2-4 刚体对定轴的角动量守恒定律

Conservation of Angular momentum

刚体对定轴的角动量定理 $\int_{t_1}^{t_2} M_z \, \mathrm{d}t = L_2 - L_1$

当 $M_z = 0$ 时 $L_z = I\omega =$ 恒量

刚体对定轴的角动量守恒定律：

当刚体所受的外力对转轴的力矩之代数和为零时，刚体对该转轴的角动量保持不变。

注意：该定律不但适用于刚体，同样也适用于绕定轴转动的任意物体系统。

例：刚体组绕同一轴转动时的角动量守恒，

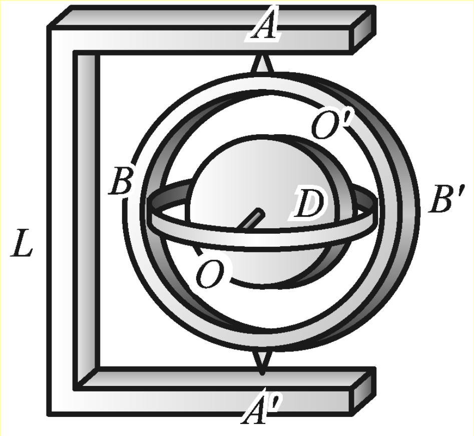
则总角动量 $L = I_1\omega_1 + I_2\omega_2 + \ldots =$ **常量**

角动量守恒定律的两种情况：

(1) 转动惯量保持不变的刚体

当$M=0$时，$I\omega=I\omega_0$，则$\omega=\omega_0$

例：回转仪

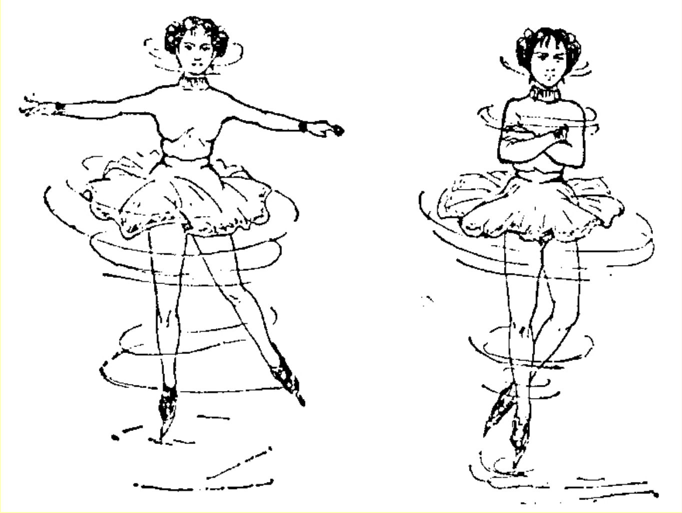


(2) 转动惯量可变的物体

当I增大时，ω就减小；

当I减小时，ω就增大；

而$I\omega$保持不变。



例：旋转的舞蹈演员 $\omega \propto \dfrac{1}{I}$

例7：有一半径为R的水平圆转台，可绕通过其中心的竖直固定光滑轴转动，转动惯量为I，开始时转台以匀角速度ω_0转动，此时有一质量为m的人站在转台中心．随后人沿半径向外跑去，当人到达转台边缘时，求转台的角速度。

解：系统合外力矩为零，故系统角动量守恒

$$I\omega_0 = mR^2\omega' + I\omega'$$

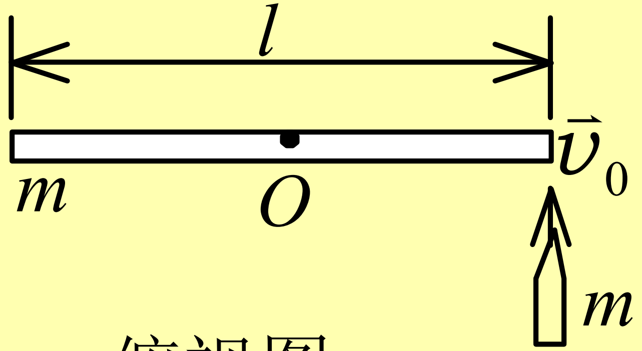
$$\Rightarrow \omega' = \frac{I\omega_0}{I + mR^2}$$

