1. *Опр. инт. суммы Римана и инт–а Римана. Необход. усл. интегр–сти.*

$[a,b] \in \mathbb{R}, a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,, P = P_{[a,b]} = \{x_k\}_{k=0}^n$ – разбение $[a,b]$
$\Delta_k = [x_{k-1}, x_k], \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, (k = 1, \ldots, n)$. $d = d(P) = max_{1 \le k \le n} \Delta x_k$–диаметр
разб–я P. $\xi_P = \{\xi_k\}_{k=1}^n, \xi_k \in \Delta_k, (k = 1, \ldots, n)$–сист. промеж. точек, соотв. разб–ю P. |
Пусть f опр. на $[a,b]$. Сумма $\sigma(P) = \sigma(P, \xi_P) = \sigma(f, P, \xi_P) = \Sigma_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$ наз. инт. суммой
Римана ф–ции f. | $I = \lim_{d \to 0} \sigma(P)$, если $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (P, \xi_P)\ (d(P) < \delta \Rightarrow |\sigma(P, \xi_P) - I| < \epsilon)$.
Число I наз. пределом инт. сумм Римана. fв этом случ. наз. инт. по Риману на $[a,b]$, а I–инт.
Римана и обозн. $\int_a^b f(x)dx = I$ | Т. (необ. усл. инт–сти ф–ции) : f–инт. на$[a,b] \Rightarrow f$ огр. на$[a,b]$

2.1. *Верхние и нижние суммы Дарбу, их свойства.*

Пусть f опр. и огр. на$[a,b]$, $P = \{x_k\}_{k=0}^n, M_k = sup_{x \in \Delta k} f(x), m_k = inf_{x \in \Delta k} f(x), 1 \le k \le n$,
$S(P) = \Sigma_{k=1}^n M_k \Delta x_k$ – верх. сум. Дарбу, $s(P) = \Sigma_{k=1}^n m_k \Delta x_k$ – ниж. сум. Дарбу | $\forall \xi_P$,
$\forall k : 1 \le k \le n,\ m_k \le f(\xi_k) \le M_k$. Св–ва : 1)$\forall P\ \forall \xi_P\ s(P) \le \sigma(P, \xi_P) \le S(P)$.2)Если $P \subset P_1$,
то $s(P) \le s(P_1), S(P) \ge S(P_1)$.3)$\forall P_1\ \forall P_2\ s(p_1) \le S(P_2)$. След–е : $\{s(P)\}$огр. сверху,
$\{S(P)\}$огр. снизу.4)$\forall P\ \forall \epsilon > 0\ \exists \xi_P,\ 0 \le S(P) - \sigma(P, \xi_P) < \epsilon\ (0 \le \sigma(P, \xi_P) - s(P) < \epsilon)$
След–е : $S(P) = sup_{\xi_p} \sigma(P, \xi_p), s(P) = inf_{\xi_p} \sigma(P, \xi_P)$

2.2. *Верхний и нижний интегралы. Основная лемма Дарбу.*

Верх. инт. Дарбу : $\overline{I} := inf_P S(P)$, ниж. инт. : $\underline{I} := sup_P s(P)$. $\underline{I} \le \overline{I}$. Лемм. : Пусть $P = P_{[a,b]}$,
$d = d(P)$–диам. разб–яP, $P*$ получено из P, добавл–ем L точек, $M = sup_{x \in [a,b]} f(x), m =$
$= inf_{x \in [a,b]} f(x) \Rightarrow S(P) - S(P*) \le (M - m)Ld, s(P*) - s(P) \le (M - m)Ld$. Осн. лемм. Дарбу :
$\overline{I} = \lim_{d(p) \to 0} \underline{S}(P), \underline{I} = \lim_{d(P) \to 0} s(P), S(P) = s(P) = \sigma(P) = c(b - a) = \underline{I} = \overline{I} = I$.

3. *Критерий интегрируемости*

Пусть f опр. и огр. на$[a,b]$. Тогда след. усл–я эквивалентны : 1)f инт. на$[a,b]$, 2)$\forall \epsilon > 0\ \exists P$
$s(P) - S(P) < \epsilon$, 3)$\underline{I} = \overline{I} = \int_a^b f(x)dx$.

4.1. *Теорема об интегрируемости непрерывной функции*

f непр. на$[a,b] \Rightarrow f$ инт. на$[a,b]$.

4.2. *Теорема об интегрируемости монотонной функции*

f монот. на$[a,b] \Rightarrow f$ инт. на$[a,b]$.

5. *Св–ва инт. Рим. : линейн–сть инт–а, аддит–сть инт. относит. пред. инт–я, монотон–сть инт.*

