ALGEBRA DEL ESPACIO-TIEMPO

Rafael Corella

12/11/2024

Available at sefus10.github.io

ALGEBRA GEOMETRICA

Un algebra geometrica es una extension de un espacio vectorial que incluye el producto geometrico. Sea $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, la multiplicacion en el algebra geometrica esta dada por las relaciones

$$\hat{x}\hat{x} = \hat{y}\hat{y} = \hat{z}\hat{z} = 1$$

$$\hat{x}\hat{y} = -\hat{y}\hat{x}, \quad \hat{x}\hat{z} = -\hat{z}\hat{z}, \quad \hat{y}\hat{z} = -\hat{z}\hat{y}$$

Sean $\vec{u} = a_1\hat{x} + b_1\hat{y} + c_1\hat{z}$, $\quad \vec{v} = a_2\vec{x} + b_2\hat{y} + c_2\hat{z}$, $\quad$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$
Su producto geometrico es

$$
\begin{aligned}
\vec{u}\vec{v} =& (a_1\hat{x} + b_1\hat{y} + c_1\hat{z})(a_2\vec{x} + b_2\hat{y} + c_1\hat{z}) \\
=& a_1\hat{x}(a_2\vec{x} + b_2\hat{y} + c_1\hat{z}) + \\
& b_1\hat{y}(a_2\vec{x} + b_2\hat{y} + c_1\hat{z}) + \\
& c_1\hat{z}(a_2\vec{x} + b_2\hat{y} + c_1\hat{z}) \\
=& a_1a_2\hat{x}\hat{x} + a_1b_2\hat{x}\hat{y} + a_1c_2\hat{x}\hat{z} + \\
& b_1a_2\hat{y}\hat{x} + b_1b_2\hat{y}\hat{y} + b_1c_2\hat{y}\hat{z} + \\
& c_1a_2\hat{z}\hat{x} + c_1b_2\hat{z}\hat{y} + c_1c_2\hat{z}\hat{z}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{u}\vec{v} &= (a_1\hat{x} + b_1\hat{y} + c_1\hat{z})(a_2\vec{x} + b_2\hat{y} + c_1\hat{z}) \\
&= a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + a_1b_2\hat{x}\hat{y} + b_1a_2\hat{y}\hat{x} + \\
&\quad b_1c_2\hat{y}\hat{z} + c_1b_2\hat{z}\hat{y} + a_1c_2\hat{x}\hat{z} + c_1a_2\hat{z}\hat{x}
\end{aligned}
$$

$$\vec{u}\vec{v} = (a_1\hat{x} + b_1\hat{y} + c_1\hat{z})(a_2\vec{x} + b_2\hat{y} + c_1\hat{z})$$

$$= a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + a_1b_2\hat{x}\hat{y} - b_1a_2\hat{x}\hat{y} +$$

$$b_1c_2\hat{y}\hat{z} - c_1b_2\hat{y}\hat{z} + a_1c_2\hat{x}\hat{z} - c_1a_2\hat{x}\hat{z}$$

$$
\begin{aligned}
\vec{u}\vec{v} &= (a_1\hat{x} + b_1\hat{y} + c_1\hat{z})(a_2\vec{x} + b_2\hat{y} + c_1\hat{z}) \\
&= a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + (a_1b_2 - b_1a_2)\hat{x}\,\hat{y} + \\
&\quad (b_1c_2 - c_1b_2)\hat{y}\hat{z} + (a_1c_2 - c_1a_2)\hat{x}\hat{z}
\end{aligned}
$$

