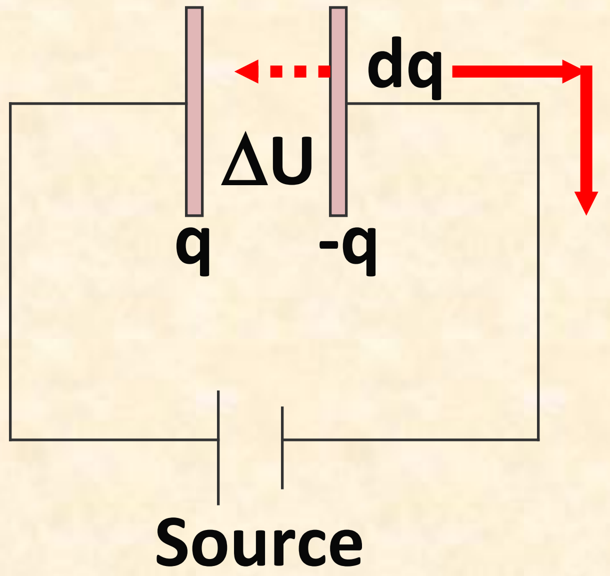
4－4 Energy of Electric Field
电场的能量
Energy Density
能量密度

一、带电电容器中贮存能量

移动 dq ,外力克服电场力作的元功:



$$dA = udq$$

电量从 0 到 Q 作功

$$A = \int_0^Q dA = \int_0^Q udq$$

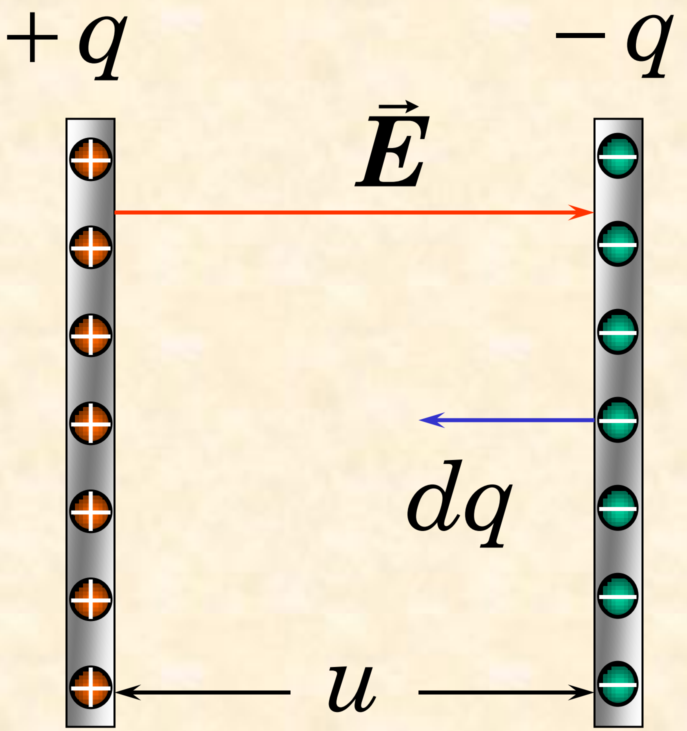
$$u = \frac{q}{C}$$

$$A = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

根据能量守恒和转换定律,电容器能量:

$$W = A = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

单位：焦耳，J



由 $Q = CU$

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU$$

二、电场的能量 Electric field energy

电能是储存在（定域在）电场中

以充满介质平行板电容器为例 $W=\frac{1}{2}CU^2$

$$C=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d},\qquad U=Ed \qquad \vec{\boldsymbol{D}}=\varepsilon\vec{\boldsymbol{E}}$$

$$W=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}(Ed)^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 Sd$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon E^2 V_{体} \quad =\frac{1}{2}EDV_{体}=\frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon}V_{体}$$

只适用于匀强电场

电场的能量密度Energy Density:

单位体积内的电场的能量: $$w_e = \frac{W}{V_{体}}$$

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}ED = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon}$$

结论: 电场的能量密度与电场强度的平方成正比.

