Série IV

Logique des prédicats du Premier ordre

Exercice 1 Série IV

- 1. Montrer la validité des formules suivantes
- ■ $\forall x P(x) \rightarrow P(y)$
- ■ $\forall x\ \alpha(x) \rightarrow \alpha(t)$ (t libre pour x dans α.)
- ■ $\beta(y) \rightarrow \exists x \beta(x)$ (y libre pour x dans α).
- ■ $\forall x\ (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \forall x \beta)$ (α ne contient pas d'occurrence libre de x)
- ■ $\forall x\ (\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\forall x\ \alpha) \wedge (\forall x\ \beta)$
- ■ $\forall x\ \forall y P(x,y) \rightarrow P(x,x)$

Exercice 1 Série IV

- 1. Montrer la validité des formules suivantes
- ■ $\forall x P(x) \rightarrow P(y)$
- Pour montrer $\models \forall x P(x) \rightarrow P(y)$,
- On suppose qu'il existe une interprétation $\mathbb{I}$ de domaine D et une valuation v
- $\mathbb{I} \not\models (\forall x P(x) \rightarrow P(y))_v$ donc
- $\mathbb{I} \models \neg (\forall x P(x) \rightarrow P(y))_v$
- $\mathbb{I} \models (\forall x P(x) \wedge \neg P(y))_v$ donc $\mathbb{I} \models (\forall x P(x))_v$ et $\mathbb{I} \models (\neg P(y))_v$
- donc $\mathbb{I} \models (P(x))_{v[x=d]}$ pour tout $d \in D$ et $\mathbb{I} \models (\neg P(y))_{v\ [y=d1]}$ $d1 \in D$
- on obtient donc : $\mathbb{I}(p)(d)$ pour tout $d \in D$ (1) et non $\mathbb{I}(p)(d1)$ (2)
- $\mathbb{I}(p)(d)$ pour tout $d \in D$ (1), pour d=d1, on obtient $\mathbb{I}(p)(d1)$, contradiction avec (2)
- D'où $\models \forall x P(x) \rightarrow P(y)$

Exercice 1 Série IV

- 1. Montrer la validité des formules suivantes
- ■ $\beta(y) \rightarrow \exists x \beta(x)$ (y libre pour x dans β).
- Pour montrer $\models \beta(y) \rightarrow \exists x \beta(x)$ (y libre pour x dans β).
- On suppose qu'il existe une interprétation $\mathbb{I}$ de domaine D et une valuation v
- $\mathbb{I} \not\models (\beta(y) \rightarrow \exists x \beta(x))_v$ (y libre pour x dans β). donc
- $\mathbb{I} \models \neg(\beta(y) \rightarrow \exists x \beta(x))_v$
- $\mathbb{I} \models (\beta(y) \wedge \neg \exists x \beta(x))_v$ donc $\mathbb{I} \models (\beta(y))_v$ et $\mathbb{I} \models (\forall x \neg \beta(x))_v$
-
- donc $\mathbb{I} \models \neg(\beta(x))_{v[x=d]}$ pour tout $d \in D$ et $\mathbb{I} \models (\beta(y))_{v\,[y=d1]}$ $d1 \in D$
- on obtient donc : non $\mathbb{I}(\beta)(d)$ pour tout $d \in D$ (1) et $\mathbb{I}(\beta)(d1)$ (2)
- non $\mathbb{I}(\beta)(d)$ pour tout $d \in D$ (1), pour d=d1,
- on obtient non $\mathbb{I}(\beta)(d1)$ contradiction avec (2)
- D'où $\models \beta(y) \rightarrow \exists x \beta(x)$

Exercice 3 série IV

- . Montrer que les formules suivantes ne sont pas valides.
- $\alpha 1 : \forall x \exists y P(x,y) \rightarrow \exists y P(y,y)$
- $\alpha 2: \forall y P(y,y) \rightarrow \exists x \forall y P(x,y)$
- $\alpha 3: \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (P(x) \rightarrow \forall x Q(x))$
- $\alpha 4: \forall x(P(x) \rightarrow P(x)) \rightarrow (P(x) \rightarrow \forall x P(x))$.

