函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$.

分析 由题意必有 v 为 u 的共轭调和函数. 将 u,v 满足的关系分别对 x,y 求一阶偏导数, 然后结合 C－R 方程, 求出 u,v 即可.

解 因为

$$u_x+v_x=(x^2+4xy+y^2)+(x-y)(2x+4y)-2,$$

$$u_y+v_y=-(x^2+4xy+y^2)+(x-y)(4x+2y)-2,$$

且 $u_x=v_y, u_y=-v_x$, 所以上面两式分别相加减, 可得

$$v_y=3x^2-3y^2-2, \tag{1}$$

$$v_x=6xy. \tag{2}$$

由(1)式得

$$v=\int(3x^2-3y^2-2)\mathrm{d}y=3x^2y-y^3-2y+g(x).$$

代入(2)式, 得

$$6xy+g'(x)=6xy,$$

可推出 $g(x)=C$(实常数). 因此

$$v(x,y)=3x^2y-y^3-2y+C,$$

$$u(x,y)=(x-y)(x^2+4xy+y^2)$$

$$-2(x+y)-v(x,y)$$

$$=x^3-3xy^2-2x-C,$$

所确定的解析函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 为

$$f(z)=(x^3-3xy^2-2x-C)+\mathrm{i}(3x^2y-y^3-2y+C)$$

$$=z^3-2z+k, k=(-1+\mathrm{i})C, C \text{ 为任意常数.}$$

例 31 确定形如 $u=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 的所有调和函数.

分析 利用调和函数的定义, 令 $t=\dfrac{y}{x}$, 可得到 $f(t)$ 满足的微分方程, 解此方程即可.

解 令 $t=\dfrac{y}{x}$ 可知

$$u_x=f'(t)\frac{-y}{x^2},u_{xx}=f''(t)\frac{y^2}{x^4}+f'(t)\frac{2y}{x^3}.$$

$$u_y=f'(t)\frac{1}{x},u_{yy}=f''(t)\frac{1}{x^2}.$$

由 $u_{xx}+u_{yy}=0$ 得

$$f''(t)\frac{x^2+y^2}{x^4}+f'(t)\frac{2y}{x^3}=0,$$

即

$$f''(t)(1+t^2)+2tf'(t)=0.$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}f'(t)}{f'(t)}=\frac{-2t}{1+t^2}\mathrm{d}t\Rightarrow f'(t)=\frac{C_1}{1+t^2}.$$

进而 $f(t)=C_1\arctan t+C_2$. 故形如 $u=f\left(\frac{y}{x}\right)$ 的调和函数为 $u=C_1\arctan\frac{y}{x}+C_2$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

§2.3 教材习题同步解析

2.1 用导数定义，求下列函数的导数：

(1) $f(z)=\frac{1}{z}$.

解 因

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\frac{1}{z+\Delta z}-\frac{1}{z}}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z-z-\Delta z}{\Delta z(z+\Delta z)z}=-\frac{1}{z^2}(z\neq 0),$$

故

$$f'(z)=\left(\frac{1}{z}\right)'=-\frac{1}{z^2}(z\neq 0).$$

(2) $f(z)=z\mathrm{Re}\,z$.

函数 $f(z)=u+iv$.

分析 由题意必有 v 为 u 的共轭调和函数. 将 u,v 满足的关系分别对 x,y 求一阶偏导数,然后结合 C－R 方程,求出 u,v 即可.

解 因为

$$u_x+v_x=(x^2+4xy+y^2)+(x-y)(2x+4y)-2,$$

$$u_y+v_y=-(x^2+4xy+y^2)+(x-y)(4x+2y)-2,$$

且 $u_x=v_y,u_y=-v_x$,所以上面两式分别相加减,可得

$$v_y=3x^2-3y^2-2, \quad (1)$$

$$v_x=6xy. \quad (2)$$

由(1)式得

$$v=\int(3x^2-3y^2-2)\mathrm{d}y=3x^2y-y^3-2y+g(x).$$

代入(2)式,得

$$6xy+g'(x)=6xy,$$

可推出 $g(x)=C$(实常数). 因此

$$v(x,y)=3x^2y-y^3-2y+C,$$

$$\begin{aligned}u(x,y)&=(x-y)(x^2+4xy+y^2)\\&\quad-2(x+y)-v(x,y)\\&=x^3-3xy^2-2x-C,\end{aligned}$$

所确定的解析函数 $f(z)=u+iv$ 为

$$\begin{aligned}f(z)&=(x^3-3xy^2-2x-C)+\mathrm{i}(3x^2y-y^3-2y+C)\\&=z^3-2z+k,k=(-1+\mathrm{i})C,C\text{ 为任意常数}.\end{aligned}$$

例 31 确定形如 $u=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 的所有调和函数.