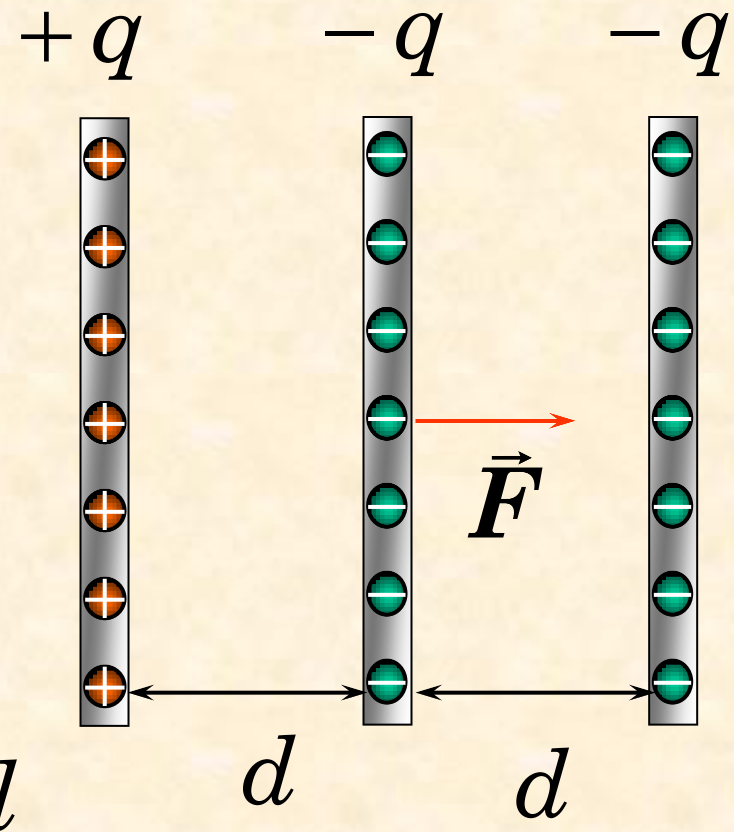
注意: 对于任意电场，上式普遍适用。

非均匀电场能量计算:

$$W = \int_V w_e dV$$

例1：平行板电容器 q，S，将极板间距从 d 缓慢拉大到 $2d$，求外力作功 A。

解：作功 $A = W - W_0$



$$W_0 = \frac{q^2}{2C_0}, \qquad W = \frac{q^2}{2C}$$

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}, \qquad C = \frac{\varepsilon_0 S}{2d}$$

$$A = \frac{q^2}{2\frac{\varepsilon_0 S}{2d}} - \frac{q^2}{2\frac{\varepsilon_0 S}{d}} = \frac{q^2 d}{2\varepsilon_0 S} > 0$$

功能转换关系

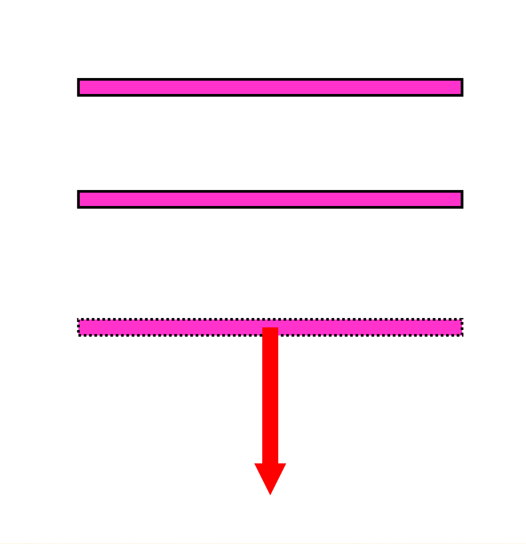
法2:外力做功

$$A_{外} = F_{外} d = F_{电} d$$

$$= Q(E_{电})d$$

$$= \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 S} > 0$$

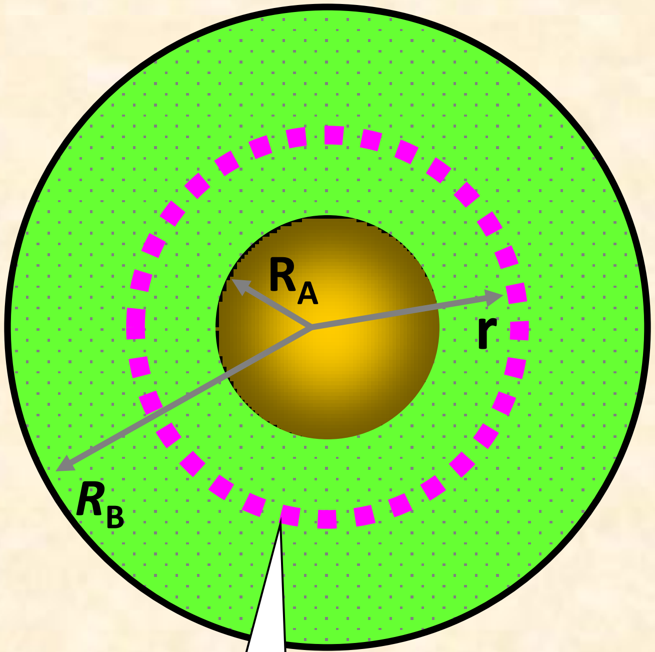
$$E_{电} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$$



