

1.1. Опр. инт. суммы Римана и инт-а Римана.

$[a, b] \in \mathbb{R}, a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b, P = P_{[a,b]} = \{x_k\}_{k=0}^n$ – разбиение $[a, b]$
 $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k], \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, (k = 1, \dots, n), d = d(P) = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$ – диаметр
разб-я $P, \xi_P = \{\xi_k\}_{k=1}^n, \xi_k \in \Delta_k, (k = 1, \dots, n)$ – сист. промеж. точек, соотв. разб-ю P .
Пусть f опр. на $[a, b]$. Сумма $\sigma(P) = \sigma(P, \xi_P) = \sigma(f, P, \xi_P) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$ наз. инт. суммой
Римана ф-ции f .
 $I = \lim_{d \rightarrow 0} \sigma(P)$, если $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (P, \xi_P) (d(P) < \delta \Rightarrow |\sigma(P, \xi_P) - I| < \epsilon)$.
Число I наз. пределом инт. сумм Римана. в этом случ. наз. инт. по Риману на $[a, b], a$ – инт.
Римана и обозн. $\int_a^b f(x) dx = I$

1.2. Т. (Необход. условие интегрируемости ф-ции) : f – инт. на $[a, b] \Rightarrow f$ огр. на $[a, b]$

2.1. Верхние и нижние суммы Дарбу, их свойства.

Пусть f опр. и огр. на $[a, b], P = \{x_k\}_{k=0}^n, M_k = \sup_{x \in \Delta_k} f(x), m_k = \inf_{x \in \Delta_k} f(x), 1 \leq k \leq n,$
 $S(P) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k$ – верх. сум. Дарбу, $s(P) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k$ – ниж. сум. Дарбу $\forall \xi_P,$
 $\forall k : 1 \leq k \leq n, m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k, \text{Св-ва} : 1) \forall P \forall \xi_P s(P) \leq \sigma(P, \xi_P) \leq S(P), 2) \text{Если } P \subset P_1,$
то $s(P) \leq s(P_1), S(P) \geq S(P_1), 3) \forall P_1 \forall P_2 s(P_1) \leq S(P_2).$ След-е : $\{s(P)\}$ огр. сверху,
 $\{S(P)\}$ огр. снизу. 4) $\forall P \forall \epsilon > 0 \exists \xi_P, 0 \leq S(P) - \sigma(P, \xi_P) < \epsilon (0 \leq \sigma(P, \xi_P) - s(P) < \epsilon)$
След-е : $S(P) = \sup_{\xi_P} \sigma(P, \xi_P), s(P) = \inf_{\xi_P} \sigma(P, \xi_P)$

2.2. Верхний и нижний интегралы.

Верх. инт. Дарбу : $\bar{I} := \inf_P S(P)$, ниж. инт. : $\underline{I} := \sup_P s(P), \underline{I} \leq \bar{I}$. Лемм. : Пусть $P = P_{[a,b]},$
 $d = d(P)$ – диам. разб-я $P, P \ast$ получено из P , добав-ем L точек, $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x), m =$
 $= \inf_{x \in [a,b]} f(x) \Rightarrow S(P) - S(P \ast) \leq (M - m)Ld, s(P \ast) - s(P) \leq (M - m)Ld.$

2.3. Основная лемма Дарбу.

$\bar{I} = \lim_{d(P) \rightarrow 0} S(P), \underline{I} = \lim_{d(P) \rightarrow 0} s(P), S(P) = s(P) = \sigma(P) = c(b - a) = \underline{I} = \bar{I} = I.$

3. Критерий интегрируемости

Пусть f опр. и огр. на $[a, b]$. Тогда след. усл-я эквивалентны :

1) f инт. на $[a, b], 2) \forall \epsilon > 0 \exists P s(P) - S(P) < \epsilon, 3) \underline{I} = \bar{I} = \int_a^b f(x) dx.$

4.1. Теорема об интегрируемости непрерывной функции

f непр. на $[a, b] \Rightarrow f$ инт. на $[a, b]$.