例8：质量为m、长为l的棒，可绕通过棒中心且与棒垂直的竖直光滑固定轴O在水平面内自由转动(转动惯量$I=ml^2/12$)．开始时棒静止，现有一子弹，质量也是m，在水平面内以速度v_0垂直射入棒端并嵌在其中．求子弹嵌入后棒的角速度ω。

解：系统角动量守恒

$$\left.\begin{aligned} mv_0\frac{1}{2}l &= mv'\frac{1}{2}l + I\omega \\ v' &= \frac{l}{2}\omega \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{3v_0}{2l}$$



俯视图

2-5　力矩的功Work done by torque

功的定义：

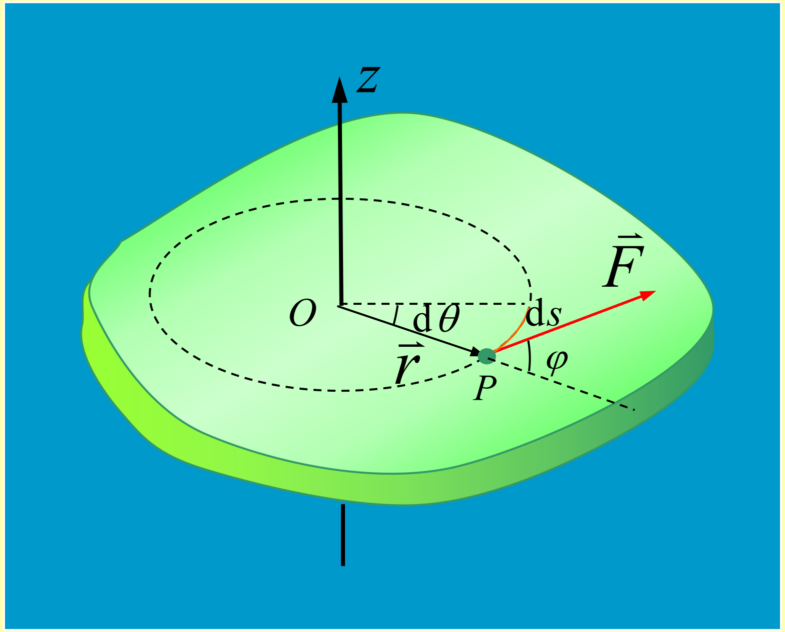
$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{s} = Fds\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi) = F\sin\varphi\, rd\theta$$

力矩：　$M = Fr\sin\varphi$

$$\therefore dW = M\mathrm{d}\theta$$

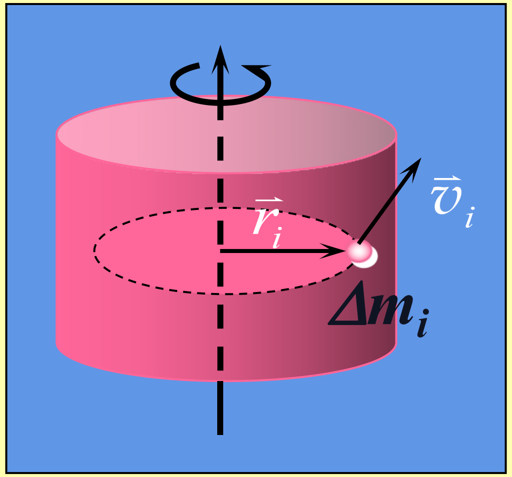
力矩对刚体所作的功：

$$W = \int_o^\theta M\mathrm{d}\theta$$



2-6 刚体的定轴转动动能和动能定理

Kinetic energy and Kinetic energy theorem of rotation



第i个质元的动能：$\Delta E_{ki}=\frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2=\frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2\omega^2$

整个刚体的转动动能：$E_k=\sum\Delta E_{ki}=\sum\frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2\omega^2$

$$=\frac{1}{2}(\sum\Delta m_i r_i^2)\omega^2=\frac{1}{2}I\omega^2$$

设在外力矩 M 的作用下，刚体绕定轴发生角位移$\mathrm{d}\theta$

元功：$\mathrm{d}W=M\mathrm{d}\theta$

由转动定律 $M=I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$ $\quad\therefore\ \mathrm{d}W=I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\theta=I\omega\mathrm{d}\omega$

刚体绕定轴转动的动能定理： $W=\int_{\omega_1}^{\omega_2}I\omega\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2}I\omega_2^2-\frac{1}{2}I\omega_1^2$

合外力矩对刚体所做的功等于刚体转动动能的增量。

kinetic theorem of rotation： the work done by torque equals to the increment （增量） of kinetic energy of rotation.

