**1.1.** *Опр. инт. суммы Римана и инт–а Римана.*
$[a,b] \in \mathbb{R}, a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b, , P = P_{[a,b]} = \{x_k\}_{k=0}^n$ – разбение $[a,b]$
$\Delta_k = [x_{k-1}, x_k], \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, (k = 1,\ldots,n). d = d(P) = max_{1\le k\le n}\Delta x_k$–диаметр
разб–я $P$. $\xi_P = \{\xi_k\}_{k=1}^n, \xi_k \in \Delta_k, (k=1,\ldots,n)$–сист. промеж. точек, соотв. разб–ю $P$. |
Пусть $f$ опр. на $[a,b]$. Сумма $\sigma(P) = \sigma(P,\xi_P) = \sigma(f,P,\xi_P) = \Sigma_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$ наз. инт. суммой
Римана ф–ции $f$. | $I = \lim_{d\to 0}\sigma(P)$, если $\forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall(P,\xi_P)\ (d(P) < \delta \Rightarrow |\sigma(P,\xi_P) - I| < \epsilon)$.
Число $I$ наз. пределом инт. сумм Римана. $f$в этом случ. наз. инт. по Риману на $[a,b]$, а $I$–инт.
Римана и обозн. $\int_a^b f(x)dx = I$
**1.2.** $T$. (Необход. условие интегрируемости ф–ции) : $f$–инт. на$[a,b] \Rightarrow f$ огр. на$[a,b]$

**2.1.** *Верхние и нижние суммы Дарбу, их свойства.*
Пусть $f$ опр. и огр. на$[a,b], P = \{x_k\}_{k=0}^n, M_k = sup_{x\in\Delta k}f(x), m_k = inf_{x\in\Delta k}f(x), 1 \le k \le n,$
$S(P) = \Sigma_{k=1}^n M_k\Delta x_k$ – верх. сум.Дарбу, $s(P) = \Sigma_{k=1}^n m_k\Delta x_k$ – ниж. сум.Дарбу | $\forall\xi_P$,
$\forall k : 1 \le k \le n,\ m_k \le f(\xi_k) \le M_k$.Св–ва : 1)$\forall P\ \forall\xi_P\ s(P) \le \sigma(P,\xi_P) \le S(P)$.2)Если $P \subset P_1$,
то $s(P) \le s(P_1), S(P) \ge S(P_1)$.3)$\forall P_1\ \forall P_2\ s(p_1) \le S(P_2)$. След–е : $\{s(P)\}$огр. сверху,
$\{S(P)\}$огр. снизу.4)$\forall P\ \forall\epsilon > 0\ \exists\xi_P,\ 0 \le S(P) - \sigma(P,\xi_P) < \epsilon\ (0 \le \sigma(P,\xi_P) - s(P) < \epsilon)$
След–е : $S(P) = sup_{\xi_p}\sigma(P,\xi_p), s(P) = inf_{\xi_p}\sigma(P,\xi_P)$
**2.2.** *Верхний и нижний интегралы.*
Верх. инт.Дарбу : $\overline{I} := inf_P S(P)$, ниж. инт. : $\underline{I} := sup_P s(P)$. $\underline{I} \le \overline{I}$.Лемм. : Пусть $P = P_{[a,b]}$,
$d = d(P)$–диам. разб–я$P$, $P*$ получено из $P$, добавл–ем $L$ точек, $M = sup_{x\in[a,b]}f(x), m =$
$= inf_{x\in[a,b]}f(x) \Rightarrow S(P) - S(P*) \le (M-m)Ld, s(P*) - s(P) \le (M-m)Ld.$
**2.3.** *Основная лемма Дарбу.*
$\overline{I} = \lim_{d(p)\to 0}\underline{S}(P), \underline{I} = \lim_{d(P)\to 0}s(P), S(P) = s(P) = \sigma(P) = c(b-a) = \underline{I} = \overline{I} = I.$

**3.** *Критерий интегрируемости*
Пусть $f$ опр. и огр. на$[a,b]$. Тогда след. усл–я эквивалентны :
1)$f$ инт. на$[a,b]$, 2)$\forall\epsilon > 0\ \exists P\ s(P) - S(P) < \epsilon$, 3)$\underline{I} = \overline{I} = \int_a^b f(x)dx$.