例2: 球形电容器的内、外球面半径各为 R_A 和 R_B，两球间充满介电常数为ε的均匀电介质，求内、外球面各带有电荷$+q$ 及$-q$ 时，电容器的总能量。

解：在两球间距离球心 r 处场强的大小为：

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}$$



所以电场能量密度为：

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon r^4}$$

在半径为 *r* 处，取厚度为 *dr* 的薄球壳（如图），其体积为

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

由于球壳内场强相等，电场的能量密度也相等，所以，薄球壳内的电场能量为：

$$\mathrm{d}W_e = w_e \mathrm{d}V = \frac{q^2}{32\pi^2 \varepsilon r^4} 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \frac{q^2}{8\pi \varepsilon r^2} \mathrm{d}r$$

积分有

$$W_e = \int_{\text{球壳}} dW_e = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon} \int_{\mathrm{R_A}}^{\mathrm{R_B}} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right)$$

也可由 $W_e = \dfrac{q^2}{2C}$

例3：同轴电缆 **coaxal cable**

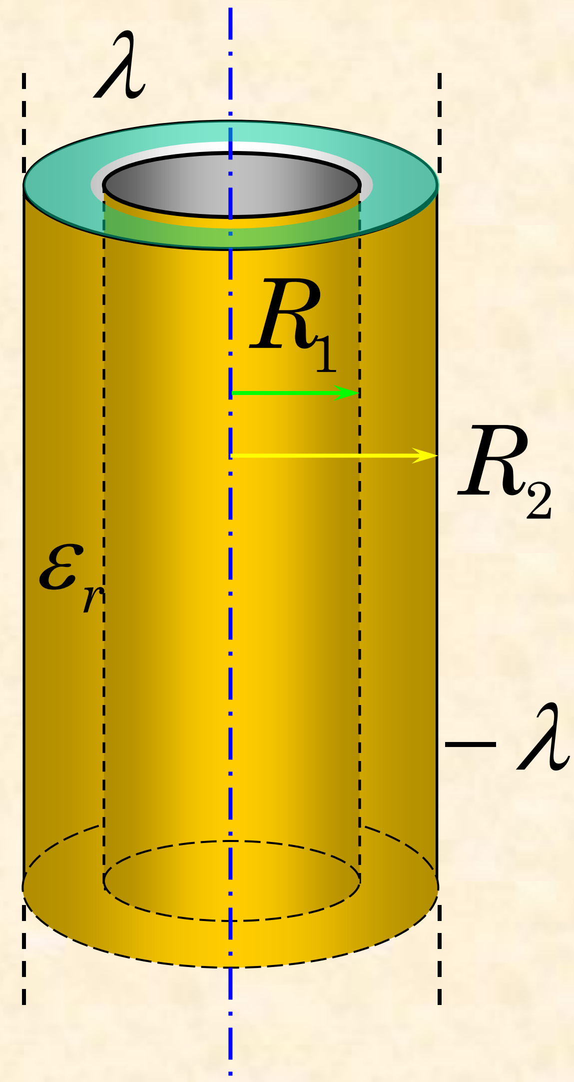
求：

①两柱面间E；

②U；

③单位长度电容 ；

④单位长度贮存能量。



解： ①作高斯柱面

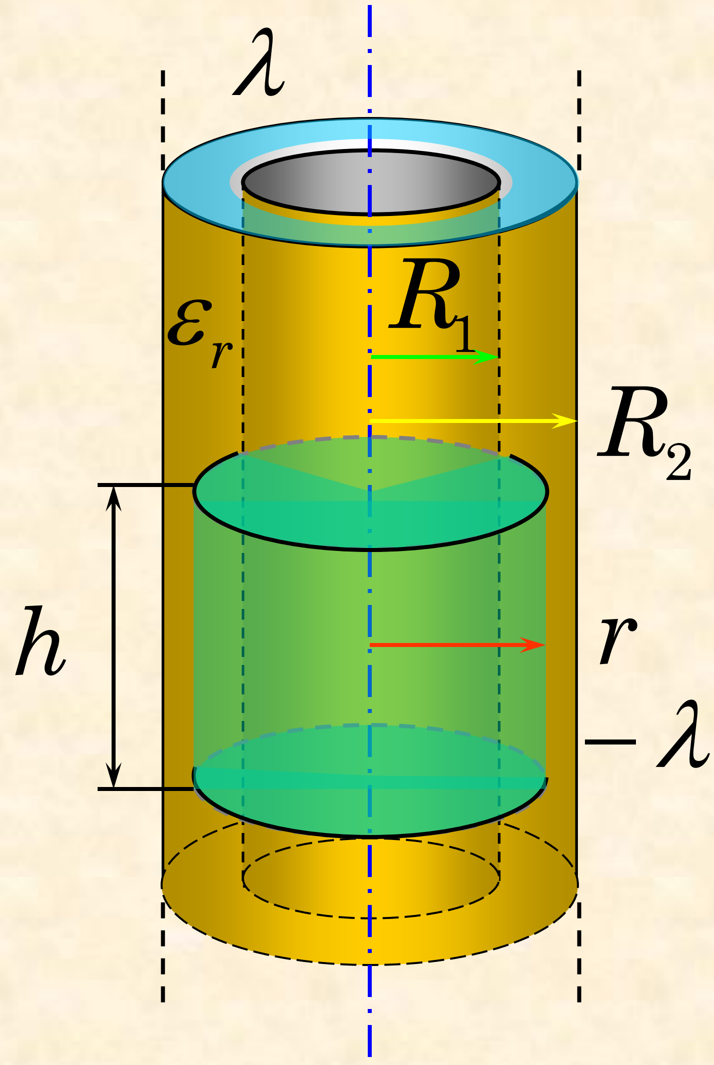
$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_0$$