En 3 dimensiones y para 1-vectores, el producto geometrico contiene una parte escalar y una parte bivectorial

$$\vec{u}\vec{v} = a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2+(a_1b_2-b_1a_2)\hat{x}\hat{y}+(b_1c_2-c_1b_2)\hat{y}\hat{z}+(a_1c_2-c_1a_2)\hat{x}\hat{z}$$

de donde se obtienen las expresiones

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$$

y

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = (a_1b_2 - b_1a_2)\hat{x}\hat{y} + (b_1c_2 - c_1b_2)\hat{y}\hat{z} + (a_1c_2 - c_1a_2)\hat{x}\hat{z}$$

$$\vec{u}\vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{v}$$

Que son los bivectores

ALGEBRA GEOMETRICA EN 2 DIMENSIONES

Un vector en dos dimensiones se puede respresentar

$$\vec{u} = a\hat{x} + b\hat{y}$$

en el algebra geometrica, trabajamos con multivectores y en dos dimensiones, el multivector mas general se representa

$$V = a + {\color{red}b\hat{x} + c\hat{y}} + {\color{blue}d\hat{x}\hat{y}}$$

ALGREBRA GEOMETRICA EN 2 DIMENSIONES

Los bivectores en el plano solamente tienen una componente $\hat{x}\hat{y}$, entonces todo bivector en el plano tiene la misma direccion, lo unico que los diferencia es su magnitud. Esta es una propiedad de los $n-$vectores en un espacio de dimension n. Por esto, al multivector de mayor grado en algun espacio dado, se le dice *pseudoescalar*

Al pseudo escalar unitario, lo llamaremos

$$i$$

ALGREBRA GEOMETRICA EN 2 DIMENSIONES

El comportamiento de *i* difiere del de un escalar por como se comporta al multiplicar a otros vectores

$$(2\hat{x} + 3\hat{y})i = (2\hat{x} + 3\hat{y})\hat{x}\hat{y} = -3\hat{x} + 2\hat{y}$$
$$i(2\hat{x} + 3\hat{y}) = \hat{x}\hat{y}(2\hat{x} + 3\hat{y}) = 3\hat{x} - 2\hat{y}$$

Vemos que multiplicar por *i* por la derecha, nos da una rotacion de $\frac{\pi}{2}$ a la izquierda y lo opuesto al multiplicar por la izquierda

ALGEBRA GEOMETRICA EN 2 DIMENSIONES

$$i^2 = \hat{x}\hat{y}\hat{x}\hat{y} = -\hat{x}\hat{x}\hat{y}\hat{y} = -1$$

$a + bi$ Es lo que se conoce como un numero complejo

Entonces el producto

$$(a\hat{x} + b\hat{y})(c + di)$$

actua como una multiplicacion compleja, rotando y escalando el vector $a\hat{x} + b\hat{y}$

ALGREBRA GEOMETRICA EN 2 DIMENSIONES

Entonces para expresar una rotacion de un vector por un angulo θ, solo tenemos que encontrar el numero complejo unitario que corresponde a esa fase, en otras palabras, para rotar un vector $\vec{u}$ por un angulo θ, hacemos

$$\vec{u}e^{i\theta}$$

donde la exponenciacion de un bivector esta dada igual que la de un numero complejo

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

ALGREBRA GEOMETRICA EN 2 DIMENSIONES

La direccion de rotacion esta dada por el orden de multiplicacion, multiplicar a la izquierda, produce una rotacion a la derecha y viceversa. Ademas, en la multiplicacion compleja, multiplicar por el complejo conjugado invierte la direccion de la rotacion.
Entonces multiplicar por la derecha con un numero complejo, es lo mismo que multiplicar por la derecha con su conjugado

$$\vec{u}z = z^{*}\vec{u}$$

ALGREBRA GEOMETRICA EN 2 DIMENSIONES

De vuelta al producto geometrico

$$\vec{u}\vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{v}$$

$$\vec{u}\vec{v} = ||\vec{u}||||\vec{v}|| \cos\theta + ||\vec{u}||||\vec{v}|| \sin\theta i$$

$$\vec{u}\vec{v} = ||\vec{u}||||\vec{v}||e^{i\theta}$$

ALGREBRA GEOMETRICA EN 2 DIMENSIONES

Los bivectores representan rotaciones. Si tenemos un vector $\vec{w}$ en el plano y queremos rotarlo por el angulo entre los vectores $\hat{u}$ y $\hat{v}$, simplemente hacemos el producto

$$\vec{w}\hat{u}\hat{v} = \vec{w}e^{i\theta}$$

este producto produce un vector

ALGREBRA GEOMETRICA EN 2 DIMENSIONES

Mas algebra de complejos:

