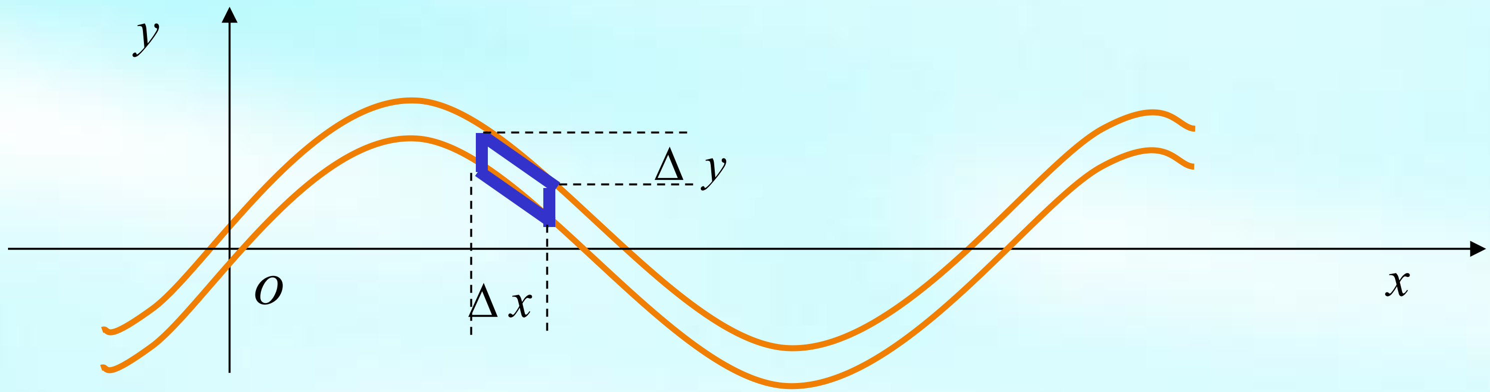
§11-3 波 的 能 量 The energy of the wave

11.3.1 波的能量和能量密度

设： $y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$

1、dV 内的波动动能



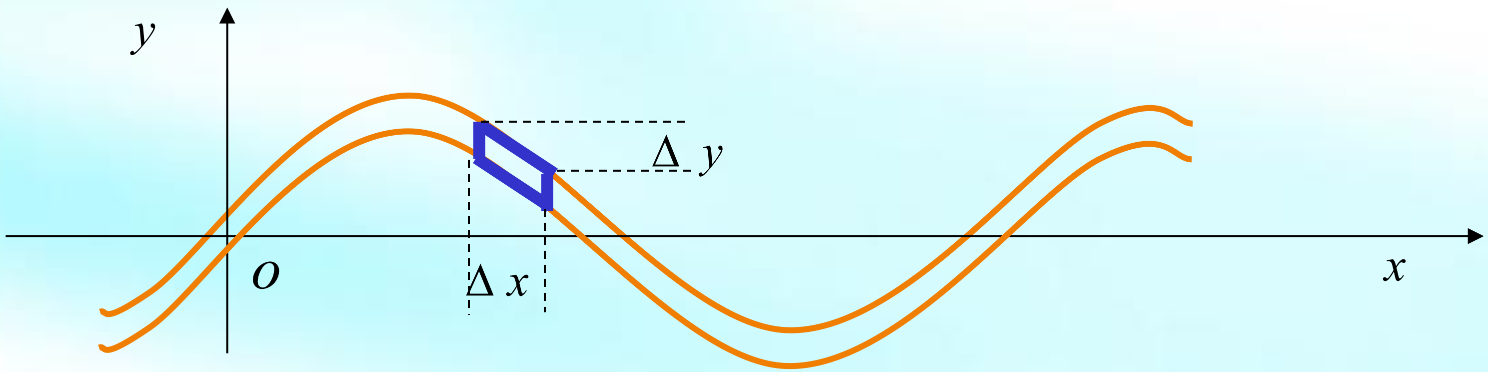
在介质内任取一体元dv $dm = \rho dV$ $dV = S \cdot dx$

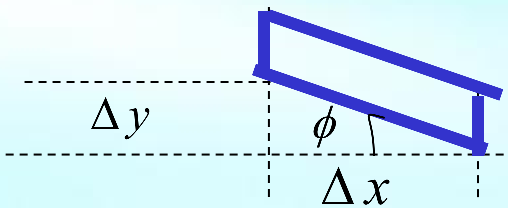
$$dE_k = \frac{1}{2}(dm)v^2 \qquad v = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\sin[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

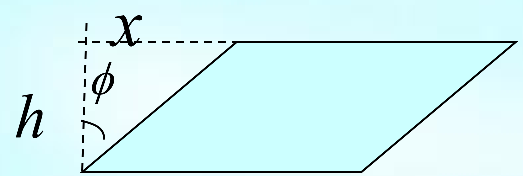
$$dE_k = \frac{1}{2}\rho dV \omega^2 A^2 \sin^2[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

2、dv 内的波动势能

体积元因形变而具有弹性势能　　　　在横波中，产生切变







$$tg\phi=\frac{x}{h}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\omega}{u}A\sin\left[\ \omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi_0\ \right]\qquad u_{\perp}=\sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

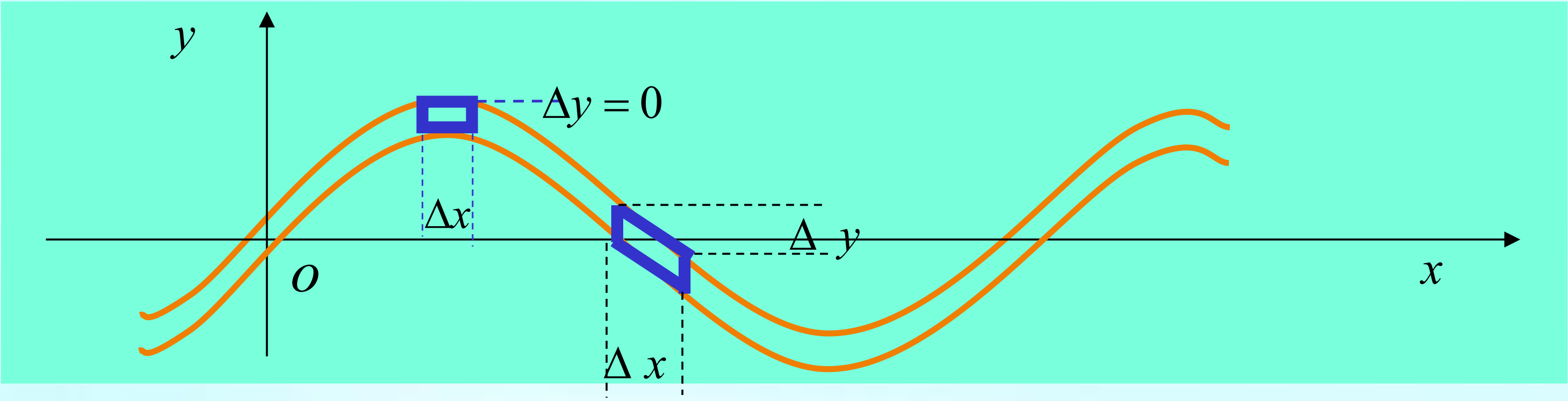
$$\therefore \Delta E_p=dV\cdot\frac{1}{2}G\left(\frac{\partial\ y}{\partial\ x}\right)^2=\frac{1}{2}\rho dV\omega^2A^2\sin^2\left[\ \omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0\ \right]$$

３、dV内的总波动能量

$$dE = dE_k + dE_p = \rho(dV)A^2\omega^2 \sin^2[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

以上讨论说明：

① 在同一体元dV 内， dE_k 、 dE_p 是同步的。



以横波为例，当体积元的位移最大时（即波峰、波谷处），它附近的介质也沿同一方向产生了几乎相等的位移，使该体积元发生的相对形变为零，即此时有$\partial y/\partial x=0$，所以此时体积元的弹性势能为零，而此时体积元的振速也为零，所以动能也为零；

相反地，当体积元处在位移为零处(即平衡位置)时，振速、相对形变均最大，所以弹性势能和动能都同时达到最大值。

这与孤立的谐振子系统不相同，孤立的谐振子系统振动过程中系统的动能和势能相互转换,且总能保持不变。

② 体元dV内的机械能不守恒，且作周期性变化。

$$dE = \rho (dV) A^2 \omega^2 \sin^2[\omega (t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

对任一介质体积元来说，不断从波源方向的介质中吸收能量，又不断地向后面的介质传递能量。这说明波动是传递能量的一种方式，且能量传播的速度就是波速。

As waves propagate through a medium, they transport energy.