分析 利用调和函数的定义,令 $t=\dfrac{y}{x}$,可得到 $f(t)$ 满足的微分方程即可.

$$u_x=f'(t)\frac{-y}{x^2},u_{xx}=f''(t)\frac{y^2}{x^4}+f'(t)\frac{2y}{x^3},$$

$$u_y=f'(t)\frac{1}{x},u_{yy}=f''(t)\frac{1}{x^2}.$$

由 $u_{xx}+u_{yy}=0$ 得

$$f''(t)\frac{x^2+y^2}{x^4}+f'(t)\frac{2y}{x^3}=0,$$

即

$$f''(t)(1+t^2)+2tf'(t)=0.$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}f'(t)}{f'(t)}=\frac{-2t}{1+t^2}\mathrm{d}t\Rightarrow f'(t)=\frac{C_1}{1+t^2}.$$

进而 $f(t)=C_1\arctan t+C_2$. 故形如 $u=f\left(\frac{y}{x}\right)$ 的调和函数为 $u=C_1\arctan\frac{y}{x}+C_2$,其中 C_1,C_2 为任意常数.

§2.3 教材习题同步解析

2.1 用导数定义,求下列函数的导数:

(1) $f(z)=\frac{1}{z}$.

解 因

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\frac{1}{z+\Delta z}-\frac{1}{z}}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z-z-\Delta z}{\Delta z(z+\Delta z)z}=-\frac{1}{z^2}(z\neq 0),$$

故

$$f'(z)=\left(\frac{1}{z}\right)'=-\frac{1}{z^2}(z\neq 0).$$

(2) $f(z)=z\mathrm{Re}$...

解 因

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$
$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)\mathrm{Re}(z+\Delta z)-z\mathrm{Re}\ z}{\Delta z}$$
$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z\mathrm{Re}\ \Delta z+\Delta z\mathrm{Re}\ z+\Delta z\mathrm{Re}\ \Delta z}{\Delta z}$$
$$=\lim_{\Delta z\to 0}\left(\mathrm{Re}\ z+\mathrm{Re}\ \Delta z+z\frac{\mathrm{Re}\ \Delta z}{\Delta z}\right)$$
$$=\lim_{\Delta z\to 0}\left(\mathrm{Re}\ z+z\frac{\mathrm{Re}\ \Delta z}{\Delta z}\right)$$
$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left(\mathrm{Re}\ z+z\frac{\Delta x}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}\right),$$

当 $z\neq 0$ 时，上述极限不存在，故导数不存在；当 $z=0$ 时，上述极限为0，故导数为 0.

2.2 下列函数在何处可导？何处不可导？何处解析？何处不解析？

(1) $f(z)=\bar{z}\cdot z^2$；

解 $f(z)=\bar{z}\cdot z^2=\bar{z}\cdot z\cdot z=|z|^2\cdot z$
$$=(x^2+y^2)(x+\mathrm{i}y)$$
$$=x(x^2+y^2)+\mathrm{i}y(x^2+y^2),$$

这里 $u(x,y)=x(x^2+y^2)$，$v(x,y)=y(x^2+y^2)$.

$$u_x=x^2+y^2+2x^2,\quad v_y=x^2+y^2+2y^2,$$
$$u_y=2xy,\qquad v_x=2xy.$$

要 $u_x=v_y$，$u_y=-v_x$，当且仅当 $x=y=0$，而 u_x,u_y,v_x,v_y 均连续，故 $f(z)=\bar{z}\cdot z^2$ 仅在 $z=0$ 处可导，处处不解析.

(2) $f(z)=x^2+\mathrm{i}y^2$；

解 这里 $u=x^2$，$v=y^2$，$u_x=2x$，$u_y=0$，$v_x=0$，$v_y=2y$，四个偏导数连续，但 $u_x=v_y$，$u_y=-v_x$ 仅在 $x=y$ 处成立，故 $f(z)$ 仅在 $x=y$ 上可导，处处不解析.

(3) $f(z)=x^3-3xy^2+\mathrm{i}(3x^2y-y^3)$.

解 这里 $u(x,y)=x^3-3xy^2$，$v(x,y)=3x^2y-y^3$. $u_x=3x^2-3y^2$，$u_y=-6xy$，$v_x=6xy$，$v_y=3x^2-3y^2$，四个偏导数均连续且 $u_x=v_y$，$u_y=-v_x$ 处处成立，故 $f(z)$ 在整个复平面上处处可导，也处处解析.

(4) $f(z)=\sin x\operatorname{ch} y+\mathrm{i}\cos x\operatorname{sh} y$.

解 这里 $u(x,y)=\sin x\operatorname{ch} y$，$v(x,y)=\cos x\operatorname{sh} y$.

$$u_x=\cos x\operatorname{ch} y,\quad u_y=\sin x\operatorname{sh} y,$$

$$v_x=-\sin x\operatorname{sh} y,\quad v_y=\cos x\operatorname{ch} y.$$

四个偏导均连续且 $u_x=v_y$，$u_y=-v_x$ 处处成立，故 $f(z)$ 处处可导，也处处解析.