Al cambiar el orden de multiplicacion, obtenemos

$$\vec{u}\vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{v}$$

$$\vec{v}\vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \wedge \vec{v}$$

entonces conmutar el orden corresponde a hacer el complejo conjugado

$$(\vec{u}\vec{v})^* = \vec{v}\vec{u}$$

Luego, de $\vec{u}z = z^*\vec{u}$, se obtiene

$$\vec{w}\vec{u}\vec{v} = \vec{v}\vec{u}\vec{w}$$

ALGEBRA GEOMETRICA EN 3 DIMENSIONES

El algebra geometrica en tres dimensiones estudia los multivectores dados por la combinacion lineal:

$$A = a + b\hat{x} + c\hat{y} + d\hat{z} + e\hat{x}\hat{y} + f\hat{y}\hat{z} + g\hat{x}\hat{z} + h\hat{x}\hat{y}\hat{z}$$

ALGEBRA GEOMETRICA EN 3 DIMENSIONES

Asi como en dos dimensiones, en tres dimensiones, los trivectores, al ser el elemento de mayor grado en el algebra, se comporta como un escalar, por lo que

$$a\hat{x}\hat{y}\hat{z} = ai$$

Y asi como en dos dimensiones, el pseudoescalar de tres dimensiones, tambien se puede pensar como numero complejo, ya que

$$i^2 = -1$$

ALGEBRA GEOMETRICA EN 3 DIMENSIONES

En tres dimensiones, el pseudoescalar ya no representa rotaciones. Ademas de esta, hay otras propiedades que no comparten los bivectores con los trivectores, el pseudoescalar en tres dimensiones conmuta con cualquier multivector A

$$Ai = iA$$

ALGEBRA GEOMETRICA EN 3 DIMENSIONES

Al hacer el producto de un vector con el pseudoescalar, tenemos

$$\hat{x}i = \hat{x}\hat{x}\hat{y}\hat{z} = \hat{y}\hat{z}$$

ademas, si multiplicamos la expresion por i, obtenemos

$$-\hat{x} = \hat{y}\hat{z}i$$

ALGEBRA GEOMETRICA EN 3 DIMENSIONES

Ahora, la expresion para el producto cruz es

$$\vec{u} \times \vec{v} = (a_1 b_2 - b_1 a_2)\hat{z} + (b_1 c_2 - c_1 b_2)\hat{x} - (a_1 c_2 - c_1 a_2)\hat{y}$$

si multiplicamos por el pseudoescalar, obtenemos

$$i\vec{u} \times \vec{v} = (a_1 b_2 - b_1 a_2)\hat{x}\hat{y} + (b_1 c_2 - c_1 b_2)\hat{y}\hat{z} + (a_1 c_2 - c_1 a_2)\hat{x}\hat{z}$$

que es la expresion para el producto exterior, entonces

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = i\vec{u} \times \vec{v}$$

ALGEBRA GEOMETRICA EN 3 DIMENSIONES

Pseudovectores

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

$$\nabla \times \vec{f}$$

Pseudoescalares

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

ALGEBRA GEOMETRICA EN 3 DIMENSIONES

Pseudovectores

$$i\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{b}$$
$$i\nabla \times \vec{f} = \nabla \wedge \vec{f}$$

$$\vec{L}, \quad \vec{B}$$

Pseudoescalares

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = i\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$$

$$\Phi_B$$

ALGEBRA GEOMETRICA EN 3 DIMENSIONES

Para cada vector unitario, tenemos

$$\hat{x}i = \hat{y}\hat{z}, \quad \hat{y}i = \hat{z}\hat{x}, \quad \hat{z}i = \hat{x}\hat{y}$$

ademas

$$\hat{x}^2 = 1, \quad \hat{y}^2 = 1, \quad \hat{z}^2 = 1$$

Las matrices de pauli satisfacen

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} + i \sum_l \epsilon_{jkl} \sigma_l$$

