1.1. *Определение интегральной суммы Римана и интеграла Римана.*
$[a,b] \in \mathbb{R}, a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,\ P = P_{[a,b]} = \{x_k\}_{k=0}^n$ – разбиение $[a,b]$
$\Delta_k = [x_{k-1}, x_k], \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, (k = 1, \ldots, n).\ d = d(P) = max_{1\le k\le n}\Delta x_k$–диаметр
разб–я P. $\xi_P = \{\xi_k\}_{k=1}^n, \xi_k \in \Delta_k, (k = 1, \ldots, n)$–сист. промеж. точек, соотв. разб–ю P. |
Пусть f опр. на $[a,b]$. Сумма $\sigma(P) = \sigma(P, \xi_P) = \sigma(f, P, \xi_P) = \Sigma_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$ наз. инт. суммой
Римана ф–ции f. | $I = \lim_{d\to 0}\sigma(P)$, если $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (P, \xi_P)\ (d(P) < \delta \Rightarrow |\sigma(P, \xi_P) - I| < \epsilon)$.
Число I наз. пределом инт. сумм Римана. fв этом случ. наз. инт. по Риману на $[a,b]$, а I–инт.
Римана и обозн. $\int_a^b f(x)dx = I$
1.2. *Т. (Необход. условие интегрируемости ф–ции)* : f–инт. на$[a,b] \implies f$ огр. на$[a,b]$

2.1. *Верхние и нижние суммы Дарбу, их свойства.*
Пусть f опр. и огр. на$[a,b], P = \{x_k\}_{k=0}^n, M_k = sup_{x\in\Delta k}f(x), m_k = inf_{x\in\Delta k}f(x), 1 \le k \le n$,
$S(P) = \Sigma_{k=1}^n M_k\Delta x_k$ – верх. сум.Дарбу, $s(P) = \Sigma_{k=1}^n m_k\Delta x_k$ – ниж. сум.Дарбу | $\forall \xi_P$,
$\forall k : 1 \le k \le n,\ m_k \le f(\xi_k) \le M_k$.Св–ва : 1)$\forall P\ \forall \xi_P\ s(P) \le \sigma(P, \xi_P) \le S(P)$.2)Если $P \subset P_1$,
то $s(P) \le s(P_1), S(P) \ge S(P_1)$.3)$\forall P_1\ \forall P_2\ s(p_1) \le S(P_2)$. След–е : $\{s(P)\}$огр. сверху,
$\{S(P)\}$огр. снизу.4)$\forall P\ \forall \epsilon > 0\ \exists \xi_P,\ 0 \le S(P) - \sigma(P, \xi_P) < \epsilon\ (0 \le \sigma(P, \xi_P) - s(P) < \epsilon)$
След–е : $S(P) = sup_{\xi_p}\sigma(P, \xi_p), s(P) = inf_{\xi_p}\sigma(P, \xi_P)$
2.2. *Верхний и нижний интегралы.*
Верх. инт.Дарбу : $\overline{I} := inf_P S(P)$, ниж. инт. : $\underline{I} := sup_P s(P)$. $\underline{I} \le \overline{I}$.Лемм. : Пусть $P = P_{[a,b]}$,
$d = d(P)$–диам. разб–яP, $P*$ получено из P, добавл–ем L точек, $M = sup_{x\in[a,b]}f(x), m =$
$= inf_{x\in[a,b]}f(x) \Rightarrow S(P) - S(P*) \le (M - m)Ld, s(P*) - s(P) \le (M - m)Ld$.
2.3. *Основная лемма Дарбу.*
$\overline{I} = \lim_{d(p)\to 0}\underline{S}(P), \underline{I} = \lim_{d(P)\to 0} s(P), S(P) = s(P) = \sigma(P) = c(b - a) = \underline{I} = \overline{I} = I$.

3. *Критерий интегрируемости*
Пусть f опр. и огр. на$[a,b]$. Тогда след. усл–я эквивалентны :
1)f инт. на$[a,b]$, 2)$\forall \epsilon > 0\ \exists P\ s(P) - S(P) < \epsilon$, 3)$\underline{I} = \overline{I} = \int_a^b f(x)dx$.

4.1. *Теорема об интегрируемости непрерывной функции*
f непр. на$[a,b] \Rightarrow f$ инт. на$[a,b]$.
4.2. *Теорема об интегрируемости монотонной функции*
f монот. на$[a,b] \Rightarrow f$ инт. на$[a,b]$.

