笔记前言：

本笔记的内容是去掉步骤的概述后，视频的所有内容。

本猴觉得，自己的步骤概述写的太啰嗦，大家自己做笔记时，应该每个人都有自己的最舒服最简练的写法，所以没给大家写。再是本猴觉得，不给大家写这个概述的话，大家会记忆的更深，掌握的更好！

所以老铁！一定要过呀！不要辜负本猴的心意！~~~

【祝逢考必过，心想事成~~~~】

【一定能过！！！！！！】

复变函数与积分变换第一课

一、复数的加减乘除

举例：

①$(2+3i)+(3+4i)=(2+3)+(3+4)i$

$=5+7i$

②$(3+4i)-(2+3i)=(3-2)+(4-3)i$

$=1+i$

③$(2+3i)\times(3+4i)=2\times3+2\times4i+3i\times3+3i\times4i$

$=6+8i+9i-12$

$=-6+17i$

④$\frac{2+3i}{3+4i}=\frac{(2+3i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{6-8i+9i+12}{3^2-(4i)^2}=\frac{18+i}{9+16}=\frac{18}{25}+\frac{1}{25}i$

二、求复数的实部与虚部

例 1：已知 z=9−10i，试求 Re(z)，Im(z)。

$Re(z)=9$，$Im(z)=-10$

例 2：已知 z=3+3i，$w=\frac{z-1}{z+i}$，试求 Re(w)，Im(w)。

$w=\frac{z-1}{z+i}=\frac{3+3i-1}{3+3i+i}=\frac{2+3i}{3+4i}=\frac{18}{25}+\frac{1}{25}i$

$\mathrm{Re}(w)=\frac{18}{25}$，$\mathrm{Im}(w)=\frac{1}{25}$

三、求某复数的共轭复数

例 1：已知 z=9−10i，试求 $\bar{z}$。

$\bar{z}=9+10i$

例 2：已知 z=3+3i，试求 $\frac{z-1}{\bar{z}+7i}$。

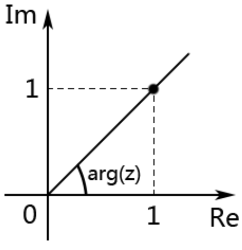
$\frac{z-1}{\bar{z}+7i}=\frac{3+3i-1}{3-3i+7i}=\frac{2+3i}{3+4i}=\frac{18}{25}+\frac{1}{25}i$

四、求模、辐角和辐角主值

例 1：已知 z=1+i，试求 z 的模、辐角、辐角主值。

$\because \mathrm{Re}(z)=1$，$\mathrm{Im}(z)=1$

$\therefore |z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$



$\because \arg(z)\in(-\pi,\pi]$

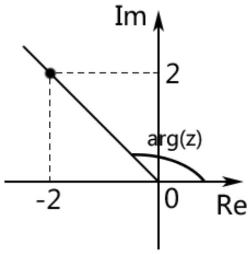
$\therefore \arg(z)=\frac{\pi}{4}$

$\mathrm{Arg}(z)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$，$k=0,\pm1,\pm2\cdots$

例 2：已知 $w=-2+2i$，试求 w 的模、辐角、辐角主值。

$\because \mathrm{Re}(w)=-2$，$\mathrm{Im}(w)=2$

$\therefore |w|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$



$\because \arg(w)\in(-\pi,\pi]$

$\therefore \arg(w)=\frac{3}{4}\pi$

$\mathrm{Arg}(w)=\frac{3}{4}\pi+2k\pi$，$k=0,\pm1,\pm2\cdots$

有关模、辐角、辐角主值的运算

公式	例子
$\lvert z_1z_2\rvert=\lvert z_1\rvert\cdot\lvert z_2\rvert$	$\lvert(3+4i)(5+6i)\rvert=\lvert 3+4i\rvert\cdot\lvert 5+6i\rvert$
$\left\lvert\frac{z_1}{z_2}\right\rvert=\frac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}$	$\left\lvert\frac{3+4i}{5+6i}\right\rvert=\frac{\lvert 3+4i\rvert}{\lvert 5+6i\rvert}$
$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}(z_1)+\mathrm{Arg}(z_2)$	$\mathrm{Arg}(-1+\sqrt{3}i)^4=4\mathrm{Arg}(-1+\sqrt{3}i)$
$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}(z_1)-\mathrm{Arg}(z_2)$	$\mathrm{Arg}\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{3+4i}\right)=\mathrm{Arg}(-1+\sqrt{3}i)-\mathrm{Arg}(3+4i)$

五、复数的开方

例 1：求 $\sqrt[4]{16}$

$|z|=|16|=16$，$\theta=\arg(16)=0$

$$\sqrt[4]{16}=16^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{0+2k\pi}{4}+i\sin\frac{0+2k\pi}{4}\right)$$

$$=2\left(\cos\frac{k\pi}{2}+i\sin\frac{k\pi}{2}\right)，k=0,1,2,3$$

六、代数式、三角式、指数式转换

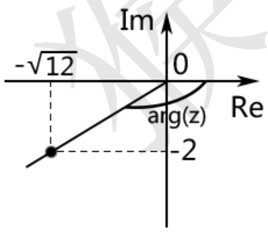
例 1：将 $z=-\sqrt{12}-2i$ 化为三角式、指数式。

$x=-\sqrt{12}$，$y=-2$

$$\therefore r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(-\sqrt{12}\right)^2+(-2)^2}=4$$

$\because \arg(z)\in(-\pi,\pi]$

$\therefore \theta=\arg(z)=-\frac{5}{6}\pi$



$\therefore$ 三角式 $z=4\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right]$

指数式 $z=4e^{i\cdot\left(-\frac{5}{6}\pi\right)}$

例 2：将 $z=4(\cos 30° + i\sin 30°)$化为代数式、指数式。

$r=4$，$\theta=30°$

$\therefore x=r\cos\theta=4\cos 30°=2\sqrt{3}$

$y=r\sin\theta=4\sin 30°=2$

$\therefore$ 代数式　$z=2\sqrt{3}+2i$

指数式　$z=4e^{i\cdot 30°}=4e^{i\cdot\frac{\pi}{6}}$

复变函数与积分变换第二课

一、将由 x、y 表示的方程化为复数形式

例 1：将 2x+3y=1 化为复数形式。

将 $\begin{cases} x = \frac{z+\bar{z}}{2} \\ y = \frac{z-\bar{z}}{2i} \end{cases}$ 代入原方程

则有 $2 \cdot \frac{z+\bar{z}}{2} + 3 \cdot \frac{z-\bar{z}}{2i} = 1$

整理，得 $(3+2i)z+(-3+2i)\bar{z} -2i=0$

二、将复数形式方程化为由 x、y 表示的方程/直角坐标方程

例 1：将 $Re(2+\bar{z})=4$ 化为直角坐标方程。

将 $\begin{cases} z = x + yi \\ \bar{z} = x - yi \end{cases}$ 代入原方程

则有 $Re[2+(x-yi)]=4$

$\because 2+(x-yi) =2+x-yi$ 　　实部为 $2+x$

$\therefore 2+x=4$

即 $x=2$

三、将 $\begin{cases}\mathbf{x}=\cdots\\ \mathbf{y}=\cdots\end{cases}$ 形式的参数方程化为复数形式

例 1：将 $\begin{cases}\mathbf{x}=\mathbf{t}+\mathbf{1}\\ \mathbf{y}=\mathbf{t}^{\mathbf{2}}+\mathbf{1}\end{cases}$ 化为复数形式。

z=x+yi

=(t+1)+i·(t^2+1)

四、将复数形式的参数方程化为 $\begin{cases}\mathbf{x}=\cdots\\ \mathbf{y}=\cdots\end{cases}$ 形式/一般形式

例 1：将 z=(1+i)t+2+i 化为一般形式。

z=(1+i)t+2+i

=(t+2)+i·(t+1)

$\therefore \begin{cases}x=t+2\\ y=t+1\end{cases}$

五、已知 z=***，求其在映射下的象

例 1：求 z=1+$\sqrt{3}$i 在映射 w=z^2下的象。

$w=z^2=\left(1+\sqrt{3}i\right)^2=-2+2\sqrt{3}i$

六、已知 arg(z)范围，求其在映射下的象

例 1：求 $0<\arg(z)<\frac{\pi}{2}$在映射 $w=z^2$下的象。

设 $z=re^{i\theta}$

则 $w=z^2=(re^{i\theta})^2=r^2e^{i\cdot 2\theta}$

$\therefore \arg(w)=2\theta$

$\therefore \arg(w)=\frac{2\theta}{\theta}\cdot\arg(z)=2\arg(z)$

$\therefore 0<\arg(w)<\pi$

七、已知由 x、y 表示的方程，求其在映射下的象

例 1：求 $2(x^2+y^2)+3x-4y+1=0$ 在映射 $w=\frac{1}{z}$下的象。

$w=\frac{1}{z} \Rightarrow z=\frac{1}{w}$

即 $x+yi=\frac{1}{u+vi}$

$x+yi=\frac{u}{u^2+v^2}+\frac{-v}{u^2+v^2}i$

将 $\begin{cases} x=\frac{u}{u^2+v^2} \\ y=\frac{-v}{u^2+v^2} \end{cases}$ 代入原方程

整理，得 $u^2+v^2+3u+4v+2=0$

例 2：求函数 $w=\frac{1}{z}$将 z 平面上的曲线 $2(x^2+y^2)+3x-4y+1=0$

映射到 w 平面上的曲线方程。

$w=\frac{1}{z} \Rightarrow z=\frac{1}{w}$

即 $x+yi=\frac{1}{u+vi}$

$x+yi=\frac{u}{u^2+v^2}+\frac{-v}{u^2+v^2}i$

将 $\begin{cases} x=\frac{u}{u^2+v^2} \\ y=\frac{-v}{u^2+v^2} \end{cases}$ 代入原方程

整理，得 $u^2+v^2+3u+4v+2=0$

小知识点

两个复数(不全为实数)不能比较大小

$8+6i>1+3i$ (×)