ALGEBRA GEOMETRICA EN 3 DIMENSIONES

Como en dos dimensiones, los bivectores de la base cuadran a -1

$$(\hat{x}\hat{y})^2 = (\hat{y}\hat{z})^2 = (\hat{x}\hat{z})^2 = -1$$

si hacemos el producto de los bivectores

$$\hat{x}\hat{y}\hat{y}\hat{z}\hat{x}\hat{z} = \hat{x}\hat{z}\hat{x}\hat{z} = -1$$

La ecuacion que describe la multiplicacion de cuaterniones es

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

ALGEBRA GEOMETRICA EN 3 DIMENSIONES

En tres dimensiones, la cantidad que representa un escalar mas bivectores

$$a + b\hat{x}\hat{y} + c\hat{y}\hat{z} + d\hat{x}\hat{z}$$

son cuaterniones, mientras que en dos dimensiones eran numeros complejos

ALGEBRA GEOMETRICA EN 3 DIMENSIONES

Las rotaciones en tres dimensiones son parecidas a las rotaciones en dos dimensiones. Se siguen utilizando bivectores, pero se aplican con un poco mas de cuidado.
Para rotar un vector $\vec{u}$ por un angulo θ en el plano $\hat{I}$ se utiliza la expresion

$$e^{-\hat{I}\frac{\theta}{2}}\vec{v}e^{\hat{I}\frac{\theta}{2}}$$

Cuando se utiliza para expresar este tipo de rotaciones, la exponencial se llama **rotor**

$$R = e^{\hat{I}\frac{\theta}{2}}$$

ALGEBRA GEOMETRICA EN 3 DIMENSIONES

Rotaciones en dos dimensiones

$$\vec{w}\vec{u}\vec{v}$$

Rotacion en tres dimensiones

$$R^{*}\vec{u}R$$

BOOST DE LORENTZ

Un boost de Lorentz a lo largo del eje x esta dado por

$$c\mathrm{t}' = \gamma(c\mathrm{t} - \frac{\mathrm{v}}{c}x), \quad x' = \gamma(x - \frac{\mathrm{v}}{c}c\mathrm{t}), \quad y' = y, \quad z' = z$$

donde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

Vamos a limpiar la expresion, cambiando a las variables unidimensionales

$$t = c\mathrm{t}, \quad v = \frac{\mathrm{v}}{c}$$

BOOST DE LORENTZ

$$t' = \gamma(t - vx), \quad x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z$$

BOOST DE LORENTZ

$$t' = \gamma(t - vx), \quad x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z$$

Esta transformacion presenta dificultades para ser considerada una simetria

- Mezcla el espacio con el tiempo
- Cambia la longitud de los vectores
- Depende de las coordenadas

BOOST DE LORENTZ

$$t' = \gamma(t - vx), \quad x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z$$

El boost de Lorentz transforma vectores a vectores + escalares. Esta dificultad se resuelve considerando al tiempo como un vector, de modo que el boost de Lorentz transforme vectores a vectores.

BOOST DE LORENTZ

Notacion:

Distinguimos entre vectores espaciales y vecotres en el espacio-tiempo por

$$
\begin{aligned}
\vec{u} &\quad \rightarrow \text{Vector espacial} \\
u &\quad \rightarrow \text{Vector espacio-tiempo} \\
\alpha &\quad \rightarrow \text{Escalar}
\end{aligned}
$$

luego, expresaremos una base ortonormal del espacio-tiempo como

$$\hat{t} = \gamma_0, \quad \hat{x} = \gamma_1, \quad \hat{y} = \gamma_2, \quad \hat{z} = \gamma_3$$

BOOST DE LORENTZ

En GA, la magnitud de un vector esta dada en terminos del producto geometrico

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\vec{u}} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

En lo que sigue, en vez de referirnos a la magnitud como una cantidad de interes, hablaremos del cuadrado de un vector. Para el vector $\vec{u} = \alpha\hat{x} + \beta\hat{y} + \gamma\hat{z}$, tenemos

$$\vec{u}^2 = \vec{u}\vec{u} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