4、能量密度

单位体积内的能量 $w=\dfrac{dE}{dV}$

$$w=\frac{dE}{dV}=\rho A^2\omega^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

5、一个周期内的平均能量密度

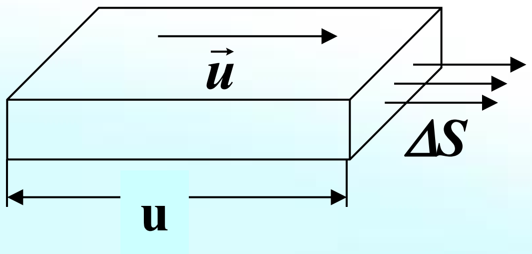
$$\overline{w}=\frac{1}{T}\int_0^T wdt=\frac{1}{T}\int_0^T \rho A^2\omega^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]dt$$

$$=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2 \qquad \sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$$

这说明： $\overline{w}\propto\omega^2$、$A^2$

11.3.2 波的能流和能流密度

1. 能流: 单位时间内通过介质中某一截面的能量。



$$p = wu\Delta S$$

平均能流： 在一个周期内能流的平均值。

$$\overline{p} = \overline{wu\Delta S} = \overline{w}u\Delta S$$

2. 能流密度(波的强度):

通过垂直于波动传播方向的单位面积的平均能量

$$I = \frac{\overline{p}}{\Delta S} = \overline{w}u$$

$$I = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u$$ 单位：瓦·米$^{-2}$

3. 平面波和球面波的振幅

在均匀不吸收能量的媒质中传播的平面波在行进方向上振幅不变，球面波的振幅与离波源的距离成反比。

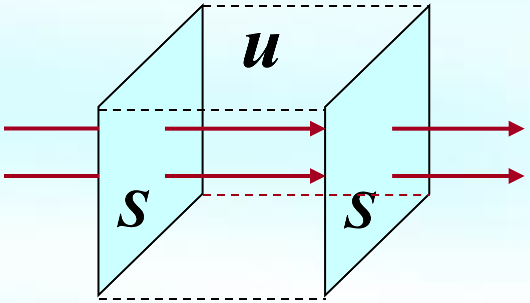
对平面波：

在一个周期T内通过S_1和S_2面的能量应该相等

$$\because I_1 S_1 T = I_2 S_2 T$$

$$S_1 = S_2 = S$$

$$\frac{1}{2}\rho u \omega^2 A_1^2 S_1 T = \frac{1}{2}\rho u \omega^2 A_2^2 S_2 T$$

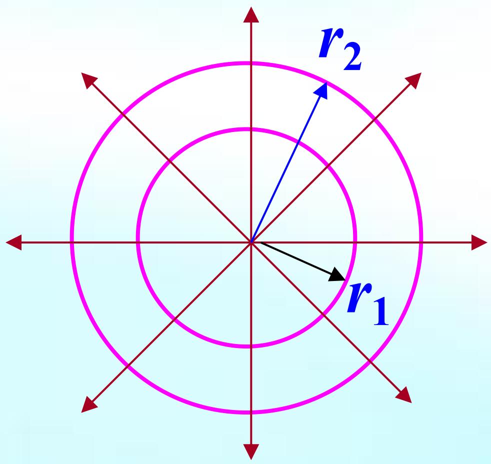


所以, 平面波振幅相等。

$$A_1 = A_2$$

对球面波：

$$\because \frac{1}{2}\rho u\omega^2 A_1^2 S_1 T = \frac{1}{2}\rho u\omega^2 A_2^2 S_2 T$$



$$S_1 = 4\pi r_1^2; \quad S_2 = 4\pi r_2^2$$

$$\therefore A_1 r_1 = A_2 r_2$$

所以振幅与离波源的距离成反比。如果距波源单位距离的振幅为A则距波源r 处的振幅为A/r

由于振动的相位随距离的增加而落后的关系，与平面波类似，球面简谐波的波函数：

$$y = \frac{A}{r}\cos[\omega(t - \frac{r}{u}) + \varphi_0]$$

§11-4 惠更斯原理、波的叠加和干涉

一 惠更斯原理及其应用 Huygen's Principle and its applications

1. Christian Huygens(惠更斯): 1629~1695

荷兰物理学家、数学家和天文学家；

1656年制成了第一座机械钟；

1678年《光论》提出了光的波动学说，建立了著名的惠更斯原理，成功地解释了光的直线传播；

图 15－29 惠更斯

1665年发现了土星的光环和木星的卫星（木卫六）。

2. 惠更斯原理 Huygens's principle

波在弹性介质中运动时, 任一点*P* 的振动, 将会引起邻近质点的振动。就此特征而言，振动着的 *P* 点与波源相比，除了在时间上有延迟外，并无其他区别。因此，*P* 可视为一个新的波源。1678年，惠更斯总结出了以其名字命名的惠更斯原理:

介质中任一波面上的各点，都可看成是产生球面子波的波源；在其后的任一时刻，这些子波的包络面构成新的波面。

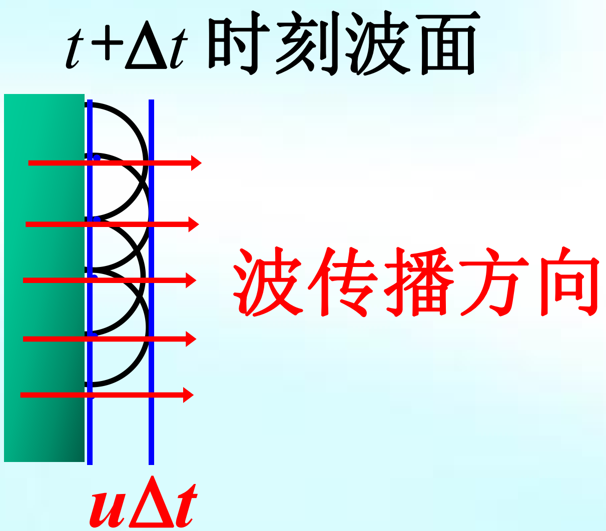
Huygens observed that in a typical wave motion each particle is set into vibration by a neighboring particle. This let him to postulate that every point on a wavefront acts as a new source sending out secondary wavelets(子波).

Huygens’s principle:

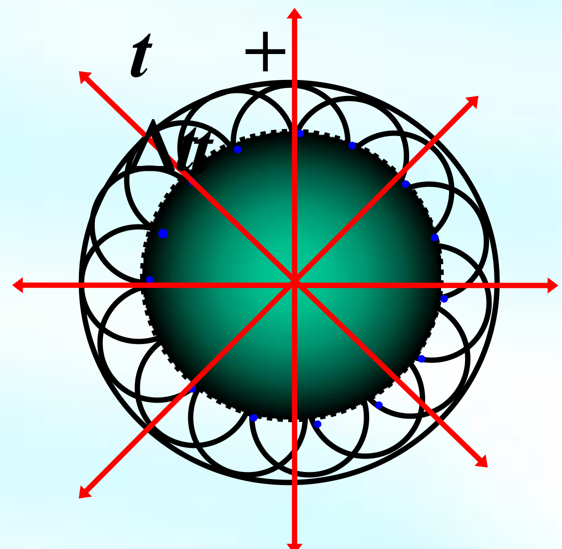
(1) 媒质中波动传到的各点(波前)都可以看作是新的次级波源(secondary source);

(2)这些次级波源发射与**原波相同(速度,波长....)**的次级子波;

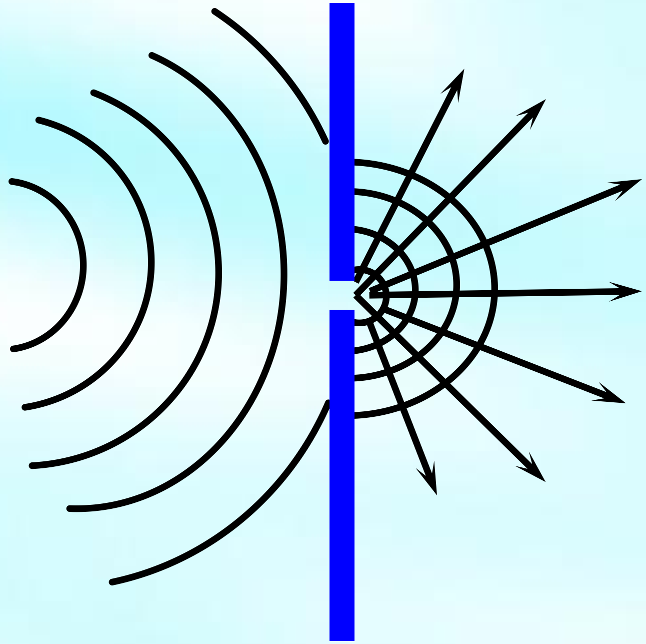
(3)其后任意时刻这些次级子波的前方**包迹**就是新的波阵面.



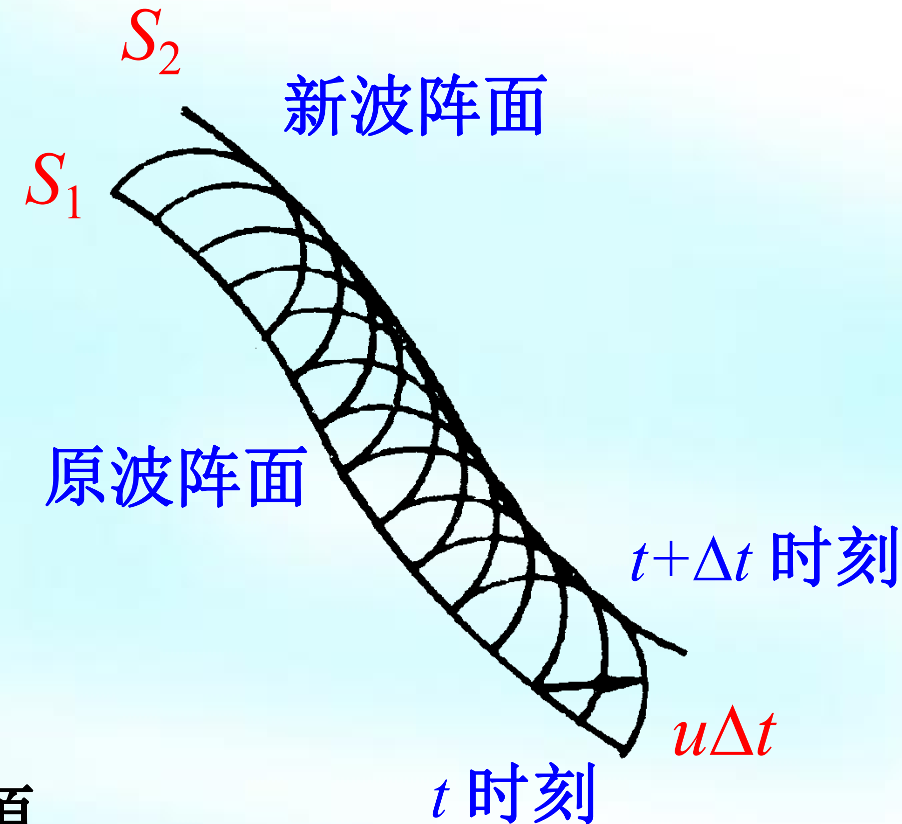
平面波



球面波



障碍物的小孔成为新的波源



3.波的衍射 The diffraction of wave

波会绕过障碍物,继续在媒质中传播,且到达沿直线传播所不能到达的区域,这种波传播偏离直线的现象叫波的衍射现象或绕射现象.

