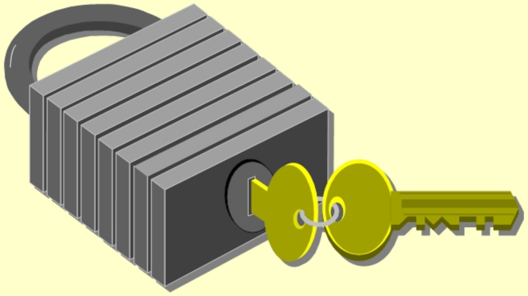
第十章　机械振动

Mechanical oscillations



§1 Simple Harmonic Motion (SHM)
简谐振动

§2 Amplitude Period Frequency & Phase
简谐振动的振幅 周期 频率和位相

§3 The Energy of SHM
简谐振动的能量

§4 Damped Vibration& Forced Vibration Resonance 阻尼振动 受迫振动 共振

§5 Superposition of two SHM with same Frequency in same Direction

同方向同频率的简谐振动的合成

§6 Superposition of two Perpendicular SHM
相互垂直的简谐振动的合成

教学要求

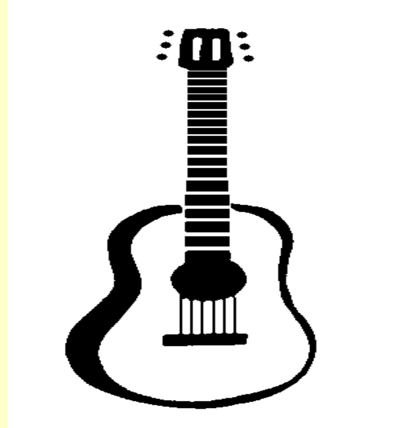
1、确切理解描述谐振动的特征量的物理意义，并能熟练地确定振动系统的特征量，从而建立谐振动方程；

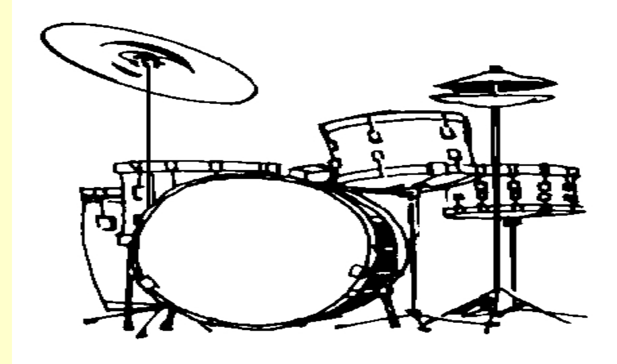
2、掌握描述谐振动的旋转矢量法；

3、掌握谐振动的特征和规律；

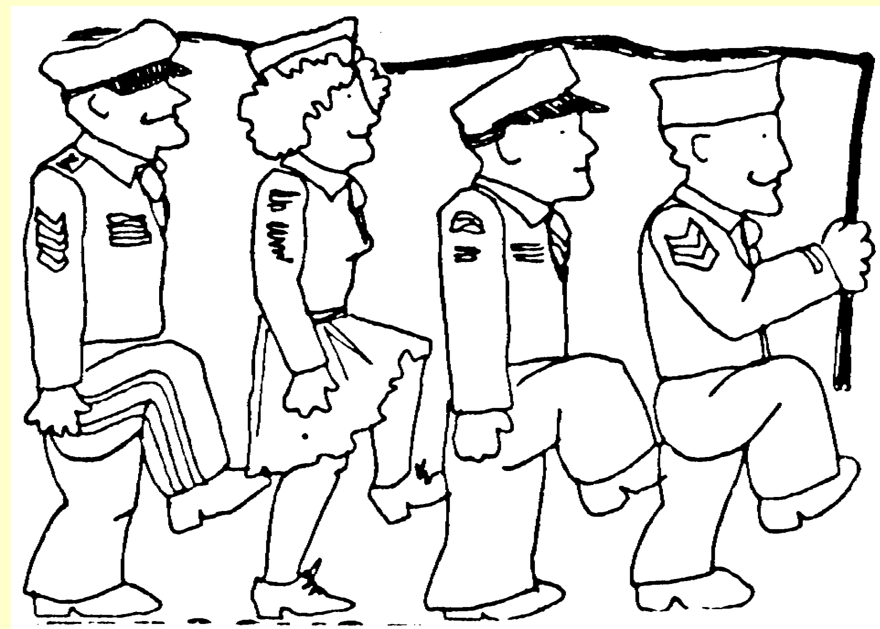
4、了解阻尼振动、强迫振动和共振的发生条件和规律；

5、掌握同方向、同频率谐振动的合成的特点和规律，了解互相垂直谐振动的合成的特点.





振动



共振现象

机械振动 Mechanical oscillations：

物体在一定的位置附近作来回往复的运动。

振动oscillations：任何一个物理量在某个确定的数值附近作周期性的变化。

波动Wave ：振动状态在空间的传播。

振动是波动产生的根源，波动是振动传播的过程。

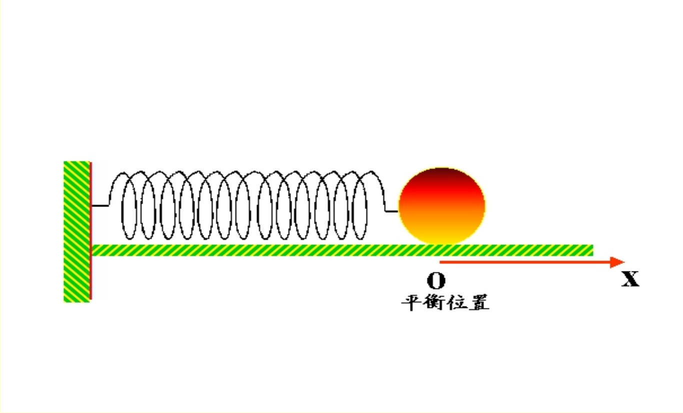
任何复杂的振动都可以看作是由若干个简单而又基本振动的合成。这种简单而又基本的振动形式称为**简谐运动**。

In this chapter, we will study the most important periodic motion-------Simple Harmonic Motion(简谐振动), which is base to investigate(研究） the complex periodic motion.