BOOST DE LORENTZ

En el espacio tiempo, el cuadrado de un vector depende de su marco de referencia (i.e. el boost de Lorentz afecta esta cantidad), pero en un marco dado, esta cantidad es consistente para todo observador.
Si escojemos un marco de referencia en particular decimos que el cuadrado de un vector en cualquier marco de referencia es aquel dado en este marco de referencia en particular, asi cambiamos la definicion del cuadrado de un vector, pero hacemos que esta cantidad sea invariante bajo un boost de Lorentz.

BOOST DE LORENTZ

Los vectores en el espacio-tiempo representan un evento, especificando el tiempo y el lugar donde/cuando algo pasa.
Un vector en la direccion γ_0, corresponde a algo estacionario, que por solo existir, avanza en el tiempo.

BOOST DE LORENTZ

Un vector en el espacio-tiempo corresponde al movimiento a una velocidad constante en particular. Esta es la definicion de un marco de referencia intercial, por lo tanto, los vectores en el espacio-tiempo corresponden a marcos de referencia inerciales.
Entonces, un marco de referencia preferido para calcular el cuadrado de un vector, va a ser el marco de referencia que este representa.

BOOST DE LORENTZ

La mejor forma de especificar esta definicion de magnitud es primero haciendo un boost de Lorentz, de modo que el vector apunta en la direccion γ_0

BOOST DE LORENTZ

En el marco de referencia original, el vector en cuestion (en el plano $\gamma_0\gamma_1$), es una combinacion lineal de γ_0 y γ_1

$$u = \alpha\gamma_0 + \beta\gamma_1$$

Cuando calculamos un boost de Lorentz, t y x estan dados por α y β, de modo que

$$t' = \gamma(\alpha - v\beta), \quad x' = \gamma(\beta - v\alpha)$$

BOOST DE LORENTZ

$$t' = \gamma(\alpha - v\beta), \quad x' = \gamma(\beta - v\alpha)$$

Luego su cuadrado en el marco de referencia transformado es

$$u^2 = t'^2 + x'^2$$

Luego su cuadrado en el marco de referencia transformado es

$$u^2 = t'^2 + x'^2$$

Nuestro marco de referencia preferido es en el que $x' = 0$ (de modo que u este enteramente en la direccion t'):

$$u^2 = \gamma^2(\alpha - v\alpha)^2 = \frac{1}{1 - v^2}(\alpha - v\beta)^2$$

BOOST DE LORENTZ

Por otro lado, ya que $x' = 0$, tenemos que

$$x' = 0 = \gamma(\beta - v\alpha)$$

como $\gamma \neq 0$:

$$\beta - v\alpha = 0 \implies v = \frac{\beta}{\alpha}$$

sustituyendo en la expresion anterior, obtenemos

BOOST DE LORENTZ

$$
\begin{aligned}
u^2 &= \frac{1}{1-v^2}(\alpha - v\beta)^2 = \frac{1}{1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}}\left(\alpha - \frac{\beta}{\alpha}\beta\right)^2 \\
&= \frac{1}{\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}}\left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha}\right)^2 \\
&= \frac{\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2}\frac{(\alpha^2-\beta^2)^2}{\alpha^2} \\
&= \alpha^2 - \beta^2
\end{aligned}
$$

$$u^2 = \alpha^2 - \beta^2$$

Esta es la cantidad que, por construccion, que se mantiene invariante ante un cambio en el marco de referencia. Lo denotamos como el **intervalo del espacio-tiempo**

BOOST DE LORENTZ

$$
\begin{aligned}
u^2 &> 0 \qquad &&\rightarrow \text{ Vector timelike} \\
u^2 &< 0 \qquad &&\rightarrow \text{ Vector spacelike} \\
u^2 &= 0 \qquad &&\rightarrow \text{ Vector lightlike}
\end{aligned}
$$

ALGEBRA DEL ESPACIO-TIEMPO

El algebra geometrica del espacio-tiempo!