The bending of waves into the shadow region of obstacles and related phenomena are called diffraction.

All types of waves exhibit(展现) the diffraction:

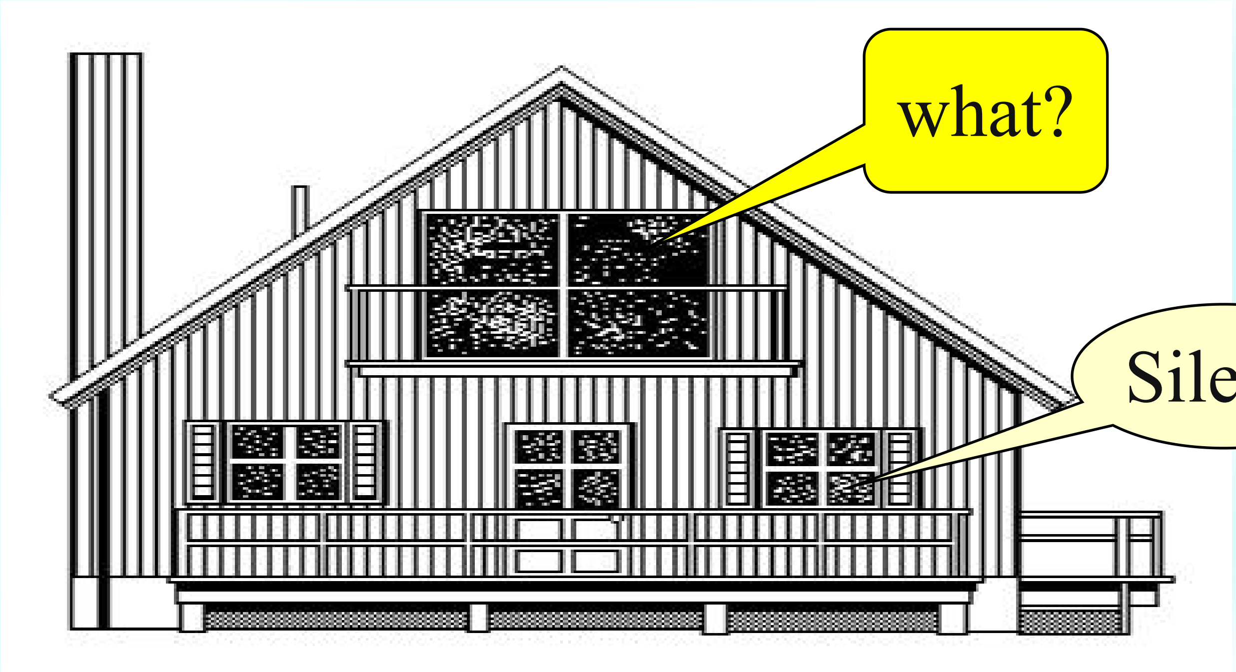
$\lambda \sim d \rightarrow$: most prominent(显著)

$\lambda < (\ll) d \rightarrow$: less apparent(不明显)

Here d is the size of obstacle or opening.

For example:

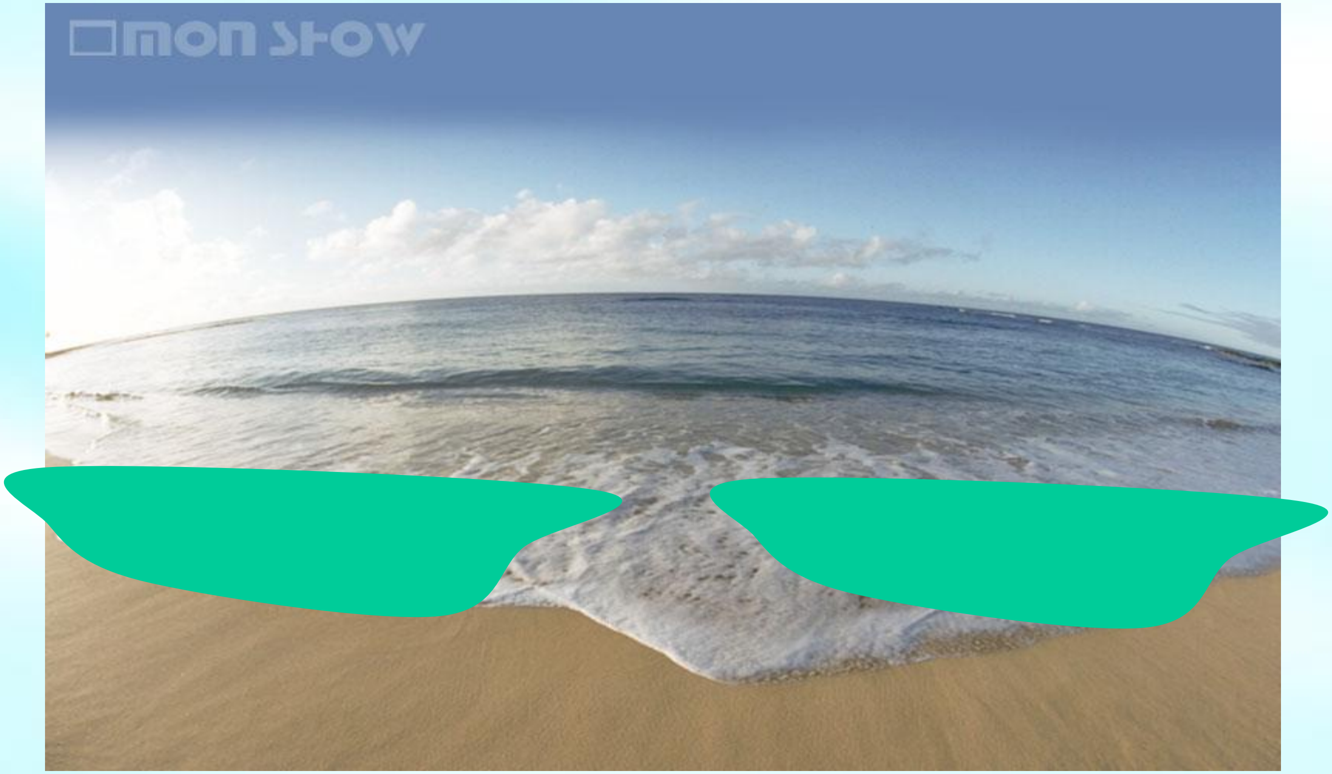
(1)sound: $\lambda_{sound} \sim 1m$ easy to result in diffraction.



没有不透风的墙!

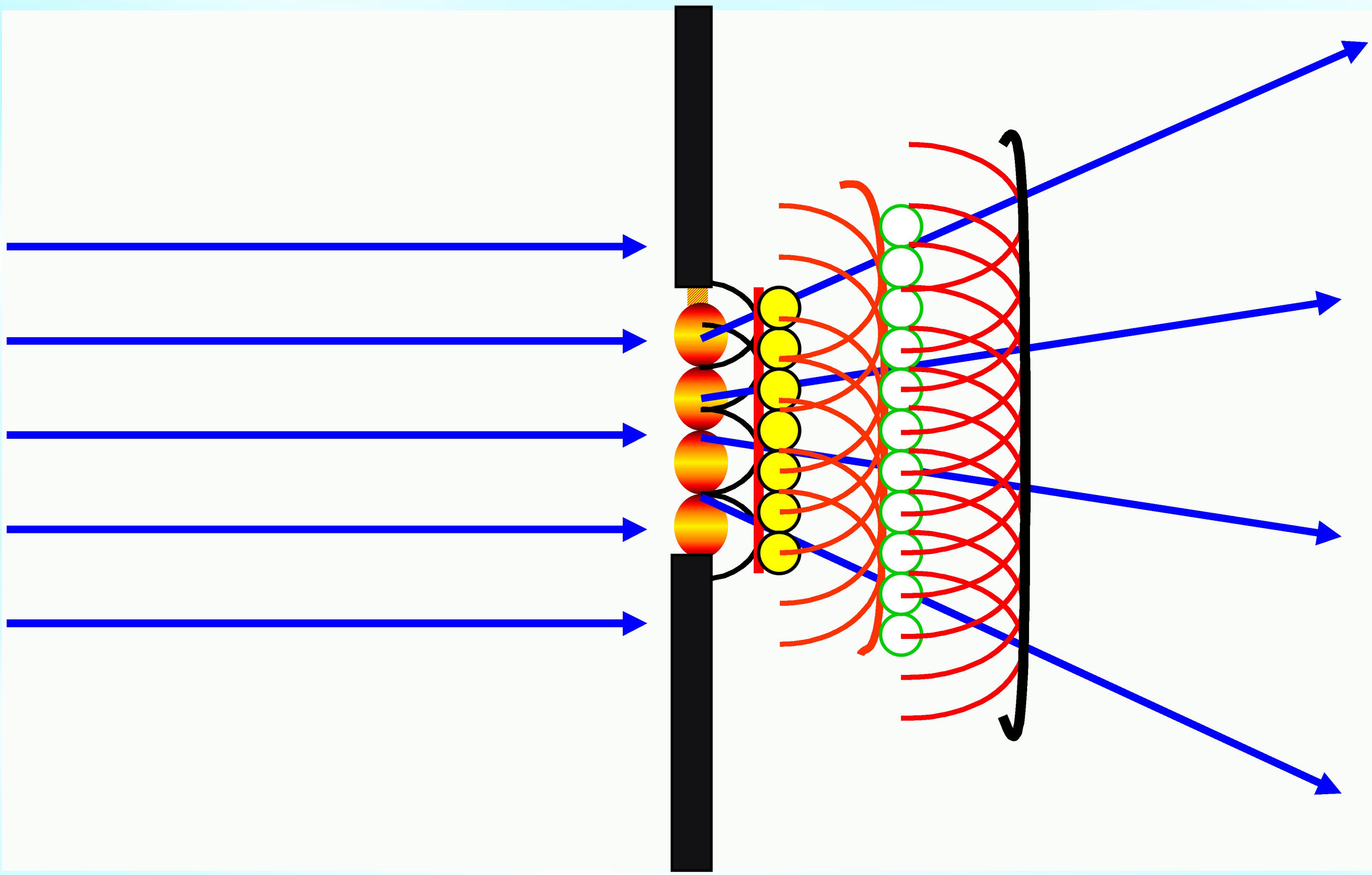
隔墙有耳!!!