Exercice 3 série IV corrigé

- . Montrer que les formules suivantes ne sont pas valides.
- Il suffit de trouver une interprétation I de domaine D et une valuation v qui ne satisfait pas les formules

- $\alpha 1$: $\forall x \exists y P(x,y) \rightarrow \exists y P(y,y)$
- I_1: { D= ℝ; I(P) : « …>….. »} ; I'_1: { D= ℝ; I(P) : « …<….. »}
-
- $\alpha 2$: $\forall y P(y,y) \rightarrow \exists x \forall y P(x,y)$
- I_2: { D= ℝ; I(P) : « …=….. »} I'_2: { D= {2,3,4}; I(P) : «y est multiple de x »}

Exercice 3 série IV corrigé

- . Montrer que les formules suivantes ne sont pas valides.
- Il suffit de trouver une interprétation I de domaine D et une valuation v qui ne satisfait pas les formules

- $\alpha 3: \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (P(x) \rightarrow \forall x Q(x))$
- I_3: { D= R; I(P) : «EST PAIR », I(Q): ..EST DIVISIBLE PAR 2…., v(x)=2}
- I'_3: { D= N-{2}; I(P) : «…est premier», I(Q): .. Est impaire, v(x)=3}

- $\alpha 4: \forall x(P(x) \rightarrow P(x)) \rightarrow (P(x) \rightarrow \forall x P(x))$.
- I_4: { D= R; I(P) : «…..EST PAIR »; v(x)=2} I'_4: { D= N; I(P) : «…..X EST PREMIER »; v(x)=7}

Exercice 2 série IV corrigé

- Indiquer pour chacune des formules suivantes si elle est est satisfiable, valide, ou non satisfiables :
-
- $\alpha_1) \forall x \forall y (P(x) \land \neg P(y))$ (N.V)+(NS)
- $\alpha_2) \forall x (P(x) \land \neg P(f(x)))$ (N.V)+ n. sat
- $\alpha_3) \forall x \forall y (P(x) \land \neg P(f(y)))$ N.V + n.sat
- $\alpha_4) \forall x (P(x) \lor \neg P(f(x)))$ N.V+ sat
- $\alpha_5) \forall x \forall y (P(x) \lor \neg P(f(y)))$ N.V+ sat
- $\alpha_6) \forall x \exists y (P(x) \land \neg P(f(y)))$ N.V non sat

- β_1 ■ $\exists x \exists y (P(x) \land \neg P(y))$ (N.V)+(S)
- β_2 ■ $\exists x (P(x) \lor \neg P(f(x)))$ valide
- β_3 ■ $\exists x \exists y (P(x) \lor \neg P(f(y)))$ valide
- β_4 ■ $\forall x \exists y (P(x) \land P(y))$ sat
- β_5 ■ $\forall x \exists y (P(x) \land \neg P(y))$ N.V n.sat

Exercice 2 série IV corrigé

- α_3) $\forall x \forall y(P(x) \wedge \neg P(f(y)))$ non satisfiable
- On suppose qu'il existe une interprétation $\mathbb{I}$ de domaine D et valuation v
- $\mathbb{I} \models (\forall x \forall y(P(x) \wedge \neg P(f(y))))_v$ donc
- $\mathbb{I} \models (P(x) \wedge \neg P(f(y)))_{v[x=d;y=d1]}$ pour tout d $\in$ D et pour tout d1 $\in$ D
- donc $\mathbb{I} \models (P(x))_{v[x=d]}$ pour tout d $\in$ D (1) et $\mathbb{I} \models (\neg P(f(y)))_{v\,[y=d1]}$ pour tout d1 $\in$ D (2)
- on obtient donc : $\mathbb{I}$(p)(d) pour tout d $\in$ D (1)
- (2) non I(P)I(f)d1 pour tout d1 $\in$ D ; on pose I(f)d1 =d2; d $\in$ D
- (2) non I(P)d2
- $\mathbb{I}$(p)(d) pour tout d $\in$ D (1), pour d=d2, on obtient $\mathbb{I}$(p)(d2), contradiction avec (2)
- D'où $\forall x \forall y(P(x) \wedge \neg P(f(y)))$ non satisfiable

Exercice 2 série IV corrigé

- α_4) $\forall x(P(x) \vee \neg P(f(x)))$ valide ?
- On suppose qu'il existe une interprétation $\mathbb{I}$ de domaine D et une valuation v
- $\mathbb{I} \mid\neq (\forall x(P(x) \vee \neg P(f(x))))_v$ donc
- $\mathbb{I} \mid= \exists x \neg P(x) \wedge P(f(x))_v$
- donc $\mathbb{I} \mid= \neg(P(x))_{v[x=d]}$ pour au moins $d \in D$ (1) et $\mathbb{I} \mid= (P(f(x)))_{v\,[x=d]}$ (2)
- on obtient donc :non $\mathbb{I}(p)(d)$ pour au moins $d \in D$ (1)
- (2) I(P)I(f)d ; on pose I(f)d =d2 $d \in D$;
- (2) I(P)d2
- pas de contradiction entre (1) et (2) d n'est pas forcément égale à d2 ; non valide