复变函数与积分变换第三课

一、计算复数的三角函数

例 1：计算 cos2i

$$\cos 2i=\frac{e^{i(2i)}+e^{-i(2i)}}{2}=\frac{e^{-2}+e^{2}}{2}$$

注意：sinz、cosz 取值范围为$(-\infty,+\infty)$，不再是$[-1,1]$。

二、 计算复数的对数函数

例 1：计算 Ln(1+i)

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}(1+i)&=\ln|1+i|+i\arg(1+i)+2k\pi i\\&=\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}i+2k\pi i\end{aligned}$$

例 2：计算 Ln(2)

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}(2)&=\ln|2|+i\arg(2)+2k\pi i\\&=\ln 2+2k\pi i\end{aligned}$$

例 3：已知 z=1+i，请计算 lnz

$$\ln(1+i)=\ln|1+i|+i\arg(1+i)$$

$=\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}i$

例 4：已知 z=2，请计算 Lnz 的主值

$\mathrm{Ln}(2)=\ln|2|+i\arg(2)=\ln 2$

三、 计算复数的指数函数

例 1：已知 z=1+i，请计算 e^z

$z=1+i \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

$e^{1+i}=e(\cos 1+i\sin 1)$

例 2：计算 $e^{i\theta}$

$e^{i\theta} \ \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\theta \end{cases}$

$e^{i\theta}=e^0(\cos\theta+i\sin\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$

四、已知关于 $e^{?z}$ 的式子，求 z

例 1：已知 $e^z-1-i=0$，求 z

$e^{z}=1+i$

$Ln(e^{z})=Ln(1+i)$

$z=Ln(1+i)$

$=\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}i+2k\pi i \quad (k=0,\pm1,\pm2\cdots)$

例 2：已知 $e^{iz}-2e^{-iz}=0$，求 z

$e^{iz}\left(e^{iz}-2e^{-iz}\right)=e^{iz}\cdot 0$

$e^{2iz}-2=0$

$e^{2iz}=2$

$Ln\left(e^{2iz}\right)=Ln2$

$2iz=Ln2$

$z=\frac{Ln2}{2i}$

$z=-\frac{\ln2}{2}i+k\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2\cdots)$

五、计算复数的幂函数

例 1：计算 $(\mathbf{1}+\mathbf{i})^{\mathbf{2}}$

$(1+i)^2=(1+i)(1+i)$

$=1^2+2i+i^2$

$=2i$

例 2：计算 $(\mathbf{4+4\sqrt{3}i})^{\frac{2}{3}}$

$$\begin{cases} r=\sqrt{4^2+(4\sqrt{3})^2}=8 \\ \theta=\arg(4+4\sqrt{3}i)=\frac{\pi}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} m=2 \\ n=3 \end{cases}$$

$$(4+4\sqrt{3}i)^{\frac{2}{3}}=8^{\frac{2}{3}}\left[\cos\frac{2(\frac{\pi}{3}+2k\pi)}{3}+i\sin\frac{2(\frac{\pi}{3}+2k\pi)}{3}\right] \qquad k=0,1,2$$

$$=4\left(\cos\frac{2\pi+12k\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi+12k\pi}{9}\right) \qquad k=0,1,2$$

例 3：计算 $(\mathbf{1+i})^{\mathbf{i}}$

$$(1+i)^i=e^{iLn(1+i)}=e^{i[\ln|1+i|+i\arg(1+i)+2k\pi i]}$$

$$=e^{(2k\pi-\pi/4)+\ln\sqrt{2}i} \qquad k=0，\pm1，\pm2\cdots$$

$$=e^{2k\pi-\pi/4}\left(\cos\ln\sqrt{2}+i\sin\ln\sqrt{2}\right) \qquad k=0，\pm1，\pm2\cdots$$

复变函数与积分变换第四课

一、f(z)=u(x,y)+v(x,y)i 形式的复函数求导

例 1：求 $f(z)=x^2+2y+2(x+y)i$ 的导数。

$u(x,y)=x^2+2y$ $v(x,y)=2(x+y)$

$u'_x=2x$ $v'_x=2$

$\therefore f'(z)=2x+2i$

例 2：求 $f(z)=3x^2y+(3x+2y)i$ 的导数。

$u(x,y)=3x^2y$ $v(x,y)=3x+2y$

$u'_x=6xy$ $v'_x=3$

$\therefore f'(z)=6xy+3i$

二、f(z)=?z 形式的复函数求导

例 1：求 $f(z)=e^z$ 的导数。

$f'(z)=(e^z)'=e^z$

例 2：求 $f(z)=\pi iz^2$ 的导数。

$$f'(z)=(\pi i z^2)'=\pi i (z^2)'=\pi i\cdot 2z^{2-1}=2\pi i z$$

三、判断解析、可导、有极限之间的关系

例：

$f(z)=u+iv$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 点 连续 是 $f(z)$ 在该点 解析 的 必要不充分 条件。

$f(z)=u+iv$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 点 可导 是 $f(z)$ 在该点 有极限 的 充分不必要 条件。

$f(z)=u+iv$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 点 有极限 是 $f(z)$ 在该点 可导 的 必要不充分 条件。

四、判断函数在哪可导与解析

例 1：讨论 $f(z)=(x-y)^2+2(x+y)i$ 在何处可导、何处解析。

$u=(x-y)^2=x^2-2xy+y^2 \qquad v=2(x+y)=2x+2y$

$u'_x=2x-2y \qquad v'_x=2$

$u'_y=-2x+2y \qquad v'_y=2$

令 $\begin{cases} u'_x=v'_y \\ u'_y=-v'_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-2y=2 \\ -2x+2y=-2 \end{cases} \Rightarrow x-y-1=0$

$\therefore$ 在直线 $x-y-1=0$ 处可导，处处不解析

例 2：已知 $f(z)=k\ln(x^2+y^2)+i\arctan\frac{y}{x}$ 在域 $x>0$ 内解析，求 k 的值。

$u=k\ln(x^2+y^2)$ $\qquad v=\arctan\frac{y}{x}$

$u'_x=k\cdot\frac{2x}{x^2+y^2}$ $\qquad v'_x=\frac{-y}{x^2+y^2}$

$u'_y=k\cdot\frac{2y}{x^2+y^2}$ $\qquad v'_y=\frac{x}{x^2+y^2}$

令 $\begin{cases}u'_x=v'_y\\u'_y=-v'_x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k\cdot\frac{2x}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}\\k\cdot\frac{2y}{x^2+y^2}=\frac{y}{x^2+y^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2kx=x\\2ky=y\end{cases}$

$\therefore k=\frac{1}{2}$

五、证明函数为调和函数

例 1：证明 $u(x,y)=y^3-3x^2y$ 为调和函数。

$u'_x=-6xy$

$u''_{xx}=-6y$ 连续

$u''_{xy}=-6x$ 连续

$u'_y=3y^2-3x^2$

$u''_{yx}=-6x$ 连续

$u''_{yy}=6y$ 连续

$\because\ u''_{xx}+u''_{yy}=-6y+6y=0$

$\therefore u(x,y)$为调和函数

六、共轭调和函数

例 1：已知 $u(x,y)=y^3-3x^2y$ 为调和函数，求 u 的共轭调和函数 $v(x,y)$。

$v(x,y)=\int u_x' \, dy+\int \left[-u_y'-\left(\int u_x' \, dy\right)_x'\right] dx+C$

$\because \; u_x'=-6xy，u_y'=3y^2-3x^2$

$\begin{cases} u_x'=v_y' \\ u_y'=-v_x' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_y'=u_x'=-6xy \\ v_x'=-u_y'=3x^2-3y^2 \end{cases}$

$\therefore v(x,y)=\int(-6xy)\,dy+\int[-(3y^2-3x^2)-(\int(-6xy)\,dy)_x'] \,dx+C$

$\because \; (-3xy^2)_y'=-6xy$

$\therefore \; \int(-6xy)\,dy=-3xy^2$

$\therefore v(x,y)=-3xy^2+\int[3x^2-3y^2-(-3xy^2)_x'] \,dx+C$

$=-3xy^2+\int[3x^2-3y^2-(-3y^2)] \,dx+C$

$=-3xy^2+\int 3x^2 \,dx+C$

$\therefore \; (x^3)_x'=3x^2$

$\therefore \; \int 3x^2 \,dx=x^3$

$\therefore v(x,y)=-3xy^2+x^3+C$

七、已知调和函数与共轭调和函数，写出其解析函数

例 1：已知 $u(x,y)=y^3-3x^2y$ 为调和函数，其共轭调和函数 $v(x,y)=-3xy^2+x^3+C$，试求其解析函数 $f(z)=u+vi$。