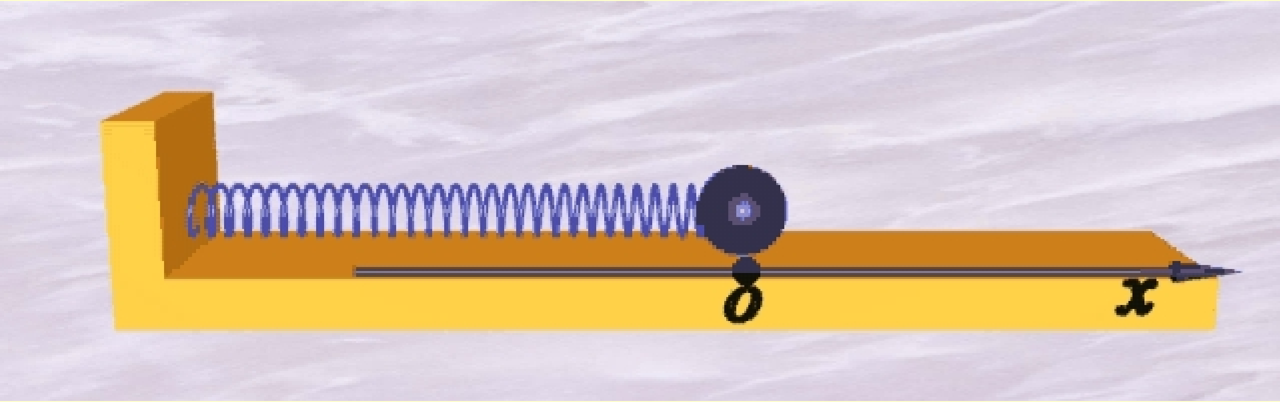
复杂运动

周期运动

简谐振动



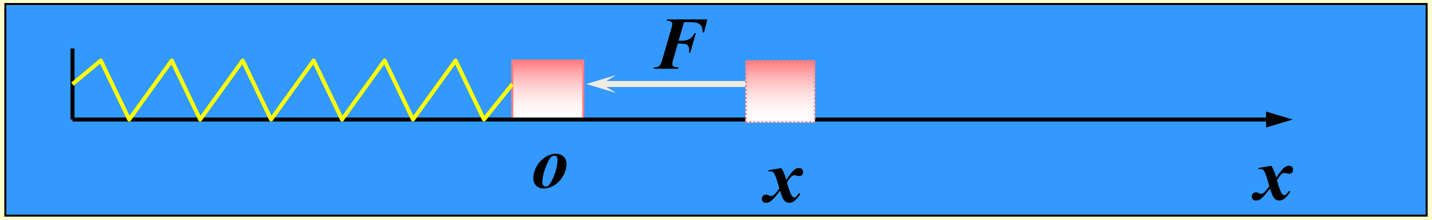
波动、电磁波、电压电流等


o
x

§ 10-1-1　简谐运动的动力学特征

Harmonic oscillator 弹簧振子：

一根轻弹簧和一个刚体构成的一个振动系统。



根据胡克定律：　$\vec{F} = -k\vec{x}$　（k为劲度系数）

（1）　在弹性限度内，弹性力F和位移x成正比。

（2）　弹性力F和位移x恒反向，始终指向平衡位置。

回复力：　始终指向平衡位置的作用力

No matter what the direction of the displacement, the force always acts in a direction to restore the eystem to its equilibrium position. such a force is called a restoring force.

由牛顿第二定律：

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,x \qquad \therefore \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

This is the equcation of motion of the simple harmonic oscillator.

令 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2\,x$

If we choose the constant ω such that $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

简谐运动表达式：$x(t) = A\cos\left(\omega t + \varphi_0\right)$

The function *x(t)* describes the position of the oscillator as a function of the time.

简谐运动：物体的运动遵从余弦（或正弦）规律。

简谐运动的三项基本特征：

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \qquad x = A\cos\left(\omega t + \varphi_0\right)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0) = v_m\cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0) = a_m\cos(\omega t + \varphi_0 \pm \pi)$$

Note:

(1) Maximal values:

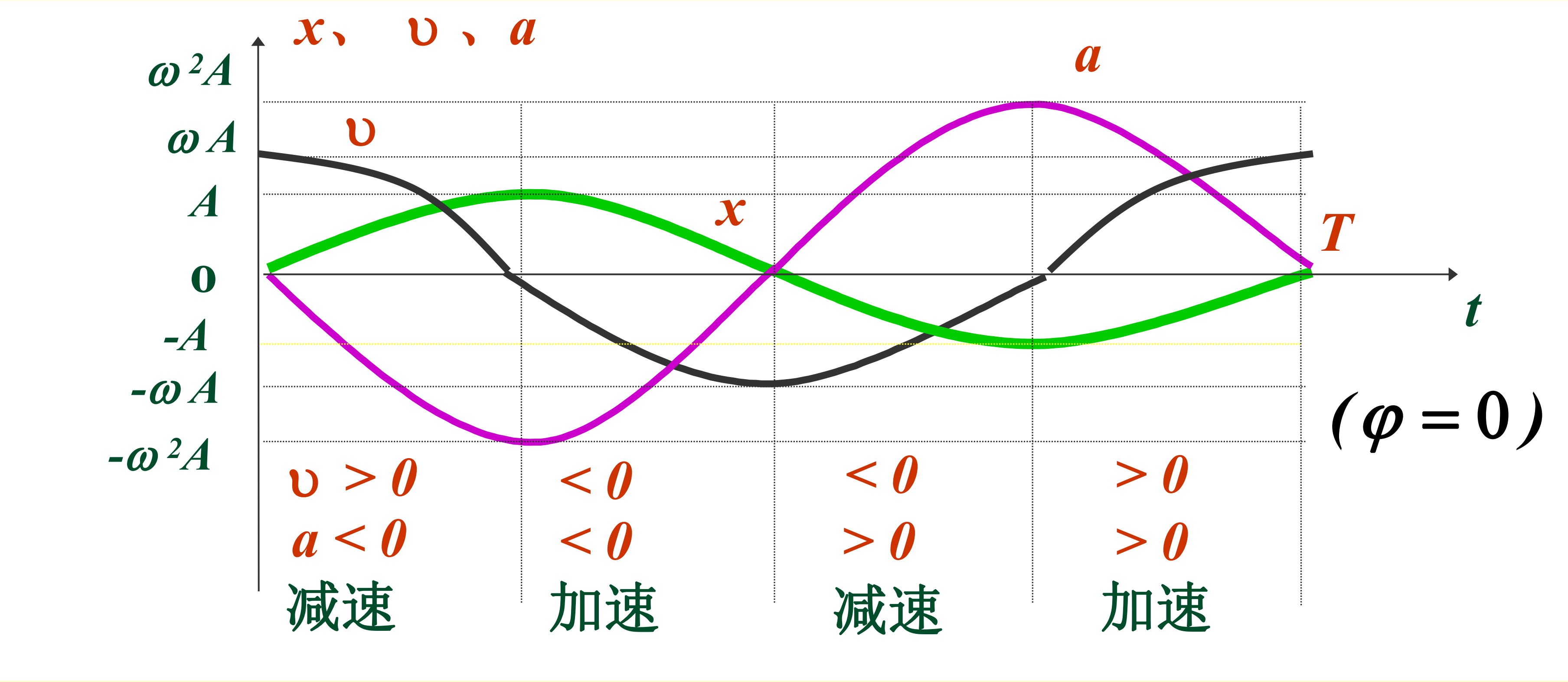
$$x_{max} = A$$

$$v_{max} = \omega A$$

$$a_{max} = \omega^2 A$$

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

(2) The curves of $x(t)$、$v(t)$ *and* $a(t)$ **:**



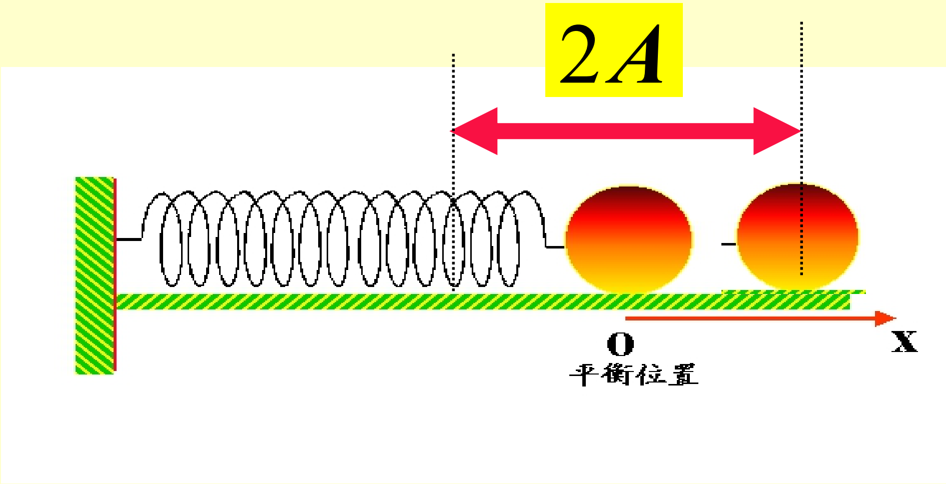
§ 10-1-2 简谐运动的运动学

一 描述简谐振动的三个重要参量 $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

1、*amplitude*振幅A:

振幅A：简谐振动的物体离开平衡位置的最大位移的绝对值

（由初始条件决定）(代表系统总能量的多少）。



$$\because \begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \\ V = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$

令 t=0 则 $\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi_0 & (1) \\ \dfrac{-V_0}{\omega} = A\sin\varphi_0 & (2) \end{cases}$

得 $A = \sqrt{x_0{}^2 + \dfrac{V_0{}^2}{\omega^2}}$

2、周期、频率、圆频率

（1）***period* 周期T**：**完成一次完全振动所需的时间**

$$x = A\cos(\omega t+\varphi_0) = A\cos\left[\omega(t+T)+\varphi_0\right]$$

$$= A\cos(\omega t+\varphi_0+2\pi)$$

$$\therefore \omega T = 2\pi \qquad 或 \qquad T = {2\pi}/{\omega}$$

由系统的力学参数决定 — 固有周期

(2)Frequency 频率ν：单位时间内所完成的完全振动的次数

The frequency of a simple harmonic motion is independent of the amplitude of the motion.

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

(3)angular frequency 圆频率ω：２π秒内完成的完全振动的次数

$$\omega = 2\pi\nu$$

(4)固有圆频率：仅由振动系统的力学性质所决定的频率

The period is determined only by the mass m of the oscillating particle and the force constant k of the spring.

固有圆频率		固有振动周期
单摆	$\omega^2 = \frac{g}{l}$	$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$
弹簧振子	$\omega^2 = \frac{k}{m}$	$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$
复摆	$\omega^2 = \frac{mgh}{I}$	$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}$

3、相位和初相位

（1）**phase 相位**：决定任意时刻 t 运动状态的物理量.

$$\because \begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \\ v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$

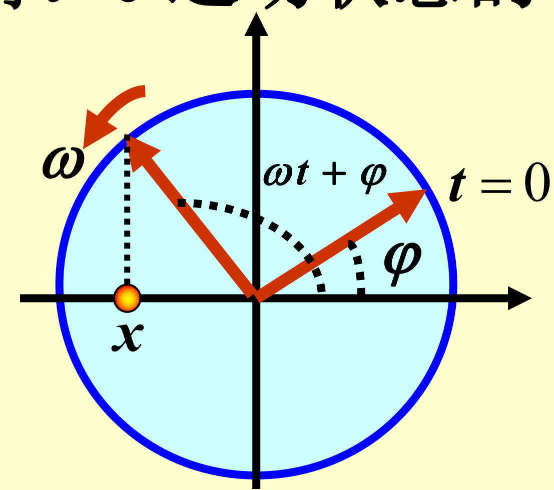
能确定系统运动状态，而又能反映其周期性特征的是 $\varphi = \omega t + \varphi_0$

（2）**phase constant初相位**：φ_0 是 t =0时刻的相位，

（0—2π） 或（-π — π ）之间取值。

初相 φ_0：决定初始时刻 t=0 运动状态的物理量.

重点：已知初始条件，确定系统的初相位。



（3）相位差

a）两个简谐振动的相位差

$x_1=A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_{10})$ $x_2=A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_{20})$

两个振动在同一时刻t的相位差:

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=(\omega_2 t+\varphi_{20})-(\omega_1 t+\varphi_{10})=(\omega_2-\omega_1)t+(\varphi_{20}-\varphi_{10})$$

两个同频振动在同一时刻的相位之差:

讨论: $\Delta\varphi=\varphi_{20}-\varphi_{10}$

(a) 当 $\Delta\varphi=2k\pi$ 时，称两个振动为同相;

(b) 当 $\Delta\varphi=(2k+1)\pi$ 时，称两个振动为反相;

(c) 当 $\Delta\varphi>0$ 时，称第二个振动超前第一个振动 $\Delta\varphi$;

(d) 当 $\Delta\varphi<0$ 时，称第二个振动落后第一个振动 $\Delta\varphi$ 。

相位可以用来比较不同物理量变化的步调，对于简谐振动的位移、速度和加速度，存在：

$$x = A\cos\left(\omega t + \varphi_0\right)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0) = v_m\cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0) = a_m\cos(\omega t + \varphi_0 \pm \pi)$$

速度的相位比位移的相位超前 $\pi/2$，加速度的相位比位移的相位超前 π。

b）同一振动在不同时刻的相位差

同一振动在 t_1、t_2 时刻的相位差为：

$$\Delta\varphi=(\omega t_2+\varphi_0)-(\omega t_1+\varphi_0)=\omega(t_2-t_1)$$

即一个谐振动从一个状态到另一个状态经历的时间间隔为：

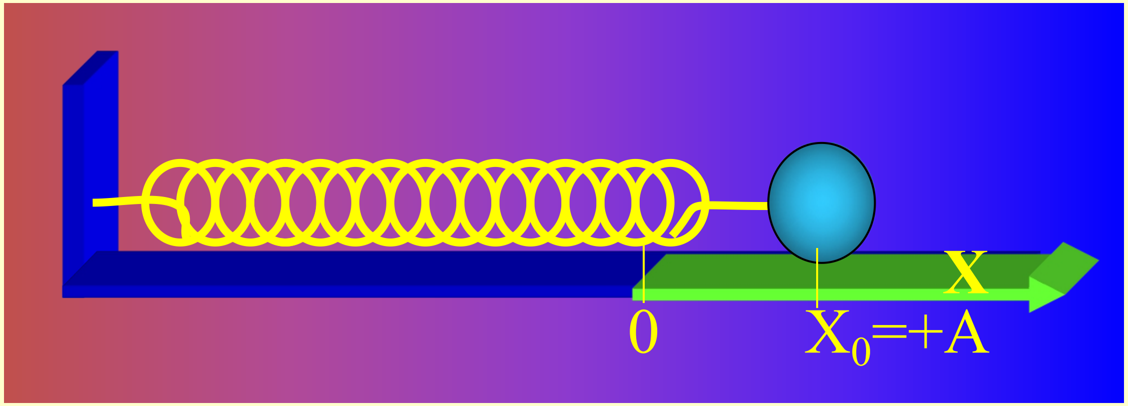
$$\Delta t=t_2-t_1=\Delta\varphi / \omega$$