(2) water wave:



(3) light: wavelength is small to be difficult to exhibit the diffraction which we will see in chapter 12.

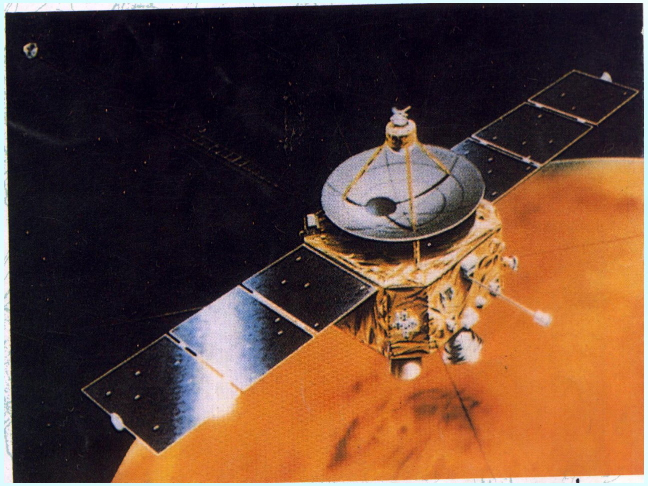
Huygens's principle: can provide a good explanation for the diffraction of waves.



二. 波的叠加原理 Principle of Superposition of Waves

There are many occasions (机会,场合) in which two more wave meet in the same medium. What’s happen?

Many satellites send the messages to Earth’s surface.



有两个问题必须回答:

(1)两种或多种波在同一种介质中是怎样传递?

(2)有多种波在一种介质中传递, 介质粒子怎样反应?

Principle of Superposition of Waves:

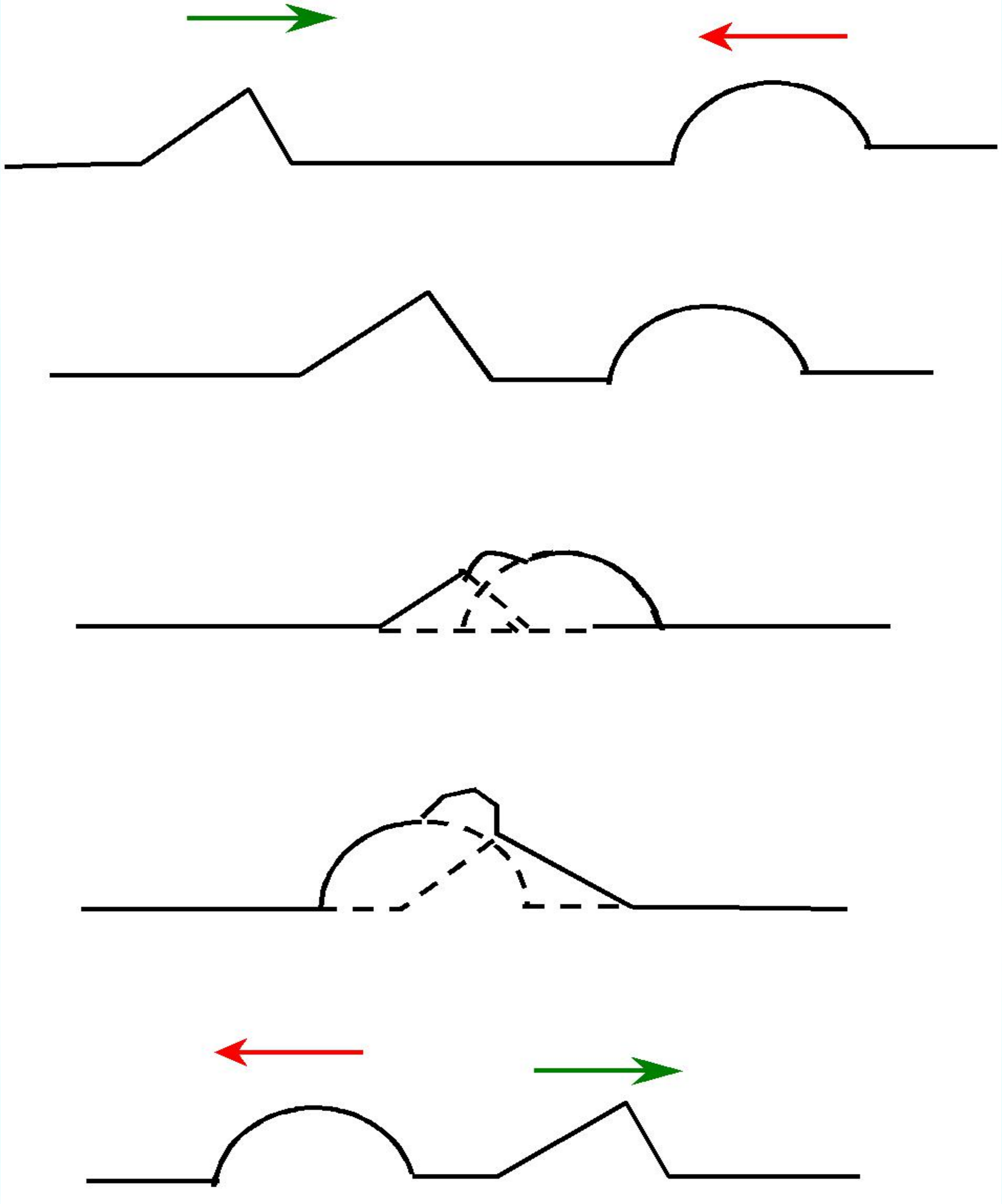
当几列波在同一介质中传播时:

(1) 各列波仍保持原有的频率、波长、振动方向等特征, 按照原来的方向继续前进, 就像没有遇到其他的波一样;

(2) 在其相遇区域内, 任一点的振动为各个波单独存在时在该点引起的振动的矢量和.

If two or more traveling waves are moving through a medium, the resultant wave function at any point is the algebraic sum of the wave functions of the individual waves.

One consequence of the superposition principle is that two traveling waves can pass through each other without being destroyed or even altered.



三. 波的干涉 Interference of waves

一般情况下，几列波在介质中相遇时，相遇区域内各处质点的合振动是很复杂的和不稳定的。

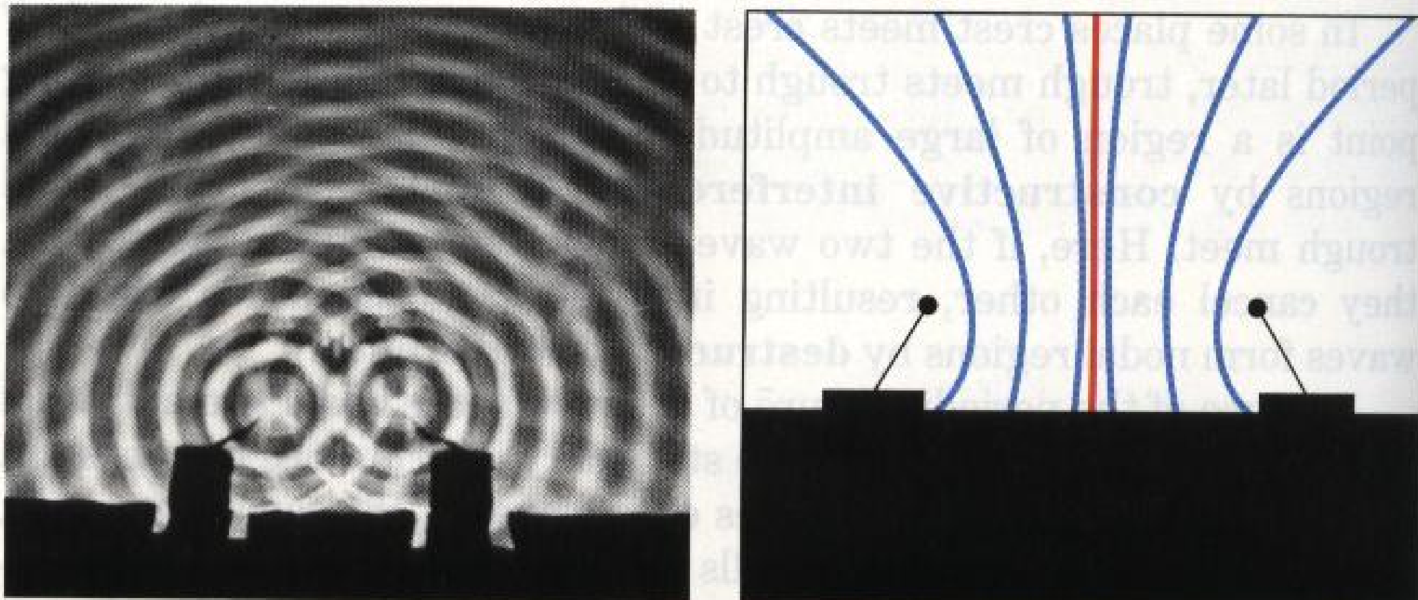
1. 相干波和干涉现象:

