SEFUS

(Seminario de Estudiantes de Física de la Universidad de Sonora)

Ecuaciones del campo electromagnético con el principio de mínima acción

Alfredo Armendáriz Espinoza

Noviembre 2024

Here is an equation:

$$\epsilon^{iklm}\frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} = 0 \qquad \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c}j^i$$

El Principio de Mínima Acción

El principio de mínima acción establece que hay una cantidad llamada acción S que durante el estado de movimiento de una partícula esta es mínima y su variación es cero.

$$S = \int \mathcal{L} \, \mathrm{d}t$$

$$\delta S = \int \delta \mathcal{L} \, \mathrm{d}t = 0$$

Donde $\mathcal{L} : \mathcal{L}(t, q, \dot{q})$ es una función que depende del tiempo t, las coordenadas generalizadas q y las velocidades generalizadas $\dot{q}$ En la mecánica clásica, el tiempo es absoluto en cualquier sistema de referencia ante transformaciones galileanas.

El Principio de Mínima Acción

De aquí las ecuaciones de movimiento se obtienen al desarrollar la variación de la acción

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

Explícitamente, la función Lagrangiana es:

$$\mathcal{L} = T - V$$

Donde T es la energía cinética y V es la energía potencial del sistema.

El Principio de Mínima Acción en la relatividad especial

Ahora en la mecánica relativista la cantidad absoluta en cualquier sistema de referencia ante transformaciones de Lorentz, este es el intervalo $\mathrm{d}s$, para trayectorias de partículas que no son luz, su cuadrado es una cantidad definida positiva.

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\,\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2$$

Aquí hay una relación entre el intervalo y el tiempo

$$\mathrm{d}s = c\ \mathrm{d}t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

El Principio de Mínima Acción en la relatividad especial

Así, la acción para una partícula libre de fuerzas es:

$$S = -\alpha \int \mathrm{d}s$$

El signo negativo se entiende porque al integrar el intervalo, se hace a la vez se integra al tiempo, que en un sistema de referencia propio de la partícula, este se encuentra en reposo, siendo un tiempo propio máximo, y al querer que la acción sea mínima se tiene el signo negativo.

El Principio de Mínima Acción en la relatividad especial

Así, al ver a la acción como función del tiempo se tiene

$$S = -\alpha \int c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, \mathrm{d}t$$

La funcion Lagrangiana es

$$\mathcal{L} = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

El Principio de Mínima Acción en la relatividad especial

Tomando el límite a la mecánica clásica, es decir, considerando a $c \to \infty$ se hace una serie de potencias de v^2/c^2 con el teorema del binomio de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^n b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} a^n b^{n-k}$$

La función Lagrangiana es aproximadamente

$$\mathcal{L} \approx -c\alpha + \alpha \frac{1}{2} \frac{v^2}{c}$$

Donde $\alpha = mc$

El Principio de Mínima Acción en la relatividad especial

Así la acción es:

$$S = -mc \int \mathrm{d}s$$

Y la función Lagrangiana para una partícula libre

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Cantidades cuatro-dimensionales

Con la relatividad especial se facilita trabajar con cantidades llamadas cuatro-vectores

Radio cuatro-vector

$$x^i = \begin{pmatrix} ct & x & y & z \end{pmatrix} \qquad \text{(contravariante)}$$

$$x^i = (ct, \mathbf{r})$$

$$x_i = \begin{pmatrix} ct & -x & -y & -z \end{pmatrix} \qquad \text{(covariante)}$$

$$x_i = (ct, -\mathbf{r})$$

Velocidad cuatro-vector

$$u^i = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}$$

Cantidades cuatro-dimensionales

Con esto, se introduce el producto interior y el convenio de suma de Einstein

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\,\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2$$

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_i \mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x^i = \mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x^i$$

O bien

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ik}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^k$$

$$\mathrm{d}s^2 = \begin{pmatrix} c\,\mathrm{d}t & \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix}$$

Cuatro-Potencial

La accion para una particula en un campo electromagnetico tiene dos partes: la accion para la particula libre y un termino describiendo la interaccion de la particula con el campo. Este segundo termino debe contener cantidades caracterizando a la particula y cantidades caracterizando al campo.