Exercice 2 série IV corrigé

- α_4) $\forall x(P(x) \vee \neg P(f(x)))$ satisfiable?
- I:{D=N*; I(f): identité; I(p): ….est impair}
- une interprétation qui falsifie α_4
- I: {D =N*; I(p) : est pair; I(f): succ} ; I: {D ={2,3}; I(p) : est pair; I(f): 2} ;
- α_5) $\forall x \forall y(P(x) \vee \neg P(f(y)))$
- Satisfiable
- I:{D={2,4,6}; I(f): identité; I(p): ….est pair}
- Non valide, I_2 une interprétation qui falsifie α_5
- I_2:{D=N*; I(f): succ; I(p): ….est pair}
- β_4)$\forall x \exists y(P(x) \wedge P(y))$ sat I:{D={2,4,6}; I(p): ….est pair}
- Non valide
- I_2:{D={1,2,4,6}; I(p): ….est pair}

Exercice 2 série IV corrigé

- β_1)$\exists x \exists y(\mathrm{P}(x) \wedge \neg \mathrm{P}(y))$ N.V mais satisfiable;
- La formule est satisfaite par I_1
- I_1{D=N; I(p): ….est pair};
- La formule est falsifiée par I_2
- I_2{D={1}; I(p): ….est pair}

Exercice 2 série IV corrigé

- α_6) $\forall x \exists y(P(x) \land \neg P(f(y)))$
- Non satisfiable
- On suppose qu'il existe une interprétation $\mathbb{I}$ de domaine D et une valuation v
- $\mathbb{I} \models (\forall x \exists y(P(x) \land \neg P(f(y))))_v$ donc
- $\mathbb{I} \models (P(x) \land \neg P(f(y)))_{v[x=d;y=d1]}$ pour tout d $\in$ D et pour au moins d1 $\in$ D
- donc $\mathbb{I} \models (P(x))_{v[x=d]}$ pour tout d $\in$ D (1) et $\mathbb{I} \models (\neg P(f(y)))_{v\,[y=d1]}$ pour au moins d1$\in$ D (2)
- on obtient donc : $\mathbb{I}$(p)(d) pour tout d $\in$ D (1)
- (2) non I(P)I(f)(d1) pour tout d1$\in$ D ; on pose I(f)d1 =d2;
- (2) non I(P)(d2)
- $\mathbb{I}$(p)(d) pour tout d $\in$ D (1), pour d=d2, on obtient $\mathbb{I}$(p)(d2), contradiction avec (2)
- D'où $\forall x \exists y(P(x) \land \neg P(f(y)))$ est non satisfiable

Exercice 2 série IV corrigé

- β_2) $\exists\, x(P(x) \vee \urcorner P(f(x)))$

Valide

- On suppose qu'il existe une interprétation $\mathbb{I}$ de domaine D et valuation v
- $\mathbb{I} \mid\neq (\exists\, x(P(x) \vee \urcorner P(f(x))))_v$ donc
- $\mathbb{I} \mid= \forall x\, (\urcorner\, P(x) \wedge P(f(x)))_v$
- $\mathbb{I} \mid= (\urcorner\, P(x) \wedge P(f(x)))_{v[x=d]}$ pour tout d $\in$ D
- donc $\mathbb{I} \mid= \urcorner(P(x))_{v[x=d]}$ (1) et $\mathbb{I} \mid= (P(f(x)))_{v\,[y=d]}$ pour tout d $\in$ D
- on obtient donc : non $\mathbb{I}$(p)(d) et I(p) I(f)(d) pour tout d $\in$ D (1)
- on pose I(f)d =d2 ;
- (2) non I(P)d2 $\in$ D
- $\mathbb{I}$(p)(d) pour tout d $\in$ D (1), pour d=d2, on obtient $\mathbb{I}$(p)(d2), contradiction avec (2)
- D'où β_2 est valide

Exercice 4 série IV corrigé

Vérifier la validité des propositions suivantes ?