**4.1.** *Теорема об интегрируемости непрерывной функции*
$f$ непр. на$[a,b] \Rightarrow f$ инт. на$[a,b]$.
**4.2.** *Теорема об интегрируемости монотонной функции*
$f$ монот. на$[a,b] \Rightarrow f$ инт. на$[a,b]$.

**5.1.** *Св–ва инт. Рим. : линейн–сть инт–а, аддит–сть инт. относит. пред. инт–я, монотон–сть инт.*
$T$. (Лин–сть инт.) : $f,g \in \Re[a,b], c \in \mathbb{R} \Rightarrow f+g, cf \in \Re[a,b],\ \int_a^b(f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
и $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$. | $T$. (Адд–сть инт.) : Пусть $a < c < b$, тогда $f \in \Re[a,b] \Leftrightarrow f \in \Re[a,c]$
и $f \in \Re[c,b], \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. | $T$. (Мон–сть инт.) : $f,g \in \Re[a,b], \forall x \in [a,b]\ f(x) \le g(x)$
$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$. | След–е 1 : $f \in \Re[a,b], \forall x\ f(x) \ge 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ge 0$.След–е 2 : $f \in \Re[a,b] \Rightarrow$
$\Rightarrow |\int_a^b f(x)dx| \le \int_a^b |f(x)|dx \le sup_{x\in[a,b]}|f(x)|(b-a)$
**5.2.** $T$. (Первая $T$. о среднем для интеграла.) : $f,g \in \Re[a,b], g(x) \ge 0\ (g(x) \le 0)\ \forall x \in [a,b],$
$M = sup_{x\in[a,b]}f(x), m = inf_{x\in[a,b]}f(x) \Rightarrow \exists\mu \in [m,M] : \int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx.$
**5.3.** $T$. (Операции над интегрируемыми функциями) :
$f,g \in \Re[a,b] \Rightarrow |f|, f\cdot g \in \Re[a,b], \frac{f}{g} \in \Re[a,b]$ при усл. $\exists c > 0\ \forall x \in [a,b]\ |g(x)| \ge c.$
Замеч–е : Из инт–сти $|f|$ не следует инт–сть $f$.

**6.** *Непрерывность интеграла по верхнему пределу интегрирования.*
$f \in \Re[a,b] \Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t)dt$ непр. на$[a,b]$.

**7.** *Дифф–сть интеграла по верхнему пределу интегрирования. Ф–ла Ньютона–Лейбница*
$f \in \Re[a,b]$ непр. в т. $x_0 \in [a,b] \Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t)dt$ дифф. в т. $x_0$ и $F'(x_0) = f(x_0)$.
$T$. (Ф–ла Н–Л) : $f$ непр. на $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$, где $\Phi$ – произвольн. первообразная $f$

**8.** *Интегрирование по частям и замена переменной в интеграле Римана.*
$T$. (Ф–ла инт–я по частям) : $u(x), v(x)$ непр. дифф. на $[a,b] \Rightarrow \int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int_a^b v(x)u'(x)dx$
$T$. (Ф–ла замены перем.) : $f$ непр. на $[a,b]$, $g$ имеет непр. производную на $[\alpha,\beta]$, $min_{t\in[\alpha,\beta]}g(t) = g(\alpha) = a,$
$max_{t\in[\alpha,\beta]}g(t) = g(\beta) = b \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\cdot g'(t)dt$

