与 $\beta_2=(1\ \ 1\ \ 1\ \ -1)^T$ 都是它的解向量，求它的全部解.

山东科技大学2017—2018学年第一学期

《线性代数》考试试卷参考答案及评分标准（A卷）

一、　（每题4分，共20分）

1．1或3　　2．$-\dfrac{8}{5}$　　3．6　　4．$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$　　5．$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$

二、（每题4分，共20分）

B　　A　　D　　B　　C

三、（10分）解：因为$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{vmatrix}=2$，所以$A$可逆 ……………………………1分

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}M_{11}&-M_{21}&M_{31}\\-M_{12}&M_{22}&-M_{32}\\M_{13}&-M_{23}&M_{33}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{bmatrix}$$ ……………………………7分

故$X=A^{-1}CB^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\10&-4\\-10&4\end{pmatrix}$ ……10分

四、（8分）解：原式$=\begin{vmatrix}a+(n-1)&a+(n-1)&\cdots&\cdots&a+(n-1)\\1&a&\cdots&\cdots&1\\1&1&\cdots&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&\cdots&\cdots&a\end{vmatrix}$ ……………………………3分

$=[a+(n-1)]\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&a&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&a\end{vmatrix}$…………6分，$=[a+(n-1)](a-1)^{n-1}$ ……………8分

五、（12分）解：$|A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$……………………2分

当$|A|\neq 0$时，即当$\lambda\neq 1$，$\lambda\neq -2$时，$R(A)=3$，方程组有唯一解 ……………3分

当$\lambda=1$时，增广矩阵$B=\begin{bmatrix}1&1&1&-2\\1&1&1&-2\\1&1&1&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

可见$R(A)=R(B)=1<3$，方程有无穷多解 ……………………………………6 分

取$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$则通解$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=C_1\xi_1+C_2\xi_2+\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}$……………9 分

当$\lambda=-2$时，$B=\begin{bmatrix}-2&1&1&-5\\1&-2&1&-2\\1&1&-2&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&-2&-2\\0&-3&3&0\\0&3&-3&-9\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&-2&-2\\0&-3&3&0\\0&0&0&-9\end{bmatrix}$

可见$R(A)=2$，$R(B)=3$，$R(A)\neq R(B)$，于是方程组无解 …………………12 分

六、（12 分）解：令 A=$(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4\quad\alpha_5)=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&9&7&9\end{pmatrix}$，利用初等行变

换得$A\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ ………6 分

故（1）该向量组的秩为 3 ………8 分

（2）该向量组的一个最大无关组为α_1，α_2，α_4 ………10 分

（3）$\alpha_3=-\alpha_1-\alpha_2$，　　$\alpha_5=4\alpha_1+3\alpha_2-3\alpha_4$ ………12 分

七、（10 分）解：

由$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-1-\lambda&1&0\\-4&3-\lambda&0\\1&0&2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)=0$

求得A的特征值为$\lambda_1=2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$ ……………3 分

对应$\lambda_1=2$，解方程$(A-2E)x=0$得基础解系$\xi_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

所以$c_1\xi_1$是对应$\lambda_1=2$的全部特征向量 ……………6 分

对应$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$解方程$(A - E)x = 0$得基础解系$\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

所以$c_2\xi_2$是对应$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$的全部特征向量 ……………9 分

对应二重根$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$，对应基础解系向量个数为 1 小于重数，故矩阵不能对角化…10 分

八、（8 分）解：$R(A) = R(B) = 3 < 4$ ……………2 分

故对应齐次线性方程组基础解系的秩$R_S = 4 - 3 = 1$ ……………4 分

故基础解系为$\xi = \beta_1 - \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ……………6 分

原方程通解为$x = c\xi + \beta_1 = c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ……………8 分

山东科技大学 2017—2018 学年第一学期

《线性代数》考试试卷（B 卷）

适用班级金融学、会计学、国际贸易 2016 级班级________姓名______学号________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总得分	评卷人	审核人
得分											

一、填空题（每题 4 分，共 20 分）

1．排列的 165342 的逆序数为_____________ .

2．设三阶矩阵 A 的特征值为-1，3，-3，则 $\left|A^3-2A^2\right|=$__________________.

3．若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 是正定的，则 t 的取值范围是__

4. 已知 $\alpha_1=(1,\ 1,\ 0)^T$，$\alpha_2=(1,\ 3,\ -1)^T$，$\alpha_3=(5,\ 3,\ t)^T$ 线性相关，则 t 为_____.

5．已知 $A=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$ 相似于 $B=\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&a\end{pmatrix}$，则 $a=$_____ .

二、选择题（每题 4 分，共 20 分）

1．若 A 为 n 阶可逆矩阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，则( )

A. $\left|A^*\right|=\left|A\right|^{n-1}$　　B. $\left|A^*\right|=\left|A\right|$　　C. $\left|A^*\right|=\left|A\right|^n$　　D. $\left|A^*\right|=\left|A^{-1}\right|$

2．设 n 阶矩阵 A, B 和 C，则下列说法正确的是——。

A. $AB=AC$, 则 $B=C$　　B. $AB=0$, 则 $\left|A\right|=0$ 或 $\left|B\right|=0$

C. $(AB)^T=A^TB^T$　　D. $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

3. 若 A 为 n 阶矩阵，且秩 $R(A)=n-1$，α_1,α_2 是 $Ax=0$ 的两个不同的解向量，则 $Ax=0$ 的通解为( )

A．$K\alpha_1$　　B．$K\alpha_2$　　C．$K(\alpha_1+\alpha_2)$　　D．$K(\alpha_1-\alpha_2)$

4．若矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\2&3&\lambda+1\end{pmatrix}$ 的秩为 2，则 $\lambda=$（ ）

A．0　　B．2　　C．1　　D．-1

5．若 A 为正交矩阵，则下列说法错误的是( )

A．$|A|=1$或-1　B．$A^T=A^{-1}$　C．A是对称矩阵　D．A^T与A是可交换矩阵

三、（8 分）设 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\1&-1&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\\2&1\end{pmatrix}$，且 $AX=B$，求 X.