将 x=x，y=0 代入 $u(x,y)=y^3-3x^2y$

则 $u(x,0)=0^3-3x^2\cdot 0=0$

将 $x=x$，$y=0$ 代入 $v(x,y)=-3xy^2+x^3+C$

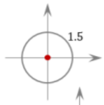
则 $v(x,0)=-3x\cdot 0^2+x^3+C=x^3+C$

$f(x)=u(x,0)+iv(x,0)=0+i(x^3+C)=ix^3+iC$

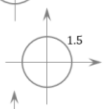
$\therefore f(z)=iz^3+iC$

复变函数与积分变换第五课

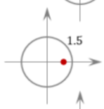
一、判断 C 的范围内 f(z)有几个奇点，并写出奇点

设 C 为正向圆周 $|z|=1.5$，写出 $\oint_C \frac{e^z}{z}\,dz$的奇点　　$z\neq0$


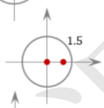
一个奇点：z=0

设 C 为正向圆周 $|z|=1.5$，写出 $\oint_C e^z\cdot\cos z\,dz$的奇点　　z随意


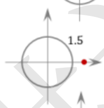
没有奇点

设 C 为正向圆周 $|z|=1.5$，写出 $\oint_C \frac{e^z}{z-1}\,dz$ 的奇点　　$z\neq1$


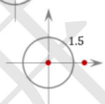
一个奇点：z=1

设 C 为正向圆周 $|z|=1.5$，写出 $\oint_C \frac{e^z}{z(z-1)}\,dz$ 的奇点　　$z\neq0$、1


两个奇点：z=0　z=1

设 C 为正向圆周 $|z|=1.5$，写出 $\oint_C \frac{e^z}{z-2}\,dz$ 的奇点　　$z\neq2$


没有奇点

设 C 为正向圆周 $|z|=1.5$，写出 $\oint_C \frac{e^z}{z(z-2)}\,dz$ 的奇点　　$z\neq0$、2


一个奇点：z=0

二、没有奇点，求 $\oint_C$

例 1：设 C 为正向圆周 $|z|=1.5$，求 $\oint_C e^z\cdot\cos z\,dz$

$$\oint_C e^z\cdot\cos z\,dz=0$$

例 2：设 C 为正向圆周 $|z|=1.5$，求 $\oint_C \frac{e^z}{z-2}\,dz$

$$\oint_C \frac{e^z}{z-2}\,dz=0$$

例 3：设 C 为正向圆周$|z|=1.5$，求$\oint_C \frac{e^z}{(z-2)^2}dz$

$$\oint_C \frac{e^z}{(z-2)^2}dz=0$$

三、有一个奇点，求$\oint_C$

例 1：设 C 为正向圆周$|z|=1.5$，求$\oint_C \frac{e^z}{z}dz$　　(一个奇点 $z=0$)

$$\oint_C \frac{e^z}{z}dz=\oint_C \frac{e^z}{z-0}dz=2\pi i\cdot f(0)=2\pi i\cdot e^0=2\pi i$$

$$\begin{cases} f(z)=e^z \\ z_0=0 \end{cases}$$

例 2：设 C 为正向圆周$|z|=1.5$，求$\oint_C \frac{e^z}{z^2(z-2)}dz$　　(一个奇点 $z=0$)

$$\oint_C \frac{e^z}{z^2(z-2)}dz=\oint_C \frac{\frac{e^z}{z-2}}{(z-0)^2}dz=\frac{2\pi i}{1!}f^{(1)}(0)=2\pi i\cdot f'(0)$$

$$\begin{cases} f(z)=\frac{e^z}{z-2} \\ z_0=0 \\ n=1 \end{cases}$$

$$f'(z)=\left(\frac{e^z}{z-2}\right)'=\frac{(e^z)'\cdot(z-2)-e^z\cdot(z-2)'}{(z-2)^2}=\frac{e^z(z-2)-e^z}{(z-2)^2}=\frac{e^z(z-3)}{(z-2)^2}$$

$$\therefore\ f'(0)=\frac{e^0(0-3)}{(0-2)^2}=\frac{-3}{4}$$

$$\therefore\quad \oint_C \frac{e^z}{z^2(z-2)}dz=2\pi i\cdot f'(0)=2\pi i\cdot\frac{-3}{4}=-\frac{3}{2}\pi i$$

四、有多个奇点，求 $\oint_C$

例 1：设 C 为正向圆周 $|z|=3$，求 $\oint_C \frac{e^z}{z^2(z-2)}dz$

两个奇点：$z_1=0$、$z_2=2$

① 针对 $z_1=0$

$$\oint_C \frac{e^z}{z^2(z-2)}dz=\oint_C \frac{\frac{e^z}{z-2}}{z^2}dz=\frac{2\pi i}{1!}\cdot f'(0)$$

$\because f'(z)=\frac{e^z(z-3)}{(z-2)^2}$

$\therefore f'(0)=\frac{-3}{4}$

$\therefore \oint_C \frac{e^z}{z^2(z-2)}dz=\frac{2\pi i}{1!}\cdot f'(0)=2\pi i\cdot\frac{-3}{4}=-\frac{3}{2}\pi i$

② 针对 $z_2=2$

$$\oint_C \frac{e^z}{z^2(z-2)}dz=\oint_C \frac{\frac{e^z}{z^2}}{z-2}dz=2\pi i\cdot f(2)$$

$\because f(z)=\frac{e^z}{z^2}$

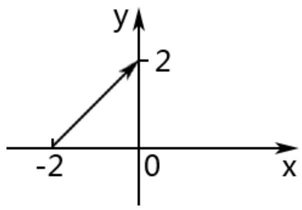
$\therefore f(2)=\frac{e^2}{2^2}=\frac{e^2}{4}$

$\therefore \oint_C \frac{e^z}{z^2(z-2)}dz=2\pi i\cdot f(2)=2\pi i\cdot\frac{e^2}{4}=\frac{\pi i e^2}{2}$

$\oint_C \frac{e^z}{z^2(z-2)}dz=①+②=-\frac{3}{2}\pi i+\frac{\pi i e^2}{2}=\frac{e^2-3}{2}\pi i$

五、C 为线段，求 $\int_C f(z)\,dz$

例 1：设 C 为图中所示线段，求 $\int_C (z+3)\,dz$



$\begin{cases} x = x \\ y = x + 2 \end{cases}$　(x：$-2 \to 0$)

z=x+yi=x+(x+2)i

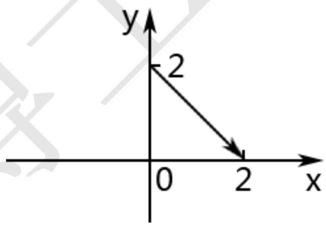
dz=d[x+(x+2)i]=(1+i)dx

$\int_C (z+3)\,dz = \int_{-2}^{0} [x + (x+2)i + 3] \cdot (1+i)\,dx$

$= \int_{-2}^{0} (2xi + 5i + 1)\,dx$

$= 2+6i$

例 2：设 C 为图中所示线段，求 $\int_C (z+3)\,dz$



$\begin{cases} x = x \\ y = -x + 2 \end{cases}$　(x：$0 \to 2$)

z=x+yi=x+(−x+2)i

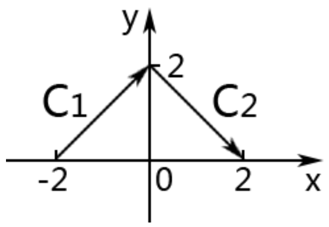
dz=d[x+(−x+2)i]=(1−i)dx

$\int_C (z+3)\,dz = \int_{0}^{2} [x + (-x+2)i + 3] \cdot (1-i)\,dx$

$= \int_{0}^{2} (-2ix - i + 5)\,dx$

$= 10 - 6i$

例 3：设 C 为图中所示线段，求 $\int_C (z+3)\,dz$



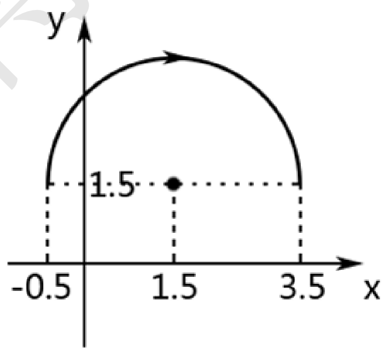
$$\int_C (z+3)\,dz=\int_{C_1}(z+3)\,dz+\int_{C_2}(z+3)\,dz$$

$$=2+6i+10-6i$$

$$=12$$

六、C 为圆弧，求 $\int_C f(z)\,dz$

例 1：设 C 为图中所示圆弧，求 $\int_C (z+1.5-1.5i)\,dz$



$$\begin{cases} x = 2\cos\theta + 1.5 \\ y = 2\sin\theta + 1.5 \end{cases} \quad (\theta：\pi\to 0)$$

$$z=x+yi=2\cos\theta+1.5+(2\sin\theta+1.5)i=2e^{i\theta}+1.5+1.5i$$

$$dz=d\left(2e^{i\theta}+1.5+1.5i\right)=2ie^{i\theta}d\theta$$

$$\int_C (z+1.5-1.5i)\,dz = \int_\pi^0 \left[\left(2e^{i\theta} + 1.5 + 1.5i\right) + 1.5 - 1.5i\right] \cdot 2ie^{i\theta} d\theta$$

$$= \int_\pi^0 \left(4ie^{2i\theta} + 6ie^{i\theta}\right) d\theta$$

$$= 12$$

复变函数与积分变换第六课

一、判断级数收敛/发散

例 1：判断$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2^n}\right)+i\frac{3}{n^2}\right]$收敛还是发散。