$$\text{Base de vectores ortonormales } \rightarrow \quad \{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$$

$$\text{Anticonmutacion } \rightarrow \quad \gamma_i \gamma_j = -\gamma_j \gamma_i$$

$$\text{Cuadrado de la base } \rightarrow$$

$$\gamma_0^2 = 1, \quad \gamma_1^2 = -1, \quad \gamma_2^2 = -1, \quad \gamma_3^2 = -1$$

ALGEBRA DEL ESPACIO-TIEMPO

Los multivectores en el espacio-tiempo tienen 16 componentes

$$1$$

$$\gamma_0, \quad \gamma_1, \quad \gamma_2, \quad \gamma_3$$

$$\gamma_0\gamma_1, \quad \gamma_0\gamma_2, \quad \gamma_0\gamma_3, \quad \gamma_1\gamma_2, \quad \gamma_1\gamma_3, \quad \gamma_2\gamma_3$$

$$\gamma_0\gamma_1\gamma_2, \quad \gamma_0\gamma_1\gamma_3, \quad \gamma_0\gamma_2\gamma_3, \quad \gamma_1\gamma_2\gamma_3$$

$$\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$$

SPACE-TIME SPLIT

En el espacio, un 1-vector constante no cambia, pero si anadimos un eje temporal perpendicular, al pasar el tiempo, el vector barre un area en el espacio-tiempo. Este es un bivector con una componente temporal y, por lo tanto, es timelike.

SPACE-TIME SPLIT

En el espacio-tiempo, de una vector meramente espacial, podemos obtener un bivector timelike multiplicando por γ_0, ya que este es perpendicular a cualquier vector espacial.
Luego, para un vector que yace meramente en la direccion temporal, si hacemos lo mismo, obtenemos un escalar, ya que este vector temporal es colinial con γ_0. Este es exactamente el comportamiento que buscamos, ya que en el espacio, el tiempo es un escalar.
Finalmente, para un vector en espacio-tiempo, el producto geometrico $u\gamma_0$, descompone al vector en un parte temporal (escalar) y una espacial (vectorial). Este es el split del espacio-tiempo.

SPACE-TIME SPLIT

Finalmente, para un vector en espacio-tiempo, el producto geometrico $u\gamma_0$, descompone al vector en un parte temporal (escalar) y una espacial (vectorial). Este es el split del espacio-tiempo.

$$u\gamma_0 = u_{\|} \cdot \gamma_0 + u_{\perp} \wedge \gamma_0$$

SPACE-TIME SPLIT

El split del espacio-tiempo se puede hacer para cualquier marco de referencia γ_0'

$$v\gamma_0' = v_{\|} \cdot \gamma_0' + v_{\perp} \wedge \gamma_0'$$

donde se descompone al vector u en sus partes temporal y espacial dentro del marco de referencia γ_0'
Esto es como hacer un boost de Lorentz implicito

SPACE-TIME SPLIT

Spacetime		Space
$\gamma_0\gamma_0$	$\leftrightarrow$	1
$\gamma_1\gamma_0$	$\leftrightarrow$	$\hat{x}$
$\gamma_2\gamma_0$	$\leftrightarrow$	$\hat{y}$
$\gamma_3\gamma_0$	$\leftrightarrow$	$\hat{z}$

SPACE-TIME SPLIT

En el espacio, los vectores deben satisfacer

$$\hat{x}\hat{x} = 1, \quad \hat{x}\hat{y} = -\hat{y}\hat{x}$$

luego,

$$(\gamma_1\gamma_0)^2 = \gamma_1\gamma_0\gamma_1\gamma_0 = -\gamma_1\gamma_1\gamma_0\gamma_0 = -(-1)(1) = 1$$

y

$$(\gamma_1\gamma_0)(\gamma_2\gamma_0) = -\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_0 = \gamma_0\gamma_2\gamma_1\gamma_0 = -\gamma_2\gamma_0\gamma_1\gamma_0$$