两个频率相同、振动方向相同、相位差保持恒定的两个波源发射的波称为相干波；这两个波源称为相干波源。

干涉条件：
- 频率相同；
- 振动方向相同。
- 相位差恒定；

两列相干波相遇，会发生什么？

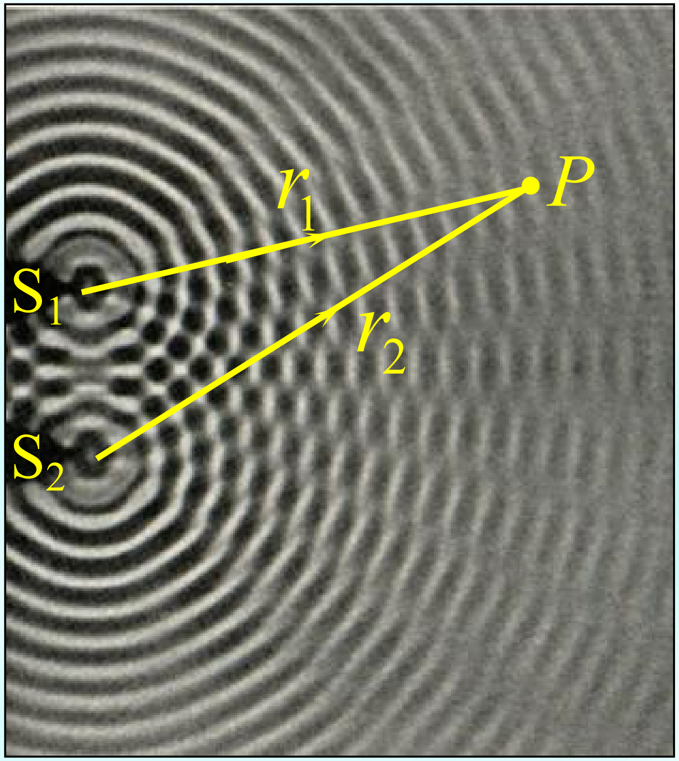
由于两列波引起质点振动，因各质点的空间位置不同，有的点的合振动的振幅最大（加强），有的点合振动的振幅最小（减弱），这样形成一幅稳定的‘图样’，这种现象叫波的干涉。



波源振动表达式：

$$S_1: \quad y_1 = A_{10}\cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$S_2: \quad y_2 = A_{20}\cos(\omega t + \varphi_2)$$



***P*点振动表达式：**

$$y_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1 - \frac{2\pi r_1}{\lambda})$$

$$y_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2 - \frac{2\pi r_2}{\lambda})$$

***P*点的合振动表达式：**

$$y_P = y_{1P} + y_{2P} = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\boxed{A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos[\varphi_2-\varphi_1-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)]}}$$

$$\boxed{\tan\varphi=\frac{A_1\sin(\varphi_1-\frac{2\pi r_1}{\lambda})+A_2\sin(\varphi_2-\frac{2\pi r_2}{\lambda})}{A_1\cos(\varphi_1-\frac{2\pi r_1}{\lambda})+A_2\sin(\varphi_2-\frac{2\pi r_2}{\lambda})}}$$

$$I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos\Delta\varphi$$

2、干涉加强和减弱条件

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$

$$\Delta\varphi = (\varphi_{20} - \varphi_{10}) - 2\pi\frac{r_2 - r_1}{\lambda}$$

(1) $(\varphi_{20} - \varphi_{10}) - \dfrac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = 2k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$A=A_1+A_2$ Constructive 干涉极大

(2) $(\varphi_{20} - \varphi_{10}) - \dfrac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = (2k+1)\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$A=\left|A_1-A_2\right|$ destructive 干涉极小

（3）特例：$A_1 = A_2$ $\boxed{A = [0, 2A_1]}$

有些点不动（A=0），有些点振动最强（A=2A_1),形成一定的稳定分布，即干涉图样。

（4）特例：$\varphi_{10} = \varphi_{20}$

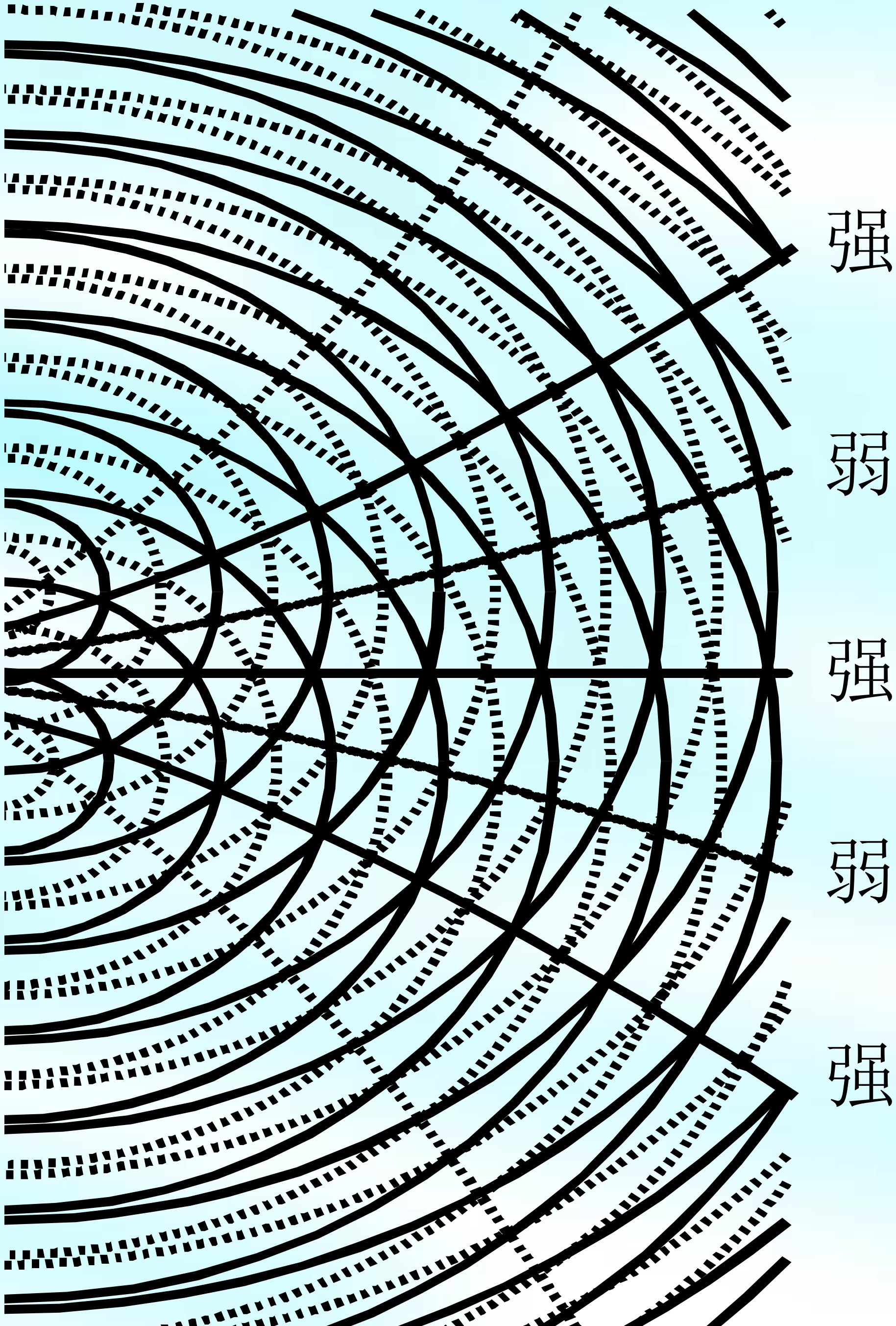
$$\delta = r_2 - r_1 = \begin{cases} \pm 2k\dfrac{\lambda}{2} & k = 0, 1, 2\ldots \\ \pm (2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & k = 0, 1, 2\ldots \end{cases}$$

极大

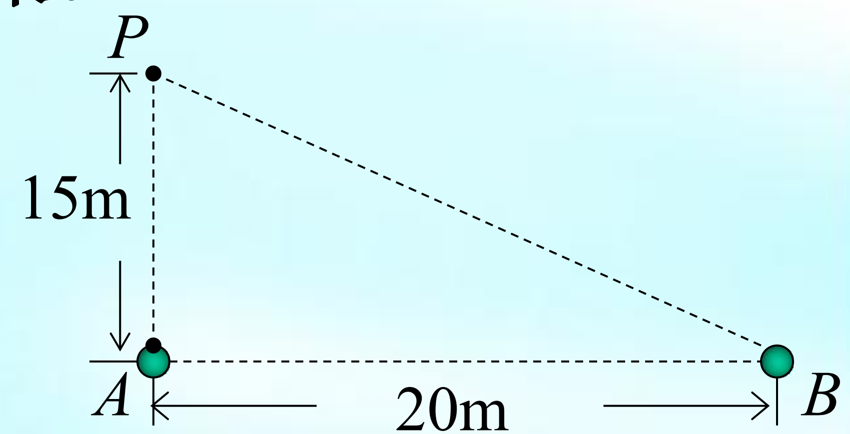
极小

where δ is the difference of distances(path difference:路程差）traveled by two wave to point P. That is:

$$P\text{点}\begin{cases}\text{路程差等于半波长的偶数倍} \rightarrow \text{极大} \\ \text{路程差等于半波长的奇数倍} \rightarrow \text{极小}\end{cases}$$


强
弱
强
弱
强

例1. AB为两相干波源，振幅均为5cm，频率为100 Hz，波速为10 m/s。A点为波峰时，B点恰为波谷，试确定两列波在P点干涉的结果。



解：$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi \dfrac{r_2 - r_1}{\lambda}$

$$BP = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25m$$

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = 0.1m$$

设A比B超前π　　$\varphi_A - \varphi_B = \pi$

$$\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A - 2\pi\frac{BP - AP}{\lambda} = -\pi - 2\pi\frac{25 - 15}{0.1}$$