$$D 2\pi r h = \lambda h$$

$$D = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

场强 $$E = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

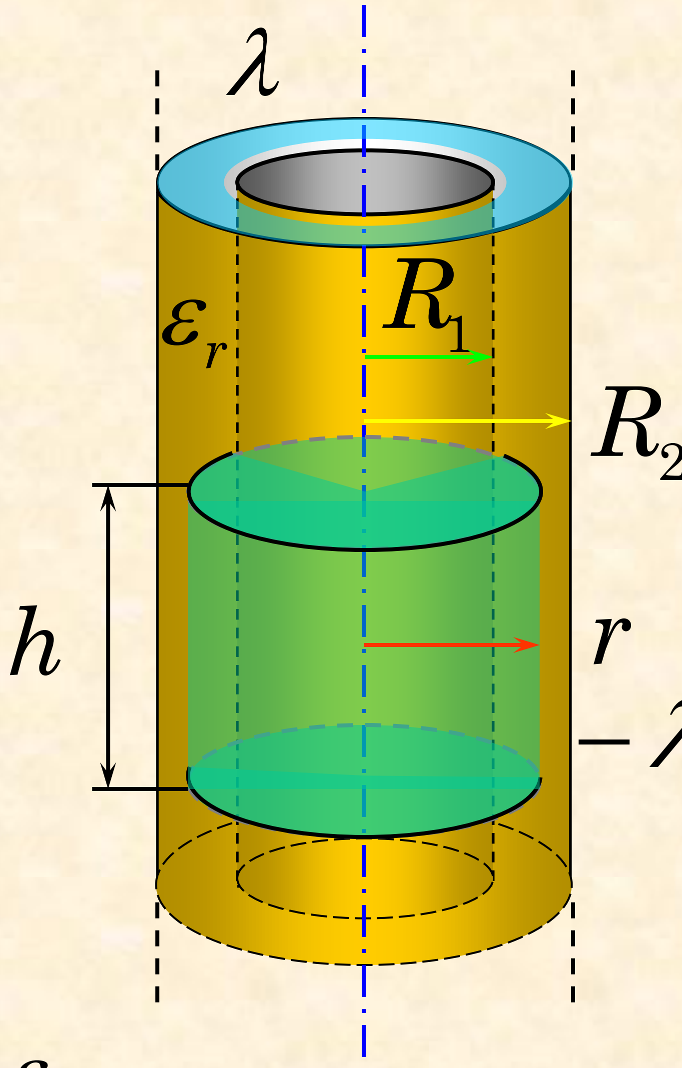
$$= \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r}$$



②极间电压

$$U_{12}=\int_{R_1}^{R_2}\vec{\boldsymbol{E}}\cdot d\vec{\boldsymbol{r}}=\int_{R_1}^{R_2}Edr$$

$$=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{dr}{r}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}ln\frac{R_2}{R_1}$$



③单位长度电容

h 长电容 $C=\dfrac{\lambda h}{U_{12}}=\dfrac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r h}{ln(R_2/R_1)}$