5.1. *Св–ва инт. Рим. : линейн–сть инт–а, аддит–сть инт. относит. пред. инт–я, монотон–сть инт.*
Т. (Лин–сть инт.) : $f, g \in \mathfrak{R}[a,b], c \in \mathbb{R} \Rightarrow f + g, cf \in \mathfrak{R}[a,b],\ \int_a^b(f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
и $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$. | Т. (Адд–сть инт.) : Пусть $a < c < b$, тогда $f \in \mathfrak{R}[a,b] \Leftrightarrow f \in \mathfrak{R}[a,c]$
и $f \in \mathfrak{R}[c,b], \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. | Т. (Мон–сть инт.) : $f, g \in \mathfrak{R}[a,b], \forall x \in [a,b]\ f(x) \le g(x)$
$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$. | След–е 1 : $f \in \mathfrak{R}[a,b], \forall x\ f(x) \ge 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ge 0$.След–е 2 : $f \in \mathfrak{R}[a,b] \Rightarrow$
$\Rightarrow |\int_a^b f(x)dx| \le \int_a^b |f(x)|dx \le sup_{x\in[a,b]}|f(x)|(b - a)$
5.2. Т. (*Первая Т. о среднем для интеграла.*) : $f, g \in \mathfrak{R}[a,b], g(x) \ge 0\ (g(x) \le 0)\ \forall x \in [a,b]$,
$M = sup_{x\in[a,b]}f(x), m = inf_{x\in[a,b]}f(x) \Rightarrow \exists \mu \in [m, M] : \int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx$.
5.3. Т. (*Операции над интегрируемыми функциями*) :
$f, g \in \mathfrak{R}[a,b] \Rightarrow |f|, f \cdot g \in \mathfrak{R}[a,b], \frac{f}{g} \in \mathfrak{R}[a,b]$ при усл. $\exists c > 0\ \forall x \in [a,b]\ |g(x)| \ge c$.
Замеч–е : Из инт–сти $|f|$ не следует инт–сть f.

6. *Непрерывность интеграла по верхнему пределу интегрирования.*
$f \in \mathfrak{R}[a,b] \Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t)dt$ непр. на$[a,b]$.

7. *Дифф–сть интеграла по верхнему пределу интегрирования. Ф–ла Ньютона–Лейбница*
$f \in \mathfrak{R}[a,b]$ непр. в т. $x_0 \in [a,b] \Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t)dt$ дифф. в т. x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$.
Т. (Ф–ла Н–Л) : f непр. на $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$, где Φ – произвольн. первообразная f

8. *Интегрирование по частям и замена переменной в интеграле Римана.*
Т. (Ф–ла инт–я по частям) : $u(x), v(x)$ непр. дифф. на $[a,b] \Rightarrow \int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$
Т. (Ф–ла замены перем.) : f непр. на $[a,b]$, g имеет непр. производную на $[\alpha, \beta]$, $min_{t\in[\alpha,\beta]}g(t) = g(\alpha) = a$,
$max_{t\in[\alpha,\beta]}g(t) = g(\beta) = b \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t)) \cdot g'(t)dt$

9.1. *Несобств. инт. Римана 2–х типов и их простейш. св–ва. Крит. Коши сход–ти несобств. инт.*
Пусть f опр. на $[a, +\infty), \forall b \in [a, +\infty)\ f \in \mathfrak{R}[a,b]$. $\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ наз. несобств. инт.1–го рода,
если он сущ. и конечен. Обозн. : $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. При этом несобств. инт. сходится. Аналогично
определяют $\int_{-\infty}^b f(x)dx$. | Пусть f опр. на $[a, B)$, неогр. в $O(B)$ и $\forall b \in [a, B)\ f \in \mathfrak{R}[a,b]$.
$\lim_{b\to B-0}\int_a^b f(x)dx$, наз. несобств. инт.2–го рода, если он сущ. и конечен. Обозн. : $\int_a^B f(x)dx$.
При этом несобств. инт. сход. | Пусть f опр. на $[a, \omega)$ и $\forall [a,b] \subset [a, \omega)\ f \in \mathfrak{R}[a,b]$. Тогда : $\int_a^\omega f(x)dx :=$
$:= \lim_{b\to\omega}\int_a^b f(x)dx$.
9.2. Т. (*Свойства несобст. интеграла Римана.*) : $\int_a^\omega f(x)dx$ и $\int_a^\omega g(x)dx$ сход., тогда :
a)$\omega \in \mathbb{R},\ f \in \mathfrak{R}[a, \omega] \Rightarrow$ знач–я $\int_a^\omega f(x)dx$ в несобств. и собств. смысле равны. b)$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
ф–ция $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ инт. в несобств. смысле и $\int_a^\omega(\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x))dx = \lambda_1\int_a^\omega f(x)dx + \lambda_2\int_a^\omega g(x)dx$.
c) $c \in [a, \omega) \Rightarrow \int_a^\omega f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^\omega f(x)dx$. |
9.3. Т. (*Критерий Коши сходимости несобственного интеграла*) :
$\int_a^\omega f(x)dx$ сход. $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists B \in [a, \omega)\ \forall b_1, b_2 \in (B, \omega)\ |\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx| < \epsilon$.