2.3 确定下列函数的解析区域和奇点，并求出导数.

(1) $\dfrac{1}{z^2-1}$.

解 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-1}$ 是有理函数，除去分母为 0 的点外处处解析，故全平面除去点 $z=1$ 及 $z=-1$ 的区域为 $f(z)$ 的解析区域，奇点为 $z=\pm1$，$f(z)$ 的导数为

$$f'(z)=\left(\frac{1}{z^2-1}\right)'=\frac{-2z}{(z^2-1)^2}$$

(2) $\dfrac{az+b}{cz+d}$（c,d 至少有一不为零）.

解 同上题，$f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 除 $z=-\dfrac{d}{c}$ 外（$c\neq0$）在复平面上处处解析，$z=-\dfrac{d}{c}$ 为奇点，

$$f'(z)=\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)'$$

2.4 若函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，并满足下列条件之一，试证 $f(z)$ 必为常数.

(1) $\overline{f(z)}$ 在 D 内解析；

(2) $v=u^2$；

(3) $\arg f(z)$ 在 D 内为常数；

(4) $au+bv=c$（a,b,c 为不全为零的实常数）.

证 (1) 因为 $f(z)$ 在 D 中解析，所以满足 C－R 条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

又 $\overline{f(z)}=u-\mathrm{i}v$ 也在 D 中解析，也满足 C－R 条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial(-v)}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial(-v)}{\partial x}.$$

从而应有 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$ 恒成立，故在 D 中 u,v 为常数，$f(z)$ 为常数.

(2) 因 $f(z)$ 在 D 中解析且有 $f(z)=u+\mathrm{i}u^2$. 由 C－R 条件，有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=2u\dfrac{\partial u}{\partial y},\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=-2u\dfrac{\partial u}{\partial x}.\end{cases}$$

则可推出 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$，即 $u=C$（常数）. 故 $f(z)$ 必为 D 中常数.

(3) 设 $f(z)=u+\mathrm{i}v$，由条件知 $\arctan\frac{v}{u}=C$，从而

$$\frac{(v/u)'}{1+(v/u)^2}=0,$$

求导得

$$\frac{u^2\left(\frac{\partial v}{\partial x}u-\frac{\partial u}{\partial x}v\right)/u^2}{u^2+v^2}=0 \quad \text{或} \quad \frac{u^2\left(\frac{\partial v}{\partial y}u-\frac{\partial u}{\partial y}v\right)/u^2}{u^2+v^2}=0,$$

化简，利用 C－R 条件得

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u}{\partial y}u - \dfrac{\partial u}{\partial x}v = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}u - \dfrac{\partial u}{\partial y}v = 0. \end{cases}$$

所以$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$，同理$\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$，即在 D 中 u,v 为常数，故$f(z)$在 D 中为常数.

(4) 设 $a\neq 0$，则 $u = (c - bv)/a$，求导得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{b}{a}\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{b}{a}\frac{\partial v}{\partial y},$$

由 C－R 条件

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{b}{a}\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{b}{a}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

故 u,v 必为常数，即 $f(z)$ 在 D 中为常数.

设 $a = 0, b\neq 0, c\neq 0$，则 $bv = c$，知 v 为常数，又由 C－R 条件知 u 也必为常数，所以 $f(z)$ 在 D 中为常数.

2.5 设$f(z)$在区域 D 内解析，试证

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2.$$

证 设

$$f(z) = u + \mathrm{i}v, \qquad |f(z)|^2 = u^2 + v^2,$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad |f'(z)|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

而

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2 + v^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(u^2 + v^2) \\ &= 2\Bigg[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ &\quad + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + v\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\Bigg],\end{aligned}$$

又 $f(z)$ 解析，则实部 u 及虚部 v 均为调和函数. 故

$$u=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0,\qquad v=\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)=0.$$

则

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2=4\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)=4|f'(z)|^2.$$

2.6 试证 C－R 方程的极坐标形式为$\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta},\dfrac{\partial v}{\partial r}=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}$,并

且有

$$f'(z)=\frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial r}\right)=\frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right).$$

证一 设 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$. C－R 条件:$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$.因

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y},\tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}=-r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y},\tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\cos\theta\frac{\partial v}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial v}{\partial y},\tag{3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta}=\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}=-r\sin\theta\frac{\partial v}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial v}{\partial y},\tag{4}$$