- α_1 : $P(x) \to Q(x), P(x) \models Q(x)$ valide
- α_2 : $Q(y) \models \forall x\,(P(x) \to Q(y))$ valide
- α_3 : $P(x) \models \exists x P(x)$ valide
- α_4 : $\models P(x) \vee \urcorner P(y)$ N.V

- β_1 ■ $Q(x) \models \forall x\,(P(x) \to Q(x))$ N.V
- β_2 ■ $\forall x \exists y P(x, y) \models \exists y \forall x\, P(x,y)$ N.V
- β_3 ■ $\exists x P(x) \models P(x)$ non valide
- β_4 ■ $\models \forall x \forall y (P(x) \vee \urcorner P(y))$ non valide

Exercice 4 série IV corrigé

Vérifier la validité des propositions suivantes ?

- α_1 : P(x) → Q(x), P(x) |= Q(x) valide
- $\alpha_1 : \alpha_{11} \models \alpha_{12}$
- On suppose qu'il existe une interprétation I de domaine D/
- I |= (P(x) → Q(x))v (1) et I |= (P(x))v (2) et I |= (˥Q(x))v (3)
- (1): I |= (P(x) → Q(x))v[x=d]

Exercice 4 série IV corrigé

- α_2 : $Q(y) \models \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(y))$
- Valide
- On suppose qu'il existe une interprétation I et une fonction de valuation v

- $I \models (Q(y))_v$ (1) et $I \not\models (\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(y)))_v$ (2)
- (1): ≡ I(Q)(d) ; d $\in$ D
- (2) ≡ $I \models (\exists x\, P(x) \wedge \neg Q(y))_v$
- (2) ≡ $I \models (P(x) \wedge \neg Q(y))_{v[x=d1,y=d]}$ pour au moins d1 $\in$ D
- (2) ≡ $I \models (P(x))_{v[x=d1]}$ pour au moins d1 $\in$ D et $I \models (\neg Q(y))_{v\,[y=d]}$

- donc (2) ≡ I(P)(d1) pour au moins d1 $\in$ D et non I (Q)(d) (3)
- contradiction (3) avec (1)
- D'où $Q(y) \models \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(y))$

Exercice 4 série IV corrigé

- β_1■ $Q(x) \models \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$
- Non valide; soit I_1
- I_1\{D:\{2,4,6,8\}; I(p): «...est pair »; I(Q): «...est premier »; v(x)=2\}
- β_2■ $\forall x \exists y P(x, y) \models \exists y \forall x\, P(x,y)$ non valide ; Soit I_2
- I_2 : \{D:$\mathbb{R}$; I(p): « ….>…. »\}
- β_3 ■ $\exists x P(x) \models P(x)$ non valide; soit I_3
- I_3 : \{D:N; I(p): » ….est pair », v(x)=3\}
- α_4 :$\models P(x) \vee \neg P(y)$ non valide
- I_4 : \{D:N; I(p): » ….est pair », v(x)=3; v(y)=4\}

Exercice 4 série IV corrigé

- α_3 : $P(x) \models \exists x P(x)$ valide
- On suppose qu'il existe une interprétation $\mathbb{I}$ et une fonction de valuation v
- $\mathbb{I} \models P(x)_v$ (1) et $\mathbb{I} \not\models (\exists x P(x))_v$ (2)donc
- (1) : $\mathbb{I} \models P(x)_{v[x=d}$
- $\mathbb{I} \models (\forall x \neg P(x))_v$ (2)$_;$
- donc $\mathbb{I} \models \neg (P(x))_{v[x=d1]}$ pour tout d1 $\in$ D (2)
- on obtient donc : $\mathbb{I}$(p)(d) ; d $\in$ D (1)
- (2) non I(P)d1 pour tout d1$\in$ D ;
- (2): pour d1=d, on obtient non $\mathbb{I}$(p)(d), contradiction avec (1)
- D'où $P(x) \models \exists x P(x)$ valide

Exercice 6 série IV corrigé

- **6. Vérifier la validité des formules suivantes :**
- $P(x, y) \to P(y, x), P(x, y) \to (P(y, z) \to P(x,z)) \models P(x,x)$ N.V
- $(\forall x P(x)) \land Q(x) \to \forall x\, (P(x) \land Q(x))$ N.V
- $(\forall x P(x) \to Q(y)) \to \forall x\, (P(x) \to Q(y))$ N.V
- $\forall x\, (P(x) \to Q(y)) \to (\forall x\, P(x) \to Q(y))$ N.V
- I{D={personne1,personne2,personne3}; I(P): …..est frère de ….}
- $(\forall x P(x)) \land Q(x) \to \forall x\, (P(x) \land Q(x))$;
- I:{D={2,4,6,8}; I(P):…est pair, I(Q):…est divisible par 4; v(x)=4}