$= -201\pi$ 反相位　　$A = 0$　　P点静止

例2 如图所示11.18所示，在同一媒质中相距20 cm的A，B两点处各有一个波源，它们作同频率(v=100 Hz)、同方向的振动。设它们激起的波为平面简谐波，振幅均为5 cm，波速为200 m·s⁻¹ ，且A点为波峰时B点恰为波谷，求AB连线上AB之间因干涉而静止的各点的位置。

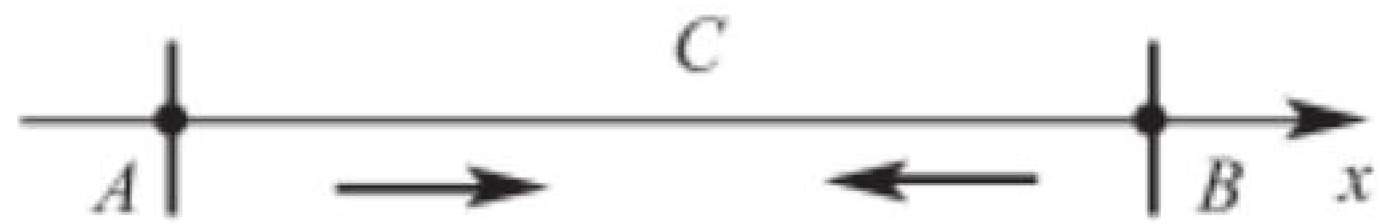


图 11.18

解： 首先选定坐标系，以A点为原点，水平向右为x轴正向。设C点为AB连线上因干涉而静止的点，AC = x，BC = 20-x，又题意知，A，B两点为一对相干波源S_1，S_2，且

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = (2k+1)\pi$$

代入数据，有 $\pi - \frac{2\pi}{\lambda}(20-2x) = (2k+1)\pi$

$$x = \frac{k}{2}\lambda + 10 = (k+10)$$

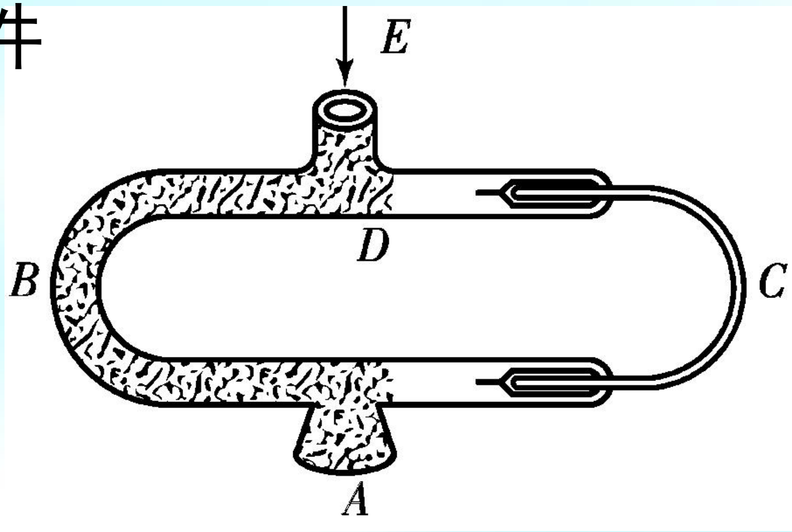
由0 < x < 20，得k=0，±1，±2 …，±9。所以AB连线上AB之间因干涉而静止的各点位置时x = 1，2，3，…，17，18，19 (m) 处。

例3　图示是声波干涉仪.声波从入口E处进入仪器，分B，C两路在管中传播，然后到喇叭口A会合后传出.弯管C可以伸缩，当它渐渐伸长时，喇叭口发出的声音周期性增强或减弱.设C管每伸长8 cm，由A发出的声音就减弱一次，求此声波的频率(空气中声速为340 m/s).

解：干涉减弱的条件是

$$\delta = DCA - DBA = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \quad (k = 0,1,2\cdots)$$

当C管伸长x＝8 cm时，再一次出现干涉减弱，即此时两路波的波程差应满足条件



$$\delta' = \delta + 2x = \left[2(k+1)+1\right]\frac{\lambda}{2}$$

$$\delta' - \delta = 2x = \lambda$$

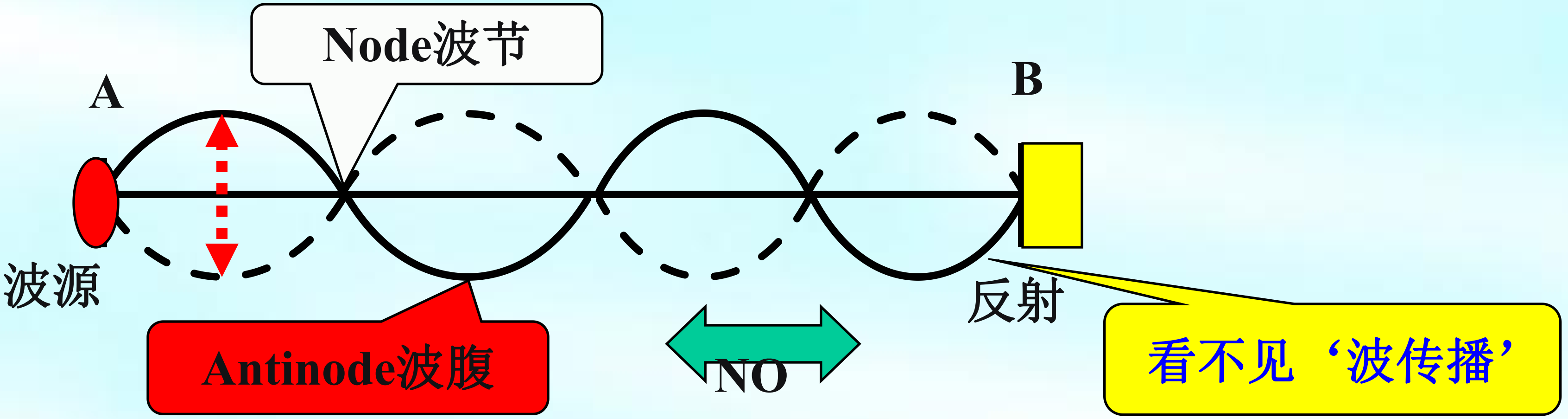
声波的频率为：

$$\nu = \frac{u}{\lambda} = \frac{u}{2x} = \frac{340}{2\times 0.08} = 2125\text{Hz}$$

§11-5 驻 波 Standing Waves

在同一介质中，两列振幅相同的相干平面简谐波，在同一直线上沿相反方向传播时叠加形成的波，称为驻波。

Consider two sinusoidal waves in the same medium with the same amplitude frequency, and wavelength but traveling in opposite direction, their wave function is a standing wave.



Nodes: the positions of minimum amplitude of zero

波节：介质中始终不振动的点；

Antinodes: the positions of maximum amplitude

波腹：振幅始终为极大值的点；

驻波:standing wave

11.5.1　驻波方程

为简单计算，设两列相向传播的波在原点位相相同（例如为零）

即

$$y_1 = A\cos(2\pi\nu t - \frac{2\pi}{\lambda}x)$$

$$y_2 = A\cos(2\pi\nu t + \frac{2\pi}{\lambda}x)$$

两波相遇，其合成波为

$$y = y_1 + y_2 = A\cos(2\pi\nu t - \frac{2\pi}{\lambda}x) + A\cos(2\pi\nu t + \frac{2\pi}{\lambda}x)$$

$$= 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cdot\cos 2\pi\nu t = \varphi(x)\psi(t)$$

变量分离

11.5.2 驻波的特点：

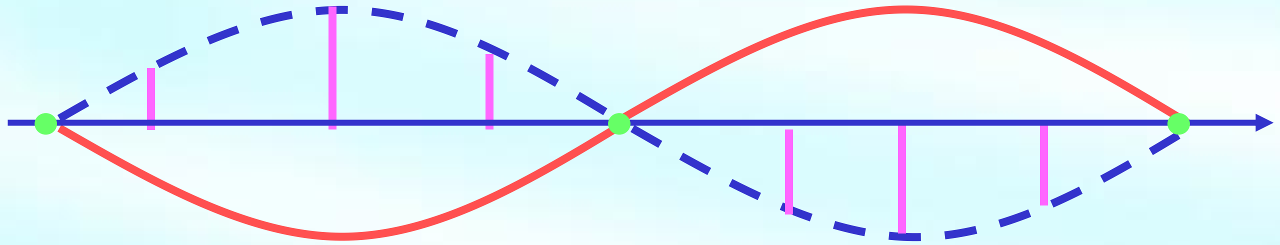
1.波腹与波节　　驻波振幅分布特点

➢波线上各点都在自己平衡位置附近作周期为T的谐振动，各点的振幅随位置的不同作周期性变化。

考察某一点，令x=常数 ， 则x处的质元振幅为

$$\left|2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right|$$

振动频率为 2πν



波节和波腹位置

介质中各点的振幅是随x按余弦规律变化，而余弦函数的绝对值的周期为π，故

- 当振幅为极大时，为波腹的坐标位置

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = k\pi \qquad x = k\cdot\frac{\lambda}{2}$$

说明两相邻波腹间距为 $\frac{\lambda}{2}$

Nate that adjacent antinodes are separated by $\frac{\lambda}{2}$

- 当振幅为0时，为波节的坐标位置

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \qquad x = (2k+1)\frac{\lambda}{4}$$