利用$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$,比较(1)、(4)和(2)、(3)即得

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

$$\begin{aligned}
f'(z)&=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\\
&=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\sin\theta\right)+\mathrm{i}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\cos\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\sin\theta\right)\\
&=\cos\theta\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial r}\right)-\frac{\sin\theta}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)\\
&=\cos\theta\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial r}\right)-\frac{\sin\theta}{r}\left(-r\frac{\partial v}{\partial r}+\mathrm{i}r\frac{\partial u}{\partial r}\right)
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial r}\right)(\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta)$$

$$= \frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \mathrm{i}\,\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$$

证二　令 $z = re^{i\theta}, f(z) = f(re^{i\theta}) = u + \mathrm{i}v$,

$$f'(z)\cdot e^{i\theta} = \frac{\partial u}{\partial r} + \mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial r},$$

得

$$f'(z) = \frac{1}{e^{i\theta}}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial r}\right).$$

2.7　试证 $u = x^2 - y^2, v = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$ 都是调和函数，但 $u + \mathrm{i}v$ 不是解析函数.

证　因 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y, \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$，则

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 + (-2) = 0,$$

故 $u = x^2 - y^2$ 是调和函数. 又

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{-2y^3 + 6x^2 y}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{2y^3 - 6x^2 y}{(x^2 + y^2)^2},$$

则 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$，故 $v = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$ 是调和函数.

但 $\dfrac{\partial u}{\partial x} \neq \dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial y} \neq -\dfrac{\partial v}{\partial x}$，故 $u + \mathrm{i}v$ 不是解析函数.

2.8　如果 $f(z) = u + \mathrm{i}v$ 为解析函数，试证 $-u$ 是 v 的共轭调和函数.

证　只需证 $v - \mathrm{i}u$ 为解析函数. 因 $\mathrm{i}, u + \mathrm{i}v$ 均为解析函数，故 $-\mathrm{i}(u + \mathrm{i}v)$ 也是解析函数，亦即 $-u$ 是 v 的共轭调和.

2.9　由下列条件求解析函数 $f(z) = u + \mathrm{i}v$:

(1) $u = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$;

解　因$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=3x^2+6xy-3y^2$，所以

$$\begin{aligned} v &= \int (3x^2+6xy-3y^2)\,dy \\ &= 3x^2y+3xy^2-y^3+\varphi(x), \end{aligned}$$

又$\dfrac{\partial v}{\partial x}=6xy+3y^2+\varphi'(x)$，而$\dfrac{\partial u}{\partial y}=3x^2-6xy-3y^2$，所以$\varphi'(x)=-3x^2$，则$\varphi(x)=-x^3+C$. 故

$$\begin{aligned} f(z) &= u+\mathrm{i}v \\ &= (x-y)(x^2+4xy+y^2) \\ &\quad +\mathrm{i}(3x^2y+3xy^2-y^3-x^3+C) \\ &= (1-\mathrm{i})x^2(x+\mathrm{i}y)-y^2(1-\mathrm{i})(x+\mathrm{i}y) \\ &\quad +2x^2y(1+\mathrm{i})-2xy^2(1-\mathrm{i})+C\mathrm{i} \\ &= z(1-\mathrm{i})(x^2-y^2)+2xy\mathrm{i}\cdot z(1-\mathrm{i})+C\mathrm{i} \\ &= (1-\mathrm{i})z(x^2-y^2+2xy\mathrm{i})+C\mathrm{i} \\ &= (1-\mathrm{i})z^3+C\mathrm{i}. \end{aligned}$$

（2）$v=2xy+3x$；

解　因$\dfrac{\partial v}{\partial x}=2y+3$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=2x$，由$f(z)$解析，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=2x,\ u=\int 2x\,dx=x^2+\psi(y).$$

又$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=-2y-3$，而$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\psi'(y)$，所以$\psi'(y)=-2y-3$，则$\psi(y)=-y^2-3y+C$. 故

$$f(z)=x^2-y^2-3y+C+\mathrm{i}(2xy+3x).$$

（3）$u=2(x-1)y$，$f(2)=-\mathrm{i}$；

解　因$\dfrac{\partial u}{\partial x}=2y$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=2(x-1)$，由$f(z)$的解析性，有

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-2(x-1),$$

$$v=\int -2(x-1)\,dx=-(x-1)^2+\psi(y).$$

又$\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=2y$，而$\dfrac{\partial v}{\partial y}=\psi'(y)$，所以

$$\psi'(y)=2y,\psi(y)=y^2+C,$$

则

$$v=-(x-1)^2+y^2+C,$$

故

$$f(z)=2(x-1)y+\mathrm{i}[-(x-1)^2+y^2+C].$$

由$f(2)=-\mathrm{i}$得$f(2)=\mathrm{i}(-1+C)=-\mathrm{i}$，推出$C=0$. 即

$$\begin{aligned}f(z)&=2(x-1)y+\mathrm{i}(y^2-x^2+2x-1)\\&=\mathrm{i}(-z^2+2z-1)=-\mathrm{i}(z-1)^2.\end{aligned}$$

(4) $u=\mathrm{e}^x(x\cos y-y\sin y)$，$f(0)=0$.