实部：$1+\frac{1}{2^n}$　　　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)=1+\frac{1}{2^\infty}=1\neq0$

虚部：$\frac{3}{n^2}$　　　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}=\frac{3}{\infty^2}=0$

不是都趋近于 0

∴ 该级数发散

例 2：判断$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n}+i\frac{3}{n^2}\right]$收敛还是发散。

实部：$\frac{1}{2^n}$　　　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^\infty}=0$

虚部：$\frac{3}{n^2}$　　　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}=\frac{3}{\infty^2}=0$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n$ 在 $|q|<1$ 时收敛，$|q|\geq1$ 时发散

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 在 $p>1$ 时收敛，$p\leq1$ 时发散

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$: $q=\frac{1}{2}<1 \Rightarrow$ 收敛　　$\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n$: $q=2\geq1 \Rightarrow$ 发散

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2}$: $p=2>1 \Rightarrow$ 收敛　　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$: $p=1\leq1 \Rightarrow$ 发散

∵ $\Sigma\frac{1}{2^n}$ 收敛，$\Sigma\frac{3}{n^2}$ 收敛

即 实部级数与虚部级数同时收敛

∴ 该级数收敛

例 3：判断 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\frac{n\pi}{2}i}}{n^2}$ 收敛还是发散。

$$\left|\frac{e^{-\frac{n\pi}{2}i}}{n^2}\right|=\left|\frac{e^{0-\frac{n\pi}{2}i}}{n^2}\right|=\frac{e^0}{n^2}=\frac{1}{n^2}$$

$\sum_{n=0}^{\infty}aq^n$ 在 $|q|<1$ 时收敛，$|q|\geq1$ 时发散

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 在 $p>1$ 时收敛，$p\leq1$ 时发散

$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$: $q=\frac{1}{2}<1\Rightarrow$ 收敛　　$\sum_{n=0}^{\infty}2^n$: $q=2\geq1\Rightarrow$ 发散

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2}$: $p=2>1\Rightarrow$ 收敛　　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$: $p=1\leq1\Rightarrow$ 发散

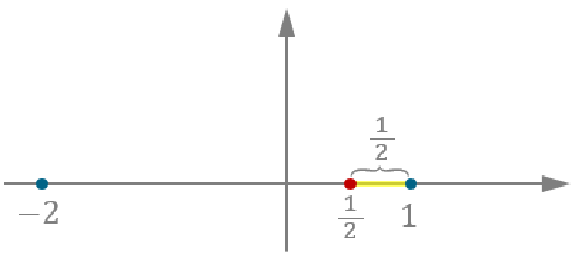
$\because\ \Sigma\frac{1}{n^2}$ 收敛

即 绝对值级数收敛

$\therefore$该级数收敛

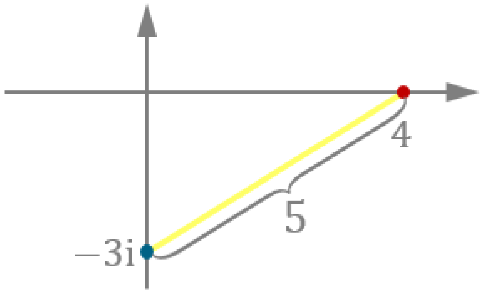
二、求收敛半径

例 1：求 $f(z)=\frac{z}{(z-1)(z+2)}$ 在 $z_0=\frac{1}{2}$ 处所展泰勒级数的收敛半径。



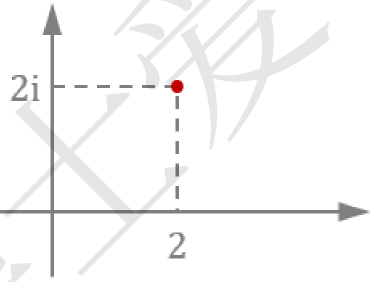
奇点：1 、−2　　展开点：$z_0=\frac{1}{2}$　　收敛半径：$R=\frac{1}{2}$

例 2：求 $f(z)=\frac{z}{z+3i}$ 在 $z_0=4$ 处所展泰勒级数的收敛半径。



奇点：$-3i$　　　　展开点：$z_0=4$　　　收敛半径：$R=5$

例 3：求 $f(z)=e^z$ 在 $z_0=2+2i$ 处所展泰勒级数的收敛半径。



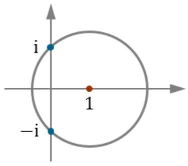
奇点：没有　　　　展开点：$z_0=2+2i$　　收敛半径：$R=\infty$

三、 已知级数在某点收敛，判断其在另一点是否收敛

例 1：

若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(z-1)^n$ 在 z=i 处收敛，则它必在 z=−i 处收敛 ……… (×)

展开点：$z_0=1$

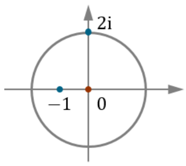


待求点在圆上

例 2：

若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 在 z=2i 处收敛，则它必在 z=−1 处收敛 …………… (√)

展开点：$z_0=0$



待求点在圆内

四、展开成泰勒级数，并写出收敛半径

公式	使用条件	收敛半径 R
$e^a=1+a+\frac{a^2}{2!}+\cdots+\frac{a^n}{n!}+\cdots$	无	$+\infty$
$\sin a=a-\frac{a^3}{3!}+\frac{a^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$	无	$+\infty$
$\cos a=1-\frac{a^2}{2!}+\frac{a^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{a^{2n}}{(2n)!}+\cdots$	无	$+\infty$
$\frac{1}{1-a}=1+a+a^2+\cdots+a^n+\cdots$	$\|a\|<1$	$\|z-z_0\|$的最大值
$\frac{1}{1+a}=1-a+a^2-\cdots+(-1)^n a^n+\cdots$	$\|a\|<1$	$\|z-z_0\|$的最大值

例 1：将 $f(z)=\frac{1}{3z-6}$ 在 $z_0=1$ 处展开成泰勒级数，并写出收敛半径。

设 $b=z-1$，则 $z=b+1$

$f(z)=\frac{1}{3(b+1)-6}=\frac{1}{3b-3}$

$f(z)=\frac{1}{3b-3}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-b}$

$\because \frac{1}{1-a}=1+a+a^2+\cdots+a^n+\cdots \quad |a|<1$

$\therefore \frac{1}{1-b}=1+b+b^2+\cdots+b^n+\cdots \quad |b|<1$

$\therefore f(z)=-\frac{1}{3}(1+b+b^2+\cdots+b^n+\cdots) \quad |b|<1$

$\therefore f(z)=-\frac{1}{3}[1+(z-1)+(z-1)^2+\cdots+(z-1)^n+\cdots] \quad |z-1|<1$

$\because |z-1|<1$

$\therefore R=1$

例 2：将 $f(z)=-\frac{1}{3+3z}$ 在 $z_0=1$ 处展开成泰勒级数，并写出收敛半径

设 $b=z-1$，则 $z=b+1$

$f(z)=-\frac{1}{3+3(b+1)}=-\frac{1}{3b+6}$

$f(z)=-\frac{1}{3b+6}=-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1+\frac{b}{2}}$

$\because \frac{1}{1+a}=1-a+a^2-\cdots+(-1)^n a^n+\cdots \quad |a|<1$

$\therefore \frac{1}{1+\frac{b}{2}}=1-\frac{b}{2}+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\cdots+(-1)^n\left(\frac{b}{2}\right)^n+\cdots \quad \left|\frac{b}{2}\right|<1$ 即 $|b|<2$

$\therefore f(z)=-\frac{1}{6}\left[1-\frac{b}{2}+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\cdots+(-1)^n\left(\frac{b}{2}\right)^n+\cdots\right] \quad |b|<2$

$\therefore f(z)=-\frac{1}{6}\left[1-\frac{z-1}{2}+\left(\frac{z-1}{2}\right)^2-\cdots+(-1)^n\left(\frac{z-1}{2}\right)^n+\cdots\right]$

$$|z-1|<2$$

$\because |z-1|<2$

$\therefore R=2$

例 3：将 $f(z)=\frac{1}{z^2-z-2}$ 在 $z_0=1$ 处展开成泰勒级数，并写出收敛半径。

设 $b=z-1$，则 $z=b+1$

$$f(z)=\frac{1}{(b+1)^2-(b+1)-2}$$
$$=\frac{1}{b^2+b-2}$$
$$=\frac{1}{(b+2)(b-1)}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{b-1}-\frac{1}{b+2}\right)$$
$$=\frac{1}{3b-3}-\frac{1}{3b+6}$$

$$f_1(z)=\frac{1}{3b-3}$$

$$f_1(z)=-\frac{1}{3}(1+b+b^2+\cdots+b^n+\cdots) \qquad |b|<1$$

$$f_2(z)=-\frac{1}{3b+6}$$

$$f_2(z)=-\frac{1}{6}\left[1-\frac{b}{2}+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\cdots+(-1)^n\left(\frac{b}{2}\right)^n+\cdots\right] \qquad |b|<2$$

$$\therefore f(z)=f_1(z)+f_2(z)=-\frac{1}{6}\left[3+\frac{3}{2}b+\frac{9}{4}b^2+\cdots+\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{2^n}b^n+\cdots\right]$$

$$|b|<1 \text{ 且 } |b|<2 \quad \Rightarrow \quad |b|<1$$

$$\therefore f(z)=-\frac{1}{6}\left[3+\frac{3}{2}(z-1)+\frac{9}{4}(z-1)^2+\cdots+\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{2^n}(z-1)^n+\cdots\right]$$

$$|z-1|<1$$

$\because |z-1|<1 \qquad \therefore R=1$

五、展开成洛朗级数

公式：

公式	使用条件
$e^a=1+a+\frac{a^2}{2!}+\cdots+\frac{a^n}{n!}+\cdots$	无
$\sin a=a-\frac{a^3}{3!}+\frac{a^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$	无
$\cos a=1-\frac{a^2}{2!}+\frac{a^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{a^{2n}}{(2n)!}+\cdots$	无
$\frac{1}{1-a}=1+a+a^2+\cdots+a^n+\cdots$	$\|a\|<1$
$\frac{1}{1+a}=1-a+a^2-\cdots+(-1)^n a^n+\cdots$	$\|a\|<1$