4.2. Теорема об интегрируемости монотонной функции

f монот. на $[a, b] \Rightarrow f$ инт. на $[a, b]$.

5.1. Св-ва инт. Рим. : линейн-сть инт-а, аддит-сть инт. относит. пред. инт-я, монотон-сть инт.

Т. (Лин-сть инт.) : $f, g \in \mathfrak{R}[a, b], c \in \mathbb{R} \Rightarrow f + g, cf \in \mathfrak{R}[a, b], \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
и $\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx.$ Т. (Адд-сть инт.) : Пусть $a < c < b$, тогда $f \in \mathfrak{R}[a, b] \Leftrightarrow f \in \mathfrak{R}[a, c]$
и $f \in \mathfrak{R}[c, b], \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$ Т. (Мон-сть инт.) : $f, g \in \mathfrak{R}[a, b], \forall x \in [a, b] f(x) \leq g(x)$
 $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$ След-е 1 : $f \in \mathfrak{R}[a, b], \forall x f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0.$ След-е 2 : $f \in \mathfrak{R}[a, b] \Rightarrow$
 $\Rightarrow |\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| (b - a)$

5.2. Т. (Первая Т. о среднем для интеграла.) : $f, g \in \mathfrak{R}[a, b], g(x) \geq 0 (g(x) \leq 0) \forall x \in [a, b],$

$M = \sup_{x \in [a,b]} f(x), m = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \Rightarrow \exists \mu \in [m, M] : \int_a^b f(x)g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx.$

5.3. Т. (Операции над интегрируемыми функциями) :

$f, g \in \mathfrak{R}[a, b] \Rightarrow |f|, f \cdot g \in \mathfrak{R}[a, b], \frac{f}{g} \in \mathfrak{R}[a, b]$ при усл. $\exists c > 0 \forall x \in [a, b] |g(x)| \geq c.$

Замеч-е : Из инт-сти $|f|$ не следует инт-сть f .

6. Непрерывность интеграла по верхнему пределу интегрирования.

$f \in \mathfrak{R}[a, b] \Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t) dt$ непр. на $[a, b].$

7. Дифф-сть интеграла по верхнему пределу интегрирования. Ф-ла Ньютона-Лейбница

$f \in \mathfrak{R}[a, b]$ непр. в т. $x_0 \in [a, b] \Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t) dt$ дифф. в т. x_0 и $F'(x_0) = f(x_0).$

Т. (Ф-ла Н-Л) : f непр. на $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a),$ где Φ – произвольн. первообразная f

8. Интегрирование по частям и замена переменной в интеграле Римана.

Т. (Ф-ла инт-я по частям) : $u(x), v(x)$ непр. дифф. на $[a, b] \Rightarrow \int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int_a^b v(x)u'(x) dx$

Т. (Ф-ла замены перемен.) : f непр. на $[a, b], g$ имеет непр. производную на $[\alpha, \beta], \min_{t \in [\alpha, \beta]} g(t) = g(\alpha) = a,$

$\max_{t \in [\alpha, \beta]} g(t) = g(\beta) = b \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(g(t)) \cdot g'(t) dt$

9.1. Несобств. инт. Римана 2-х типов и их простейш. св-ва. Крит. Коши сход-ти несобств. инт.

Пусть f опр. на $[a, +\infty), \forall b \in [a, +\infty) f \in \mathfrak{R}[a, b]. \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$ наз. несобств. инт. 1-го рода,
если он сущ. и конечен. Обозн. : $\int_a^{+\infty} f(x) dx.$ При этом несобств. инт. сходится. Аналогично
определяют $\int_{-\infty}^b f(x) dx.$ Пусть f опр. на $[a, B),$ неогр. в $O(B)$ и $\forall b \in [a, B) f \in \mathfrak{R}[a, b].$
 $\lim_{b \rightarrow B-0} \int_a^b f(x) dx,$ наз. несобств. инт. 2-го рода, если он сущ. и конечен. Обозн. : $\int_a^B f(x) dx.$
При этом несобств. инт. сход. Пусть f опр. на $[a, \omega)$ и $\forall [a, b] \subset [a, \omega) f \in \mathfrak{R}[a, b].$ Тогда : $\int_a^\omega f(x) dx :=$
 $:= \lim_{b \rightarrow \omega} \int_a^b f(x) dx.$