解 因

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{e}^x(x\cos y-y\sin y)+\mathrm{e}^x\cos y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\mathrm{e}^x(-x\sin y-\sin y-y\cos y),$$

由$f(z)$的解析性，有

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-\mathrm{e}^x(-x\sin y-\sin y-y\cos y),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{e}^x(x\cos y-y\sin y)+\mathrm{e}^x\cos y.$$

则

$$\begin{aligned}v(x,y)&=\int_{(0,0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y+C\\&=\int_0^x 0\mathrm{d}x+\int_0^y[\mathrm{e}^x(x\cos y-y\sin y)+\mathrm{e}^x\cos y]\mathrm{d}y+C\\&=\mathrm{e}^x\left(x\int_0^y\cos y\mathrm{d}y-\int_0^y y\sin y\mathrm{d}y+\int_0^y\cos y\mathrm{d}y\right)+C\\&=\mathrm{e}^x\left(x\sin y+y\cos y-\int_0^y\cos y\mathrm{d}y+\int_0^y\cos y\mathrm{d}y\right)+C\\&=\mathrm{e}^x x\sin y+\mathrm{e}^x y\cos y+C,\end{aligned}$$

故

$f(z)=e^x[x(\cos y+i\sin y)+iy(\cos y+i\sin y)]$
$=e^x(\cos y+i\sin y)(x+iy)=e^{x+iy}(x+iy)=z\cdot e^z$

$$f(z)=e^x(x\cos y-y\sin y)+ie^x(x\sin y+y\cos y)+iC.$$

由 $f(0)=0$ 知 $C=0$，即

$$f(z)=e^x(x\cos y-y\sin y)+ie^x(x\sin y+y\cos y)\underline{=ze^z}.$$

有没 x换

2.10 设 $v=e^{px}\sin y$，求 p 的值使 v 为调和函数，并求出解析函数 $f(z)=u+iv$.

解 要使 $v(x,y)$ 为调和函数，则有 $\Delta v=v_{xx}+v_{yy}=0$. 即

$$p^2e^{px}\sin y-e^{px}\sin y=0,$$

所以 $p=\pm1$ 时，v 为调和函数，要使 $f(z)$ 解析，则有 $u_x=v_y,u_y=-v_x$.

$$u(x,y)=\int u_x\mathrm{d}x=\int e^{px}\cos y\mathrm{d}x=\frac{1}{p}e^{px}\cos y+\psi(y),$$

$$u_y=\frac{-1}{p}e^{px}\sin y+\psi'(y)=-pe^{px}\sin y.$$

所以

$$\psi'(y)=\left(\frac{1}{p}-p\right)e^{px}\sin y,\psi(y)=\left(p-\frac{1}{p}\right)e^{px}\cos y+C.$$

即 $u(x,y)=pe^{px}\cos y+C$，故

$$f(z)=\begin{cases}e^x(\cos y+i\sin y)+C=e^z+C, & p=1,\\ -e^{-x}(\cos y-i\sin y)+C=-e^{-z}+C, & p=-1.\end{cases}$$

2.11 证明：一对共轭调和函数的乘积仍为调和函数.

证 设 v 是 u 的共轭调和函数，令 $f(z)=u+iv$，则 $f(z)$ 是解析函数，$f^2(z)=f(z)\cdot f(z)=(u+iv)^2=(u^2-v^2)+i2uv$ 也是解析函数，故其虚部 $2uv$ 是调和函数，从而 uv 是调和函数.

2.12 如果 $f(z)=u+iv$ 是一解析函数，试证：$\overline{i\overline{f(z)}}$ 也是解析函数.

证 因 $f(z)$ 解析，则 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$，且 u,v 均可微，从而 $-u$ 可微，而

$$\overline{i\overline{f(z)}}=v-iu=v+i(-u),$$

又

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial(-u)}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial(-u)}{\partial x}.$$

即 $-u$ 与 v 满足 C－R 条件，故 $\mathrm{i}\,\overline{\overline{f(z)}}$ 也是解析函数.

2.13 试解下列方程：

(1) $e^z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$；

解 $e^z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=2e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)}$

$=e^{\ln 2+\mathrm{i}\left(2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)},k=0,\pm1,\pm2,$

故

$$z=\ln 2+\mathrm{i}\left(2k\pi+\frac{\pi}{3}\right),k=0,\pm1,\pm2.$$

(2) $\ln z=\frac{\pi \mathrm{i}}{2}$；

解 $z=e^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}=\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}=\mathrm{i}.$

(3) $\sin z=\mathrm{i}\,\mathrm{sh}\,1$；

解 $\sin z=\mathrm{i}\,\mathrm{sh}\,1=\mathrm{i}(-\mathrm{i})\sin\mathrm{i}=\sin\mathrm{i}$，所以 $z=2k\pi+\mathrm{i}$ 或 $z=(2k-1)\pi-\mathrm{i}$，k 为整数.