例 1：将 $f(z)=\frac{1}{1+z}$ 在圆环域 $2<|z-1|<+\infty$ 内展开成洛朗级数。

①设 $b=z-1$，则 $z=b+1$

$$f(z)=\frac{1}{1+(b+1)}=\frac{1}{2+b}$$

② $f(z)=\frac{1}{2+b}=\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{\frac{2}{b}+1}=\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{b}}$

$2<|z-1|<+\infty$

即 $2<|b|<+\infty \quad\Rightarrow\quad 0<\left|\frac{2}{b}\right|<1$

若要使用 $\frac{1}{1+a}=1-a+a^2+\cdots+(-1)^n a^n+\cdots$ 则需满足 $|a|<1$

即 $\left|\frac{2}{b}\right|<1$

$$\frac{1}{1+\frac{2}{b}}=1-\frac{2}{b}+\left(\frac{2}{b}\right)^2-\cdots+(-1)^n\left(\frac{2}{b}\right)^n+\cdots$$

$$\therefore f(z)=\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{b}}=\frac{1}{b}-\frac{2}{b^2}+\frac{2^2}{b^3}-\cdots+(-1)^n\frac{2^n}{b^{n+1}}+\cdots$$

③$f(z)=\frac{1}{z-1}-\frac{2}{(z-1)^2}+\frac{2^2}{(z-1)^3}-\cdots+(-1)^n\frac{2^n}{(z-1)^{n+1}}+\cdots$

复变函数与积分变换第七课

一、判断奇点类型

奇点类型		函数特点
非孤立奇点		Ln、ln 中使真数为 0 或负实数的点
孤立奇点	本性奇点	如 $\sin\frac{z+1}{z}$、$\cos\frac{z}{z-1}$、$e^{\frac{z+1}{z}}$ 等复合型中分母为 0 的点
	可去奇点	$\frac{z+1}{z}$、$\frac{\sin z}{z^2}$ 等分母为 0 的点
	极点	

例题：

①$z_0=-5$ 是 $f(z)=\mathrm{Ln}(z+1)$的什么奇点？ 非孤立奇点

②$z_0=-1$ 是 $f(z)=\ln(z+1)$的什么奇点？ 非孤立奇点

③$z_0=i$ 是 $f(z)=e^{\frac{z}{z-i}}$ 的什么奇点？ 本性奇点

④$z_0=3$ 是 $f(z)=\cos\frac{z}{z-3}$ 的什么奇点？ 本性奇点

⑤$z_0=1$ 是 $f(z)=\sin\frac{z}{z-1}$ 的什么奇点？ 本性奇点

⑥$z_0=1$ 是 $f(z)=\frac{1}{2}e^{\frac{z}{z-1}}$ 的什么奇点？ 本性奇点

⑦$z_0=0$ 是 $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ 的什么奇点？ 可去奇点

$f(0)=\frac{\sin 0}{0}=\frac{0}{0}$ 0 的 1 次方 / 0 的 1 次方 $1-1=0$

⑧$z_0=0$ 是 $f(z)=\frac{z}{\sin^2 z}$ 的什么奇点？ 一级极点

$f(0)=\frac{0}{\sin^2 0}=\frac{0}{\sin 0\cdot\sin 0}=\frac{0}{0\cdot 0}=\frac{0}{0^2}$ 0 的 1 次方 / 0 的 2 次方 $2-1=1$

⑨ $z_0=-2i$ 是 $f(z)=\frac{z}{(z+2i)^2}$ 的什么奇点？ 二级极点

$f(-2i)=\frac{-2i}{0^2}$ 0 的 0 次方 0 的 2 次方 $2-0=2$

⑩ $z_0=0$ 是 $f(z)=\frac{1-e^{2z}}{z^4}$ 的什么奇点？ 三级极点

$f(0)=\frac{1-e^0}{0^4}=\frac{0}{0^4}$ 0 的 1 次方 0 的 4 次方 $4-1=3$

例 1：$z_0=0$ 是 $f(z)=\frac{1-\cos z}{z^4}$ 的什么奇点？

$f(z)=\frac{1-\cos z}{z^4}=\frac{2\sin^2\frac{\pi}{2}}{z^4}$

将 $z=0$ 代入 $f(z)$

$f(0)=\frac{2\left(\sin\frac{0}{2}\right)^2}{0^4}=\frac{2\times0^2}{0^4}$ (0的2次方) (0的4次方) $4-2=2$ 二级极点

例 2：$z_0=\pi$ 是 $f(z)=\frac{\sin z}{1+\cos z}$ 的什么奇点？

$f(z)=\frac{\sin z}{1+\cos z}=\frac{\sin z}{2\cos^2\frac{z}{2}}$

将 $z=\pi$ 代入 $f(z)$

$f(\pi)=\frac{0}{2\times0^2}$ (0的1次方) (0的2次方) $2-1=1$ 一级极点

二、求孤立奇点处的留数

例题：

① 求 $f(z)=e^{\frac{z}{z-i}}$ 在 $z_0=i$ 处的留数。

$z_0=i$ 是本性奇点

② 求 $f(z)=\cos\frac{z}{z-3}$ 在 $z_0=3$ 处的留数。

$z_0=3$ 是本性奇点

③ 求 $f(z)=\sin\frac{z}{z-1}$ 在 $z_0=1$ 处的留数。

$z_0=1$ 是本性奇点

④ 求 $f(z)=\frac{1}{2}e^{\frac{z}{z-1}}$ 在 $z_0=1$ 处的留数。

$z_0=1$ 是本性奇点

⑤ 求 $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ 在 $z_0=0$ 处的留数。

$z_0=0$ 是可去奇点

⑥ 求 $f(z)=\frac{z}{\sin^2 z}$ 在 $z_0=0$ 处的留数。

$z_0=0$ 是一级极点

⑦ 求 $f(z)=\frac{z}{(z+2i)^2}$ 在 $z_0=-2i$ 处的留数。

$z_0=-2i$ 是二级极点

⑧ 求 $f(z)=\frac{1-e^{2z}}{z^4}$ 在 $z_0=0$ 处的留数。

$z_0=0$ 是三级极点

第⑤题：

留数为 0，即 $\mathrm{Res}\left(\frac{\sin z}{z}，0\right)=0$，即 $C_{-1}=0$

第⑥题：

$z_0=0 \qquad f(z)=\frac{z}{\sin^2 z}$

$C_{-1}=\lim\limits_{z\to 0}(z-0)\frac{z}{\sin^2 z}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{z^2}{\sin^2 z}=1$

第⑦题：

$z_0=-2i \qquad f(z)=\frac{z}{(z+2i)^2}$

$C_{-1}=\frac{1}{(n-1)!}\lim\limits_{z\to -2i}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z+2i)^n\frac{z}{(z+2i)^2}\right]\ (n\geq 2)$

令 n=2，则 $C_{-1}=\frac{1}{(2-1)!}\lim\limits_{z\to -2i}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}[z]$

$=\frac{1}{1!}\lim\limits_{z\to -2i}\frac{d(z)}{dz}$

$=\lim\limits_{z\to -2i}(1)$

$=1$

第⑧题：

$z_0=0 \qquad f(z)=\frac{1-e^{2z}}{z^4}$

$C_{-1}=\frac{1}{(n-1)!}\lim\limits_{z\to 0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[z^n\frac{1-e^{2z}}{z^4}\right]\ (n\geq 3)$

令 n=4，则 $C_{-1}=\frac{1}{(4-1)!}\lim\limits_{z\to 0}\frac{d^{4-1}}{dz^{4-1}}(1-e^{2z})=\frac{1}{3!}\lim\limits_{z\to 0}\frac{d^3}{dz^3}(1-e^{2z})$

$=\frac{1}{3!}\lim\limits_{z\to 0}(1-e^{2z})'''=\frac{1}{3\times 2}\lim\limits_{z\to 0}[(1-e^{2z})']''$

$=\frac{1}{6}\lim\limits_{z\to 0}(-2e^{2z})''=\frac{1}{6}\lim\limits_{z\to 0}(-4e^{2z})'=\frac{1}{6}\lim\limits_{z\to 0}(-8e^{2z})$

