

语法分析

(1. 上下文无关文法)

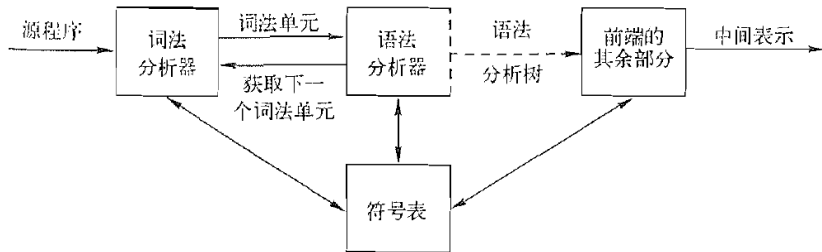
魏恒峰

hfwei@nju.edu.cn

2021 年 11 月 16 日



输入: 词法单元流 & 语言的语法规则



输出: 语法分析树 (Parse Tree)

语法分析举例

$\langle \text{Stmt} \rangle \rightarrow \langle \text{Id} \rangle = \langle \text{Expr} \rangle ;$
$\langle \text{Stmt} \rangle \rightarrow \{ \langle \text{StmtList} \rangle \}$
$\langle \text{Stmt} \rangle \rightarrow \text{if} (\langle \text{Expr} \rangle) \langle \text{Stmt} \rangle$
$\langle \text{StmtList} \rangle \rightarrow \langle \text{Stmt} \rangle$
$\langle \text{StmtList} \rangle \rightarrow \langle \text{StmtList} \rangle \langle \text{Stmt} \rangle$
$\langle \text{Expr} \rangle \rightarrow \langle \text{Id} \rangle$
$\langle \text{Expr} \rangle \rightarrow \langle \text{Num} \rangle$
$\langle \text{Expr} \rangle \rightarrow \langle \text{Expr} \rangle \langle \text{Optr} \rangle \langle \text{Expr} \rangle$
$\langle \text{Id} \rangle \rightarrow x$
$\langle \text{Id} \rangle \rightarrow y$
$\langle \text{Num} \rangle \rightarrow 0$
$\langle \text{Num} \rangle \rightarrow 1$
$\langle \text{Num} \rangle \rightarrow 9$
$\langle \text{Optr} \rangle \rightarrow >$
$\langle \text{Optr} \rangle \rightarrow +$

		$\langle \text{Stmt} \rangle$
if ($\langle \text{Expr} \rangle$	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if ($\langle \text{Expr} \rangle \langle \text{Optr} \rangle \langle \text{Expr} \rangle$	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if ($\langle \text{Id} \rangle \langle \text{Optr} \rangle \langle \text{Expr} \rangle$	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if ($x \langle \text{Optr} \rangle \langle \text{Expr} \rangle$	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if ($x > \langle \text{Expr} \rangle$	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if ($x > \langle \text{Num} \rangle$	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if ($x > 9$	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if ($x > 9$	{ $\langle \text{StmtList} \rangle$ }
if ($x > 9$	{ $\langle \text{StmtList} \rangle \langle \text{Stmt} \rangle$ }
if ($x > 9$	{ $\langle \text{Stmt} \rangle$ }
if ($x > 9$	{ $\langle \text{Id} \rangle = \langle \text{Expr} \rangle ;$ }
if ($x > 9$	{ $x = \langle \text{Expr} \rangle ;$ }
if ($x > 9$	{ $x = \langle \text{Num} \rangle ;$ }
if ($x > 9$	{ $x = 0 ;$ }
if ($x > 9$	{ $x = 0 ; \langle \text{Id} \rangle = \langle \text{Expr} \rangle ;$ }
if ($x > 9$	{ $x = 0 ; y = \langle \text{Expr} \rangle ;$ }
if ($x > 9$	{ $x = 0 ; y = \langle \text{Expr} \rangle \langle \text{Optr} \rangle \langle \text{Expr} \rangle ;$ }
if ($x > 9$	{ $x = 0 ; y = \langle \text{Id} \rangle \langle \text{Optr} \rangle \langle \text{Expr} \rangle ;$ }
if ($x > 9$	{ $x = 0 ; y = y \langle \text{Optr} \rangle \langle \text{Expr} \rangle ;$ }
if ($x > 9$	{ $x = 0 ; y = y + \langle \text{Expr} \rangle ;$ }
if ($x > 9$	{ $x = 0 ; y = y + \langle \text{Num} \rangle ;$ }
if ($x > 9$	{ $x = 0 ; y = y + 1 ;$ }