说明两相邻波节间距为 $\frac{\lambda}{2}$

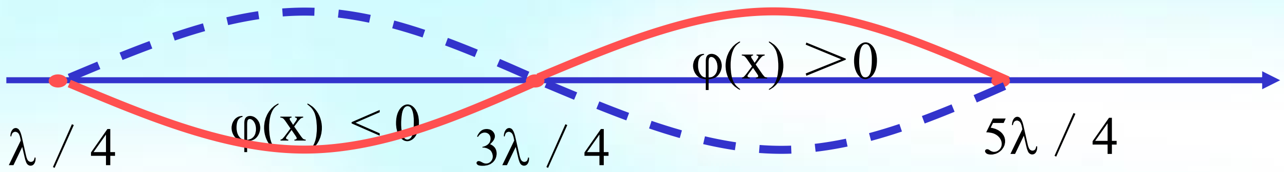
两相邻波节和波腹之间距为 $\frac{\lambda}{4}$

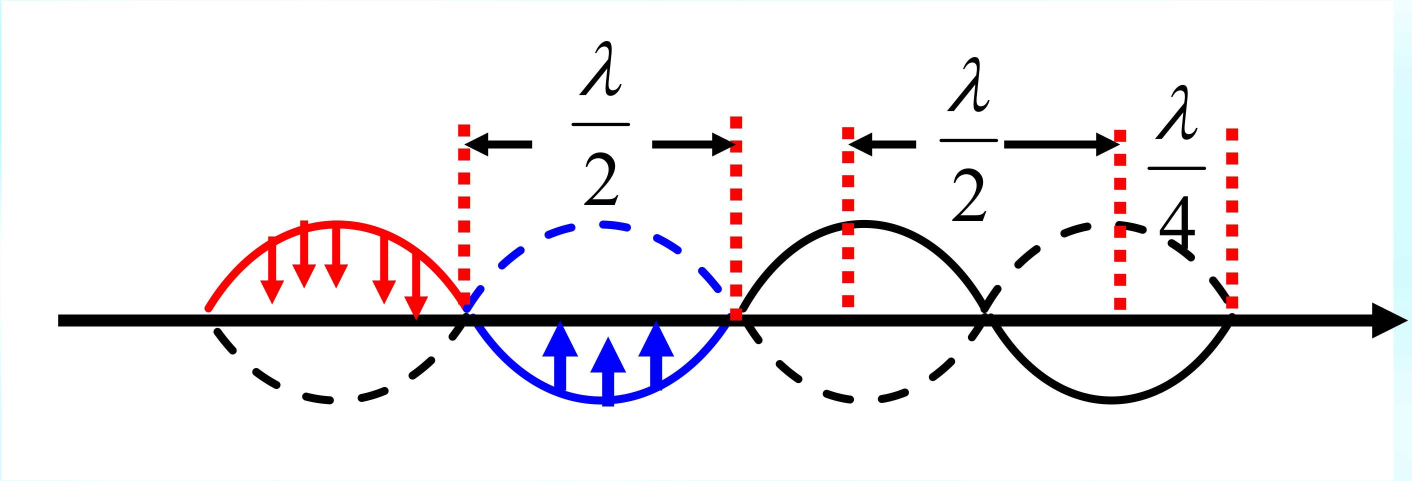
The distance between a node and an adjacent antinode is $\frac{\lambda}{4}$

注意结论的适用范围：

✦上述波腹、波节的坐标位置公式是特殊情况下的结论（即两相干波初相为零时所得），不具普遍性。

✦而关于两相邻波腹，两相邻波节间距为 $\lambda/2$ 的结论具有普遍性，求波节、波腹的方法，思路具有普遍性。





相邻两个波节之间的所有各点振动位相相同，同步振动。任一波节两侧的点，振动位相正好相反，相差π，

——即驻波干涉中，介质各点的振动位相分段相同，相邻两段位相相反。

2. 驻波相位的分布特点：

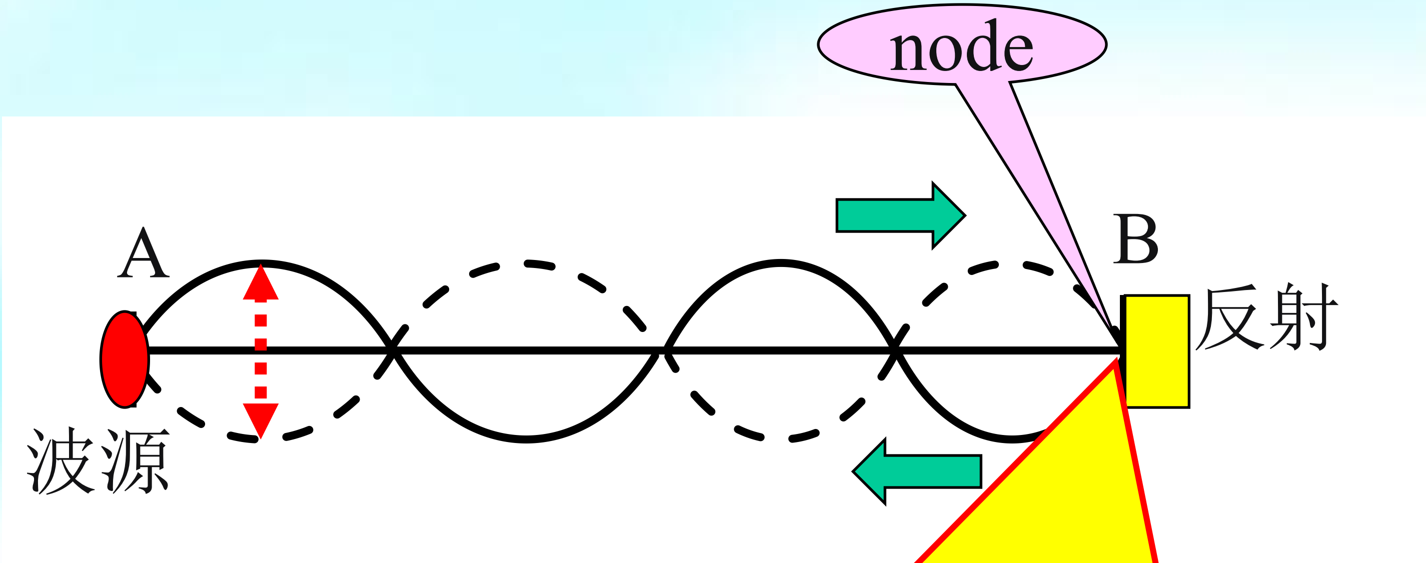
$$y(t+\Delta t, x+\Delta x) = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}(x+\Delta x)\cdot\cos 2\pi\nu(t+\Delta t) \neq y(t,x)$$

驻波:波形并不向前传播，也没有振动状态(位相)和能量的传播。

- 当所有质点的位移到达最大时，各质点动能为零，全部能量为势能，且势能集中在波节附近。
- 当所有质点到达平衡位置时，各质点势能为零，全部能量为动能，且动能集中在波腹附近。
- 在驻波振动的其它时刻，动能、势能并存，且在一个波段内动能、势能在不断地进行转换，并不断地分别集中在波腹和波节附近而不向外传播。

驻波干涉实际上是一种特殊振动，是在一段有限长介质中入射波与反射波叠加后引起的特殊振动。

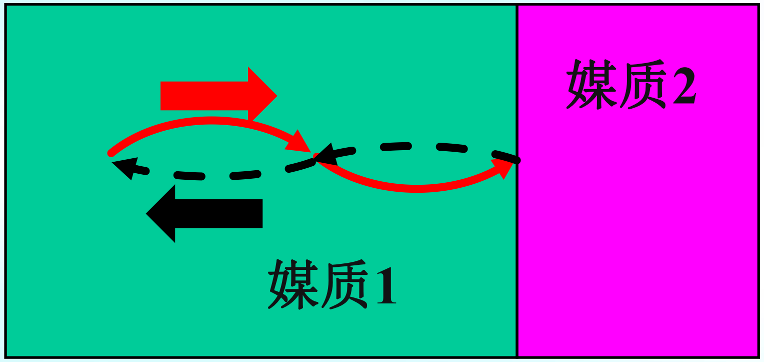
所有乐器都是不同介质的不同形式的驻波振动。



B点为波节,表明反射波与入射波位相相反,振动相位突变π，这等价于半个波长,这现象叫半波损失.

11.5.3 半波损失

1、什么是半波损失



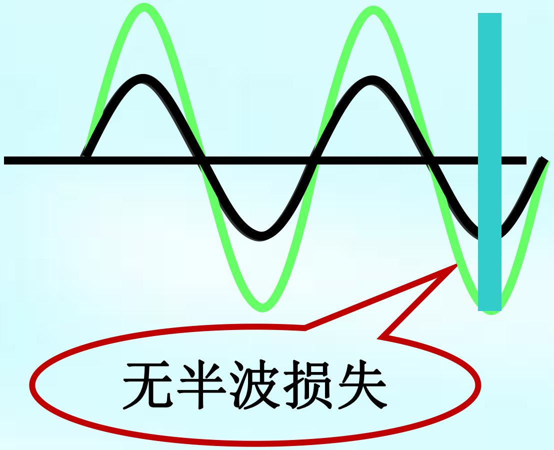
反射波与入射波在界面处的相位，当满足一定条件时，始终存在着π的位相差的现象。

波动在反射时发生π位相突变的现象称为半波损失。

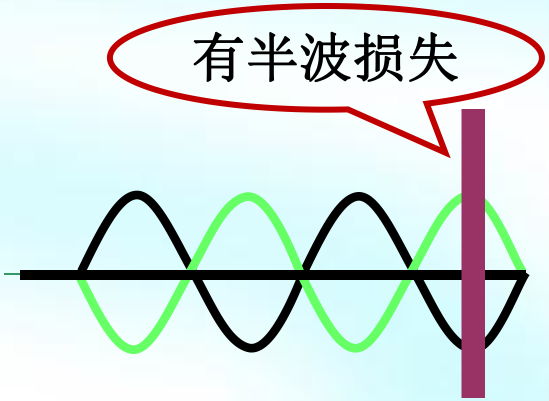
2、产生半波损失的条件

波垂直入射到两界面反射时:

(1)如果波从波阻小的媒质反射回来，在反射出反射波与入射波的位相相同;