（4）用分析法确定已知初始条件下的初相位：

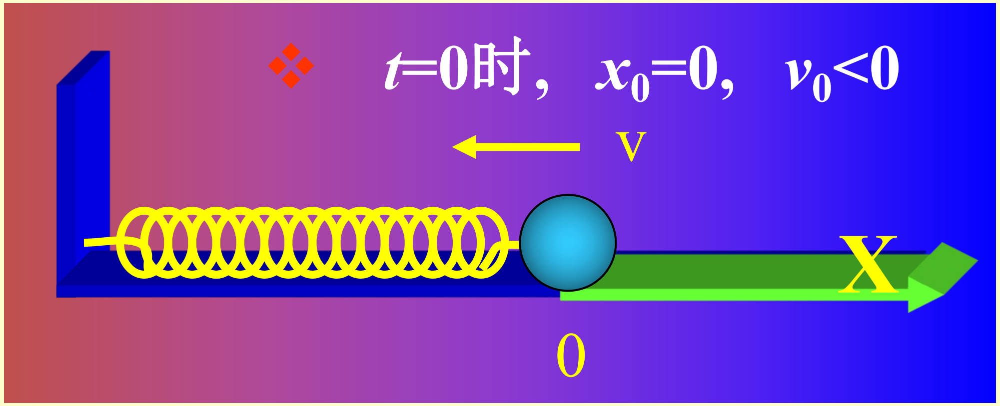
❖ **t=0 时，x_0=A，v_0=0.**

$$\because \begin{cases} x_0 = A\cos\varphi_0 = A \\ v_0 = -\omega A\sin\varphi_0 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \varphi_0 = 0$$



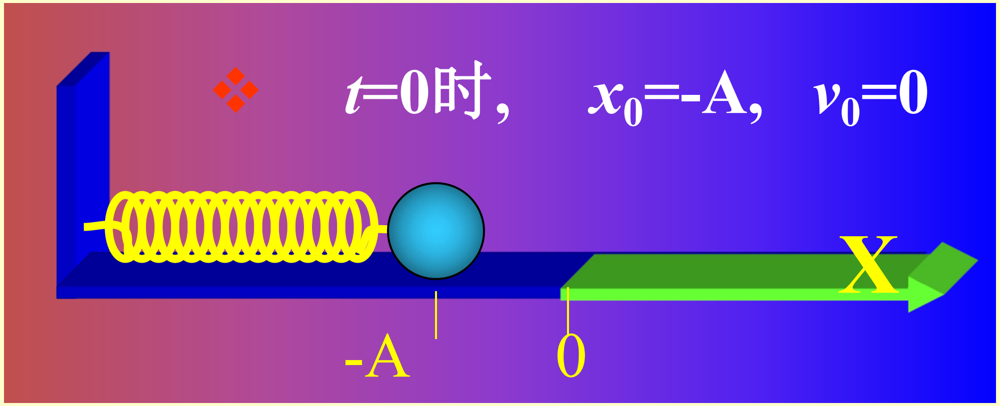
❖ t=0时，x_0=0，v_0<0



$$\because \begin{cases} x_0 = A\cos\varphi_0 = 0 \\ v_0 = -\omega A\sin\varphi_0 < 0 \end{cases}$$

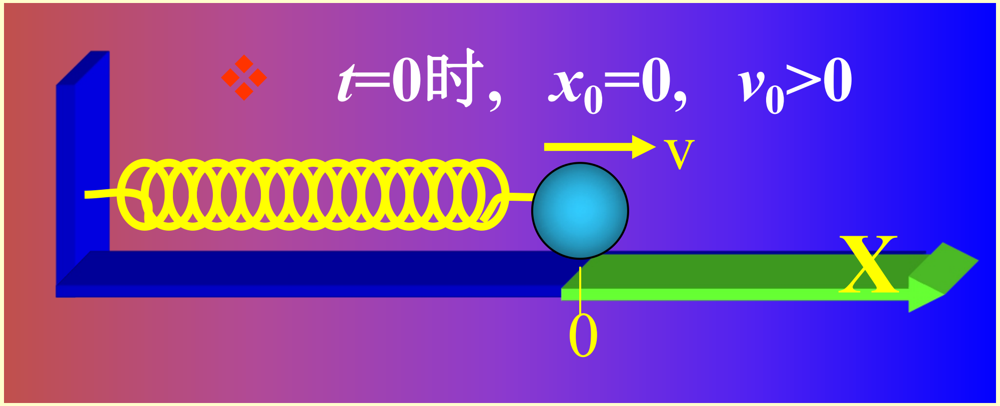
$$\therefore \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

❖ t=0时，x_0=-A，v_0=0



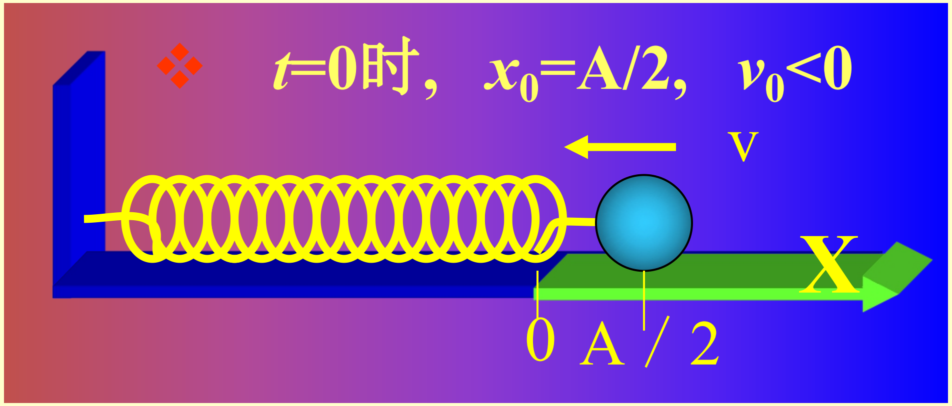
$$\because \begin{cases} x_0 = A\cos\varphi_0 = -A \\ v_0 = -\omega A\sin\varphi_0 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \varphi_0 = \pi$$



$$\because \begin{cases} x_0 = A\cos\varphi_0 = 0 \\ v_0 = -\omega A\sin\varphi_0 > 0 \end{cases}$$

$$\therefore \varphi_0 = \frac{3}{2}\pi$$



$$\because \begin{cases} x_0 = A\cos\varphi_0 = \dfrac{A}{2} \\ v_0 = -\omega A\sin\varphi_0 < 0 \end{cases} \qquad \therefore \varphi_0 = \frac{\pi}{3}$$