语法分析阶段的主题之一: 上下文无关文法

$\langle \text{Stmt} \rangle \rightarrow \langle \text{Id} \rangle = \langle \text{Expr} \rangle ;$
 $\langle \text{Stmt} \rangle \rightarrow \{ \langle \text{StmtList} \rangle \}$
 $\langle \text{Stmt} \rangle \rightarrow \text{if} (\langle \text{Expr} \rangle) \langle \text{Stmt} \rangle$
 $\langle \text{StmtList} \rangle \rightarrow \langle \text{Stmt} \rangle$
 $\langle \text{StmtList} \rangle \rightarrow \langle \text{StmtList} \rangle \langle \text{Stmt} \rangle$
 $\langle \text{Expr} \rangle \rightarrow \langle \text{Id} \rangle$
 $\langle \text{Expr} \rangle \rightarrow \langle \text{Num} \rangle$
 $\langle \text{Expr} \rangle \rightarrow \langle \text{Expr} \rangle \langle \text{Optr} \rangle \langle \text{Expr} \rangle$
 $\langle \text{Id} \rangle \rightarrow x$
 $\langle \text{Id} \rangle \rightarrow y$
 $\langle \text{Num} \rangle \rightarrow 0$
 $\langle \text{Num} \rangle \rightarrow 1$
 $\langle \text{Num} \rangle \rightarrow 9$
 $\langle \text{Optr} \rangle \rightarrow >$
 $\langle \text{Optr} \rangle \rightarrow +$

语法分析阶段的主题之二: 构建语法分析树

$\langle \text{Stmt} \rangle$			
if ($\langle \text{Expr} \rangle$)	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if ($\langle \text{Expr} \rangle$ $\langle \text{Optr} \rangle$ $\langle \text{Expr} \rangle$)	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if ($\langle \text{Id} \rangle$ $\langle \text{Optr} \rangle$ $\langle \text{Expr} \rangle$)	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if (x $\langle \text{Optr} \rangle$ $\langle \text{Expr} \rangle$)	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if (x > $\langle \text{Expr} \rangle$)	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if (x > $\langle \text{Num} \rangle$)	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if (x > 9)	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if (x > 9	{	$\langle \text{StmtList} \rangle$ }
if (x > 9	{	$\langle \text{StmtList} \rangle$ $\langle \text{Stmt} \rangle$ }
if (x > 9	{	$\langle \text{Stmt} \rangle$ $\langle \text{Stmt} \rangle$ }
if (x > 9	{	$\langle \text{Id} \rangle = \langle \text{Expr} \rangle ;$ $\langle \text{Stmt} \rangle$ }
if (x > 9	{	x = $\langle \text{Expr} \rangle ;$ $\langle \text{Stmt} \rangle$ }
if (x > 9	{	x = $\langle \text{Num} \rangle ;$ $\langle \text{Stmt} \rangle$ }
if (x > 9	{	x = 0 $\langle \text{Stmt} \rangle$ }
if (x > 9	{	x = 0 ; $\langle \text{Id} \rangle = \langle \text{Expr} \rangle ;$ }
if (x > 9	{	x = 0 ; y = $\langle \text{Expr} \rangle ;$ }
if (x > 9	{	x = 0 ; y = $\langle \text{Expr} \rangle \langle \text{Optr} \rangle \langle \text{Expr} \rangle ;$ }
if (x > 9	{	x = 0 ; y = $\langle \text{Id} \rangle \langle \text{Optr} \rangle \langle \text{Expr} \rangle ;$ }
if (x > 9	{	x = 0 ; y = y $\langle \text{Optr} \rangle \langle \text{Expr} \rangle ;$ }
if (x > 9	{	x = 0 ; y = y + $\langle \text{Expr} \rangle ;$ }
if (x > 9	{	x = 0 ; y = y + $\langle \text{Num} \rangle ;$ }
if (x > 9	{	x = 0 ; y = y + 1 ; }