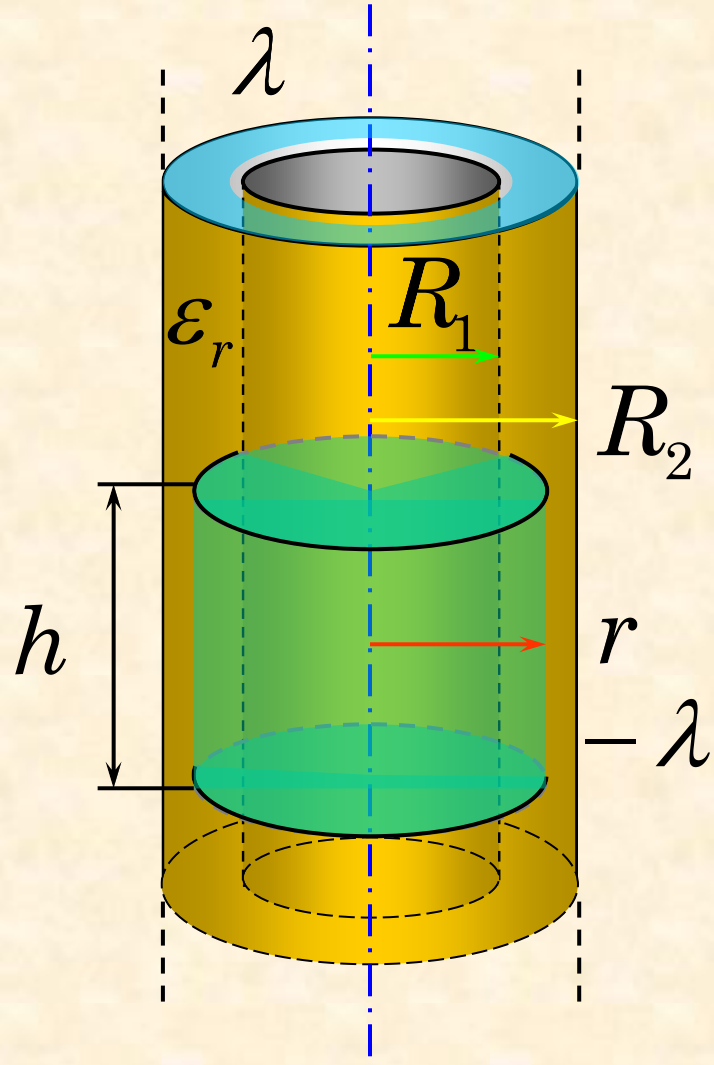
单位长度电容 $c=\dfrac{C}{h}=\dfrac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{ln(R_2/R_1)}$

④单位长度贮存能量(电容器角度)

h 长贮存能量

$$W=\frac{1}{2}qU_{12}$$

$$=\frac{1}{2}\lambda h\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\frac{R_2}{R_1}$$



单位长度贮存能量:

$$w_e=\frac{W}{h}=\frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

法二:④单位长度贮存能量(电场能量角度)