Entonces la funcion accion para una carga en un campo electromagnetico tiene la forma

$$S = S_m + S_{mf}$$

$$S = \int_a^b \left(-mc\,\mathrm{d}s - \frac{e}{c} A_i\,\mathrm{d}x^i \right)$$

Cuatro-Potencial

Las tres componentes espaciales del cuatro-vector A^i forman un vector tridimensional $\mathbf{A}$ llamado **potencial vectorial del campo**. La componente temporal se llama **potencial vectorial**; lo denotamos por $A^0 = \phi$, entonces

$$A^i = (\phi, \mathbf{A})$$

Cuatro-Potencial

$$A^i = (\phi, \mathbf{A})$$

La integral de accion se escribe de la forma

$$S = \int_a^b \left(-mc \, \mathrm{d}s + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}r - e\phi \, \mathrm{d}t \right)$$

Cuatro-Potencial

$$A^i = (\phi, \mathbf{A})$$

Introduciendo $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}$, y cambiando a una integral sobre t,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi \right) \mathrm{d}t$$

Cuatro-Potencial

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi \right) \mathrm{d}t$$

El integrando es la Lagrangiana para una carga en un campo electromagnetico

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi$$

Cuatro-Potencial

$$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} - e\phi$$

Esta funcion difiere de la Lagrangiana para una particula libre, por los terminos $(e/c)\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} - e\phi$, que describe la interacion de la carga con el campo

Cuatro-Potencial

$$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi$$

De la Lagrangiana se encuentra la funcion Hamiltoniana con la formula general

$$\mathcal{H} = \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} - \mathcal{L}$$

Cuatro-Potencial

$$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} - e\phi$$

Donde, al sustituir se obtiene

$$\mathcal{H} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + e\phi$$

Cuatro-Potencial

$$\mathcal{H} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\phi$$

$$\mathcal{H} = E + e\phi$$

Pero la Hamiltoniana debe estar expresada en terminos del momento generalizado de la particula, que se obtiene de la derivada $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{P} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}\mathbf{A} = \mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}$$

Cuatro-Potencial

De estas dos ultimas expresiones, se obtiene

$$\mathcal{H} - e\phi \qquad \text{Energia libre relativista}$$

$$\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \qquad \text{Momento ordinario}$$

por lo que satisfacen la misma relacion entre $\mathcal{H}$ y $\mathbf{p}$ en la ausencia de un campo

Cuatro-Potencial

En la ausencia de un campo, se tiene

$$\mathcal{H}^2 = (mc^2)^2 + (\mathbf{p}c)^2$$

entonces, en su presencia, la relacion se convierte en

$$(\mathcal{H} - e\phi)^2 = m^2c^4 + \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2$$

$$\mathcal{H} = \sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2} + e\phi$$

Cuatro-Potencial

En el limite no relativista:

$$\mathcal{L} = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + e\phi$$

Ecuacion de una carga en un campo

Para encontrar las ecuaciones de movimiento de una carga dentro de un campo electromagnetico debemos variar la accion, i.e. estan dadas por las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}}$$

donde $\mathcal{L}$ esta dada por

$$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} - e\phi$$

Ecuacion de una carga en un campo

$$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} - e\phi$$

La derivada $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{v}}$ es el momento generalizado de la particula. Luego escribimos

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{r}} = \nabla\mathcal{L} = \frac{e}{c}\nabla\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} - e\nabla\phi$$

Ecuacion de una carga en un campo

El gradiento del producto interno de dos vectores es

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}) = (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A} + \mathbf{v}\times\nabla\times\mathbf{A} + \mathbf{A}\times\nabla\times\mathbf{v}$$

para $\mathbf{v}$ que no depende de la posición

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{r}} = \frac{e}{c}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A} + \frac{e}{c}\mathbf{v}\times\nabla\times\mathbf{A} - e\nabla\phi$$