语法分析阶段的主题之三: 错误恢复



报错、恢复、继续分析



<Context-Free Grammar>

上下文无关文法

Definition (Context-Free Grammar (CFG); 上下文无关文法)

上下文无关文法 G 是一个四元组 $G = (T, N, P, S)$:

- ▶ T 是**终结符号** (Terminal) 集合, 对应于词法分析器产生的词法单元;
- ▶ N 是**非终结符号** (Non-terminal) 集合;
- ▶ P 是**产生式** (Production) 集合;

$$A \in N \longrightarrow \alpha \in (T \cup N)^*$$

头部/左部 (Head) A : **单个**非终结符

体部/右部 (Body) α : 终结符与非终结符构成的串, 也可以是空串 ϵ

- ▶ S 为**开始** (Start) 符号。要求 $S \in N$ 且唯一。

$$G = (\{a, b\}, \{S\}, P, S)$$

$$S \rightarrow aSb$$

$$S \rightarrow \epsilon$$

$$G = (\{(,)\}, \{S\}, P, S)$$

$$S \rightarrow SS$$

$$S \rightarrow (S)$$

$$S \rightarrow ()$$

$$S \rightarrow \epsilon$$

$stmt \rightarrow$ if $expr$ then $stmt$
| if $expr$ then $stmt$ else $stmt$
| other

条件语句文法

悬空 (Dangling)-else 文法

$S \rightarrow \text{if } E \text{ then } S \text{ else } S$

$S \rightarrow \text{begin } S L$

$S \rightarrow \text{print } E$

$L \rightarrow \text{end}$

$L \rightarrow ; S L$

$E \rightarrow \text{num} = \text{num}$

约定: 如果没有明确指定, 第一个产生式的头部就是开始符号

关于终结符号的约定

1) 下述符号是终结符号:

- ① 在字母表里排在前面的小写字母, 比如 a 、 b 、 c 。
- ② 运算符号, 比如 $+$ 、 $*$ 等。
- ③ 标点符号, 比如括号、逗号等。
- ④ 数字 0 、 1 、 \dots 、 9 。
- ⑤ **黑体字符串**, 比如 **id** 或 **if**。每个这样的字符串表示一个终结符号。

关于非终结符号的约定

2) 下述符号是非终结符号:

- ① 在字母表中排在前面的大写字母, 比如 A 、 B 、 C 。
- ② 字母 S 。它出现时通常表示开始符号。
- ③ 小写、斜体的名字, 比如 $expr$ 或 $stmt$ 。



Syntax

Semantics

语义：上下文无关文法 G 定义了一个**语言** $L(G)$

语言是**串**的集合

串从何来？

推导 (Derivation)

$$E \rightarrow E + E \mid E * E \mid (E) \mid -E \mid \mathbf{id}$$

推导即是将某个产生式的左边**替换**成它的右边

每一步推导需要选择**替换哪个非终结符号**, 以及**使用哪个产生式**

推导 (Derivation)

$$E \rightarrow E + E \mid E * E \mid (E) \mid -E \mid \mathbf{id}$$

$$E \Longrightarrow -E \Longrightarrow -(E) \Longrightarrow -(E + E) \Longrightarrow -(\mathbf{id} + E) \Longrightarrow -(\mathbf{id} + \mathbf{id})$$

$E \Longrightarrow -E$: 经过一步推导得出

$E \stackrel{+}{\Longrightarrow} -(\mathbf{id} + E)$: 经过一步或多步推导得出

$E \stackrel{*}{\Longrightarrow} -(\mathbf{id} + E)$: 经过零步或多步推导得出

$$E \Longrightarrow -E \Longrightarrow -(E) \Longrightarrow -(E + E) \Longrightarrow -(E + \mathbf{id}) \Longrightarrow -(\mathbf{id} + \mathbf{id})$$