利用电场能量密度 $w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$

$$W = \int_V w_e dV$$

其中dV选择同轴的圆柱壳

$$dV = 2\pi r h dr$$

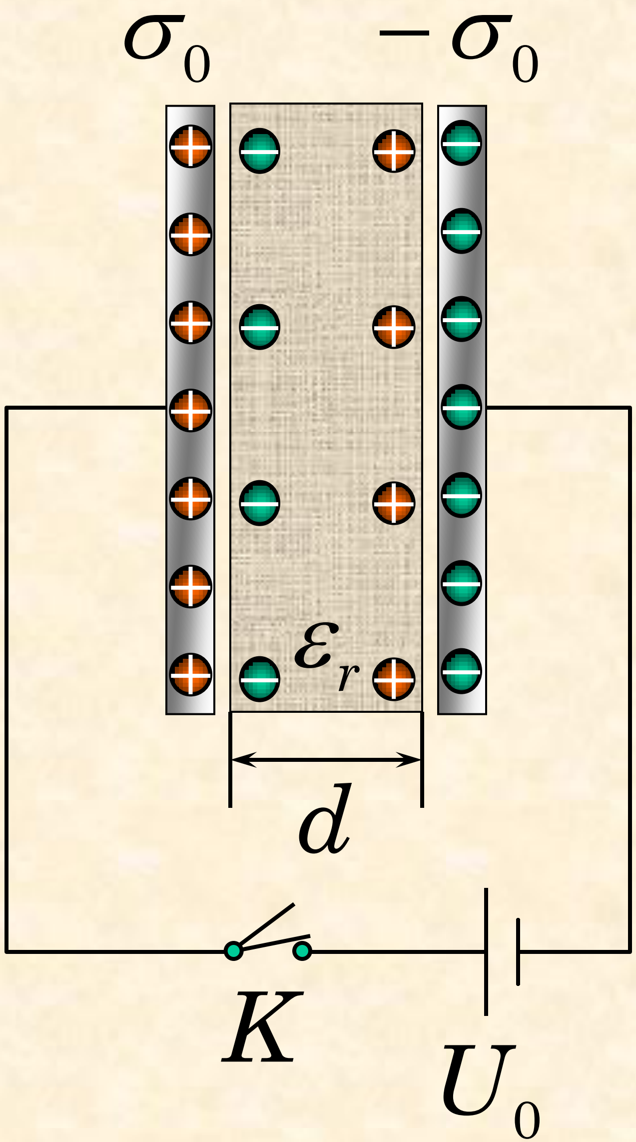
例4：平行板电容器真空时

$$\sigma_0, E_0, U_0, D_0, C_0, W_0$$

①.充电后断开电源，插入 ε_r 介质；

②.充电后保持电压不变，插入 ε_r 介质；

求：$\sigma, E, U, D, \ C, W$



① 1.充电后断开电源 q 不变，$\sigma = \sigma_0$

2.介质中 $E = \dfrac{E_0}{\varepsilon_r}$

3.电压 $U_0 = E_0 d$

插入介质后

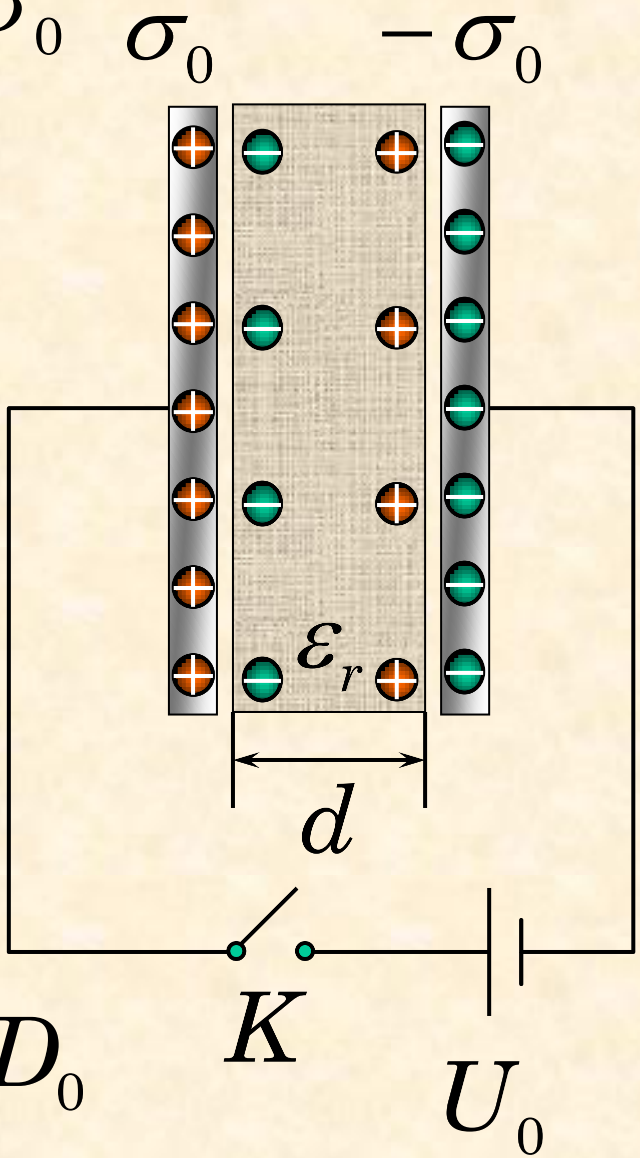
$$U = Ed = \frac{E_0}{\varepsilon_r} d = \frac{U_0}{\varepsilon_r} \downarrow$$

