矢量运算

标量Scalar：只有大小.

例如：质量、长度、时间、密度、能量、温度等。

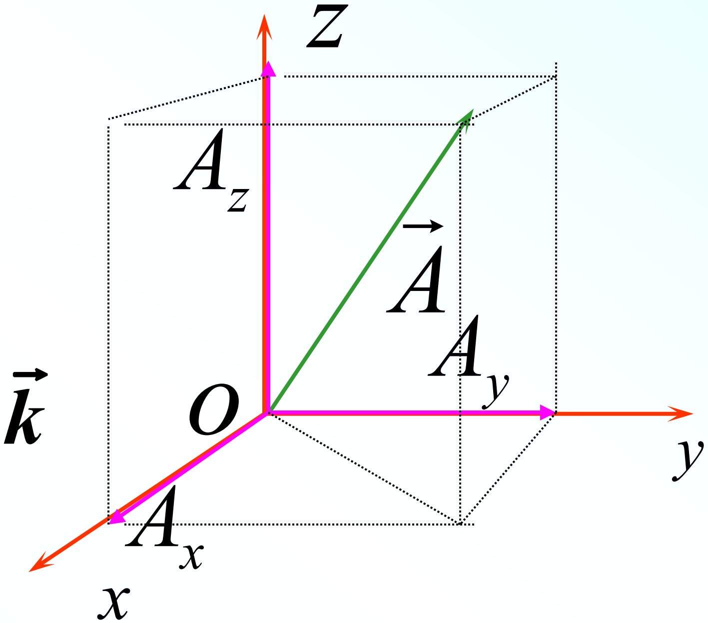
矢量Vector：既有大小又有方向，并有一定的运算规则.

例如：位移、速度、加速度、角速度、电场强度等。

矢量的书写：带箭头的字母（如 $\vec{A}$），或黑体字母。

1、矢量的几种表示方式：

几何表示：有指向的线段。



解析表示：

直角坐标系中：$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$表示沿x，y，z轴的单位矢量。

矢量的大小（模）$A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

magnitude

矢量方向： direction

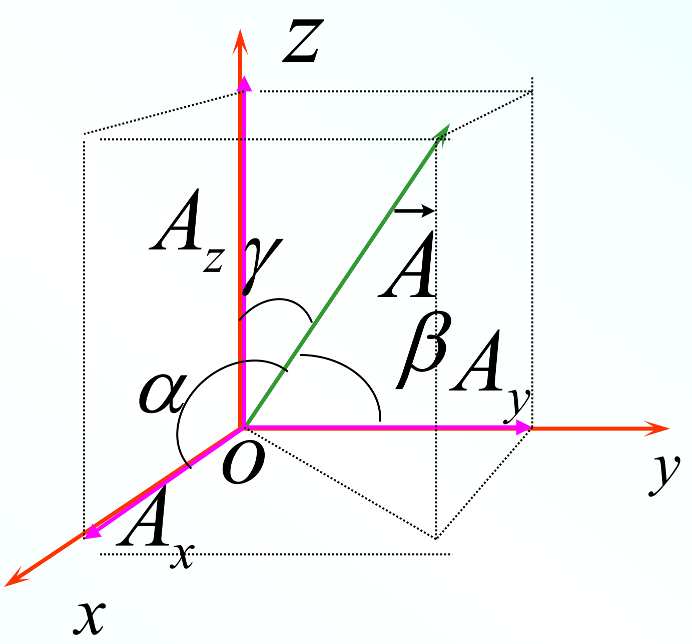
可由矢量与三个坐标轴的夹角的余弦表示。

设矢量与x，y，z三轴的夹角为α、β、γ。

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A},$$

$$\cos\beta = \frac{A_y}{A},$$

$$\cos\gamma = \frac{A_z}{A}$$



此三个角满足关系：

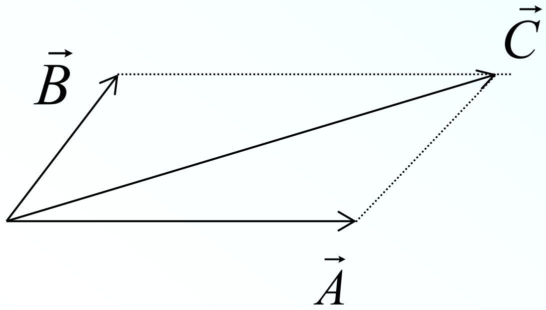
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