Definition (Sentential Form; 句型)

如果 $S \xRightarrow{*} \alpha$, 且 $\alpha \in (T \cup N)^*$, 则称 α 是文法 G 的一个**句型**。

$$E \rightarrow E + E \mid E * E \mid (E) \mid -E \mid \mathbf{id}$$

$$E \Longrightarrow -E \Longrightarrow -(E) \Longrightarrow -(E+E) \Longrightarrow -(\mathbf{id} + E) \Longrightarrow -(\mathbf{id} + \mathbf{id})$$

Definition (Sentence; 句子)

如果 $S \xRightarrow{*} w$, 且 $w \in T^*$, 则称 w 是文法 G 的一个**句子**。

Definition (文法 G 生成的语言 $L(G)$)

文法 G 的**语言** $L(G)$ 是它能推导出的**所有句子**构成的集合。

$$w \in L(G) \iff S \xRightarrow{*} w$$

关于文法 G 的**两个基本问题**:

- ▶ **Membership 问题**: 给定字符串 $x \in T^*$, $x \in L(G)$?
- ▶ $L(G)$ 究竟是什么?

给定字符串 $x \in T^*$, $x \in L(G)$?

(即, 检查 x 是否符合文法 G)

这就是**语法分析器**的任务:

为输入的词法单元流寻找推导、**构建语法分析树**, 或者报错

根节点是文法 G 的起始符号

$\langle \text{Stmt} \rangle$			
if ($\langle \text{Expr} \rangle$)	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if ($\langle \text{Expr} \rangle$	$\langle \text{Optr} \rangle$ $\langle \text{Expr} \rangle$	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if ($\langle \text{Id} \rangle$	$\langle \text{Optr} \rangle$ $\langle \text{Expr} \rangle$	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if (\underline{x}	$\langle \text{Optr} \rangle$ $\langle \text{Expr} \rangle$	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if (x	$>$ $\langle \text{Expr} \rangle$	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if (x	$>$ $\langle \text{Num} \rangle$	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if (x	$>$ $\underline{9}$	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if (x	$>$ $\underline{9}$	$\langle \text{StmtList} \rangle$
if (x	$>$ $\underline{9}$	{ $\langle \text{StmtList} \rangle$ $\langle \text{Stmt} \rangle$ }
if (x	$>$ $\underline{9}$	{ $\langle \text{Stmt} \rangle$ $\langle \text{Stmt} \rangle$ }
if (x	$>$ $\underline{9}$	{ $\underline{\langle \text{Id} \rangle} = \langle \text{Expr} \rangle ;$ $\langle \text{Stmt} \rangle$ }
if (x	$>$ $\underline{9}$	{ $\underline{x} = \langle \text{Expr} \rangle ;$ $\langle \text{Stmt} \rangle$ }
if (x	$>$ $\underline{9}$	{ $x = \underline{\langle \text{Num} \rangle} ;$ $\langle \text{Stmt} \rangle$ }
if (x	$>$ $\underline{9}$	{ $x = \underline{0} ;$ $\langle \text{Stmt} \rangle$ }
if (x	$>$ $\underline{9}$	{ $x = 0 ;$ $\underline{\langle \text{Id} \rangle} = \langle \text{Expr} \rangle ;$ }
if (x	$>$ $\underline{9}$	{ $x = 0 ;$ $y = \langle \text{Expr} \rangle ;$ }
if (x	$>$ $\underline{9}$	{ $x = 0 ;$ $y = \underline{\langle \text{Expr} \rangle} \langle \text{Optr} \rangle \langle \text{Expr} \rangle ;$ }
if (x	$>$ $\underline{9}$	{ $x = 0 ;$ $y = \underline{\langle \text{Id} \rangle} \langle \text{Optr} \rangle \langle \text{Expr} \rangle ;$ }
if (x	$>$ $\underline{9}$	{ $x = 0 ;$ $y = \underline{y} \langle \text{Optr} \rangle \langle \text{Expr} \rangle ;$ }
if (x	$>$ $\underline{9}$	{ $x = 0 ;$ $y = y + \underline{\langle \text{Expr} \rangle} ;$ }
if (x	$>$ $\underline{9}$	{ $x = 0 ;$ $y = y + \underline{\langle \text{Num} \rangle} ;$ }
if (x	$>$ $\underline{9}$	{ $x = 0 ;$ $y = y + \underline{1} ;$ }