SPACE-TIME SPLIT

Spacetime		Space
$\gamma_1\gamma_0\gamma_2\gamma_0$	$\leftrightarrow$	$\hat{x}\hat{y}$
$\gamma_1\gamma_0\gamma_3\gamma_0$	$\leftrightarrow$	$\hat{x}\hat{z}$
$\gamma_2\gamma_0\gamma_3\gamma_0$	$\leftrightarrow$	$\hat{y}\hat{z}$
$\gamma_1\gamma_0\gamma_2\gamma_0\gamma_3\gamma_0$	$\leftrightarrow$	$\hat{x}\hat{y}\hat{z}$

SPACE-TIME SPLIT

Spacetime		Space
$-\gamma_1\gamma_2\gamma_0\gamma_0$	$\leftrightarrow$	$\hat{x}\hat{y}$
$-\gamma_1\gamma_3\gamma_0\gamma_0$	$\leftrightarrow$	$\hat{x}\hat{z}$
$-\gamma_2\gamma_3\gamma_0\gamma_0$	$\leftrightarrow$	$\hat{y}\hat{z}$
$-\gamma_1\gamma_0\gamma_2\gamma_0\gamma_0\gamma_3$	$\leftrightarrow$	$\hat{x}\hat{y}\hat{z}$

SPACE-TIME SPLIT

Spacetime		Space
$\gamma_2\gamma_1$	$\leftrightarrow$	$\hat{x}\hat{y}$
$\gamma_3\gamma_1$	$\leftrightarrow$	$\hat{x}\hat{z}$
$\gamma_3\gamma_2$	$\leftrightarrow$	$\hat{y}\hat{z}$
$\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$	$\leftrightarrow$	$\hat{x}\hat{y}\hat{z}$

SPACE-TIME SPLIT

Spacetime		Space
1	$\leftrightarrow$	1
$\gamma_1\gamma_0$	$\leftrightarrow$	$\hat{x}$
$\gamma_2\gamma_0$	$\leftrightarrow$	$\hat{y}$
$\gamma_3\gamma_0$	$\leftrightarrow$	$\hat{z}$
$\gamma_2\gamma_1$	$\leftrightarrow$	$\hat{x}\hat{y}$
$\gamma_3\gamma_1$	$\leftrightarrow$	$\hat{x}\hat{z}$
$\gamma_3\gamma_2$	$\leftrightarrow$	$\hat{y}\hat{z}$
$\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$	$\leftrightarrow$	$\hat{x}\hat{y}\hat{z}$

TRANSFORMACION DE LORENTZ

Un split del espacio-tiempo $u\gamma_0$ parte al vector u en el marco de referencia dado por γ_0
El problema de pensar en el split del espacio-tiempo como un boost de Lorentz es que este proceso nos "saca" del espacio-tiempo

$$\text{Spacetime} \xrightarrow{\text{Spacetime split}} \text{Space}$$

$$\text{Spacetime} \xrightarrow{\text{Lorentz Boost}} \text{Spacetime}$$

TRANSFORMACION DE LORENTZ

El boost de Lorentz es una transformacion lineal y la podemos expresar como

$$L_v(\alpha\gamma_0 + \beta\gamma_1) = \gamma(\alpha - v\beta)\gamma_0 + \gamma(\beta - v\alpha)\gamma_1$$

TRANSFORMACION DE LORENTZ

Con respecto al marco de referencia dado por γ_0, podemos escribir otro marco de referencia que se mueve a una velocidad v con respecto a γ_0 como $\gamma_0 + v\gamma_1$. Queremos que los vectores que representan marcos de referencia esten normalizados, entonces el marco de referencia dado por γ_0' es

$$\gamma_0' = \frac{1}{\sqrt{(\gamma_0 + v\gamma_1)^2}}(\gamma_0 + v\gamma_1)$$

$$\gamma_0' = \frac{1}{\sqrt{\gamma_0^2 + v^2\gamma_1^2}}(\gamma_0 + v\gamma_1)$$

$$\gamma_0' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}(\gamma_0 + v\gamma_1)$$