**9.1.** *Несобств. инт. Римана 2–х типов и их простейш. св–ва. Крит. Коши сход–ти несобств. инт.*
Пусть $f$ опр. на $[a,+\infty), \forall b \in [a,+\infty)\ f \in \Re[a,b]$. $\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ наз. несобств. инт.1–го рода,
если он сущ. и конечен. Обозн. : $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. При этом несобств. инт. сходится. Аналогично
определяют $\int_{-\infty}^b f(x)dx$. | Пусть $f$ опр. на $[a,B)$, неогр. в $O(B)$ и $\forall b \in [a,B)\ f \in \Re[a,b]$.
$\lim_{b\to B-0}\int_a^b f(x)dx$, наз. несобств. инт.2–го рода, если он сущ. и конечен. Обозн. : $\int_a^B f(x)dx$.
При этом несобств. инт. сход. | Пусть $f$ опр. на $[a,\omega)$ и $\forall[a,b] \subset [a,\omega)\ f \in \Re[a,b]$. Тогда : $\int_a^\omega f(x)dx :=$
$:= \lim_{b\to\omega}\int_a^b f(x)dx$.
**9.2.** $T$. (Свойства несобст. интеграла Римана.) : $\int_a^\omega f(x)dx$ и $\int_a^\omega g(x)dx$ сход., тогда :
a)$\omega \in \mathbb{R},\ f \in \Re[a,\omega] \Rightarrow$ знач–я $\int_a^\omega f(x)dx$ в несобств. и собств. смысле равны. b)$\forall\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$
ф–ция $\lambda_1 f + \lambda_2 g$инт. в несобств. смысле и $\int_a^\omega(\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x))dx = \lambda_1\int_a^\omega f(x)dx + \lambda_2\int_a^\omega g(x)dx$.
c) $c \in [a,\omega) \Rightarrow \int_a^\omega f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^\omega f(x)dx$. |
**9.3.** $T$. (Критерий Коши сходимости несобственного интеграла) :
$\int_a^\omega f(x)dx$ сход. $\Leftrightarrow \forall\epsilon > 0\ \exists B \in [a,\omega)\ \forall b_1, b_2 \in (B,\omega)\ |\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx| < \epsilon$.

**10.1.** *Абс. сход–ть несобст. инт., связь со сход–ю.*
$\int_a^\omega f(x)dx$ абс. сход. если $\int_a^\omega |f(x)|dx$ сход. | $T$. (О сход–ти абс. сход. инт.) :
$\int_a^\omega f(x)dx$ абс. сход. $\Rightarrow$ он сход. | $T$. $\exists\lim_{b\to\omega}F(b)$ конечен $\Leftrightarrow F$ огр. на $[a,\omega)$.
**10.2.** $T$. (Признак мажорации) : $\forall x \in [a,\omega)\ 0 \le f(x) \le g(x)$ и
$\int_a^\omega g(x)dx$ сход. $\Rightarrow \int_a^\omega f(x)dx$ сход. Если $\int_a^\omega f(x)dx$ расход. $\Rightarrow \int_a^\omega g(x)dx$ расход.
**10.3.** $T$. (Призн. сравн–я сход–ти) : $\forall x \in [a,\omega)\ f(x) \ge 0, g(x) \ge 0$ и $\lim_{x\to\omega}(f(x)/g(x)) =$
$= A,\ 0 < a < +\infty \Rightarrow \int_a^\omega f(x)dx$ и $\int_a^\omega g(x)dx$ одновременно сход. или расход.

**11.1.** *Условная сходимость несобственных интегралов.*
инт. $\int_a^\omega f(x)dx$ наз. усл. сход., если он сход., а $\int_a^\omega |f(x)|dx$ расход. | Пусть $f, g, g'$ непр. на$[a.\omega)$,
$F(b) = \int_a^b f(x)dx$. Тогда по ф–ле инт. по частям : $\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)F(b) - g(a)F(a) -$
$- \int_a^b g'(x)F(x)dx$. Если сущ. $\int_a^\omega g'(x)F(x)dx = A$ и сущ. конеч. $\lim_{b\to\omega}g(b)F(b) = B$, то
сущ. несобст. инт. $\int_a^\omega f(x)g(x)dx = B - g(a)F(a) - A$.
**11.2.** $T$. (Признак Дирихле сход–ти несобст. инт–ов.) : $f, g, g'$ непр. на $[a,\omega)$, $F(b) = \int_a^b f(x)dx$
огр. на $[a,\omega)$, $g(x) \to 0$ монотон. убывая, при $x \to \omega \Rightarrow \int_a^\omega f(x)g(x)dx$ сход.
**11.3.** $T$. (Признак Абеля сход–ти несобст. инт–ов.) : $f, g, g'$ непр. на $[a,\omega)$,
инт. $\int_a^\omega f(x)dx$ сход., $g$ монотонна и ограничена на $[a.\omega) \Rightarrow \int_a^\omega f(x)g(x)dx$ сход.

12.1. *Числовой ряд, сумма ряда, сходимость числового ряда.*

*Числовой ряд* $\Sigma a_n$ *– это посл–ть* $(S_n)$, $a_n$ *–* $n$*–ый член ряда,* $S_n$ *–* $n$*–ая частичн. сумма ряда,*
$S_n = \Sigma_{k=1}^{n} a_k, n \in \mathbb{N}.$ | $S = \Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ *– сумм. ряда. Если* $S \in \mathbb{R}$, *то ряд наз. сход. Если* $S = \pm\infty$,
*или* $\lim_{n\to\infty} S_n$ *не сущ. то ряд расход.*

12.2. *Т. (Необх. усл. сход–ти ряда.)* : $\Sigma a_n$ *сход.* $\implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *т. е.* $a_n = o(1)$.