2、矢量的运算法则：

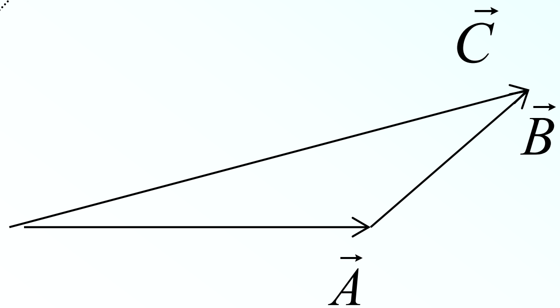
（1）矢量的加法运算Addition

矢量的加法遵循平行四边形法则或三角形法则。

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$$



$$\boxed{\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}}$$



（2）矢量的减法运算

矢量的减法运算是加法运算的逆运算。

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$$

（3）矢量的乘法运算

➢ 矢量的点乘 The scalar (dot) product

$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha$ α是$\vec{A}$与$\vec{B}$的夹角。

结论：两个矢量点乘的结果得到的是标量，它只有大小，没有方向。

$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}}$ $\boxed{\neq\vec{A}\vec{B}\neq\vec{B}\vec{A}}$

直角坐标系：$\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k},\vec{B}=B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k}$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k})\cdot(B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k})$$

$$=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

强调：$\vec{A}\cdot\vec{B}=0$ ⟺ 两矢量互相垂直

练习1：已知 $\vec{A}=2\vec{i}+10\vec{j}$，$\vec{B}=4\vec{i}+5\vec{j}$，求$\vec{A}\cdot\vec{B}$

➢矢量的叉乘 The vector (cross) product

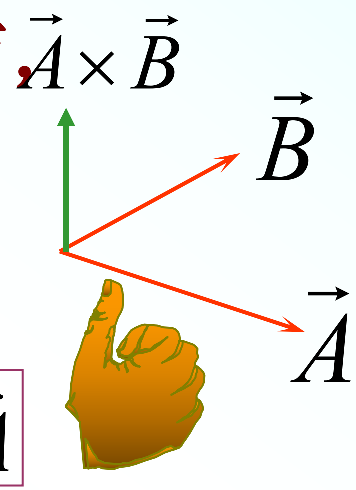
$$\vec{A}\times\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\sin\alpha\vec{\tau}$$

α是 $\vec{A}$与$\vec{B}$ 的夹角。$\vec{\tau}$是一个单位矢量。

结论： 两个矢量叉乘得到的结果仍然是一个矢量。

> $\vec{\tau}$的方向：垂直于由$\vec{A}$、$\vec{B}$所构成的平面，并且跟矢量$\vec{A}$、$\vec{B}$形成右手螺旋关系：

伸出右手，使手平面垂直$\vec{A}$、$\vec{B}$ 所构成的平面，然后四指沿着矢量$\vec{A}$ 的方向，经过小于180°的角转到矢量$\vec{B}$ 的方向，此时姆指指示的方向，就是矢量$\vec{A}\times\vec{B}$ 的方向。



$$\boxed{\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}}$$

强调： 矢量点乘与矢量叉乘是不同的概念，大家一定要把符号搞清楚，不要混淆。

（4）矢量的求导

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{d}{dt}(A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k})$$

$$=\frac{d}{dt}(A_x\vec{i})+\frac{d}{dt}(A_y\vec{j})+\frac{d}{dt}(A_z\vec{k})$$

$$=\frac{dA_x}{dt}\vec{i}+\frac{dA_y}{dt}\vec{j}+\frac{dA_z}{dt}\vec{k}$$

$$\boxed{\frac{d(\vec{A}\cdot\vec{B})}{dt}=\frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt}}$$

$$\boxed{\frac{d(\vec{A}\times\vec{B})}{dt}=\frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B}+\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}}$$

（5）矢量的积分

对矢量我们一般不直接积分，可以先把矢量投影到x，y，z轴，对各分量分别进行积分，再对得到的各分量值进行矢量合成。

$$A_x=\int dA_x,\ A_y=\int dA_y,\ A_z=\int dA_z$$

$$\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$$