9.2. Т. (Свойства несобств. интеграла Римана.) : $\int_a^\omega f(x) dx$ и $\int_a^\omega g(x) dx$ сход. , тогда :

а) $\omega \in \mathbb{R}, f \in \mathfrak{R}[a, \omega] \Rightarrow$ знач-я $\int_a^\omega f(x) dx$ в несобств. и собств. смысле равны. б) $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
ф-ция $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ инт. в несобств. смысле и $\int_a^\omega (\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)) dx = \lambda_1 \int_a^\omega f(x) dx + \lambda_2 \int_a^\omega g(x) dx.$

с) $c \in [a, \omega) \Rightarrow \int_a^\omega f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^\omega f(x) dx.$

9.3. Т. (Критерий Коши сходимости несобственного интеграла) :

$\int_a^\omega f(x) dx$ сход. $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists B \in [a, \omega) \forall b_1, b_2 \in (B, \omega) |\int_{b_1}^{b_2} f(x) dx| < \epsilon.$

10.1. Абс. сход-ть несобств. инт. , связь со сход-ю.

$\int_a^\omega f(x) dx$ абс. сход. если $\int_a^\omega |f(x)| dx$ сход. Т. (О сход-ти абс. сход. инт.) :

$\int_a^\omega f(x) dx$ абс. сход. \Rightarrow он сход. Т. $\exists \lim_{b \rightarrow \omega} F(b)$ конечен $\Leftrightarrow F$ огр. на $[a, \omega).$

10.2. Т. (Признак мажорации) : $\forall x \in [a, \omega) 0 \leq f(x) \leq g(x)$ и

$\int_a^\omega g(x) dx$ сход. $\Rightarrow \int_a^\omega f(x) dx$ сход. Если $\int_a^\omega f(x) dx$ расход. $\Rightarrow \int_a^\omega g(x) dx$ расход.

10.3. Т. (Призн. сравн-я сход-ти) : $\forall x \in [a, \omega) f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$ и $\lim_{x \rightarrow \omega} (f(x)/g(x)) =$

$= A, 0 < a < +\infty \Rightarrow \int_a^\omega f(x) dx$ и $\int_a^\omega g(x) dx$ одновременно сход. или расход.

11.1. Условная сходимость несобственных интегралов.

инт. $\int_a^\omega f(x) dx$ наз. усл. сход. , если он сход. , а $\int_a^\omega |f(x)| dx$ расход. Пусть f, g, g' непр. на $[a, \omega),$
 $F(b) = \int_a^b f(x) dx.$ Тогда по ф-ле инт. по частям : $\int_a^b f(x)g(x) dx = g(b)F(b) - g(a)F(a) -$
 $- \int_a^b g'(x)F(x) dx.$ Если сущ. $\int_a^\omega g'(x)F(x) dx = A$ и сущ. конеч. $\lim_{b \rightarrow \omega} g(b)F(b) = B,$ то
сущ. несобств. инт. $\int_a^\omega f(x)g(x) dx = B - g(a)F(a) - A.$

11.2. Т. (Признак Дирихле сход-ти несобств. инт-ов.) : f, g, g' непр. на $[a, \omega), F(b) = \int_a^b f(x) dx$

огр. на $[a, \omega), g(x) \rightarrow 0$ монотон. убывая, при $x \rightarrow \omega \Rightarrow \int_a^\omega f(x)g(x) dx$ сход.

11.3. Т. (Признак Абеля сход-ти несобств. инт-ов.) : f, g, g' непр. на $[a, \omega),$

инт. $\int_a^\omega f(x) dx$ сход. , g монотонна и ограничена на $[a, \omega) \Rightarrow \int_a^\omega f(x)g(x) dx$ сход.