叶子节点是输入的词法单元流

常用的语法分析器以**自顶向下**或**自底向上**的方式构建中间部分

$L(G)$ 是什么?

这是**程序设计语言设计者**需要考虑的问题

$$S \rightarrow SS$$

$$S \rightarrow (S)$$

$$S \rightarrow ()$$

$$S \rightarrow \epsilon$$

$$S \rightarrow aSb$$

$$S \rightarrow \epsilon$$

$$L(G) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

$$L(G) = \{\text{良匹配括号串}\}$$

字母表 $\Sigma = \{a, b\}$ 上的所有回文串 (Palindrome) 构成的语言

$$S \rightarrow aSa$$

$$S \rightarrow bSb$$

$$S \rightarrow a$$

$$S \rightarrow b$$

$$S \rightarrow \epsilon$$

$$S \rightarrow aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \epsilon$$

$$\{b^n a^m b^{2n} \mid n \geq 0, m \geq 0\}$$

$$S \rightarrow bSbb \mid A$$

$$A \rightarrow aA \mid \epsilon$$

$\{x \in \{a, b\}^* \mid x \text{ 中 } a, b \text{ 个数相同}\}$

$$V \rightarrow aVbV \mid bVaV \mid \epsilon$$

$\{x \in \{a, b\}^* \mid x \text{ 中 } a, b \text{ 个数不同}\}$

$$S \rightarrow T \mid U$$
$$T \rightarrow VaT \mid VaV$$
$$U \rightarrow VbU \mid VbV$$
$$V \rightarrow aVbV \mid bVaV \mid \epsilon$$


练习 (非作业): 证明之



L-System

(注: 这不是上下文无关文法, 但精神上高度一致, 并且更有趣)