$=\frac{1}{6}\times(-8)=-\frac{4}{3}$

公式	使用条件	收敛半径 R
$e^a=1+a+\frac{a^2}{2!}+\cdots+\frac{a^n}{n!}+\cdots$	无	$+\infty$
$\sin a=a-\frac{a^3}{3!}+\frac{a^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$	无	$+\infty$
$\cos a=1-\frac{a^2}{2!}+\frac{a^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{a^{2n}}{(2n)!}+\cdots$	无	$+\infty$
$\frac{1}{1-a}=1+a+a^2+\cdots+a^n+\cdots$	$\lvert a\rvert<1$	$\lvert z-z_0\rvert$的最大值
$\frac{1}{1+a}=1-a+a^2-\cdots+(-1)^n a^n+\cdots$	$\lvert a\rvert<1$	$\lvert z-z_0\rvert$的最大值

例 1：求 $f(z)=\frac{1}{2}e^{\frac{z}{z-1}}$ 在 $z_0=1$ 处的留数。

设 $b=z-1$，则 $z=b+1$

则 $f(z)=\frac{1}{2}e^{\frac{z}{z-1}}=\frac{1}{2}e^{\frac{b+1}{b+1-1}}=\frac{1}{2}e^{\frac{b+1}{b}}=\frac{1}{2}e^{1+\frac{1}{b}}=\frac{1}{2}e\cdot e^{\frac{1}{b}}$

$\because e^a=1+a+\frac{a^2}{2!}+\cdots+\frac{a^n}{n!}+\cdots$

$\therefore e^{\frac{1}{b}}=1+b^{-1}+\frac{1}{2!}b^{-2}+\cdots+\frac{1}{n!}b^{-n}+\cdots$

$\therefore f(z)=\frac{1}{2}e\cdot e^{\frac{1}{b}}=\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}e\cdot b^{-1}+\frac{1}{2}e\cdot\frac{1}{2!}\cdot b^{-2}+\cdots+\frac{1}{2}e\frac{1}{n!}b^{-n}+\cdots$

$f(z)=\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}e\cdot(z-1)^{-1}+\frac{1}{2}e\cdot\frac{1}{2!}\cdot(z-1)^{-2}+\cdots+\frac{1}{2}e\cdot\frac{1}{n!}\cdot(z-1)^{-n}$

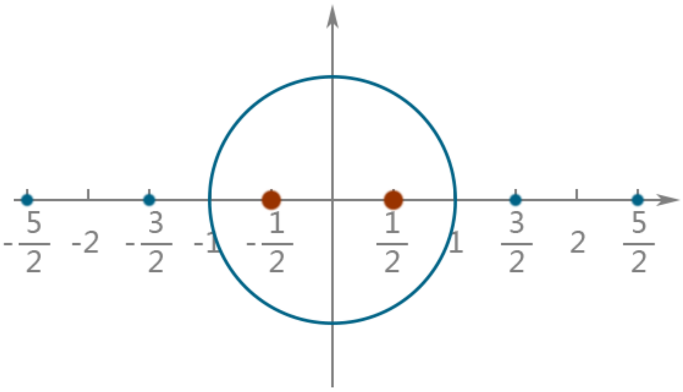
$R=+\infty$

$\because (z-1)^{-1}$ 前系数为 $\frac{e}{2}$

$\therefore C_{-1}=\frac{e}{2}$

三、用留数定理计算积分

例1：用留数定理计算 $\oint\limits_{|z|=1}\frac{1}{\cos\pi z}dz$



令 $\cos\pi z=0$ 　则 $z=\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2},\ \pm\frac{5}{2}\cdots$

$z_0=-\frac{1}{2}$ 或 $z_0=\frac{1}{2}$

将 $z_0=-\frac{1}{2}$ 代入 $f(z)=\frac{1}{\cos\pi z}$

则 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{0}$ $\begin{matrix}(0的0次方)\\(0的1次方)\end{matrix}$ 　$1-0=1$ 　一级极点

将 $z_0=\frac{1}{2}$ 代入 $f(z)=\frac{1}{\cos\pi z}$

则 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{0}$ $\begin{matrix}(0的0次方)\\(0的1次方)\end{matrix}$ 　$1-0=1$ 　一级极点

$z_0=-\frac{1}{2}$ 为一级极点 　$z_0=\frac{1}{2}$ 为一级极点

将 $z_0=-\frac{1}{2}$ 与 $f(z)=\frac{1}{\cos\pi z}$ 代入 $C_{-1}=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$

$$
\begin{aligned}
C_{-1}&=\lim_{z\to-\frac{1}{2}}\left(z+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\cos\pi z}=\lim_{z\to-\frac{1}{2}}\frac{\left(z+\frac{1}{2}\right)'}{(\cos\pi z)'}\\
&=\lim_{z\to-\frac{1}{2}}\frac{1}{-\pi\sin\pi z}\\
&=\frac{1}{-\pi\sin\left[\pi\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right]}\\
&=\frac{1}{\pi}
\end{aligned}
$$

将 $z_0=\frac{1}{2}$ 与 $f(z)=\frac{1}{\cos\pi z}$ 代入 $C_{-1}=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$

$$
\begin{aligned}
C_{-1}&=\lim_{z\to\frac{1}{2}}\left(z-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\cos\pi z}=\lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{\left(z-\frac{1}{2}\right)'}{(\cos\pi z)'}\\
&=\lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{1}{-\pi\sin\pi z}\\
&=\frac{1}{-\pi\sin\left(\pi\cdot\frac{1}{2}\right)}\\
&=-\frac{1}{\pi}
\end{aligned}
$$

$$\oint_{|z|=1}\frac{1}{\cos\pi z}\,dz=2\pi i\left[\frac{1}{\pi}+\left(-\frac{1}{\pi}\right)\right]=0$$

复变函数与积分变换第八课

一、求卷积 f(t)*g(t)

例 1：已知 f(t)=u(t)，$g(t)=\begin{cases}\sin t，0\le t\le\frac{\pi}{2}\\0，\quad 其他\end{cases}$，求 f(t)*g(t)

$f(t)=\begin{cases}0，t<0\\1，t>0\end{cases}$

$f(\tau)=\begin{cases}0，\tau<0\\1，\tau>0\end{cases}$，$g(\tau)=\begin{cases}\sin\tau，0\le\tau\le\frac{\pi}{2}\\0，\quad 其他\end{cases}$

$f(t-\tau)=\begin{cases}0，t-\tau<0\\1，t-\tau>0\end{cases}\Rightarrow f(t-\tau)=\begin{cases}1，\tau<t\\0，\tau>t\end{cases}$

t<0 时，$f(t-\tau)\cdot g(\tau)=0$

$t>\frac{\pi}{2}$ 时，$f(t-\tau)\cdot g(\tau)=\begin{cases}\sin\tau，0\le\tau\le\frac{\pi}{2}\\0，\quad 其他\end{cases}$

$0\le t\le\frac{\pi}{2}$ 时，$f(t-\tau)\cdot g(\tau)=\begin{cases}\sin\tau，0\le\tau<t\\0，\quad 其他\end{cases}$

t<0 时，$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-\tau)\cdot g(\tau)d\tau=0$

$t>\frac{\pi}{2}$ 时，$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-\tau)\cdot g(\tau)d\tau=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\tau d\tau=(-\cos\tau)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$=\left(-\cos\frac{\pi}{2}\right)-(-\cos0)=0-(-1)=1$$

$0\le t\le\frac{\pi}{2}$ 时，$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-\tau)\cdot g(\tau)d\tau=\int_0^t\sin\tau d\tau=(-\cos\tau)\Big|_0^t$

$$=(-\cos t)-(-\cos0)$$

$$=-\cos t-(-1)=1-\cos t$$

综上，$f(t)*g(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ 1-\cos t, & 0\le t\le \frac{\pi}{2} \\ 1, & t>\frac{\pi}{2} \end{cases}$

例 2：已知 $f(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t}, & t\ge 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$，$g(t)=\begin{cases} e^{-\beta t}, & t\ge 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$，

其中 $\alpha>0$、$\beta>0$ 且 $\alpha\neq\beta$，求 $f(t)*g(t)$

$f(\tau)=\begin{cases} e^{-\alpha\tau}, & \tau\ge 0 \\ 0, & \tau<0 \end{cases}$，$g(\tau)=\begin{cases} e^{-\beta\tau}, & \tau\ge 0 \\ 0, & \tau<0 \end{cases}$

$f(t-\tau)=\begin{cases} e^{-\alpha(t-\tau)}, & t-\tau\ge 0 \\ 0, & t-\tau<0 \end{cases} \Rightarrow f(t-\tau)=\begin{cases} e^{-\alpha(t-\tau)}, & \tau\le t \\ 0, & \tau>t \end{cases}$

$t\ge 0$ 时 $f(t-\tau)\cdot g(\tau)=\begin{cases} e^{-\alpha(t-\tau)}\cdot e^{-\beta\tau}, & 0\le\tau\le t \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$t<0$ 时 $f(t-\tau)\cdot g(\tau)=0$

$t<0$ 时 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)\cdot g(\tau)d\tau=0$

$$\begin{aligned} t\ge 0 \text{ 时 } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)\cdot g(\tau)d\tau &= \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\cdot e^{-\beta\tau}\,d\tau \\ &= e^{-\alpha t}\int_0^t e^{(\alpha-\beta)\tau}\,d\tau \\ &= e^{-\alpha t}\cdot \left.\frac{e^{(\alpha-\beta)\tau}}{\alpha-\beta}\right|_0^t \\ &= e^{-\alpha t}\left[\frac{e^{(\alpha-\beta)t}}{\alpha-\beta}-\frac{1}{\alpha-\beta}\right] \\ &= \frac{e^{-\alpha t}\left[e^{(\alpha-\beta)t}-1\right]}{\alpha-\beta} \\ &= \frac{e^{-\beta t}-e^{-\alpha t}}{\alpha-\beta} \end{aligned}$$

$$\therefore f(t)*g(t)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\beta t}-e^{-\alpha t}}{\alpha-\beta}, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