Ecuacion de una carga en un campo

Por lo que la ecuacion de Lagrange tiene la forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) = \frac{e}{c}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A} - e\nabla\phi$$

luego la derivada total del potencial vectorial con respecto al tiempo es

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}$$

Ecuacion de una carga en un campo

Entonces la ecuacion de Lagrange queda

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = -\frac{e}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - e\nabla\phi + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A}$$

Ecuacion de una carga en un campo

El primer termino, por unidad de carga, se llama la intensidad de campo electrico

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi$$

El factor que acompana a $\frac{\mathbf{v}}{c}$ en el segundo termino, por unidad de carga, se llama intensidad de campo magnetico

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Ecuacion de una carga en un campo

En un campo electromagnetico, si $\mathbf{E} \neq 0$, pero $\mathbf{H} = 0$, entonces hablamos de un campo electrico; si $\mathbf{E} = 0$, pero $\mathbf{H} \neq 0$, entonces el campo se dice ser magnetico. En general, el campo electromagnetico es la superposicion de campos electricos y magneticos

Ecuacion de una carga en un campo

Ahora podemos escribir la ecuacion de movimiento de una carga en un campo electromagnetico

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H}$$

esta expresion se llama *Fuerza de Lorentz*

El tensor de campo Electromagnetico

Ahora se obtendra la ecuacion de movimiento de una carga en un campo directamente de la accion en notacion cuatro-dimensional. Del principio de la minima accion

$$\delta S = \delta \int_a^b \left(-mc\,\mathrm{d}s - \frac{e}{c} A_i\,\mathrm{d}x^i \right) = 0$$

El tensor de campo Electromagnetico

$$\delta S = \delta \int_a^b \left(-mc \, \mathrm{d}s - \frac{e}{c} A_i \, \mathrm{d}x^i \right) = 0$$

Con $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x_i \, \mathrm{d}x^i}$, encontramos (omitiendo los limites de integracion por brevedad)

$$\delta S = - \int \left(mc \frac{\mathrm{d}x_i \, \mathrm{d}\delta x^i}{\mathrm{d}s} + \frac{e}{c} A_i \, \mathrm{d}\delta x^i + \frac{e}{c} \delta A_i \, \mathrm{d}x^i \right) = 0$$

Donde se uso $u_i = \mathrm{d}x^i / \mathrm{d}s$

También $\mathrm{d}s = \mathrm{d}s \, \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s} = \sqrt{\mathrm{d}x_i \, \mathrm{d}x^i} \, \frac{\sqrt{\mathrm{d}x_i \mathrm{d}x^i}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x_i \mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s} = u_i \, \mathrm{d}x^i$

El tensor de campo Electromagnetico

$$\delta S = -\int \left(mc\ u_i \, \mathrm{d}\delta x^i + \frac{e}{c} A_i \, \mathrm{d}\delta x^i + \frac{e}{c} \delta A_i \, \mathrm{d}x^i \right) = 0$$

Integrando por partes los primeros dos términos se tiene:

$$-\left[\left(mc\, u_i + \frac{e}{c} A_i \right) \delta x^i \right] + \int \left(mc\ \mathrm{d}u^i \, \delta x^i + \frac{e}{c} \delta x^i \, \mathrm{d}A_i - \frac{e}{c} \delta A_i \, \mathrm{d}x^i \right) = 0$$

El primer término es cero al evaluar la variación de x^i en los extremos.

El tensor de campo Electromagnetico

$$\int \left(mc \,\mathrm{d}u^i \,\delta x^i + \frac{e}{c}\delta x^i \,\mathrm{d}A_i - \frac{e}{c}\delta A_i \,\mathrm{d}x^i \right) = 0$$

Se tienen diferenciales y variaciones del cuatro-potencial, siendo

$$\delta A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\delta x^k, \quad \mathrm{d}A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\,\mathrm{d}x^k$$

Sustituyendo

$$\int \left(mc \,\mathrm{d}u^i \,\delta x^i + \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\,\mathrm{d}x^k \,\delta x^i - \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\,\mathrm{d}x^i \,\delta x^k \right) = 0$$