例1：物体沿x轴作谐振动，振幅为12 cm，周期为2 s，当t=0时，物体的坐标为6 cm，且沿x轴正方向运动，求：

(1)求初相；

(2)t =0.5 s时，物体的坐标、速度和加速度；

(3)物体在平衡位置且向x轴负方向运动的时刻开始计时的初相及其运动方程。

解：设物体的运动方程为 $x = A\cos\left(\omega t + \varphi_0\right)$

(1)根据题意知：A=12 cm， $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2s$ ，又当

t=0时，x_0=6 cm，v_0 >0，将这些条件代入运动学方程，

所以，$\cos\varphi_0 = \dfrac{1}{2}$, $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{5\pi}{3}$ 。根据初速度为正这一条件，只能取 $\varphi_0 = \dfrac{5\pi}{3}$。

因此物体的运动方程为 $x = 12\cos\left(\pi t + \dfrac{5\pi}{3}\right)$

(2) t=0.5 s时，物体的坐标、速度和加速度分别为

$$x_{0.5} = 12\cos\left(0.5\times\pi + \frac{5\pi}{3}\right) = 10.4$$

$$\dot{x}_{0.5} = -12\pi\sin\left(\pi\times 0.5 + \frac{5\pi}{3}\right) = -18.8$$

$$\ddot{x}_{0.5} = -12\pi^2\cos\left(\pi\times 0.5 + \frac{5\pi}{3}\right) = -103$$

负号表示在t = 0时物体的速度和加速度方向皆与x轴正方向相反。

(3) 根据题意，t = 0时，x_0=0 cm，v_0 < 0，代入运动学方程

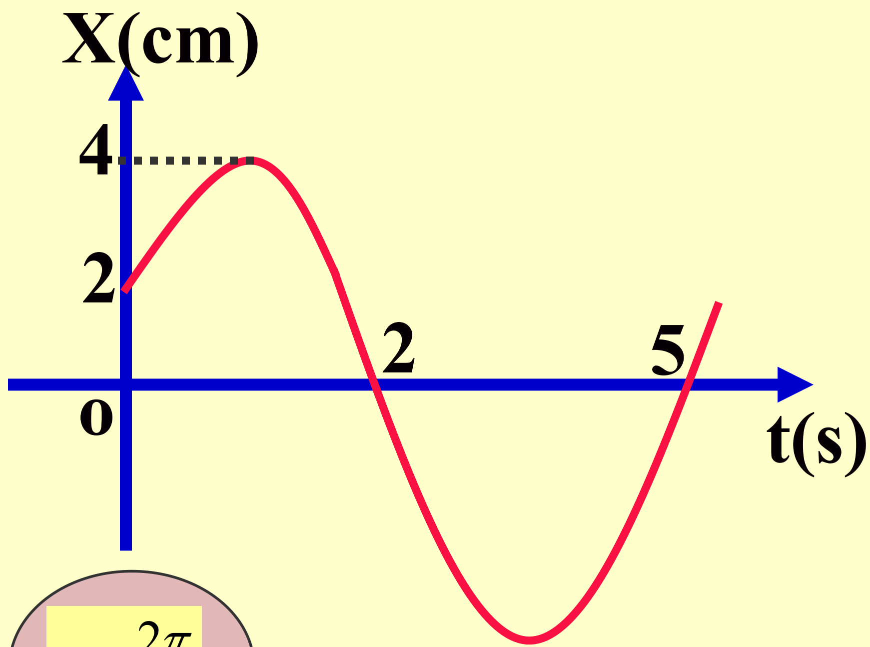
$$x_0 = 0 = A\cos\varphi$$

所以，$\cos\varphi = 0$，$\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ 或 $\dfrac{3\pi}{2}$ 。根据t=0时，

v_0 < 0这一条件，只能取 $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ 。

因此物体的运动学方程为 $x = 12\cos\left(\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right)$

例2:如图，为质点作谐振动的x随时间的变化曲线。求质点的振动方程和初速度。



解：（1）由x-t曲线知：

$$T = 6\,s \quad A = 4\,cm = 0.04\,m$$

$$\frac{T}{2} = 3$$

$$\begin{cases} x_0 = 0.02\ m \\ v_0 > 0 \end{cases}$$

（2）设质点的振动方程为

$$x = 0.04\cos(\frac{\pi t}{3} + \varphi_0)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

t=0时：

$$\cos\varphi_0 = \frac{1}{2} \rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{3}\ or -\frac{\pi}{3}$$

$$\sin\varphi_0 = -\frac{v_0}{\omega A} < 0$$

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{3}$$

所以：

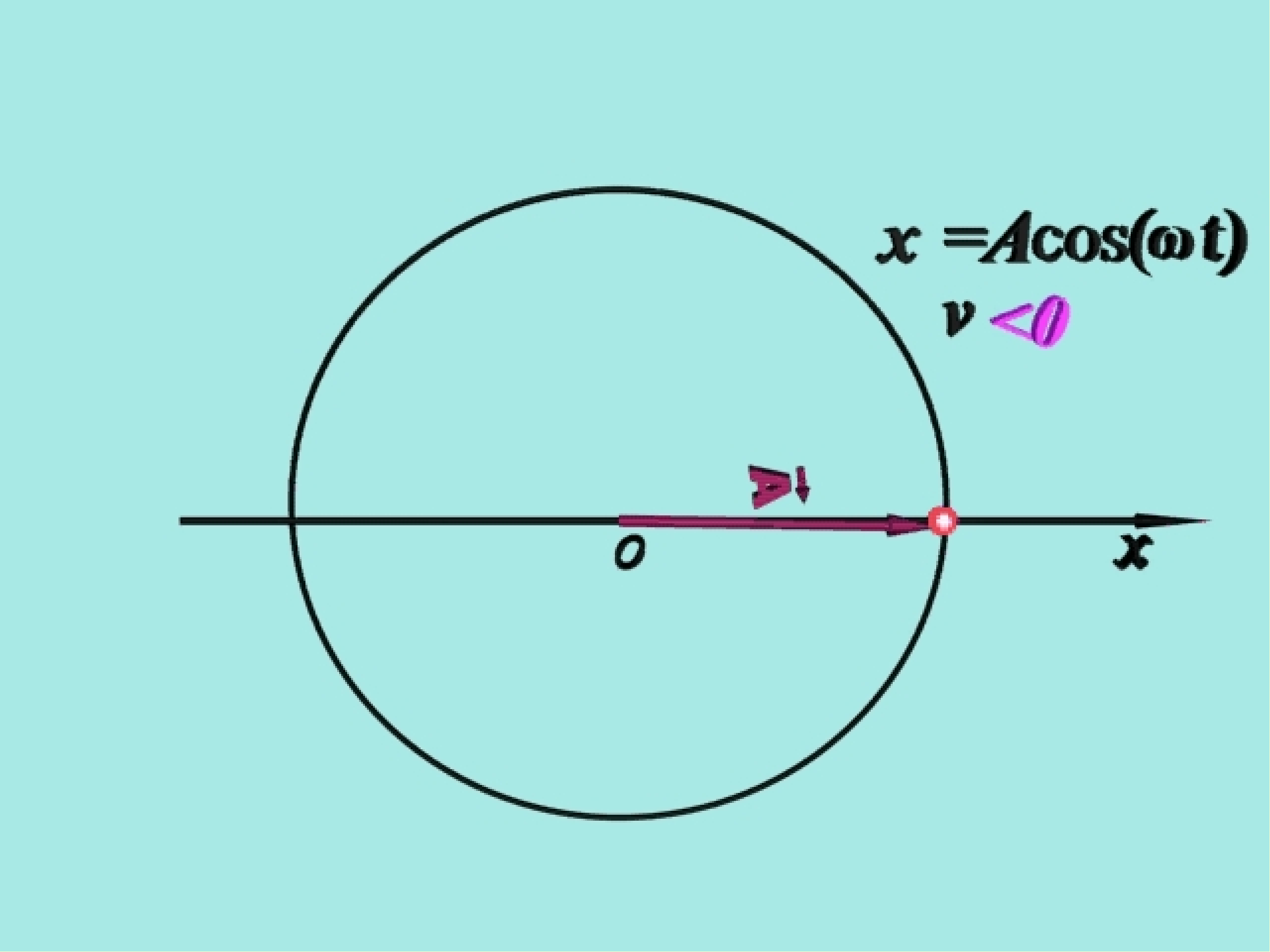
$$x = 0.04\cos(\frac{\pi t}{3} - \frac{\pi}{3}) \quad \text{(IS)}$$

