$$\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}=\frac{1}{z-\mathrm{i}}\frac{1}{z+\mathrm{i}}.$$

在 $0<|z-\mathrm{i}|<2$ 内，

$$\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{z-\mathrm{i}}\frac{1}{z+\mathrm{i}}=\frac{1}{z-\mathrm{i}}\frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{1}{1-\left(-\frac{z-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}\right)}$$

$$=\frac{1}{z-\mathrm{i}}\frac{1}{2\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^{n-1}}{2^{n+1}}(z-\mathrm{i})^{n-1}$$

$$=-\frac{\mathrm{i}}{2(z-\mathrm{i})}+\frac{1}{4}+\frac{\mathrm{i}}{8}(z-\mathrm{i})-\frac{1}{16}(z-\mathrm{i})^2+\cdots.$$

在 $2<|z-\mathrm{i}|<+\infty$ 内，

$$\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{z-\mathrm{i}}\frac{1}{z+\mathrm{i}}=\frac{1}{z-\mathrm{i}}\frac{1}{z-\mathrm{i}}\frac{1}{1-\left(-\frac{2\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)}$$

$$=\frac{1}{(z-\mathrm{i})^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2\mathrm{i})^n}{(z-\mathrm{i})^{n+2}}$$

$$=\frac{1}{(z-\mathrm{i})^2}-\frac{2\mathrm{i}}{(z-\mathrm{i})^3}-\frac{4}{(z-\mathrm{i})^4}+\cdots.$$

本章小结

本章研究了函数的幂级数与洛朗级数，我们已知复变函数论研究的主要对象是解析函数，在这一章里表述了幂级数与解析函数的紧密联系，一方面幂级数在一定的区域内收敛于一个解析函数；另一方面一个解析函数在其解析点的邻域内，能展开成幂级数．所以幂级数是我们研究解析函数在解析点邻域的性质时所必不可少的有力工具．而且

实际计算中，把函数展开成幂级数，应用起来也比较方便，所以幂级数在复变函数论中有着特别重要的意义.

洛朗级数是幂级数的进一步发展.它实际上是由一个通常(非负次的)幂级数同一个只含负次幂的级数组合而成的.洛朗级数的性质可以由幂级数的性质推导出来.特别可以推导出：洛朗级数的和表示圆环内的解析函数，同幂级数一样，我们也研究了相反的问题，即任意一个在某圆环内解析的函数是否一定可以展开为洛朗级数，如果可以，怎样展开.

圆环的一种蜕化情形是一点的去心邻域，而当函数在一点的去心邻域内为解析，但并不在该点解析的时候，这一点就是函数的孤立奇点.所以洛朗级数就很自然地成为研究解析函数的孤立奇点的有力工具(这点将在下一章看到).

幂级数与洛朗级数是研究解析函数的重要工具，为使用好这些工具，我们不可回避的一个问题就是："将函数 $f(z)$展开成级数"，关于这个问题，我们必须注意以下几点：

(1) 将函数 $f(z)$展开成什么级数？是幂级数还是洛朗级数？

(2) 在哪些区域里展开？区域不同展开式也不一样.

(3) 能不能展开？怎样展开？

思考题

4.1 幂级数的和函数在其收敛圆的内部是否有奇点？在收敛圆圆周上是否处处收敛？这个和函数在收敛点上是否解析？

4.2 复变函数是否均可展为幂级数？

4.3 怎样将函数展开为洛朗级数？

习题四

4.1 下列序列是否有极限？如果有极限，求出其极限：

(1) $z_n = \mathrm{i}^n + \dfrac{1}{n}$； (2) $z_n = \dfrac{n!}{n^n}\mathrm{i}^n$； (3) $z_n = \left(\dfrac{z}{\bar{z}}\right)^n$.

4.2 下列级数是否收敛？是否绝对收敛？

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n}\right)$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}$；　(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+i)^n$.

4.3 试证：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2z)^n$ 当 $|z|<\frac{1}{2}$ 时绝对收敛.

4.4 试确定下列幂级数的收敛半径：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}z^n$；(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^n$.

4.5 将下列各函数展开为 z 的幂级数，并指出其收敛域：

(1) $\frac{1}{1+z^3}$；　(2) $\frac{1}{(z-a)(z-b)}$　$(a\neq 0,\ b\neq 0)$；

(3) $\frac{1}{(1+z^2)^2}$；　(4) $\operatorname{ch} z$；

(5) $\sin^2 z$；　(6) $e^{\frac{z}{z-1}}$.

4.6 证明：对任意的 z，有

$$|e^z-1|\leqslant e^{|z|}-1\leqslant |z|e^{|z|}.$$

4.7 求下列函数在指定点 z_0 处的泰勒展式：

(1) $\frac{1}{z^2}$，$z_0=1$；　(2) $\sin z$，$z_0=1$；

(3) $\frac{1}{4-3z}$，$z_0=1+i$；　(4) $\tan z$，$z_0=\frac{\pi}{4}$.

4.8 将下列各函数在指定圆环内展开为洛朗级数：

(1) $\frac{z+1}{z^2(z-1)}$，$0<|z|<1$，$1<|z|<+\infty$；

(2) $z^2e^{\frac{1}{z}}$，$0<|z|<+\infty$；

(3) $\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$，$1<|z|<2$；

(4) $\cos\frac{i}{1-z}$，$0<|z-1|<+\infty$.

4.9 将 $f(z)=\frac{1}{z^2-5z+6}$ 分别在其有限孤立奇点处展开为洛朗级数.

4.10 将 $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^2}$ 在 $z=i$ 的去心邻域内展开为洛朗级数.

第五章

留数及其应用

留数理论是复积分和复级数理论相结合的产物.本章首先以洛朗级数为工具,先对解析函数的孤立奇点进行分类,再对它在孤立奇点邻域内的性质进行研究,而后引进留数的概念,介绍留数的计算方法以及留数定理.利用留数定理可以把计算沿闭路的积分转化为计算在孤立奇点处的留数;利用留数定理还可以计算一些定积分的反常积分,从而用复变函数的方法解决某些用微积分中的方法难以解决的积分计算问题.

§5.1 孤立奇点

§5.1.1 孤立奇点的分类

定义 5.1 $f(z)$ 在 z_0 处不解析,但在 z_0 的某一个去心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$ 内处处解析,则称 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点.

例 5.1 $z=0$ 是函数 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ 的孤立奇点.

例 5.2 $z_1=\mathrm{i}$ 和 $z_2=-1$ 是函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-\mathrm{i})(z+1)}$ 的两个孤立奇点.

例 5.3 设 $f(z)=\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{z}}$, $z_n=\dfrac{1}{n\pi}$ 是它的孤立奇点, $n=1,2,\cdots$.

但 $z=0$ 是奇点而不是孤立奇点.因在 $z=0$ 的任何邻域中,总有形如 $z_n=\dfrac{1}{n\pi}$ 的奇点.