10.1. *Абс. сход–ть несобст. инт., связь со сход–ю.*
$\int_a^\omega f(x)dx$ абс. сход. если $\int_a^\omega |f(x)|dx$ сход. | Т. (О сход–ти абс. сход. инт.) :
$\int_a^\omega f(x)dx$ абс. сход. $\Rightarrow$ он сход. | Т. $\exists \lim_{b\to\omega} F(b)$ конечен $\Leftrightarrow F$ огр. на $[a, \omega)$.
10.2. Т. (*Признак мажорации*) : $\forall x \in [a, \omega)\ 0 \le f(x) \le g(x)$ и
$\int_a^\omega g(x)dx$ сход. $\Rightarrow \int_a^\omega f(x)dx$ сход. Если $\int_a^\omega f(x)dx$ расход. $\Rightarrow \int_a^\omega g(x)dx$ расход.
10.3. Т. (*Призн. сравн–я сход–ти*) : $\forall x \in [a, \omega)\ f(x) \ge 0, g(x) \ge 0$ и $\lim_{x\to\omega}(f(x)/g(x)) =$
$= A,\ 0 < a < +\infty \Rightarrow \int_a^\omega f(x)dx$ и $\int_a^\omega g(x)dx$ одновременно сход. или расход.

11.1. *Условная сходимость несобственных интегралов.*
инт. $\int_a^\omega f(x)dx$ наз. усл. сход., если он сход., а $\int_a^\omega |f(x)|dx$ расход. | Пусть f, g, g' непр. на$[a. \omega)$,
$F(b) = \int_a^b f(x)dx$. Тогда по ф–ле инт. по частям : $\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)F(b) - g(a)F(a)-$
$- \int_a^b g'(x)F(x)dx$. Если сущ. $\int_a^\omega g'(x)F(x)dx = A$ и сущ. конеч. $\lim_{b\to\omega} g(b)F(b) = B$, то
сущ. несобст. инт. $\int_a^\omega f(x)g(x)dx = B - g(a)F(a) - A$.
11.2. Т. (*Признак Дирихле сход–ти несобст. инт–ов.*) : f, g, g' непр. на $[a, \omega)$, $F(b) = \int_a^b f(x)dx$
огр. на $[a, \omega)$, $g(x) \to 0$ монотон. убывая, при $x \to \omega \Rightarrow \int_a^\omega f(x)g(x)dx$ сход.
11.3. Т. (*Признак Абеля сход–ти несобст. инт–ов.*) : f, g, g' непр. на $[a, \omega)$,
инт. $\int_a^\omega f(x)dx$ сход., g монотонна и ограничена на $[a. \omega) \Rightarrow \int_a^\omega f(x)g(x)dx$ сход.

12.1. *Числовой ряд, сумма ряда, сходимость числового ряда.*
Числовой ряд Σa_n – это посл–ть (S_n), a_n – n–ый член ряда, S_n – n–ая частичн. сумма ряда,
$S_n = \Sigma_{k=1}^n a_k, n \in \mathbb{N}$. | $S = \Sigma_{n=1}^\infty a_n$ – сумм. ряда.Если $S \in \mathbb{R}$, то ряд наз. сход. Если$S = \pm\infty$,
или $\lim_{n\to\infty} S_n$ не сущ. то ряд расход.
12.2. Т. (*Необх. усл. сход–ти ряда.*) : Σa_n сход. $\implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$, т. е. $a_n = o(1)$.