Т. (лин–сть инт.) : $f, g \in \mathfrak{R}[a,b], c \in \mathbb{R} \Rightarrow f + g, cf \in \mathfrak{R}[a,b],\ \int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
и $\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$. | Т. (адд–сть инт.) : Пусть $a < c < b$, тогда $f \in \mathfrak{R}[a,b] \Leftrightarrow f \in \mathfrak{R}[a,c]$
и $f \in \mathfrak{R}[c,b], \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. | Т. (мон–сть инт.) : $f, g \in \mathfrak{R}[a,b], \forall x \in [a,b]\ f(x) \le g(x)$
$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$. | След–е 1 : $f \in \mathfrak{R}[a,b], \forall x\ f(x) \ge 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ge 0$. След–е 2 : $f \in \mathfrak{R}[a,b] \Rightarrow$
$\Rightarrow |\int_a^b f(x)dx| \le \int_a^b |f(x)|dx \le sup_{x \in [a,b]} |f(x)|(b - a)$ | Т. (Перв. Т. о среднем для инт–а.) :
$f, g \in \mathfrak{R}[a,b], g(x) \ge 0\ (g(x) \le 0)\ \forall x \in [a,b], M = sup_{x \in [a,b]} f(x), m = inf_{x \in [a,b]} f(x) \Rightarrow \exists \mu \in [m, M]$:
$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$. | Т. (Операции над интегрируемыми функциями.)
$f, g \in \mathfrak{R}[a,b] \Rightarrow |f|, f \cdot g \in \mathfrak{R}[a,b], \frac{f}{g} \in \mathfrak{R}[a,b]$ при усл. $\exists c > 0\ \forall x \in [a,b]\ |g(x)| \ge c$.
Замеч–е : Из инт–сти $|f|$ не следует инт–сть f.

6. *Непрерывность интеграла по верхнему пределу интегрирования.*

$f \in \mathfrak{R}[a,b] \Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t)dt$ непр. на$[a,b]$.

7. *Дифф–сть интеграла по верхнему пределу интегрирования. Ф–ла Ньютона–Лейбница*

$f \in \mathfrak{R}[a,b]$ непр. в т. $x_0 \in [a,b] \Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t)dt$ дифф. в т. x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$.
Т. (ф–ла Н–Л) : f непр. на $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$, где Φ – произвольн. первообразная f

8. *Интегрирование по частям и замена переменной в интеграле Римана.*

Т. (ф–ла инт–я по частям) : $u(x), v(x)$ непр. дифф. на $[a,b] \Rightarrow \int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int_a^b v(x)u'(x)dx$
Т. (ф–ла замены перем.) : f непр. на $[a,b]$, g имеет непр. производную на $[\alpha, \beta]$, $min_{t \in [\alpha,\beta]} g(t) = g(\alpha) = a$,
$max_{t \in [\alpha,\beta]} g(t) = g(\beta) = b \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t)) \cdot g'(t)dt$

9. *Несобств. инт. Римана 2–х типов и их простейш. св–ва. Крит. Коши сход–ти несобств. инт.*

Пусть f опр. на $[a, +\infty), \forall b \in [a, +\infty)\ f \in \mathfrak{R}[a,b]$. $\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$ наз. несобств. инт.1–го рода,
если он сущ. и конечен. Обозн. : $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. При этом несобств. инт. сходится. Аналогично
определяют $\int_{-\infty}^b f(x)dx$. | Пусть f опр. на $[a, B)$, неогр. в $O(B)$ и $\forall b \in [a, B)\ f \in \mathfrak{R}[a,b]$.
$\lim_{b \to B-0} \int_a^b f(x)dx$, наз. несобств. инт.2–го рода, если он сущ. и конечен. Обозн. : $\int_a^B f(x)dx$.
При этом несобств. инт. сход. | Пусть f опр. на $[a, \omega)$ и $\forall [a,b] \subset [a, \omega)\ f \in \mathfrak{R}[a,b]$. Тогда : $\int_a^\omega f(x)dx :=$
$:= \lim_{b \to \omega} \int_a^b f(x)dx$. | Т. (св–ва несобст. инт. Римана.) : $\int_a^\omega f(x)dx$ и $\int_a^\omega g(x)dx$ сход., тогда :
a)$\omega \in \mathbb{R},\ f \in \mathfrak{R}[a, \omega] \Rightarrow$ знач–я $\int_a^\omega f(x)dx$ в несобств. и собств. смысле равны. b)$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
ф–ция $\lambda_1 f + \lambda_2 g$инт. в несобств. смысле и $\int_a^\omega (\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x))dx = \lambda_1 \int_a^\omega f(x)dx + \lambda_2 \int_a^\omega g(x)dx$.
c) $c \in [a, \omega) \Rightarrow \int_a^\omega f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^\omega f(x)dx$. | Т. (крит. Коши сход–ти несобст. инт.) :
$\int_a^\omega f(x)dx$ сход. $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists B \in [a, \omega)\ \forall b_1, b_2 \in (B, \omega)\ |\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx| < \epsilon$.

10. *Абс. сход–ть несобст. инт., связь со сход–ю. Призн. мажорац. и сравн–я сход–ти несобст. инт–ов.*

$\int_a^\omega f(x)dx$ абс. сход. если $\int_a^\omega |f(x)|dx$ сход. | Т. (о сход–ти абс. сход. инт.) : $\int_a^\omega f(x)dx$ абс. сход. $\Rightarrow$ он сход.
Т. $\exists \lim_{b \to \omega} F(b)$ конечен $\Leftrightarrow F$ огр. на $[a, \omega)$. | Т. (призн. мажорации) : $\forall x \in [a, \omega)\ 0 \le f(x) \le g(x)$ и
$\int_a^\omega g(x)dx$ сход. $\Rightarrow \int_a^\omega f(x)dx$ сход. Если $\int_a^\omega f(x)dx$ расход. $\Rightarrow \int_a^\omega g(x)dx$ расход. | Т. (призн. сравн–я
сход–ти) : $\forall x \in [a, \omega)\ f(x) \ge 0, g(x) \ge 0$ и $\lim_{x \to \omega}(f(x)/g(x)) = A,\ 0 < a < +\infty \Rightarrow \int_a^\omega f(x)dx$ и
$\int_a^\omega g(x)dx$ одновременно сход. или расход.