另解. 见本节例 24.

(4) $\sin z+\cos z=0.$

解 由题设知 $\tan z=-1$，$z=k\pi-\frac{\pi}{4}$，k 为整数.

2.14 求下列各式的值.

(1) $\cos\mathrm{i}$；

解 $\cos\mathrm{i}=\frac{e^{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}}+e^{-\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}}}{2}=\frac{e^{-1}+e^{1}}{2}.$

(2) $\mathrm{Ln}(-3+4\mathrm{i})$；

解 $\mathrm{Ln}(-3+4\mathrm{i})=\ln 5+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(-3+4\mathrm{i})$

$=\ln 5+\mathrm{i}\left(2k\pi+\pi-\arctan\frac{4}{3}\right).$

(3) $(1-\mathrm{i})^{1+\mathrm{i}}$；

解 $(1-\mathrm{i})^{1+\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})\mathrm{Ln}(1-\mathrm{i})}$

$=\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})\left[\ln\sqrt{2}+\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right]}$

$=\mathrm{e}^{\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-2k\pi+\mathrm{i}\left(\ln\sqrt{2}+2k\pi-\frac{\pi}{4}\right)}$

$=\mathrm{e}^{\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-2k\pi}\left[\cos\left(\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right].$

(4) $3^{3-\mathrm{i}}$.

解 $3^{3-\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{(3-\mathrm{i})\mathrm{Ln}\,3}=\mathrm{e}^{(3-\mathrm{i})(\ln 3+2k\pi\mathrm{i})}$

$=\mathrm{e}^{(3-\mathrm{i})\ln 3}\cdot\mathrm{e}^{2k\pi}=\mathrm{e}^{3\ln 3+2k\pi}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ln 3}$

$=27\mathrm{e}^{2k\pi}(\cos\ln 3-\mathrm{i}\sin\ln 3).$

2.15 证明:

(1) $\sin z=\sin x\operatorname{ch} y+\mathrm{i}\cos x\operatorname{sh} y$;

证 $\sin z=\sin(x+\mathrm{i}y)=\sin x\cos \mathrm{i}y+\cos x\sin \mathrm{i}y$

$$=\sin x\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}y}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}y}}{2}+\cos x\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}y}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}y}}{2\mathrm{i}}$$

$$=\sin x\frac{\mathrm{e}^{-y}+\mathrm{e}^{y}}{2}-\mathrm{i}\cos x\frac{\mathrm{e}^{-y}-\mathrm{e}^{y}}{2}$$

$=\sin x\operatorname{ch} y+\mathrm{i}\cos x\operatorname{sh} y.$

(2) $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$;

证

$\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$

$$=\frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_2})}{4}+\frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_2})}{4}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-z_1+z_2)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1-z_2)}\right]$$

$$+\frac{1}{4}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-z_1+z_2)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1-z_2)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}\right]=\cos(z_1+z_2).$$

(3) $\sin^2 z+\cos^2 z=1$;

证 利用复数变量正弦函数和余弦函数的定义直接计算得

$$\sin^2 z+\cos^2 z=\left[\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})\right]^2+\left[\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})\right]^2$$

$$=-\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}z}-2)+\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}z}+2)$$

$$=1.$$

(4) $\sin 2z=2\sin z\cos z$;

证 $$2\sin z\cos z=2\cdot\frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})}{4\mathrm{i}}$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}+1-1-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}z})$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}z})=\sin 2z.$$

(5) $|\sin z|^2=\sin^2 x+\mathrm{sh}^2 y$;

证 $$|\sin z|^2=\sin z\cdot\overline{\sin z}=\sin z\cdot\sin\bar{z}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{z}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar{z}}}{2\mathrm{i}}$$

$$=\frac{[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)}][\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-\mathrm{i}y)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-\mathrm{i}y)}]}{-4}$$

$$=-\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{2y}-\mathrm{e}^{-2y}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x})$$

$$=-\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}-2+2-\mathrm{e}^{2y}-\mathrm{e}^{-2y})$$

$$=\sin^2 x+\mathrm{sh}^2 y.$$

(6) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\cos z.$

证 因

$$\sin(z_1-z_2)=\sin z_1\cos z_2-\cos z_1\sin z_2,$$

故

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cos z-\cos\frac{\pi}{2}\sin z=\cos z.$$