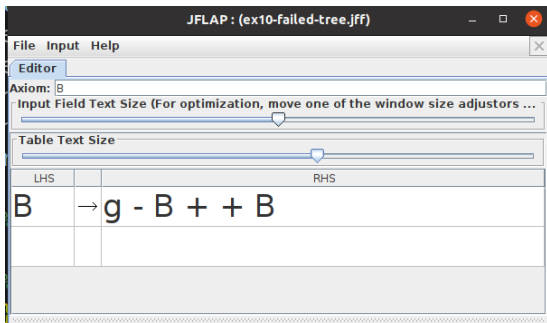
$$g + g + fgg$$

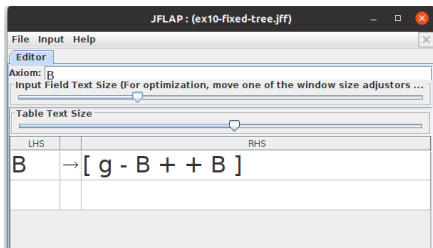
g : Move forward with the pen down

f : Move forward with the pen up

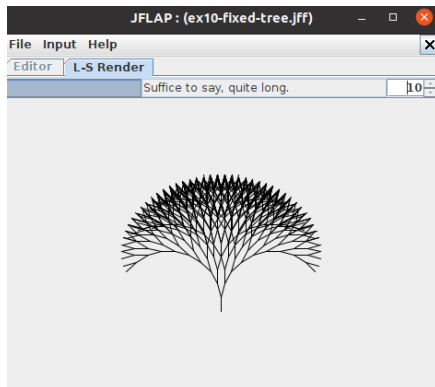
$+$: Turn to its right

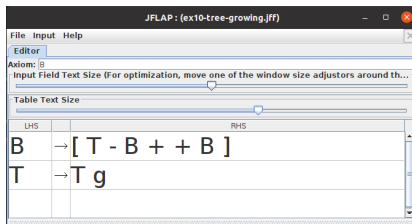
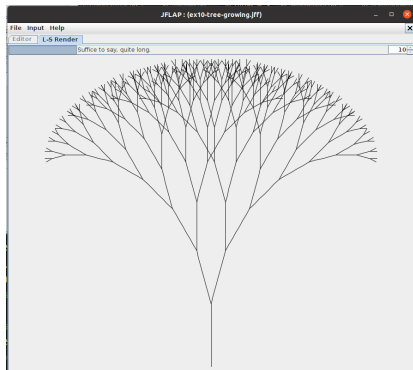
$-$: Turn to its left

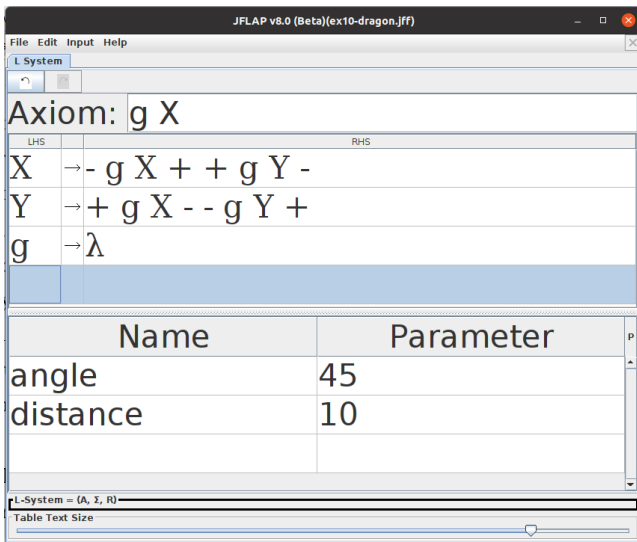


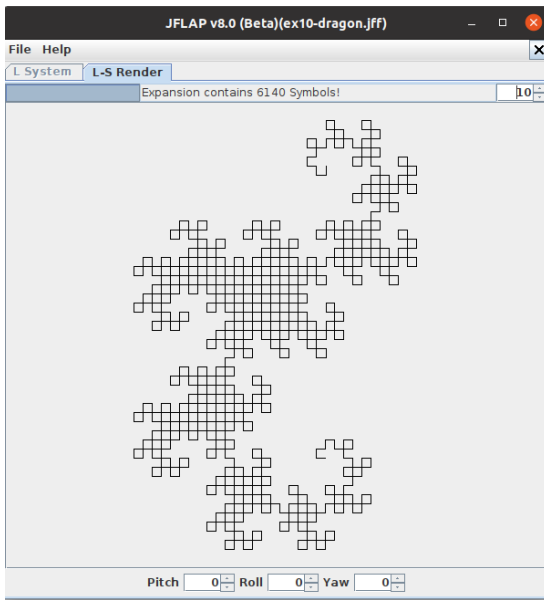


Pushing and Popping









The Dragon Curve

variables : A B

constants : + -

start : A

rules : $(A \rightarrow B-A-B)$, $(B \rightarrow A+B+A)$

angle : 60°

A, B : 向右移动并画线

+: 左转

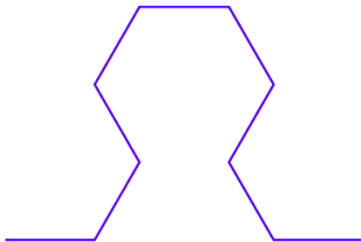
-: 右转

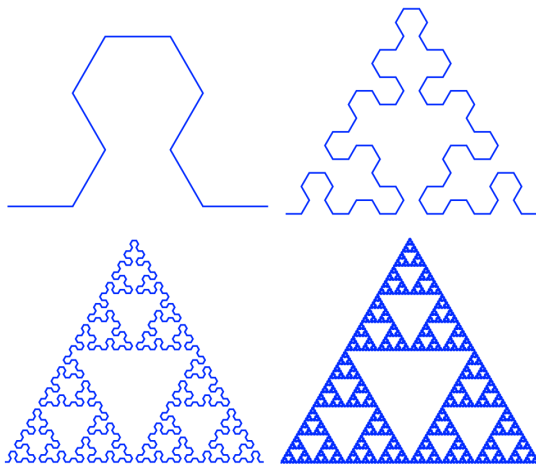
每一步都**并行地**应用**所有**规则

A

$B - A - B$

$A + B + A - B - A - B - A + B + A$





Sierpinski arrowhead curve ($n = 2, 4, 6, 8$)