(2)如果波从波阻大的媒质反射回来,在反射出反射波与入射波的位相相反,有半波损失。



3、反射波在界面处的相位变化的讨论：

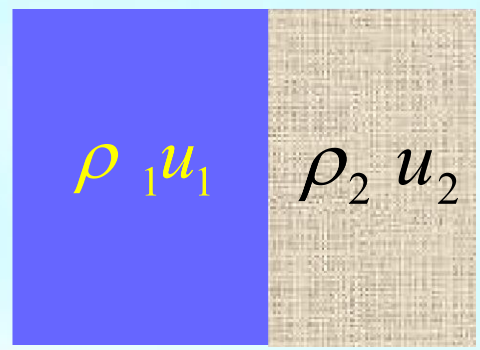
1、波阻： $\rho\cdot u$——即介质的密度与波速之乘积

两种介质中，相对波阻大的介质为波密介质

相对波阻小的介质为波疏介质

如 $\rho_1 u_1 > \rho_2 u_2$

$n_1 > n_2$



2、实验表明：

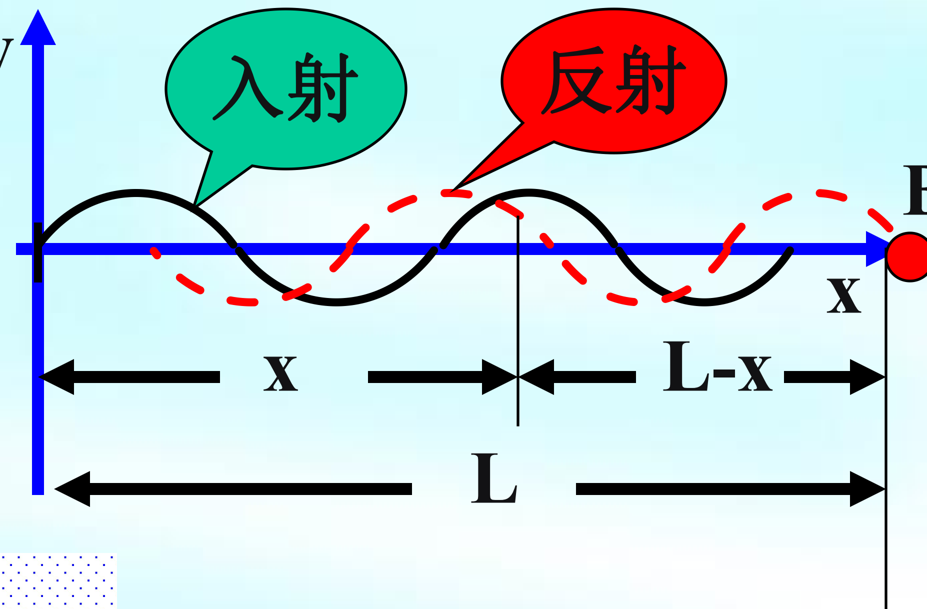
波由波疏介质入射，在波密界面上反射——界面形成波节。

波由波密介质入射，在波疏界面上反射——界面形成波腹。

例:设沿弦线传播的一入射波的表达式为:

$$y_{入} = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \varphi]$$

波在x=L处发生反射,反射点为固定端如图.设波在传播和反射过程中振幅不变,试写出反射波的表达式.

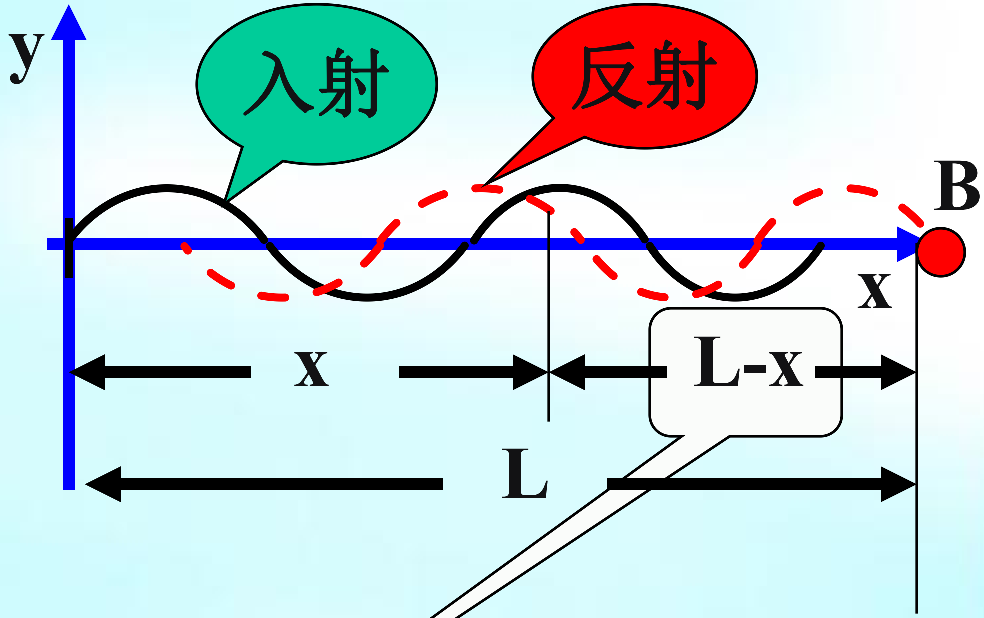


解:反射波来自反射点B,B点相当于‘波源’,波源B的振动方程:

$$y_B = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{L}{\lambda}) + \varphi \pm \pi]$$

$$= A\cos[2\pi\frac{t}{T} + \varphi \pm \pi - \frac{2\pi L}{\lambda}]$$

半波损失



反射波的波动方程为:

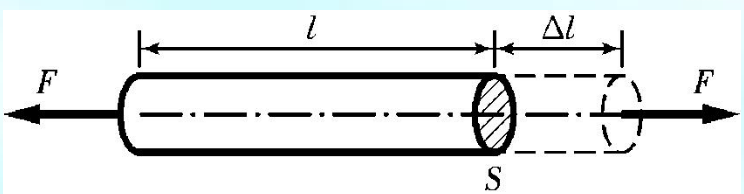
$$y_{反} = A\cos[\,2\pi(\frac{t}{T}-\frac{L-x}{\lambda}) + \varphi \pm \pi - \frac{2\pi L}{\lambda}]$$

$$= A\cos[\,2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}) + \varphi \pm \pi - \frac{4\pi L}{\lambda}]$$

补充：物体的弹性形变

固体、液体和气体在受到外力作用时，不仅运动状态会发生变化，而且其形状和体积也会发生改变，这种改变称为形变. 如果外力不超过一定限度，在外力撤去后，物体的形状和体积能完全恢复原状，这种形变称为弹性形变. 这个外力限度称为弹性限度. 形变有以下几种基本形式：

(1) 长变　如图5. 4所示，在一棒的两端沿轴向作用两个大小相等、方向相反的一对外力F时，其长度发生变化，由l变为l＋Δl，伸长量Δl的正负(伸长或压缩)由外力方向决定，$\frac{l}{l}$ 表示棒长的相对改变，称为应变或胁变. 设棒的横截面积为S，则 $\frac{F}{S}$ 称为应力或胁强. 胡克定律指出，在弹性限度范围内，应力与应变成正比，即



$$\frac{F}{S}=E\frac{L}{L}$$

图5. 4　长变

(2) 切变　如图5.5所示，在一块材料的两个相对面上各施加一个与平面平行、大小相等而方向相反的外力F时，则块状材料将发生图中所示的形变，即相对面发生相对滑移，称为切变. 设施力的平面面积为S，则 $\frac{F}{S}$ 称为切变的应力或胁强，两个施力的相对面相互错开的角度 $\varphi = \arctan\frac{d}{b}$ 称为切变的应变或胁变. 根据胡克定律，在弹性限度内，切变的应力和切应变成正比，即

$$\frac{F}{S} = G\varphi$$

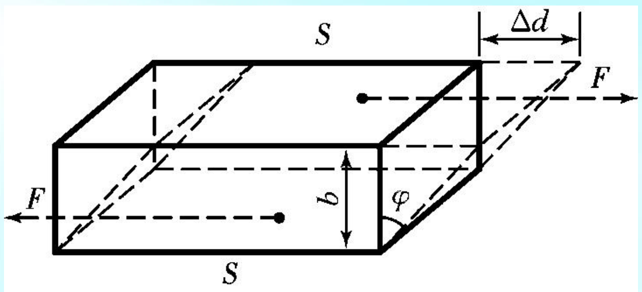


图5.5　切变

式中G是比例系数，只与材料性质有关，称为切变弹性模量，其定义式如下：

$$G = \frac{F/S}{\varphi}$$

(3) 容变　当物体(固体、液体或气体)周围受到的压力改变时，其体积也会发生改变，这种形变称为容变. 如图5. 6所示，物体受到的压强由p变为p＋Δp，相应地物体的体积由V变为V＋ΔV，显然，ΔV与Δp的符号恒相反. ΔV/V表示体积的相对变化，称为容变的应变. 实验表明，在弹性限度内，压强的改变与容应变的大小成正比，即

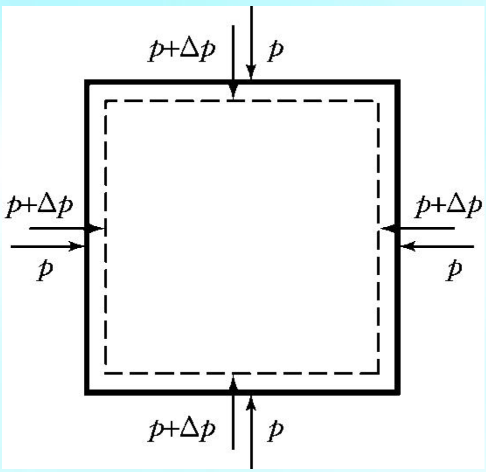


图5. 6　容变

$$P = -B\frac{V}{V}$$

式中比例系数B只与材料性质有关，称为容变弹性模量，其定义式为

$$B = -\frac{p}{V/V}$$