2-7 刚体的重力势能 potential energy of weight

重力势能：

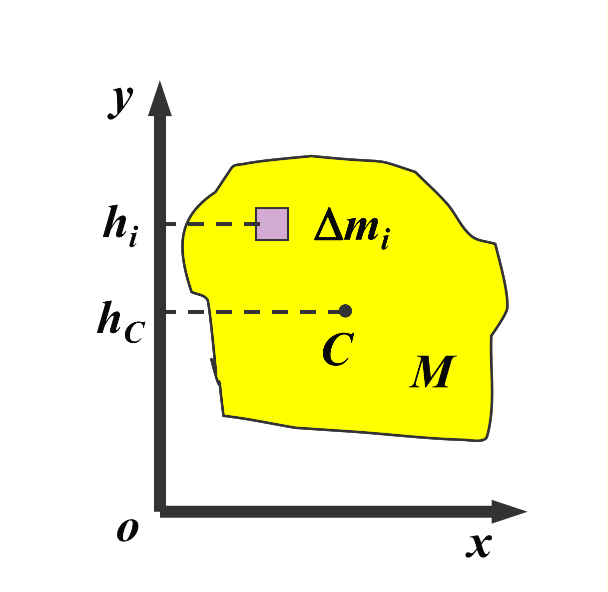
$$E_P = \sum \Delta m_i g h_i = g \sum \Delta m_i h_i$$

质心的定义：

$$h_C = \frac{\sum \Delta m_i h_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{\sum \Delta m_i h_i}{M}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{E_P = Mgh_C}$$

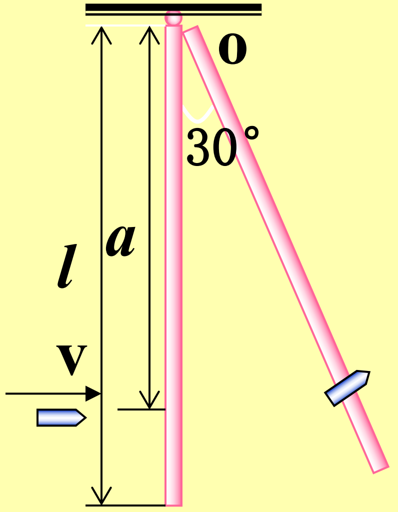


设势能零点在x-axis，h_c为质心到势能零点的距离.

如刚体在重力矩作用下转动，计入刚体的重力势能后，如满足守恒条件，即其它力矩作功为零或无其它力矩，机械能守恒定律：

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + \text{势能} = constant$$

例9. 一长为l，质量为M的杆可绕支点o自由转动。一质量为m，速度为v的子弹射入距支点为a的棒内。若棒偏转角为30°。问子弹的初速度为多少。



解： 选子弹、杆为一系统，在碰撞瞬间重力和转轴的支撑力对转轴的力矩都为零，故系统对转轴的角动量守恒，设碰撞后两者转动的角速度为 ω

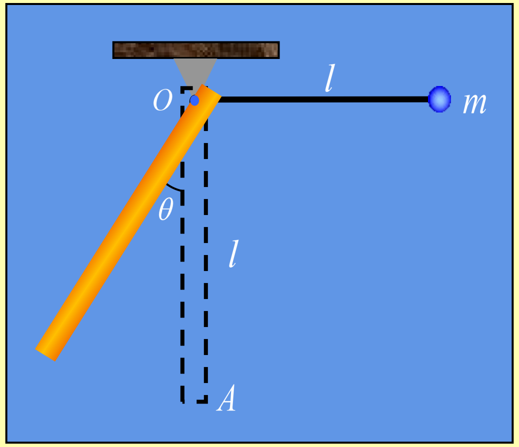
$$mva = ma^2\omega + \frac{1}{3}Ml^2\omega$$