12.3. *Т. (Крит. Коши сход–ти числ. ряда.)* : $\Sigma a_n$ *сход.* $\iff \forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\epsilon\ \forall p \in \mathbb{N}$
$|S_{n+p} - S_n| < \epsilon$, *т. е.* $|\Sigma_{k=n+1}^{n+p} a_k| < \epsilon$.

13.1. *Т. (об арифметических действиях над сходящимися рядами.)*

$\Sigma a_n$ *и* $\Sigma b_n$ *сход.*, $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\Sigma_{n=1}^{\infty} b_n = B$, $\lambda \in \mathbb{R} \implies \Sigma(a_n + b_n)$ *и* $\Sigma \lambda a_n$ *сход. и*
$\Sigma_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = A + B$, $\Sigma_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda A$.

13.2. *Абсолютная сходимость числовых рядов, связь со сходимостью.*

$\Sigma a_n$ *абс. сход., если* $\Sigma |a_n|$ *сход. Т. (о сход–ти абс. сход. ряда)* : $\Sigma a_n$ *абс. сход* $\Rightarrow \Sigma a_n$ *сход.*

14.1. *Т. (Основной признак Вейерштрасса.)*

$\Sigma a_n\ (a_n \geq 0)$ *сход.* $\iff S_n = O(1)$

14.2. *Т. (Интегральный признак сходимости.)*

*Пусть* $f \downarrow$ *на* $[1, +\infty)$ *и* $f(x) \geq 0\ \forall x \in [1, +\infty)$. *Тогда* : $\int_1^{\infty} f(x)dx$ *сход.* $\iff \Sigma f(n)$ *сход.*

15.1. *Т. (Признак мажорации.) Опр.* $a_n = O(b_n) \Leftrightarrow \exists C > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ |a_n| \leq C|b_n|$

*Теорема.* : $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \geq 0,\ b_n \geq 0,\ a_n = O(b_n),\ \Sigma_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \Sigma_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$

*След.1* : $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \geq 0, b_n > 0, \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ *сход.*, $\Sigma_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \Sigma_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$

*След.2* : $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n > 0,\ b_n > 0, \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leq \left(\frac{b_{n+1}}{b_n}\right),\ \Sigma_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \Sigma_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$

15.2. *Т. (Признак сравнения.)* : $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n > 0,\ b_n > 0,\ \exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \neq 0 \Rightarrow$
*ряды* $\Sigma a_n$ *и* $\Sigma b_n$ *ведут себя одинаково.*

16.1. *Т. (Признак Коши.) : Пусть* $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \geq 0,\ \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \alpha$. *Тогда* :
1) $\alpha < 1, \implies \Sigma a_n$ *сход.* 2) $\alpha > 1, \implies \Sigma a_n$ *расход.* 3) $\alpha = 1 \implies ?$.

16.2. *Т. (Признак Даламбера.) : Пусть* $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n > 0$ *и* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$. *Тогда* :
1) $\alpha < 1 \implies \Sigma a_n$ *сход.* 2) $\alpha > 1 \implies \Sigma a_n$ *расход.* 3) $\alpha = 1 \implies ?$.

17.1. *Необходимое и достаточное условие абсолютной сходимости ряда.*

$a^+ = \frac{|a|+a}{2},\ a^- = \frac{|a|-a}{2}$. $a^+$ *– положит. часть числа* $a$, $a^-$ *– отриц. часть.* | $a = a^+ - a^-$,
$|a| = a^+ + a^-,\ 0 \leq a^+ \leq |a|,\ 0 \leq a^- \leq |a|.\ \Sigma a_n = \Sigma a_n^+ - \Sigma a_n^-,\ \Sigma|a_n| = \Sigma a_n^+ + \Sigma a_n^-$
*Т. (необх. и дост. усл. абс. сход.)* : $\Sigma a_n$ *абс. сход.* $\iff \Sigma a_n^+$ *и* $\Sigma a_n^-$ *сход.*