证　因
$$\mathrm{sh}^2 z=\left(\frac{e^z-e^{-z}}{2}\right)^2=\frac{e^{2z}+e^{-2z}-2}{4},$$
$$\mathrm{ch}^2 z=\left(\frac{e^z+e^{-z}}{2}\right)^2=\frac{e^{2z}+e^{-2z}+2}{4},$$
故
$$\mathrm{ch}^2 z-\mathrm{sh}^2 z=\frac{e^{2z}+e^{-2z}+2}{4}-\frac{e^{2z}+e^{-2z}-2}{4}=1.$$

(2) $\mathrm{ch}\ 2z=\mathrm{sh}^2 z+\mathrm{ch}^2 z$;

证　$$\mathrm{sh}^2 z+\mathrm{ch}^2 z=\frac{e^{2z}+e^{-2z}-2}{4}+\frac{e^{2z}+e^{-2z}+2}{4}$$
$$=\frac{e^{2z}+e^{-2z}}{2}=\mathrm{ch}\ 2z.$$

(3) $\mathrm{th}(z+\pi i)=\mathrm{th}\ z$;

证　$$\mathrm{th}(z+\pi i)=\frac{e^{z+\pi i}-e^{-z-\pi i}}{e^{z+\pi i}+e^{-z-\pi i}}$$
$$=\frac{e^{z+2\pi i}-e^{-z}}{e^{z+2\pi i}+e^{-z}}=\frac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}=\mathrm{th}\ z.$$

(4) $\mathrm{sh}(z_1+z_2)=\mathrm{sh}\ z_1\mathrm{ch}\ z_2+\mathrm{ch}\ z_1\mathrm{sh}\ z_2$.

证　$$\mathrm{sh}\ z_1\mathrm{ch}\ z_2=\frac{e^{z_1}-e^{-z_1}}{2}\cdot\frac{e^{z_2}+e^{-z_2}}{2}$$
$$=\frac{e^{z_1+z_2}-e^{-z_1+z_2}-e^{-z_1-z_2}+e^{z_1-z_2}}{4},$$
$$\mathrm{ch}\ z_1\mathrm{sh}\ z_2=\frac{e^{z_1}+e^{-z_1}}{2}\cdot\frac{e^{z_2}-e^{-z_2}}{2}$$
$$=\frac{e^{z_1+z_2}-e^{-z_2+z_1}-e^{-z_1-z_2}+e^{z_2-z_1}}{4}$$
$$\mathrm{sh}\ z_1\mathrm{ch}\ z_2+\mathrm{ch}\ z_1\mathrm{sh}\ z_2=\frac{e^{z_1+z_2}-e^{-z_1-z_2}}{2}=\mathrm{sh}(z_1+z_2)$$

2.17　证明：$\mathrm{ch}\ z$ 的反函数是 $\mathrm{Arch}\ z=\ln(z+\sqrt{z^2-1})$.

证　设 $z=\mathrm{ch}\ w$，且 $w=\mathrm{Arch}\ z$，由

$$z=\operatorname{ch} w=\frac{1}{2}(e^{w}+e^{-w}) \quad 知 \quad 2z=e^{w}+e^{-w},$$

即 $e^{2w}-2ze^{w}+1=0$. 解方程得 $e^{w}=z\pm\sqrt{z^2-1}$,故

$$w=\ln(z+\sqrt{z^2-1}).$$

注:$\sqrt{z^2-1}$含有"±"两根.

2.18 由于 $\operatorname{Ln} z$ 为多值函数,指出下列错误:

(1) $\operatorname{Ln} z^2=2\operatorname{Ln} z$.

解 因

$$\operatorname{Ln} z^2=\ln|z|^2+\mathrm{i}(2\theta+2k\pi), k=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

而

$$\begin{aligned}2\operatorname{Ln} z&=2[\ln|z|+\mathrm{i}(\theta+2k\pi)]\\&=\ln|z|^2+\mathrm{i}(2\theta+4k\pi), k=0,\pm1,\pm2,\cdots,\end{aligned}$$

两者的实部相同,而虚部的可取值不完全相同.

(2) $\operatorname{Ln} 1=\operatorname{Ln}\frac{z}{z}=\operatorname{Ln} z-\operatorname{Ln} z=0$.

解 $\operatorname{Ln} 1=\ln 1+\mathrm{i}(0+2k\pi)=2k\pi\mathrm{i}, k=0,\pm1,\pm2,\cdots,$
即 $\operatorname{Ln} 1=0$ 仅当 $k=0$ 时成立.

注:$\operatorname{Ln}(z_1\cdot z_2)=\operatorname{Ln} z_1+\operatorname{Ln} z_2$及 $\operatorname{Ln}\frac{z_1}{z_2}=\operatorname{Ln} z_1-\operatorname{Ln} z_2$两个等式的理解应是:对于它们左边的多值函数的任一值,一定有右边两多值函数的各一值与它对应,使得有关等式成立;反过来也一样.

2.19 试问:在复数域中$(a^b)^c$与a^{bc}一定相等吗?