4.电位移矢量

真空时 $D_0 = \sigma_0$

插入介质后电荷不变 $D = \sigma_0 = D_0$

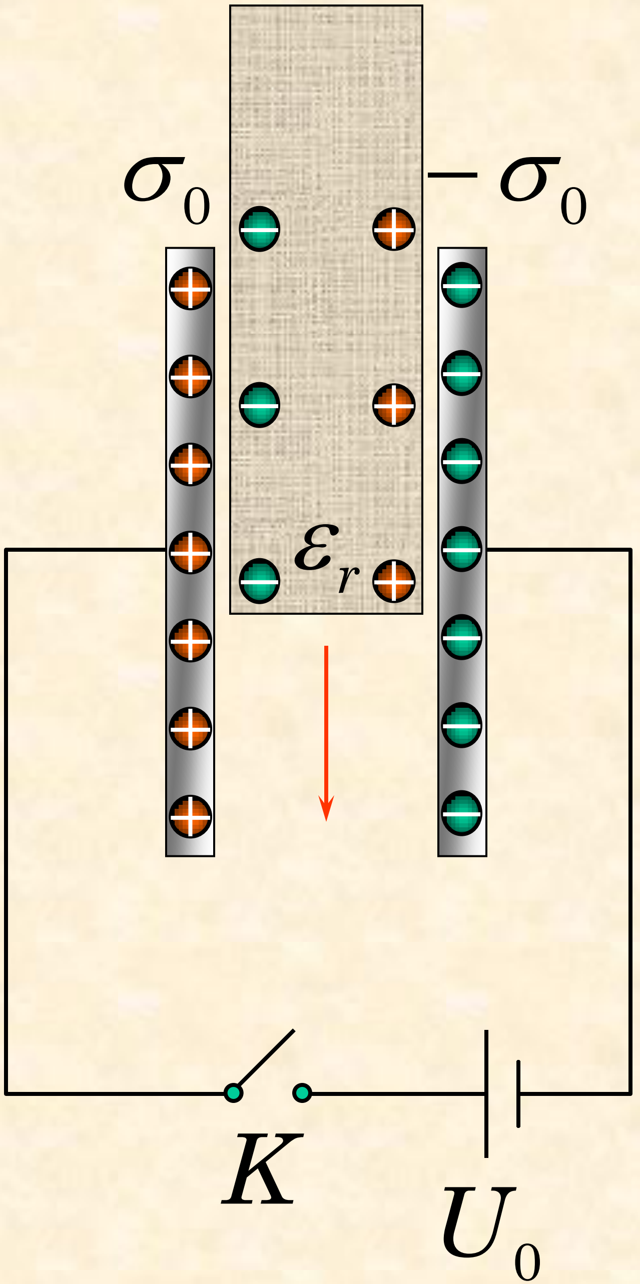
5.电容 充满介质时 $C = \varepsilon_r C_0$



6.能量

$$W_0 = \frac{q_0^2}{2C_0}$$

$$W = \frac{q_0^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2\varepsilon_r C_0} = \frac{W_0}{\varepsilon_r}$$



②.充电后保持电压不变，插入 ε_r 介质；

解： 电压不变即电键 K 不断开。

1.电压 $U = U_0$

2.场强 $Ed = E_0 d, \quad \therefore E = E_0$

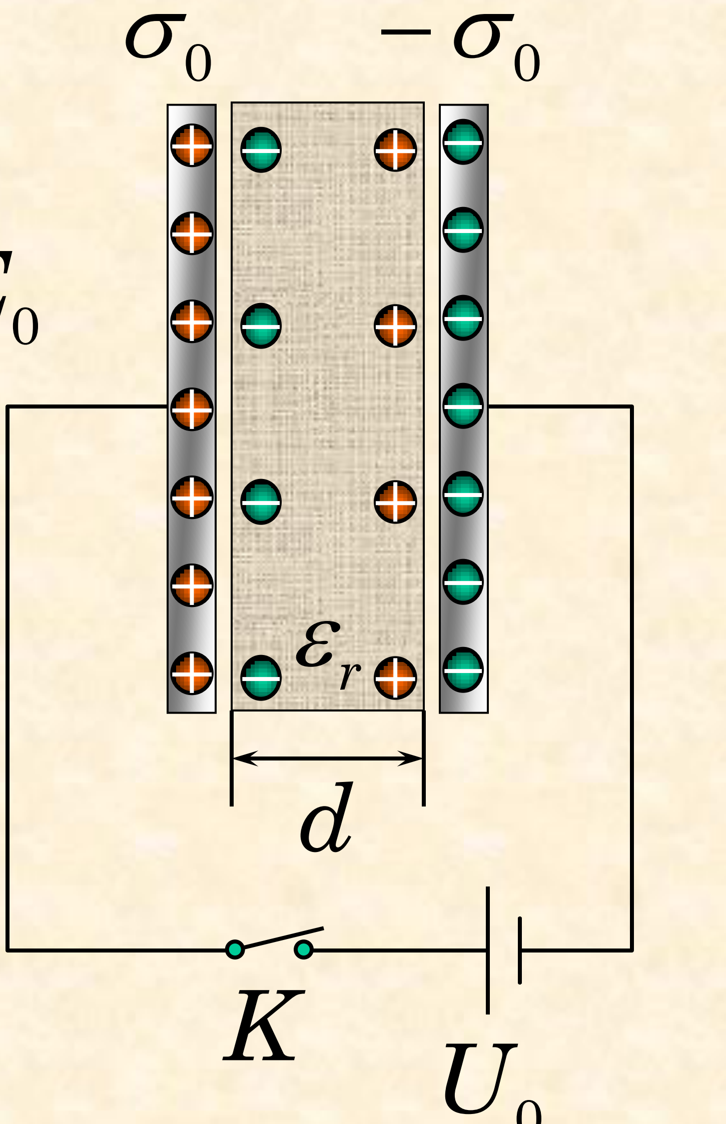
3. $\dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}, \therefore \sigma = \varepsilon_r \sigma_0 \uparrow$