（2）当t=0时，速度等于：

$$v_0 = -0.04 \times \frac{\pi}{3} \times sin(-\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi\sqrt{3}}{150}\ (m/s)$$

注意：（1）看图识‘量’；
（2）正确写出初始条件；
（3）φ_0的选择。

二 简谐运动的旋转矢量表示法

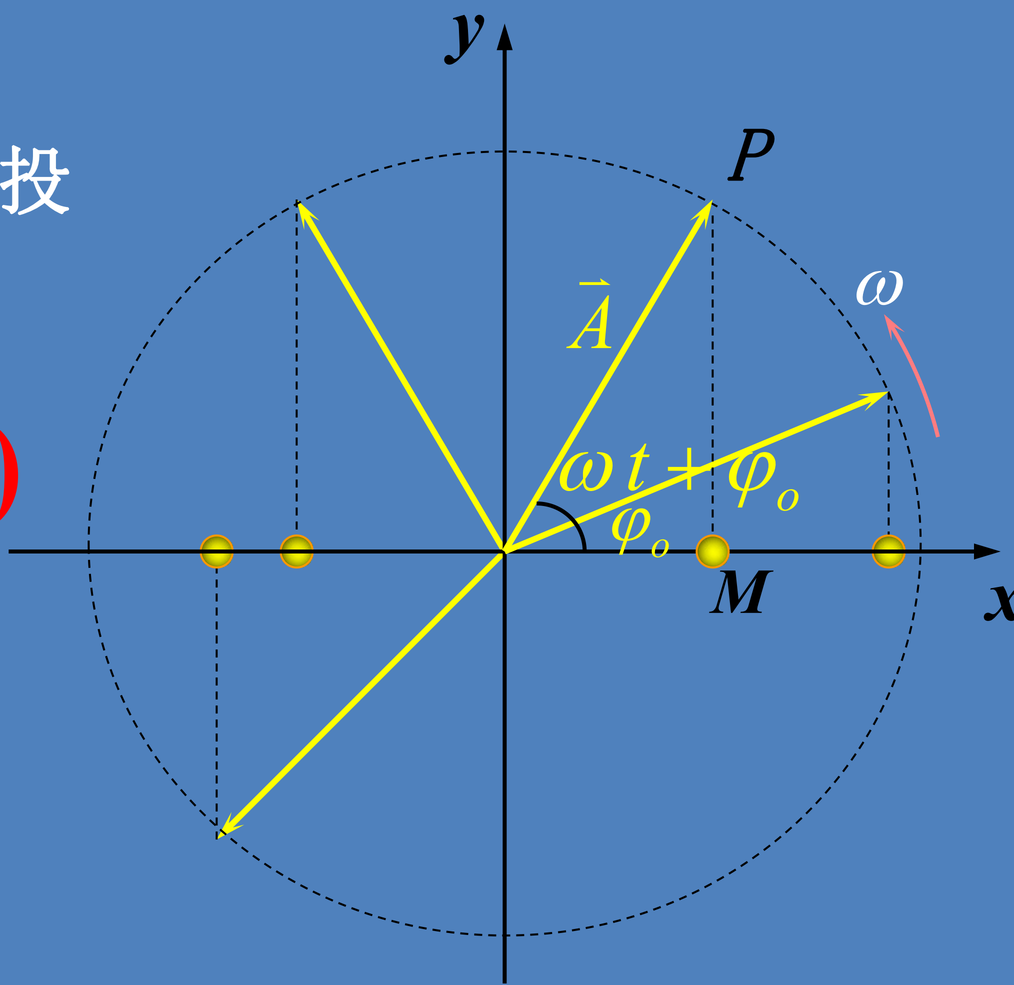


旋转矢量A在 x 轴上的投影点 M 的运动规律：

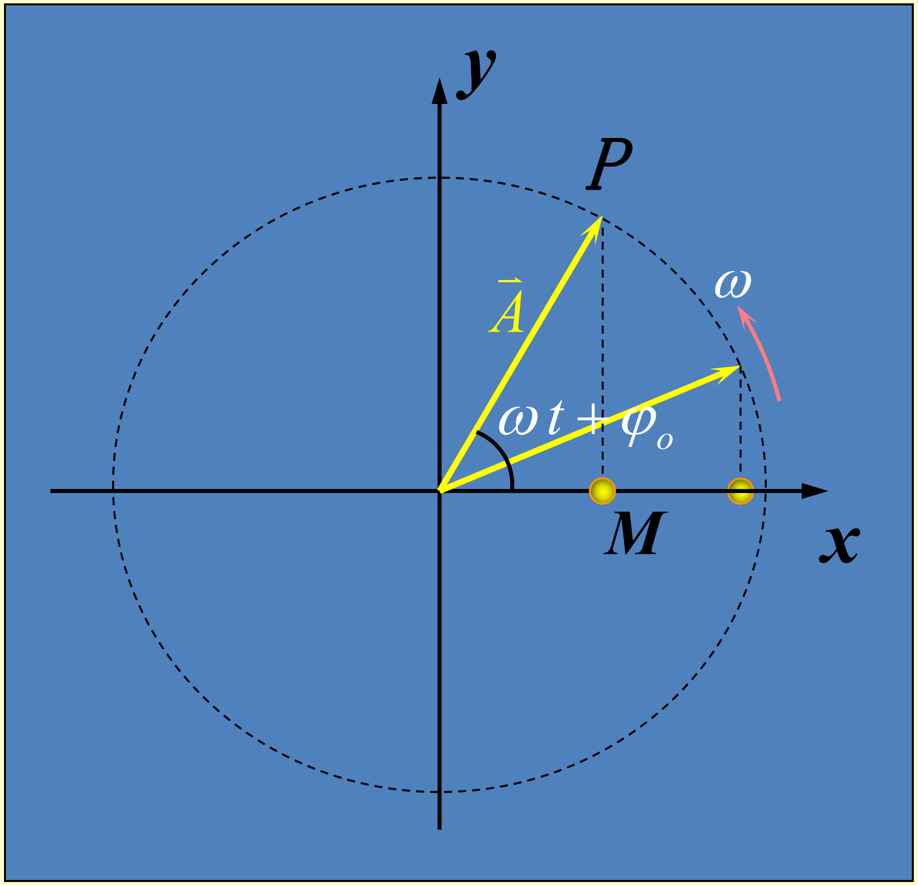
$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

