(3) $f(z)=x^3-3xy^2+\mathrm{i}(3x^2y-y^3)$.

解 这里 $u(x,y)=x^3-3xy^2, v(x,y)=3x^2y-y^3$. $u_x=3x^2-3y^2, u_y=-6xy, v_x=6xy, v_y=3x^2-3y^2$，四个偏导数均连续且 $u_x=v_y, u_y=-v_x$ 处处成立，故 $f(z)$ 在整个复平面上处处可导，也处处解析.

(4) $f(z)=\sin x\operatorname{ch} y+\mathrm{i}\cos x\operatorname{sh} y$.

解 这里 $u(x,y)=\sin x\operatorname{ch} y, v(x,y)=\cos x\operatorname{sh} y$.

$$u_x=\cos x\operatorname{ch} y,\quad u_y=\sin x\operatorname{sh} y,$$

$$v_x=-\sin x\operatorname{sh} y,\quad v_y=\cos x\operatorname{ch} y.$$

四个偏导均连续且 $u_x=v_y, u_y=-v_x$ 处处成立，故 $f(z)$ 处处可导，也处处解析.

2.3 确定下列函数的解析区域和奇点，并求出导数.

(1) $\dfrac{1}{z^2-1}$.

解 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-1}$ 是有理函数，除去分母为 0 的点外处处解析，故全平面除去点 $z=1$ 及 $z=-1$ 的区域为 $f(z)$ 的解析区域，奇点为 $z=\pm 1$，$f(z)$ 的导数为

$$f'(z)=\left(\frac{1}{z^2-1}\right)'=\frac{-2z}{(z^2-1)^2}$$

(2) $\dfrac{az+b}{cz+d}$(c,d 至少有一不为零).

解 同上题，$f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 除 $z=-\dfrac{d}{c}$ 外($c\neq 0$)在复平面上处处解析，$z=-\dfrac{d}{c}$ 为奇点，

$$f'(z)=\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)'$$

$$=\frac{(az+b)'(cz+d)-(cz+d)'(az+b)}{(cz+d)^2}$$

$$=\frac{a(cz+d)-c(az+b)}{(cz+d)^2}=\frac{ad-cb}{(cz+d)^2}.$$