二、求 $f(t)=\begin{cases}\cdots\\ \cdots\end{cases}$ 的傅里叶变换 $F(\omega)$

例 1：求 $f(t)=\begin{cases}4, & -2\leq t\leq 2\\ 0, & 其他\end{cases}$ 的傅里叶变换。

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-2}^{2}4e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{4}{-j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{t=-2}^{t=2}$$

$$=\frac{8\sin 2\omega}{\omega}$$

例 2：求 $f(t)=\begin{cases}\sin t, & -\pi\leq t\leq \pi\\ 0, & 其他\end{cases}$ 的傅里叶变换。

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\sin t\,e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{(j\sin\omega t-\cos\omega t)(j\omega\sin t+\cos t)}{1-\omega^2}\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi}$$

$$=\frac{-2j\sin\omega\pi}{1-\omega^2}$$

f(t)	F(ω)
$\begin{cases} 0, & t<0 \\ Ae^{-\alpha t}, & t\ge 0 \end{cases}$ (其中 A>0、α>0)	$\frac{A}{\alpha+j\omega}$
$\begin{cases} Ae^{\alpha t}, & t<0 \\ Ae^{-\alpha t}, & t\ge 0 \end{cases}$ (其中 A>0、α>0)	$\frac{2A\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$
$\begin{cases} A, & -\frac{\alpha}{2}\le t\le \frac{\alpha}{2} \\ 0, & \text{其 他} \end{cases}$ (其中 A>0、α>0)	$\frac{2A}{\omega}\sin\frac{\alpha\omega}{2}$

例 3：求矩形脉冲函数 $f(t)=\begin{cases} 5, & |t|\le 1 \\ 0, & |t|>1 \end{cases}$ 的傅里叶变换。

$$\begin{cases} A=5 \\ \frac{\alpha}{2}=1 \end{cases} \Rightarrow \frac{2A}{\omega}\sin\frac{\alpha\omega}{2}=\frac{10}{\omega}\sin\omega$$

三、求 $f(t)=\begin{cases} \cdots \\ \cdots \end{cases}$ 的傅里叶积分表达式

例 1：求 $f(t)=\begin{cases} 4, & -2\le t\le 2 \\ 0, & \text{其 他} \end{cases}$ 的傅里叶变换及傅里叶积分表达式。

$$F(\omega)=\frac{8\sin 2\omega}{\omega}$$

$$\begin{aligned} f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{8\sin 2\omega}{\omega}e^{j\omega t}d\omega \\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{8\sin 2\omega}{\omega}\cos\omega t d\omega+\frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{8\sin 2\omega}{\omega}\sin\omega t d\omega \\ &=\frac{2}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{8\sin 2\omega}{\omega}\cos\omega t d\omega \\ &=\frac{8}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin 2\omega}{\omega}\cos\omega t d\omega \end{aligned}$$

$$=\begin{cases}4, & -2<t<2\\ 2, & t=\pm 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

例 2：求 $f(t)=\begin{cases}\sin t, & -\pi \le t \le \pi\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 的傅里叶变换及傅里叶积分表达式。

$$F(\omega)=\frac{-2j\sin\omega\pi}{1-\omega^2}$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-2j\sin\omega\pi}{1-\omega^2}e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-2j\sin\omega\pi}{1-\omega^2}\cos\omega t d\omega+\frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-2j\sin\omega\pi}{1-\omega^2}\sin\omega t d\omega$$

$$=\frac{2j}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{-2j\sin\omega\pi}{1-\omega^2}\sin\omega t d\omega$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega\pi}{1-\omega^2}\sin\omega t d\omega$$

$$=\begin{cases}\sin t, & -\pi<t<\pi\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

四、求 f(t) 的傅里叶变换 F(ω)

f(t)	F(ω)
$\cos\omega t$	$\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$
$\sin\omega t$	$j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$
u(t)、ε(t)、H(t)、1(t)	$\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$
$u(t)e^{-\beta t}$ （其中 $\beta>0$）	$\frac{1}{\beta+j\omega}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$\delta(t)$	1
$\delta^{(n)}(t)$	$(j\omega)^n$
t^n	$2\pi j^n\delta^{(n)}(\omega)$

例 1：求 $f(t)=\delta(t+a)+\delta(t-a)+\delta(t+\frac{a}{3})$ 的傅里叶变换。

$$\mathcal{F}[f(t)]=\mathcal{F}\left[\delta(t+a)+\delta(t-a)+\delta(t+\frac{a}{3})\right]$$

$$=\mathcal{F}[\delta(t+a)]+\mathcal{F}[\delta(t-a)]+\mathcal{F}\left[\delta(t+\frac{a}{3})\right]$$

$$\mathcal{F}[\delta(t+a)]=e^{j\omega a}\cdot\mathcal{F}[\delta(t)]=e^{j\omega a}\cdot 1=e^{j\omega a}$$

$$\mathcal{F}[\delta(t-a)]=e^{-j\omega a}\cdot\mathcal{F}[\delta(t)]=e^{-j\omega a}\cdot 1=e^{-j\omega a}$$

$$\mathcal{F}\left[\delta(t+\frac{a}{3})\right]=e^{\frac{j\omega a}{3}}\cdot\mathcal{F}[\delta(t)]=e^{\frac{j\omega a}{3}}\cdot 1=e^{\frac{j\omega a}{3}}$$

$$\therefore\mathcal{F}[f(t)]=e^{j\omega a}+e^{-j\omega a}+e^{\frac{j\omega a}{3}}$$

例 2：求 $f(t)=\sin t\cdot u(t)$ 的傅里叶变换。

$$\mathcal{F}[\sin t\cdot u(t)]=\frac{1}{2j}\mathcal{F}\left[u(t)\cdot e^{jt}\right]-\frac{1}{2j}\mathcal{F}\left[u(t)\cdot e^{-jt}\right]$$

$$\mathcal{F}\left[f(t)\cdot e^{jt}\right]=F(\omega-1)\text{ ，}\mathcal{F}\left[f(t)\cdot e^{-jt}\right]=F(\omega+1)$$

$$\mathcal{F}\left[u(t)\cdot e^{jt}\right]=F_{u(t)}(\omega-1)\text{ ，}\mathcal{F}\left[u(t)\cdot e^{-jt}\right]=F_{u(t)}(\omega+1)$$

而 $F_{u(t)}(\omega)=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$

$\therefore F_{u(t)}(\omega-1)=\frac{1}{j(\omega-1)}+\pi\delta(\omega-1)$

$F_{u(t)}(\omega+1)=\frac{1}{j(\omega+1)}+\pi\delta(\omega+1)$

$\therefore \mathcal{F}\,[\sin t\cdot u(t)]$

$=\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{j(\omega-1)}+\pi\delta(\omega-1)\right]-\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{j(\omega+1)}+\pi\delta(\omega+1)\right]$

$=\frac{1}{2-2\omega}+\frac{\pi}{2j}\delta(\omega-1)+\frac{1}{2+2\omega}-\frac{\pi}{2j}\delta(\omega+1)$

$=\frac{1}{1-\omega^2}+\frac{\pi}{2j}\,[\delta(\omega-1)-\delta(\omega+1)]$

例 3：求 f(t)=u(t)·t 的傅里叶变换。

$\mathcal{F}\,[u(t)\cdot t]=j\cdot\{\mathcal{F}[u(t)]\}'$

$=j\cdot\left[\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right]'$

$=j\cdot\left[\frac{1}{j}\cdot\left(-\frac{1}{\omega^2}\right)+\pi\delta'(\omega)\right]$

$=-\frac{1}{\omega^2}+j\pi\delta'(\omega)$

复变函数与积分变换第九课

一、求 f(t)=$\begin{cases}\cdots\\\cdots\end{cases}$ 的拉氏变换 F(s)

例 1：求函数 f(t)=$\begin{cases}\mathbf{1,\ 0\le t\le 3}\\\mathbf{0,\quad t>3}\end{cases}$ 的拉氏变换。

$$F(s)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt$$

$$=\int_0^3 1\cdot e^{-st}dt$$

$$=\int_0^3 e^{-st}dt$$

$$=\frac{e^{-st}}{-s}\Big|_{t=0}^{t=3}$$

$$=\frac{e^{-3s}}{-s}-\frac{e^{0}}{-s}$$

$$=-\frac{e^{-3s}-1}{s}$$

二、求 f(t)=$\begin{cases}\cdots\\\cdots\end{cases}$ 且 f(t+T_0)=f(t) 的拉氏变换 F(s)

例 1：求函数 f(t)=$\begin{cases}\mathbf{1,\ 0\le t<1}\\\mathbf{-1,\ 1\le t<2}\end{cases}$，f(t+2)=f(t) 的拉氏变换。