17.2. *Понятие условно сходящегося ряда. Теорема об условно сходящихся рядах.*

*Опр. Числ. ряд наз. условно сходящимся, если он сходится, но не сходится абсолютно.*
*Т. (об условно сходящихся рядах.)* : $\Sigma a_n$ *сход. условно* $\Rightarrow \Sigma a_n^+$ *и* $\Sigma a_n^-$ *расход.*

18.1. *Т. (Преобразование (тождество) Абеля.)*

$B_n = \Sigma_{k=1}^{n} b_k,\ n \geq 1 \implies \Sigma_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n - \Sigma_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)B_k$

18.2. *Т. (О равносходимости рядов, связанных преобразованием Абеля.)* :

$B_n = \Sigma_{k=1}^{n} b_k,\ (a_n B_n)$ *сход.* $\implies \Sigma a_n b_n$ *и* $\Sigma(a_{n+1} - a_n)B_n$ *ведут себя одинаково.*

18.3. *Т. (Признак Абеля.)* :

1) $(a_n)$ *монотон. и огр.*, 2) $\Sigma b_n$ *сход. (т. е.* $(B_n)$ *сход.)* $\implies \Sigma a_n b_n$ *сход.*

18.4. *Т. (Признак Дирихле.)* :

1) $(a_n)$ *монотон. и* $a_n = \overline{o}(1)$, 2) $B_n = \Sigma_{k=1}^{n} b_k = \underline{O}(1) \implies \Sigma a_n b_n$ *сход.*

18.5. *Т. (Признак Лейбница.)* : $(a_n)$ *монотон. и* $a_n = \overline{o}(1) \implies \Sigma(-1)^{n-1} a_n$ *сход.*

19. *Сумма ряда как обобщение суммы конечного числа слагаемых, сочетательный закон.*

*Т. (Сочетательный закон.)* : $\Sigma a_n$ *сход.*, $(m_n) \uparrow,\ m_1 = 1 \implies \Sigma_{n=1}^{\infty}(\Sigma_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} a_k)$ *сход.*
*и его сумма равна сумме* $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$. | *P. S. : Если шо, в скобках* : $k = m_n$, *и* $m_{n+1} - 1$ |
*Опр.* $\varphi$ *– взаимно однознач. отображ–е* $\mathbb{N}$ *на* $\mathbb{N}$. $\Sigma a_{\varphi(k)}$ *наз. перестановкой ряда* $\Sigma a_n$.

20.1. *Т. (Коммутативный закон для знакоположительных рядов)* :

$\forall n \in \mathbb{N}\ a_k \geq 0 \implies \Sigma_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = \Sigma_{k=1}^{\infty} a_k.$

20.2. *Т. (Коммутативный закон для абсолютно сходящихся рядов.)* :

*Ряд абс. сход.* $\implies$ *любая его перестановка абс. сход. и их суммы равны.*

20.3. *Т. (Римана.)* : $\Sigma a_n$ *сход. усл.* $\implies \forall A \in \overline{\mathbb{R}}\quad \exists\, \Sigma_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = A.$

21.1. *Произведение числовых рядов, согласованное с произведением частных сумм.*

$\Sigma c_n$, *где* $c_n = a_n \cdot \Sigma_{k=1}^{n-1} b_k + b_n \cdot \Sigma_{k=1}^{n-1} a_k + a_n b_n$ *наз. произведением* $\Sigma a_n$ *и* $\Sigma b_n$.
*Пусть* $C_n = \Sigma_{k=1}^{n} c_k,\ A_n = \Sigma_{k=1}^{n} a_k,\ B_n = \Sigma_{k=1}^{n} b_k$, *тогда* $C_n = A_n \cdot B_n$
*Т.* : $\Sigma a_n$ *и* $\Sigma b_n$ *сход.* $\implies \Sigma c_n$ *сход. и* $\Sigma_{n=1}^{\infty} c_n = \Sigma_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \Sigma_{n=1}^{\infty} b_n$.

21.2. *Т. (О произведении абсолютно сходящихся рядов.)*

$\Sigma a_n$ *и* $\Sigma b_n$ *абс. сход.* $\implies \Sigma c_n$ *абс. сход. и* $\Sigma_{n=1}^{\infty} c_n = \Sigma_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \Sigma_{n=1}^{\infty} b_n$ *при любой*
*нумерации элементов матрицы* $C$.