12.3. $T.$ (*Крит. Коши сход–ти числ. ряда.*) $: \Sigma a_n$ *сход.* $\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\epsilon\ \forall p \in \mathbb{N}$
$|S_{n+p} - S_n| < \epsilon,$ *т. е.* $|\Sigma_{k=n+1}^{n+p} a_k| < \epsilon.$

13.1. $T.$ (*об арифметических действиях над сходящимися рядами.*)
Σa_n *и* Σb_n *сход.*, $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n = A,\ \Sigma_{n=1}^{\infty} b_n = B,\ \lambda \in \mathbb{R} \implies \Sigma(a_n + b_n)$ *и* $\Sigma \lambda a_n$ *сход. и*
$\Sigma_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = A + B,\ \Sigma_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda A.$
13.2. *Абсолютная сходимость числовых рядов, связь со сходимостью.*
Σa_n *абс. сход., если* $\Sigma |a_n|$ *сход.* $T.$ (*о сход–ти абс. сход. ряда*) $: \Sigma a_n$ *абс. сход* $\Rightarrow \Sigma a_n$ *сход.*

14.1. $T.$ (*Основной признак Вейерштрасса.*)
$\Sigma a_n\ (a_n \geq 0)$ *сход.* $\Longleftrightarrow S_n = O(1)$
14.2. $T.$ (*Интегральный признак сходимости.*)
Пусть $f \downarrow$ *на* $[1, +\infty)$ *и* $f(x) \geq 0\ \forall x \in [1, +\infty).$ *Тогда* $: \int_1^{\infty} f(x)dx$ *сход.* $\Longleftrightarrow \Sigma f(n)$ *сход.*

15.1. $T.$ (*Признак мажорации.*)*Опр.* $a_n = O(b_n) \Leftrightarrow \exists C > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ |a_n| \leq C|b_n|$
Теорема. $: \forall n \in \mathbb{N}\ a_n \geq 0,\ b_n \geq 0,\ a_n = O(b_n),\ \Sigma_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \Sigma_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$
След.1 $: \forall n \in \mathbb{N}\ a_n \geq 0, b_n > 0, \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ *сход.*, $\Sigma_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \Sigma_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$
След.2 $: \forall n \in \mathbb{N}\ a_n > 0,\ b_n > 0, \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leq \left(\frac{b_{n+1}}{b_n}\right),\ \Sigma_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \Sigma_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$
15.2. $T.$ (*Признак сравнения.*) $: \forall n \in \mathbb{N}\ a_n > 0,\ b_n > 0,\ \exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \neq 0 \Rightarrow$
ряды Σa_n *и* Σb_n *ведут себя одинаково.*

16.1. $T.$ (*Признак Коши.*) $:$ *Пусть* $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \geq 0,\ \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \alpha.$ *Тогда* $:$
1) $\alpha < 1, \implies \Sigma a_n$ *сход.* 2) $\alpha > 1, \implies \Sigma a_n$ *расход.* 3) $\alpha = 1 \implies ?.$
16.2. $T.$ (*Признак Даламбера.*) $:$ *Пусть* $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n > 0$ *и* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha.$ *Тогда* $:$
1) $\alpha < 1 \implies \Sigma a_n$ *сход.* 2) $\alpha > 1 \implies \Sigma a_n$ *расход.* 3) $\alpha = 1 \implies ?.$

17.1. *Необходимое и достаточное условие абсолютной сходимости ряда.*
$a^+ = \frac{|a|+a}{2},\ a^- = \frac{|a|-a}{2}.\ a^+ -$ *положит. часть числа* $a,\ a^- -$ *отриц. часть.* $|\ a = a^+ - a^-,$
$|a| = a^+ + a^-,\ 0 \leq a^+ \leq |a|,\ 0 \leq a^- \leq |a|.\ \Sigma a_n = \Sigma a_n^+ - \Sigma a_n^-,\ \Sigma|a_n| = \Sigma a_n^+ + \Sigma a_n^-$
$T.$ (*необх. и дост. усл. абс. сход.*) $: \Sigma a_n$ *абс. сход.* $\Longleftrightarrow \Sigma a_n^+$ *и* Σa_n^- *сход.*
17.2. *Понятие условно сходящегося ряда. Теорема об условно сходящихся рядах.*
Опр. Числ. ряд наз. условно сходящимся, если он сходится, но не сходится абсолютно.
$T.$ (*об условно сходящихся рядах.*) $: \Sigma a_n$ *сход. условно* $\Rightarrow \Sigma a_n^+$ *и* Σa_n^- *расход.*