4.电位移矢量 D

$\because D_0 = \sigma_0$

$D = \sigma = \varepsilon_r \sigma_0 = \varepsilon_r D_0 \uparrow$

5.电容 $C = \varepsilon_r C_0$

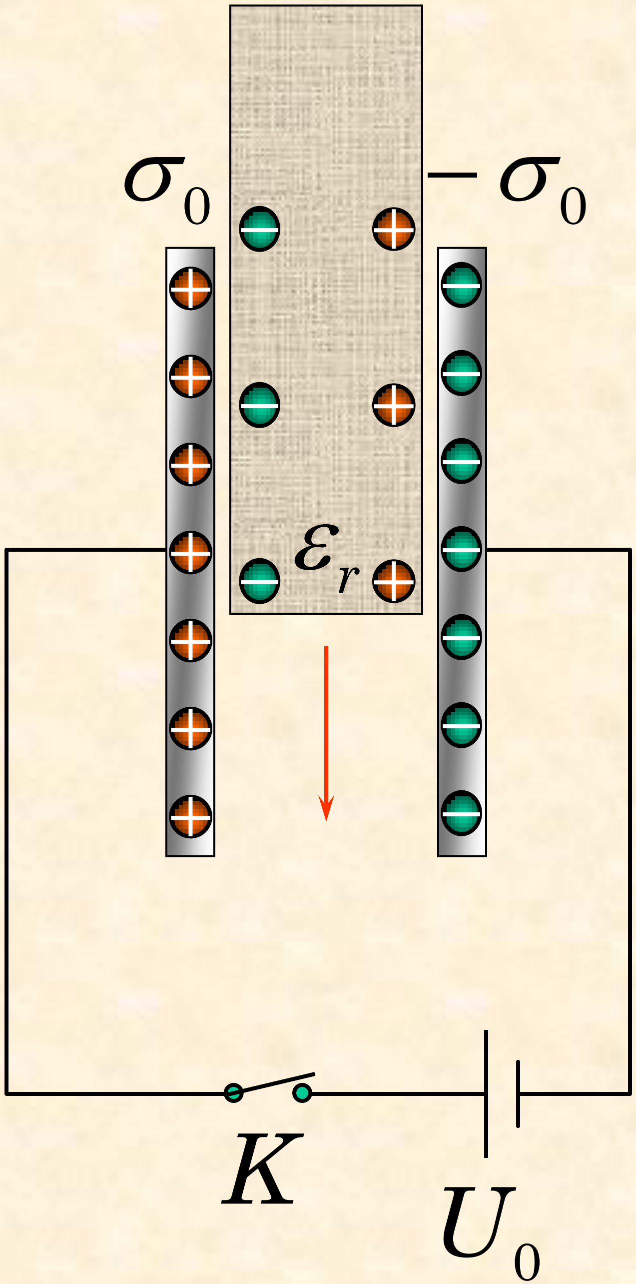


6.电容器能量W_e

$$W_0 = \frac{1}{2} q_0 U_0$$

$$W = \frac{1}{2} q U_0 = \frac{1}{2} \varepsilon_r q_0 U_0$$

$$= \varepsilon_r W_0 \quad \uparrow$$



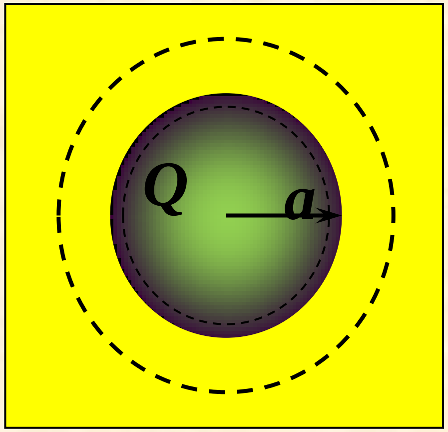
例5. 真空中一半径为a，带电量为Q的均匀球体的静电场能。

解法一：

$$E_1\cdot 4\pi r^2=\frac{Q}{4\pi a^3/3}\,\frac{4\pi r^3/3}{\varepsilon_o}$$

球内场强：$E_1=\dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_o a^3}$

球外场强：$E_2=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}$



$$W_e=\int w_e\mathrm{d}V=\int_0^a\frac{1}{2}\varepsilon_o E_1^2\mathrm{d}V+\int_a^\infty\frac{1}{2}\varepsilon_o E_2^2\mathrm{d}V$$

$$=\int_o^a\frac{1}{2}\varepsilon_o\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\right)^2 4\pi r^2\mathrm{d}r+\int_a^\infty\frac{1}{2}\varepsilon_o\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\right)^2 4\pi r^2\mathrm{d}r$$

$$=\frac{Q^2}{40\pi\varepsilon_o a}+\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_o a}=\frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_o a}$$

解法二：

$$U=\int_r^a E_1\mathrm{d}r+\int_a^\infty E_2\mathrm{d}r\quad=\int_r^a\frac{Q r\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_o a^3}+\int_a^\infty\frac{Q\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_o r^2}=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_o}\left(\frac{3}{Q}-\frac{r^2}{a^3}\right)$$

$$\rho=\frac{Q}{4\pi a^3/3}$$

$$W_e=\frac{1}{2}\int\rho U\mathrm{d}V_{体}=\frac{1}{2}\int_0^a\frac{Q}{4\pi a^3/3}\,\frac{Q}{8\pi\varepsilon_o}\left(\frac{3}{a}-\frac{r^2}{a^3}\right)4\pi r^2\mathrm{d}r$$

$$=\frac{3Q^2}{16\pi\varepsilon_o a^3}\int_0^a r^2\left(\frac{3}{a}-\frac{r^2}{a^3}\right)\mathrm{d}r=\frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_o a}$$

作业：15