Exercice 6 série IV corrigé

- **6. Vérifier la validité des formules suivantes :**
- $(\forall x P(x) \to Q(y)) \to \forall x\, (P(x) \to Q(y))$ N. V
- $\forall x\, (P(x) \to Q(y)) \to (\forall x\, P(x) \to Q(y))$ N.V
- I{D={personne1,personne2,personne3}; I(P): …..est frère de ….}
- $(\forall x P(x)) \land Q(x) \to \forall x\, (P(x) \land Q(x))$;
- I:{D={2,4,6,8}; I(P):…est pair, I(Q):…est divisible par 4; v(x)=4}

Exercice 6 série IV corrigé

- $\forall x P(x) \rightarrow Q(y)) \rightarrow \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(y))$
- $|= \forall x P(x) \rightarrow Q(y)) \rightarrow \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(y))$
- $|= \neg(\forall x P(x) \rightarrow Q(y)) \rightarrow \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(y)))$
- $|= (\forall x P(x) \rightarrow Q(y)) \wedge \neg \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(y)))$
- $|= (\forall x P(x) \rightarrow Q(y))$ (1) et $|= \neg \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(y)))$ (2)
- (1): Si $|= (\forall x P(x)$ alors $|= Q(y))$
- (1): Si $|= P(x) v[x=d]$ pour tout $d \in D$ alors $I(Q)\, (d1)$ avec $d1 \in D$
- (2): $|= \exists x P(x)$ et $|= \neg\, Q(y) v[y=d1]$
- (2): $I(P)(d2)$ pour au moins $d2 \in D$ et non $I(Q)(d1)$

Exercice 6 série IV corrigé

- $\forall x P(x) \rightarrow Q(y)) \rightarrow \forall x\ (P(x) \rightarrow Q(y))$
- (2): I(P)(d2) pour au moins d2 $\in$ D et non I(Q)(d1)
- Pas de contradiction donc la formule n'est pas valide
- On cherche I qui falsifie I
- I{D=N, I (P): ..est pair, I(Q): …est impair, v(y)=2}
- $\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(y)) \rightarrow (\forall x\ P(x) \rightarrow Q(y))$ N.V
- I{D=N, I (P): ..est divisible par 1, I(Q): …est impair, v(y)=2}
- I{D=N, I (P): ..est pair, I(Q): …est impair, v(y)=2}

Exercice 8 série IV corrigé

- Donner un modèle de l'ensemble de formules Γ tel que :
- Γ **: {**$P(x, y) \rightarrow P(y, x)$, $P(x, y) \rightarrow (P(y, z) \rightarrow P(x,z))$**}**
- **I:{D=N; I(P): "…=…"}**

Exercice 9 série IV corrigé

- **9.** On considère les ensembles
- Γ : {$\exists x P(x,y)$, $\exists y P(x,y)$} et Γ' : {$\forall x \exists y P(x,y)$, $\exists y \forall x\ P(x,y)$}.
- Donner un modèle de Γ et de Γ ‘ ;
- **I:{D={1,2,3,4,5}; I(P): “…<=…”}**
- **I:{D=N; I(P): “…est multiple de…”}**
- Vérifier la validité de la proposition suivante : $\exists x P(x,y) \models \exists y P(x,y)$.
- **I:{D={1,2,4}; I(P): “…<…” v(y)=2, v(x)=4}**
- **I:{D={1,2}; I(P): “…<…” v(y)=2, v(x)=2}**

Exercice 9 série IV corrigé

- **10.** Donner un modèle de l'ensemble Γ : $\{\forall x P(x,y) , \forall y P(x,y)\}$.
- **I:{D={1}; I(P):”…=….”}**

Exercice 11 série IV corrigé

11. Vérifier la validité des propositions suivantes :

- **$\models \forall x P(x,y) \rightarrow \forall y P(x,y)$ valide? Non valide**
- I: {D=N, I(p)"…>=...", v(y)= 0 , v(x)=0}
- I: {D=N*, I(p)"…est multiple de...", v(y)= 1 , v(x)=5}

- **$\forall x P(x,y) \models \forall y P(x,y)$. Valide? Non valide**
- I: {D=N, I(p)"…>=...", v(y)= 0 , v(x)=0}
- I: {D=N*, I(p)"…est multiple de...", v(y)= 1 , v(x)=5}

Exercice 9 série IV corrigé

11. Vérifier la validité des propositions suivantes :

- $\forall x P(x), P(x) \rightarrow Q(y) \models Q(y)$ valide