variables : F G

constants : + -

start : F

rules : $(F \rightarrow F+G), (G \rightarrow F-G)$

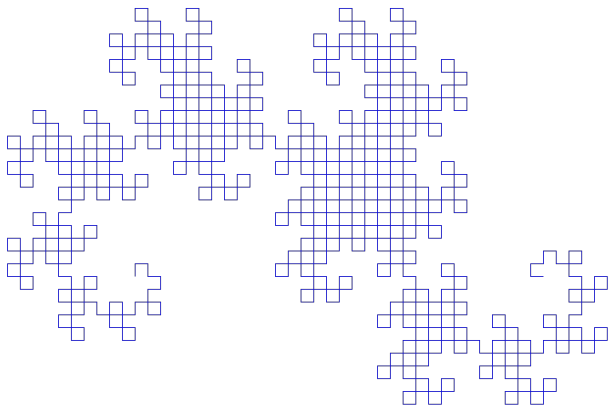
angle : 90°

F, G : 向前移动并画线

+: 左转

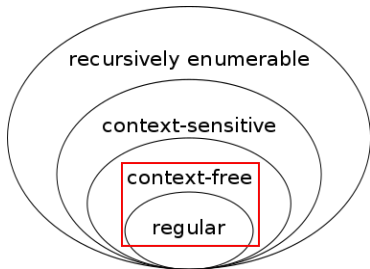
-: 右转

每一步都**并行地**应用**所有**规则



Dragon Curve ($n = 10$)

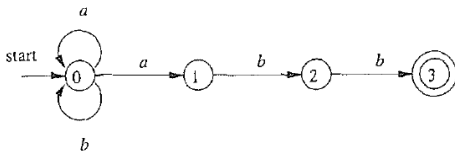
为什么不使用优雅、强大的**正则表达式**描述程序设计语言的语法？



正则表达式的表达能力**严格弱于**上下文无关文法

每个正则表达式 r 对应的语言 $L(r)$ 都可以使用上下文无关文法来描述

$$r = (a|b)^*abb$$



$$\begin{aligned} A_0 &\rightarrow aA_0 \mid bA_0 \mid aA_1 \\ A_1 &\rightarrow bA_2 \\ A_2 &\rightarrow bA_3 \\ A_3 &\rightarrow \epsilon \end{aligned}$$

此外, 若 $\delta(A_i, \epsilon) = A_j$, 则添加 $A_i \rightarrow A_j$

$$S \rightarrow aSb$$

$$S \rightarrow \epsilon$$

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

该语言**无法**使用正则表达式来描述

Theorem

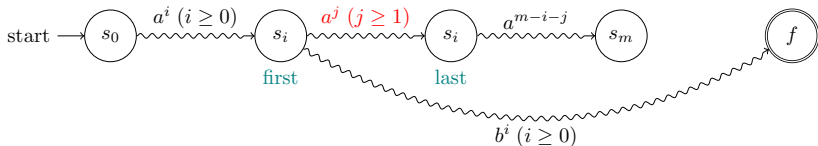
$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ 无法使用正则表达式描述。

反证法

假设存在正则表达式 $r: L(r) = L$

则存在有限状态自动机 $D(r): L(D(r)) = L$; 设其状态数为 k

考虑输入 $a^m (m > k)$



$D(r)$ 也能接受 $a^{i+j}b^i$; 矛盾!

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

Pumping Lemma for Regular Languages

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

Pumping Lemma for Context-free Languages

Thank
You!



Office 926

hfwei@nju.edu.cn