结论：

投影点M的运动为简谐振动。



- 旋转矢量A的模：振幅
- 旋转矢量A的角速度ω：角频率



- 旋转矢量A与 x 轴的夹角($\omega t+\varphi_0$)：相位
- t = 0 时，A与x 轴的夹角φ_0：初相位。
- 旋转矢量A旋转一周，M点完成一次全振动。

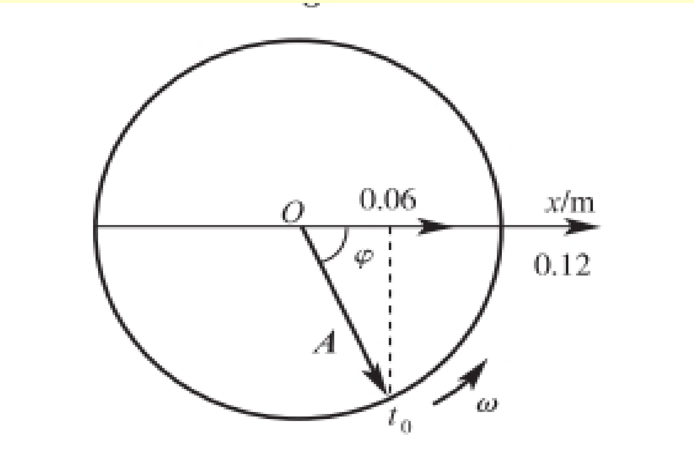
周期：$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$

例3：一质点沿x轴作谐振动，振幅A= 0.12 cm，周期T= 2.0 s。t =0 时质点的位置x_0= 0.06 m，且向x轴正向运动。用旋转矢量法求：

(1)初相；

(2)自计时起至第一次通过平衡位置的时间。

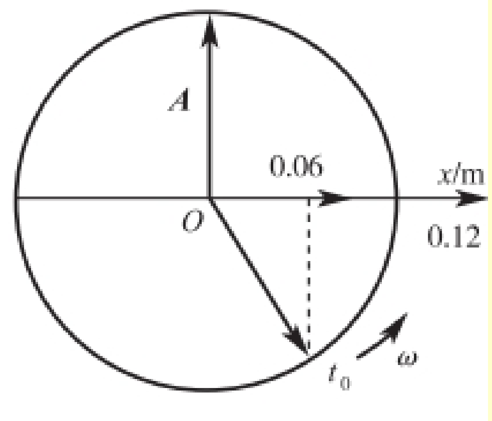
解：(1)按照起始条件x_0和v_0的方向，画出t = 0时的旋转矢量图，如图 (a)所示，从而求出初相 $\varphi_0 = -\pi/3$



(a)

(2) 从题意可分析出，质点第一次通过平衡位置时其速度沿x轴负向。由此画出旋转矢量图如图 (b) 所示。自计时起到质点第一次通过平衡位置，旋转矢量转过的角度为

$$\Delta\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi\left(rad\right)$$



(b)

旋转的角速度为

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi\left(rad/s\right)$$

所以用的时间为

$$\Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{\frac{5}{6}\pi}{\pi} = 0.83\left(s\right)$$

补充例4： 一质点沿x轴作简谐振动，振幅为12cm，周期为2s。当$t=0$时，位移为6 cm，且向x轴正方向运动。求1、振动方程。2、$t=0.5$ s时，质点的位置、速度和加速度。3、如果在某时刻质点位于$x=-6$ cm，且向 x 轴负方向运动，求从该位置回到平衡位置所需要的最短时间。

解： 设简谐振动表达式为 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$

（1）已知：$A=12$ cm， $T=2$ s， $\therefore \omega=\dfrac{2\pi}{T}=\pi$

$$\therefore x=0.12\cos(\pi t+\varphi)$$

初始条件：$t=0$ 时， $x_0=0.06$ m， $v_0>0$

$0.06=0.12\cos\varphi$　　$\dfrac{1}{2}=\cos\varphi\rightarrow\varphi=\pm\dfrac{\pi}{3}$

$v_0=-\omega A\sin\varphi>0 \rightarrow \sin\varphi<0 \quad \therefore\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$

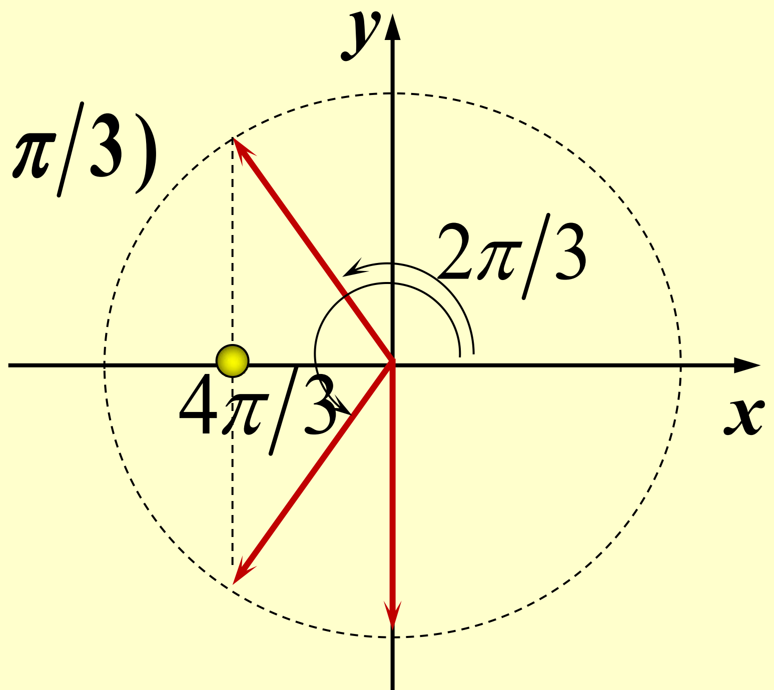
振动方程：$x=0.12\cos(\pi t-\dfrac{\pi}{3})$

$$(2)\because\ x=0.12\cos(\pi t-\frac{\pi}{3})\Big|_{t=0.5}=0.12\cos\frac{\pi}{6}$$

$$v\Big|_{t=0.5}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0.5}=-0.12\pi\sin(\pi t-\frac{\pi}{3})\Big|_{t=0.5}=-0.189\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$a\Big|_{t=0.5}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0.5}=-0.12\pi^2\cos(\pi t-\frac{\pi}{3})\Big|_{t=0.5}=-0.103\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