18.1. $T.$ (*Преобразование (тождество) Абеля.*)
$B_n = \Sigma_{k=1}^{n} b_k,\ n \geq 1 \implies \Sigma_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n - \Sigma_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)B_k$
18.2. $T.$ (*О равносходимости рядов, связанных преобразованием Абеля.*) $:$
$B_n = \Sigma_{k=1}^{n} b_k,\ (a_n B_n)$ *сход.* $\implies \Sigma a_n b_n$ *и* $\Sigma(a_{n+1} - a_n)B_n$ *ведут себя одинаково.*
18.3. $T.$ (*Признак Абеля.*) $:$
1) (a_n) *монотон. и огр.*, 2) Σb_n *сход.* (*т. е.* (B_n) *сход.*) $\implies \Sigma a_n b_n$ *сход.*
18.4. $T.$ (*Признак Дирихле.*) $:$
1) (a_n) *монотон. и* $a_n = \overline{o}(1),$ 2) $B_n = \Sigma_{k=1}^{n} b_k = \underline{O}(1) \implies \Sigma a_n b_n$ *сход.*
18.5. $T.$ (*Признак Лейбница.*) $: (a_n)$ *монотон. и* $a_n = \overline{o}(1) \implies \Sigma(-1)^{n-1} a_n$ *сход.*

19. *Сумма ряда как обобщение суммы конечного числа слагаемых, сочетательный закон.*
$T.$ (*Сочетательный закон.*) $: \Sigma a_n$ *сход.*, $(m_n) \uparrow,\ m_1 = 1 \implies \Sigma_{n=1}^{\infty}(\Sigma_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} a_k)$ *сход.*
и его сумма равна сумме $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n.$ $|$ *P. S.: Если шо, в скобках* $: k = m_n,$ *и* $m_{n+1} - 1\ |$
Опр. $\varphi -$ *взаимно однознач. отображ–е* $\mathbb{N}$ *на* $\mathbb{N}.$ $\Sigma a_{\varphi(k)}$ *наз. перестановкой ряда* $\Sigma a_n.$

20.1. $T.$ (*Коммутативный закон для знакоположительных рядов*) $:$
$\forall n \in \mathbb{N}\ a_k \geq 0 \implies \Sigma_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = \Sigma_{k=1}^{\infty} a_k.$
20.2. $T.$ (*Коммутативный закон для абсолютно сходящихся рядов.*) $:$
Ряд абс. сход. $\implies$ *любая его перестановка абс. сход. и их суммы равны.*
20.3. $T.$ (*Римана.*) $: \Sigma a_n$ *сход. усл.* $\implies \forall A \in \overline{\mathbb{R}}\quad \exists\ \Sigma_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = A.$

21.1. *Произведение числовых рядов, согласованное с произведением частных сумм.*
$\Sigma c_n,$ *где* $c_n = a_n \cdot \Sigma_{k=1}^{n-1} b_k + b_n \cdot \Sigma_{k=1}^{n-1} a_k + a_n b_n$ *наз. произведением* Σa_n *и* $\Sigma b_n.$
Пусть $C_n = \Sigma_{k=1}^{n} c_k,\ A_n = \Sigma_{k=1}^{n} a_k,\ B_n = \Sigma_{k=1}^{n} b_k,$ *тогда* $C_n = A_n \cdot B_n$
$T.:$ Σa_n *и* Σb_n *сход.* $\implies \Sigma c_n$ *сход. и* $\Sigma_{n=1}^{\infty} c_n = \Sigma_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \Sigma_{n=1}^{\infty} b_n.$
21.2. $T.$ (*О произведении абсолютно сходящихся рядов.*)
Σa_n *и* Σb_n *абс. сход.* $\implies \Sigma c_n$ *абс. сход. и* $\Sigma_{n=1}^{\infty} c_n = \Sigma_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \Sigma_{n=1}^{\infty} b_n$ *при любой*
нумерации элементов матрицы $C.$