$\because f(t+2)=f(t)$，$\therefore T_0=2$

$$\therefore F_1(s)=\int_0^{T_0}f(t)e^{-st}dt$$

$$=\int_0^2 f(t)e^{-st}dt$$

$$=\int_0^1 1\cdot e^{-st}dt+\int_1^2(-1)e^{-st}dt$$

$$=\frac{e^{-st}}{-s}\Big|_{t=0}^{t=1}+\frac{e^{-st}}{s}\Big|_{t=1}^{t=2}$$

$$=\frac{e^{-s}}{-s}-\frac{e^{0}}{-s}+\frac{e^{-2s}}{s}-\frac{e^{-s}}{s}$$

$$=\frac{1-e^{-s}}{s}+\frac{e^{-2s}-e^{-s}}{s}=\frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s}=\frac{1-2e^{-s}+(e^{-s})^2}{s}=\frac{(1-e^{-s})^2}{s}$$

$$\therefore F(s)=\frac{F_1(s)}{1-e^{-sT_0}}=\frac{\frac{(1-e^{-s})^2}{s}}{1-e^{-2s}}=\frac{\frac{(1-e^{-s})^2}{s}}{1-(e^{-s})^2}=\frac{\frac{(1-e^{-s})^2}{s}}{(1-e^{-s})(1+e^{-s})}=\frac{1-e^{-s}}{s(1+e^{-s})}$$

三、求 f(t) 的拉氏变换 F(s)

f(t)	F(s)
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$ (其中 $t_0>0$)	e^{-st_0}
$\delta(t+t_0)$ (其中 $t_0>0$)	0
$\delta'(t)$	s
1	$\frac{1}{s}$
$u(t)$、$\varepsilon(t)$、$H(t)$、$1(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{\pm at}$	$\frac{1}{s\mp a}$
$\cos\omega_0 t$	$\frac{s}{s^2+{\omega_0}^2}$
$\sin\omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{s^2+{\omega_0}^2}$
t^m	$\frac{m!}{s^{m+1}}$

例 1：求 $f(t)=te^{-t}$ 的拉氏变换。

$$\because \mathcal{L}\,[(-1)^n t^n f(t)]=F^{(n)}(s)$$

$$\therefore \mathcal{L}\,[-tf(t)]=F'(s)$$

$$\therefore \mathcal{L}\,[-te^{-t}]=\{L\,[e^{-t}]\}'$$

$$\therefore \mathcal{L}\,[te^{-t}]=-\{L\,[e^{-t}]\}'$$

$$\because \mathcal{L}\,[e^{\pm at}]=\frac{1}{s\mp a},$$

$\therefore \mathcal{L}\,[e^{-t}]=\frac{1}{s+1}$，

$\therefore \mathcal{L}\,[te^{-t}]=-\{L\,[e^{-t}]\}'$

$$=-\left(\frac{1}{s+1}\right)'$$

$$=-\left[-\frac{1}{(s+1)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{(s+1)^2}$$

例 2：求 $\int_0^{+\infty}\text{sint}e^{-3t}dt$

$\because \int_0^{+\infty} f(t)e^{-at}dt=F(a)$

$\therefore \int_0^{+\infty} \text{sint}e^{-3t}dt=F_{\sin t}(3)$

$\because \mathcal{L}[\text{sint}]=\frac{1}{s^2+1^2}=\frac{1}{s^2+1}$，即 $F_{\sin t}\,(s)=\frac{1}{s^2+1}$，

$\therefore \int_0^{+\infty} \text{sint}e^{-3t}dt=F_{\sin t}\,(3)=\frac{1}{3^2+1}=\frac{1}{10}$

四、求 F(s) 的拉氏逆变换 f(t)

例 1：求 $F(s)=\frac{s^3+6s^2+15s+11}{s^2+5s+6}$ 的拉氏逆变换 f(t)。

$\because s(s^2+5s+6)=s^3+5s^2+6s$，

$\therefore F(s)=\frac{s^3+6s^2+15s+11}{s^2+5s+6}=\frac{s^3+5s^2+6s+s^2+9s+11}{s^2+5s+6}$

$$=s+\frac{s^2+9s+11}{s^2+5s+6}$$

$$=s+\frac{s^2+5s+6+4s+5}{s^2+5s+6}$$

$$=s+1+\frac{4s+5}{s^2+5s+6}$$

$\because s^2+5s+6=(s+2)(s+3)$，

$\therefore F(s)=s+1+\frac{4s+5}{s^2+5s+6}=s+1+\frac{4s+5}{(s+2)(s+3)}$

设 $\frac{a}{s+2}+\frac{b}{s+3}=\frac{4s+5}{(s+2)(s+3)}$

则 $\frac{a(s+3)+b(s+2)}{(s+2)(s+3)}=\frac{4s+5}{(s+2)(s+3)}$

$\frac{(a+b)s+(3a+2b)}{(s+2)(s+3)}=\frac{4s+5}{(s+2)(s+3)}$

$\therefore\begin{cases} a+b=4 \\ 3a+2b=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=7 \end{cases}$

$\therefore F(s)=s+1-\frac{3}{s+2}+\frac{7}{s+3}$

$\because s \Longrightarrow \delta'(t)$

$1 \Longrightarrow \delta(t)$

$\frac{1}{s\mp a} \Longrightarrow e^{\pm at}$

即 $\frac{1}{s+2} \Longrightarrow e^{-2t}$，$\frac{1}{s+3} \Longrightarrow e^{-3t}$

$\therefore f(t)=\delta'(t)+\delta(t)-3e^{-2t}+7e^{-3t}$

例 2：求 $\frac{1}{(s+1)^4}+\frac{1}{s+1}-\frac{1}{(s+1)^2}$ 的拉氏逆变换 f(t)。

$\because \frac{m!}{s^{m+1}} \Longrightarrow t^m$

$\therefore \frac{3!}{s^{3+1}} \Longrightarrow t^3$，$\frac{1!}{s^{1+1}} \Longrightarrow t^1$

即 $\frac{6}{s^4} \Longrightarrow t^3$，$\frac{1}{s^2} \Longrightarrow t$

$\because F(s\mp a) \Longrightarrow e^{\pm at}f(t)$

$\therefore F(s+1) \Longrightarrow e^{-t}f(t)$

$\therefore \frac{6}{(s+1)^4} \Longrightarrow e^{-t}\cdot t^3$，$\frac{1}{(s+1)^2} \Longrightarrow e^{-t}\cdot t$

$\therefore \frac{1}{(s+1)^4} \Longrightarrow \frac{e^{-t} \cdot t^3}{6}$

$\because \frac{1}{s \mp a} \Longrightarrow e^{\pm at}$

$\therefore \frac{1}{s+1} \Longrightarrow e^{-t}$

$\therefore f(t) = \frac{e^{-t} \cdot t^3}{6} + e^{-t} - e^{-t} \cdot t$

$F(s) \Longrightarrow f(t)$ 的标准写法: $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$

五、用拉氏变换解微分方程

例 1：求微分方程 $y'' + 2y' + y = te^{-t}$满足 $y(0) = 1$ 和$y'(0) = -2$ 的解

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2[sY(s) - y(0)] + Y(s) = \mathcal{L}[te^{-t}]$$

$$(s^2 + 2s + 1)Y(s) - (s+2)y(0) - y'(0) = \mathcal{L}[te^{-t}]$$

$$(s^2 + 2s + 1)Y(s) - (s+2) \cdot 1 - (-2) = \mathcal{L}[te^{-t}]$$

$$(s^2 + 2s + 1)Y(s) - s = \mathcal{L}[te^{-t}]$$

$$(s^2 + 2s + 1)Y(s) - s = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{(s+1)^2} + s}{s^2 + 2s + 1} = \frac{\frac{1}{(s+1)^2} + s}{(s+1)^2} = \frac{1}{(s+1)^4} + \frac{s}{(s+1)^2} = \frac{1}{(s+1)^4} + \frac{s+1-1}{(s+1)^2}$$

$$= \frac{1}{(s+1)^4} + \frac{s+1}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)^2} = \frac{1}{(s+1)^4} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^4} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}\right]$$

$$= \frac{e^{-t} \cdot t^3}{6} + e^{-t} - e^{-t} \cdot t$$

六、用拉氏变换求 $\int_0^t f_1(t-\tau)y(\tau)d\tau=f_2(t)$ 的解

F(s)	f(t)
1	$\delta(t)$
$\frac{1}{s\mp a}$	$e^{\pm at}$
$\frac{m!}{s^{m+1}}$	t^m

例 1：求 $\int_0^t \sin(t-\tau)\cdot y(\tau)d\tau=t\cdot e^{-t}$ 的解。

$\sin t * y(t)=t\cdot e^{-t}$

$\mathcal{L}[\sin t]\cdot Y(s)=\mathcal{L}[t\cdot e^{-t}]$

$\frac{1}{s^2+1}\cdot Y(s)=\frac{1}{(s+1)^2}$

$$Y(s)=\frac{\frac{1}{(s+1)^2}}{\frac{1}{s^2+1}}=\frac{s^2+1}{(s+1)^2}=\frac{s^2+2s+1-2s-2+2}{(s+1)^2}=\frac{s^2+2s+1}{(s+1)^2}-\frac{2s+2}{(s+1)^2}+\frac{2}{(s+1)^2}$$

$$=\frac{(s+1)^2}{(s+1)^2}-\frac{2(s+1)}{(s+1)^2}+\frac{2}{(s+1)^2}=1-\frac{2}{s+1}+\frac{2}{(s+1)^2}$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[1-\frac{2}{s+1}+\frac{2}{(s+1)^2}\right]$$

$$=\delta(t)-2e^{-t}+2e^{-t}t$$