四、（8 分）计算行列式 $\begin{vmatrix}1&2&0&1\\1&3&5&0\\0&1&5&6\\1&2&3&4\end{vmatrix}$.

五、（10 分）求下列非齐次线性方程组的通解及所对应的齐次线性方程组的基础解系:

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+2x_4=3\\2x_1-x_2+3x_3+8x_4=8\\-3x_1+2x_2-x_3-9x_4=-5\\x_2-2x_3-3x_4=-4\end{cases}$$

六、（12 分）设向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\k\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\k\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}-k\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix}$，问：

1）参数 k 为何值时，α_1、α_2、α_3 为向量组的一个极大无关组？

2）参数 k 为何值时，α_1、α_2 为向量组的一个极大无关组？并在此时，求出 α_3、α_4 由极大无关组表出的线性表达式。

七、（12 分）求一正交变换 $x=py$，把二次型 $f=-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 化为标准形.

八、（10 分）设 n 阶方阵 A 满足 $A^2-3A-2E=0$，证明 A 可逆，并求 A^{-1}.

山东科技大学 2017—2018 学年第一学期

《线性代数》考试试卷参考答案及评分标准（B 卷）

一、填空题（每题 4 分，共 20 分）

1．9　　2．1215　　3．$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$　　4．1　　5．4

二、选择题（每题 4 分，共 20 分）

ABDCC

三、（8 分）解：$(A\quad B)=\begin{pmatrix}1&1&-1&1&-1\\0&2&2&1&1\\1&-1&0&2&1\end{pmatrix}$…………………………2 分

$$\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1&-1\\0&2&2&1&1\\0&-2&1&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1&-1\\0&2&2&1&1\\0&0&3&2&3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{11}{6}&\frac{1}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{6}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{2}{3}&1\end{pmatrix}$$…………………………6 分

所以 $X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}\frac{11}{6}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{6}&-\frac{1}{2}\\\frac{2}{3}&1\end{pmatrix}$ …………………………8 分

四、（8 分）解：原式$=\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&1&5&-1\\0&1&5&6\\0&0&3&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&5&-1\\1&5&6\\0&3&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&5&-1\\0&0&7\\0&3&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&7\\3&3\end{vmatrix}=-21$…………8 分，

五、（10 分）解：$(A\ \ b)=\begin{pmatrix}1&1&1&2&3\\2&-1&3&8&8\\-3&2&-1&-9&-5\\0&1&-2&-3&-4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&2&3\\0&1&-2&-3&-4\\0&0&1&1&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$………2 分

$$\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&2&1\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&1&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$ …………………………4 分

则有 $\begin{cases} x_1+2x_4=1 \\ x_2-x_4=0 \\ x_3+x_4=2 \end{cases}$ ……………………………6 分

取 x_4 为自由未知量，令 $x_4=c$，则通解为：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $c\in R$ …………8 分

对应齐次线性方程组的基础解系为：$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ …………10 分

六、（12 分）解：$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -k & 1 \\ 1 & k & 1 & 4 \\ k & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & -k & 1 \\ 0 & k+1 & 1+k & 3 \\ 0 & 1+k & k^2-1 & 5-k \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & -k & 1 \\ 0 & k+1 & 1+k & 3 \\ 0 & 0 & (k-2)(k-1) & 2-k \end{pmatrix}$ …………6 分

（1）$k\neq 1, k\neq 2$ 时，α_1，α_2，α_3 为向量组的一个最大线性无关组；………8 分

（2）$k=2$ 时，α_1，α_2 为向量组的一个最大线性无关组，…………10 分

$\alpha_3=-\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_4=2\alpha_1+\alpha_2$ …………12 分

七、（12 分）解：1）$A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$……………………1 分

2）解：由 $\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1+\lambda & 0 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)$

求得 A 的特征值为 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$……………………5 分

对应 $\lambda_1=-2$ 解方程 $(A+2E)X=0$

得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，将 ξ_1 单位化，得 $P_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，……………………7 分

对应 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 解方程 $(A-E)X=0$ 得基础解系 $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ 将 ξ_2，ξ_3 正交化，

$\eta_2=\xi_2$，$\eta_3=\xi_3-\dfrac{[\eta_2,\xi_3]}{\|\eta_2\|^2}\eta_2=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$

将 η_2，η_3 单位化，得 $P_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$，$P_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$………………………10 分

故 $P=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}}\\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \dfrac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$………………………12 分

八、（10 分） 证明：由 $A^2-3A-2E=0$，得 $A(A-3E)=2E$，

$A\cdot\dfrac{1}{2}(A-3E)=E$，所以 A 可逆，……………8 分

且 $A^{-1}=\dfrac{1}{2}(A-3E)$。……………10 分