子弹和杆一起转动过程，只有重力作功，系统机械能守恒：

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}Ml^2 + ma^2\right)\omega^2 = mga\left(1-\cos 30°\right) + Mg\frac{l}{2}\left(1-\cos 30°\right)$$

$$v = \frac{1}{ma}\sqrt{\frac{g}{6}\left(2-\sqrt{3}\right)\left(Ml+2ma\right)\left(Ml^2+3ma^2\right)}$$

例10. 长为 l 的均质细直杆OA，一端悬于O点铅直下垂，如图所示。一单摆也悬于O点，摆线长也为l，摆球质量为m。现将单摆拉到水平位置后由静止释放，摆球在 A 处与直杆作完全弹性碰撞后恰好静止。试求：(1) 细直杆的质量M；(2)碰撞后细直杆摆动的最大角度θ。（忽略一切阻力）



解:(1)选单摆和细杆为系统，在摆球和细杆碰撞的瞬间，系统所受和外力距为零，故角动量守恒

$$I_m\omega_m = I_M\omega_M$$

又二者是完全弹性碰撞，故系统的动能守恒

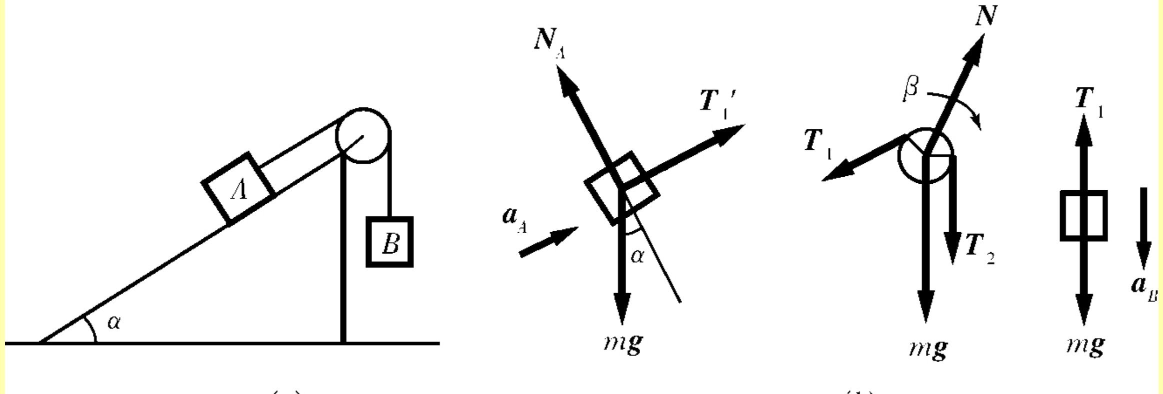
$$\frac{1}{2}I_m\omega_m{}^2 = \frac{1}{2}\ I_M\omega_M^2$$

解得 $I_m = I_M \quad \rightarrow \quad ml^2 = \frac{1}{3}Ml^2 \qquad \therefore M = 3m$

（2）选摆球、细杆和地球为系统，整个过程只有内保守力重力作功，故系统的机械能守恒：

$$mgl = Mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta) \qquad \therefore \cos\theta = \frac{1}{3} \qquad \theta = \arccos\frac{1}{3} = 70.5°$$

例11　如图（a）所示，质量均为m的两物体A，B. A放在倾角为α的光滑斜面上，通过定滑轮由不可伸长的轻绳与B相连.定滑轮是半径为R的圆盘，其质量也为m.物体运动时，绳与滑轮无相对滑动.求绳中张力T_1 和T_2 及物体的加速度a(轮轴光滑).



(a)　(b)

解：　物体A，B，定滑轮受力图见图(*b*).对于作平动的物体A，B，分别由牛顿定律得

$$T_1' - mg\sin\alpha = ma_A \qquad ①$$

$$mg - T_2' = ma_B \qquad ②$$

又

$$T_1' = T_1,\quad T_2' = T_2. \qquad ③$$

对定滑轮，由转动定律得

$$T_2 R - T_1 R = I\beta \qquad (4)$$

由于绳不可伸长，所以

$$a_A = a_B = R\beta \qquad ⑤$$

$$I = \frac{1}{2} mR^2$$

联立式①，②，③，④，⑤得

$$T_1 = \frac{2+3\sin\alpha}{5} mg$$

$$T_2 = \frac{3+2\sin\alpha}{5} mg$$

$$a_A = a_B = \frac{2(1-\sin\alpha)}{5} g$$