（3）设在某一时刻 t_1， $x = -0.06$ m



代入振动方程：$-0.06=0.12\cos(\pi t_1-\pi/3)$

$$\cos(\pi t_1-\pi/3)=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore \pi t_1-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}\quad 或\quad \frac{4\pi}{3}$$

已知质点向 ***x*** 轴负方向运动

$$\therefore \pi t_1-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}\quad\rightarrow\quad t_1=1s$$

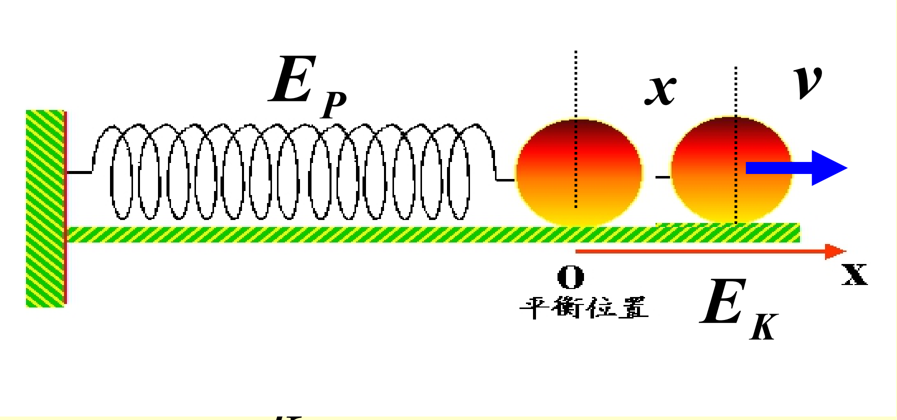
$$\pi t_2-\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}\quad\rightarrow\quad t_2=\frac{11}{6}s$$

$$\Delta t=t_2-t_1=\frac{11}{6}-1=\frac{5}{6}\,s$$

§ 10-1-3 简谐振动的能量The Energy of SHM

设 $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi_0)$ $v(t)=-A\omega\sin(\omega t+\varphi_0)$

一、动能kinetic energy



$$E_k=\frac{1}{2}mv^2$$

$$=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi_0)$$

$$=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi_0) \qquad (\because \omega^2=\frac{k}{m})$$

二、势能 potential energy

$$E_P=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi_0)$$

三、总能 total energy

$$E=E_k+E_P=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2$$

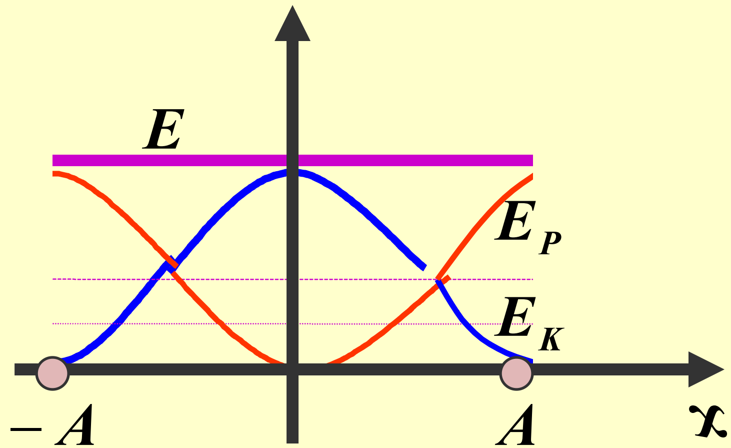
It can be proved that its total energy is constant。

Conclusions:

①谐振动的总能量与振幅的平方成正比；

②如图, 谐振动的动能和势能相互转化，总能量守恒.

$$\boxed{E_P} \rightleftarrows \boxed{E_K}$$



③ $v \sim x$ 关系:

$$\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow v=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2}$$

例1：当简谐振动的位移为振幅的一半时，其动能和势能各占总能量的多少？ 物体在什么位置时其动能和势能各占总能量的一半？

解：

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2}kA^2$$

当$x = A/2$时：

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}E$$

$$E_k = E - E_p = \frac{3}{4}E$$

$$\frac{1}{2}kx_0{}^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}kA^2 \quad \therefore x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}A = \pm 0.707A$$

例2:如果谐振子的振动频率为ν.问其动能和势能的变化频率为多少?

解：因为

$$E_P = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$

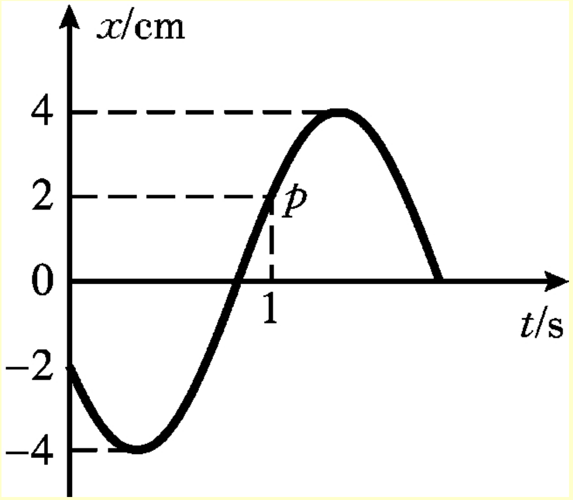
$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

而

$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$

所以动能和势能的变化频率为 2ν.

补充例题：已知如图所示的间谐振动曲线，试写出振动方程.



解　设简谐振动方程为 $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

从图中易知 $A=4$ cm，

从图中分析知，$t=0$ 时，$x_0 = -2cm$，

且 $v_0 = \dfrac{dx}{dt} < 0$ （由曲线的斜率决定），

代入振动方程，有

$$-2 = 4\cos\varphi_0 \qquad \therefore \varphi_0 = \pm\frac{2}{3}\pi$$

$$\because v_0 = -\omega A\sin\varphi_0 < 0 \qquad \therefore \sin\varphi_0 > 0 \qquad \therefore \varphi_0 = \frac{2}{3}\pi$$

再从图中分析，$t=1$ s时，$x=2$ cm，$v>0$，代入振动方程

有

$$2 = 4\cos(\omega + \varphi_0) = 4\cos(\omega + \frac{2}{3}\pi)$$

即 $$\cos(\omega + \frac{2}{3}\pi) = \frac{1}{2}$$

所以 $\omega+\frac{2}{3}\pi=\frac{5}{3}\pi$或 $\frac{7}{3}\pi$

$\because v=-\omega A\sin(\omega+\frac{2}{3}\pi)>0$ $\therefore \sin(\omega+\frac{2}{3}\pi)<0$

$\therefore \omega+\frac{2}{3}\pi=\frac{5}{3}\pi$ 所以：ω＝π

故振动方程为： $x=4\cos(\pi t+\frac{2}{3}\pi)\ cm$