解 不一定,如:

$$a=1+\mathrm{i}, b=2, c=\frac{1}{2}, a^{bc}=1+\mathrm{i}, (a^b)^c=\sqrt{2\mathrm{i}}.$$

2.20 下列命题是否成立?

(1) $\overline{e^{z}}=e^{\bar{z}}$.

解 成立,因

$$\overline{e^{z}}=\overline{e^{x+\mathrm{i}y}}=\overline{e^{x}(\cos y+\mathrm{i}\sin y)}=e^{x}(\cos y-\mathrm{i}\sin y)$$

$$=e^{x-iy}=e^{\bar{z}}.$$

(2) $\overline{p(z)}=p(\bar{z})$ ($p(z)$为多项式).

解　不一定，如

$$p(z)=(a+ib)z,\ \overline{p(z)}=(a-ib)\bar{z},$$

而

$$p(\bar{z})=(a+ib)\bar{z}.$$

(3) $\overline{\sin z}=\sin\bar{z}$.

解　成立，因

$$\overline{\sin z}=\overline{\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)}=\frac{e^{-i\bar{z}}-e^{i\bar{z}}}{-2i}=\sin\bar{z}.$$

(4) $\overline{\mathrm{Ln}\, z}=\mathrm{Ln}\,\bar{z}$.

解　成立. 因

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{Ln}\, z}&=\overline{[\ln|z|+i(\theta+2k\pi)]}\\&=\ln|z|-i(\theta+2k\pi),k=0,\pm1,\pm2,\cdots.\\\mathrm{Ln}\,\bar{z}&=\ln|z|+i(-\theta+2k\pi)\\&=\ln|z|-i(\theta+2k\pi),k=0,\pm1,\pm2,\cdots.\end{aligned}$$

§2.4 自 测 题

自测题 1

(一) 填空题

1. $\mathrm{Ln}(-3+4i)=$______，主值为______.

2. 函数 $f(z)=\dfrac{2z^5-z+3}{4z^2+1}$ 的解析区域是______，该区域上的导函数是

3. 当 $a=$______时，$f(z)=a\ln(x^2+y^2)+i\arctan\dfrac{y}{x}$ 在区域 $x>0$ 内解析

4. 函数 $f(z)=2\arg(z-3)$ 在复平面除去实轴上一区间______外是解析

5. 函数 $w=z\mathrm{Im}\, z-\mathrm{Re}\, z$ 在其可导处的导数为______.

(二) 问函数 $f(z)=x^2+2y^3i$ 在何处可导？何处解析？并求 $f'(3+i)$

2i).

(三) 问 $v(x,y)=2xy+3x$ 是否可作为解析函数的虚部？为什么？若能，作出一个解析函数 $f(z)$，且使它经过点 i 时，函数值为 0.

(四) 设 u 及 v 是解析函数 $f(z)$ 的实部及虚部，且 $u-v=(x+y)(x^2-4xy+y^2)$，$z=x+iy$，求 $f(z)$.

(五) 如果函数 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，并且满足条件 $8u+9v=2003$，试证 $f(z)$ 在 D 内必为常数.

(六) 设 $f(z)=u+iv$ 为一解析函数，且在 $z_0=x_0+iy_0$ 处 $f'(z_0)\neq 0$，试证曲线 $u(x,y)=u(x_0,y_0)$ 与 $v(x,y)=v(x_0,y_0)$ 在交点 (x_0,y_0) 处正交.

自测题 1 答案

(一) 填空题

1. $\ln 5+i\left(\pi-\arctan\dfrac{4}{3}+2k\pi\right)$，$k$ 为整数. $\ln 5+i\left(\pi-\arctan\dfrac{4}{3}\right)$.

2. $z\neq\pm\dfrac{i}{2}$，$f'(z)=\dfrac{24z^6+10z^4+4z^2-24z-1}{(4z^2+1)^2}$.

3. $a=\dfrac{1}{2}$.　4. $(-\infty,3]$.　5. -2.

(二) 解　$u=x^2$，$v=2y^3$. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=0$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=6y^2$ 在全平面上连续，当 $x=3y^2$ 时，C－R 方程满足，故 $f(z)$ 在曲线 $x-3y^2=0$ 上可导，但在复平面上处处不解析.

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=2x \quad 或 \quad f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=6y^2,$$

因点 $z=3+i$ 在曲线 $x-3y^2=0$ 上，故 $f'(3+i)=6$，而点 $z=3+2i$ 不在曲线 $x-3y^2=0$ 上，故 $f'(3+2i)$ 不存在.

(三) 解　因

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2y+3,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=2x,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

在全平面上连续，且 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$，故 v 是调和函数，则它可作为解析函数 $f(z)$ 的虚部，设 $f(z)=u+iv$.

由 C－R 方程 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$，得