$$\gamma_0' = \gamma(\gamma_0 + v\gamma_1)$$

TRANSFORMACION DE LORENTZ

Al aplicar un boost de Lorentz al marco de referencia dado por γ_0', el vector γ_0' apunta meramente en la direccion temporal, en otras palabras, el boost de Lorentz convierte a γ_0' en γ_0

$$L_V(\gamma_0') = \gamma_0$$

TRANSFORMACION DE LORENTZ

Esta misma transformacion se puede realizar con

$$\gamma_0' \rightarrow \gamma_0'(\gamma_0'\gamma_0) = \gamma_0$$

TRANSFORMACION DE LORENTZ

Aplicando esta simple transformaciona un vector arbitrario, se obtiene

$$
\begin{aligned}
(\alpha\gamma_0 + \beta\gamma_1)\gamma_0'\gamma_0 &= (\alpha\gamma_0 + \beta\gamma_1)\gamma(\gamma_0 + v\gamma_1)\gamma_0 \\
&= (\alpha\gamma_0 + \beta\gamma_1)\gamma(1 - v\gamma_0\gamma_1) \\
&= \gamma\alpha\gamma_0 + \gamma\beta\gamma_1 - \gamma v\alpha\gamma_0\gamma_0\gamma_1 - \gamma v\beta\gamma_1\gamma_0\gamma_1 \\
&= \gamma\alpha\gamma_0 + \gamma\beta\gamma_1 - \gamma v\alpha\gamma_1 - \gamma v\beta\gamma_0 \\
L_v(\alpha\gamma_0 + \beta\gamma_1) &= \gamma(\alpha - v\beta)\gamma_0 + \gamma(\beta - v\alpha)\gamma_1
\end{aligned}
$$

TRANSFORMACION DE LORENTZ

Entonces podemos expresar el boost de Lorentz, como una transformacion que cambia γ_0' a γ_0 como

$$L_V(u) = u\gamma_0'\gamma_0$$

TRANSFORMACION DE LORENTZ

Esta es la expresion general para rotaciones en dos dimensiones.

$$L_V(u) = R(u)$$

Una rotacion es una transformacion lineal que no cambia la norma del vector y cuyo determinante es 1.

TRANSFORMACION DE LORENTZ

En el espacio normal, las rotaciones se pueden escribir en terminos de la exponencial, por medio de la formula de Euler

$$i^2 = -1, \quad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Esto funciona porque el pseudoescalar en el plano cuadra a -1, pero tenemos

$$\gamma_0\gamma_1\gamma_0\gamma_1 = -\gamma_0\gamma_0\gamma_1\gamma_1 = 1$$

entonces, las rotaciones dadas en el espacio tiempo, son rotaciones de la forma

$$i^2 = 1, \quad e^{i\theta} = \cosh\theta + i\sinh\theta$$

TRANSFORMACION DE LORENTZ

En n dimensiones, las rotaciones se generalizan

$$e^{-i\frac{}{2}}ue^{i\frac{\theta}{2}}$$

TRANSFORMACION DE LORENTZ

En el espacio-tiempo, los bivectores timelike representan rotaciones a traves del tiempo

$$\gamma_0\gamma_1, \quad \gamma_0\gamma_2, \quad \gamma_0\gamma_3$$

Los vectores spacelike son rotaciones a traves del espacio

$$\gamma_1\gamma_2, \quad \gamma_1\gamma_3, \quad \gamma_2\gamma_3$$

TRANSFORMACION DE LORENTZ

Las transformaciones de Lorentz son rotaciones en el espacio-tiempo

Rotaciones spacelike $\leftrightarrow$ Rotaciones espaciales

Rotaciones timelike $\leftrightarrow$ Boost de Lorentz

Rotaciones spacetime $\leftrightarrow$ Lorentz transformations

HERE IS AN EQUATION

- Electrodynamics: Representamos las 4 ecuaciones de Maxwell como

$$\nabla f = j$$

- En mecanica cuantica relativista, las matrices gamma de Dirac son una representacion de la base gamma que utilizamos en el algebra del espacio-tiempo