El tensor de campo Electromagnetico

$$\int \left(mc \, \mathrm{d}u^i \, \delta x^i + \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \, \mathrm{d}x^k \, \delta x^i - \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \, \mathrm{d}x^i \, \delta x^k \right) = 0$$

Se integrará en $\mathrm{d}s$, por lo que $\mathrm{d}u_i = (\mathrm{d}u_i / \mathrm{d}s)\, \mathrm{d}s$, también $\mathrm{d}x^i = u^i \, \mathrm{d}s$ y por útlimo en el tercer término se intercambian los índices (no afecta)

$$\int \left[mc \, \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s} - \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) u^k \right] \delta x^i \, \mathrm{d}s = 0$$

El tensor de campo Electromagnetico

Así, lo que se encuentra en el corchete es cero, ya que puede δx^i es arbitrario, quedando

$$mc \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s} = \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right)u^k$$

Introduciendo la notación

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$$

Es antisimétrico

El tensor de campo Electromagnetico

Siendo explícitos, con $i = 0$, $k = 1$

$$F_{01} = \frac{\partial A_1}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^1} = \frac{1}{c}\frac{\partial A_1}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x} = E_x$$

Generalizando con $k = 1, 2, 3$ como si fuera un vector

$$F_{0k} = \frac{\partial A_k}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^k} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi = \mathbf{E}$$

Es decir, el primer renglón contiene a las componentes del campo eléctrico

El tensor de campo Electromagnetico

Ahora con $i = 1, k = 2$

$$F_{12} = \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} = \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = H_z$$

Con $i = 1, k = 3$

$$F_{13} = \frac{\partial A_3}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^3} = \frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial z} = -H_y$$

El tensor de campo Electromagnetico

Se representa de forma matricial con el índice $i = 0, 1, 2, 3$ como renglones y el índice $k = 0, 1, 2, 3$ como columnas

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \qquad F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

O bien

$$F_{ik} = (\mathbf{E}, \mathbf{H}) \qquad F^{ik} = (-\mathbf{E}, \mathbf{H})$$

El primer par de ecuaciones de Maxwell

De las expresiones

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi$$

Se les obtiene su divergencia y rotacional respectivamente, para el campo magnético:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

El primer par de ecuaciones de Maxwell

De las expresiones

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi$$

Para el campo eléctrico:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla\phi)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

El primer par de ecuaciones de Maxwell

Usando notación cuatro-dimensional y la definición del tensor del campo electromagnético

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$$

Se puede verificar que la siguiente suma se cumple

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0$$

Es un tensor de rango tres antisimétrico.

El primer par de ecuaciones de Maxwell

Multiplicando por el tensor antisimétrico de rango cuatro ϵ^{iklm} se puede simplificar la suma

$$\epsilon^{iklm} \frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} = 0$$

El primer par de ecuaciones de Maxwell

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0$$

Si se suma para $l = 0$ y se tiene la ecuación de Maxwell con la derivada temporal

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x^0} + \frac{\partial F_{20}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{01}}{\partial x^2} = \frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t} - \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

El primer par de ecuaciones de Maxwell

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0$$

Si en los indices no se incluye a la parte temporal, se tiene la ecuación de Maxwell que solo tiene cambios espaciales

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x^2} = -\frac{\partial H_z}{\partial z} - \frac{\partial H_x}{\partial x} - \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

El primer par de ecuaciones de Maxwell

Así, se tiene el primer par de ecuaciones de Maxwell

$$\epsilon^{iklm}\frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

La función de la acción del campo electromagnético

La acción S consiste en tres partes, la partícula, la partícula localizada en el campo y del mismo campo.

$$S = S_m + S_{mf} + S_f$$

La acción de la partícula

$$S_m = -mc \int \mathrm{d}s$$

La acción de la partícula en el campo electromagnético

$$S_{mf} = -\frac{e}{c} \int A_k \, \mathrm{d}x^k$$

La función de la acción del campo electromagnético

La parte de la acción del campo electromagnético debe describir a las propiedades del campo por sí mismo, es decir, la acción de un campo en la ausencia de cargas.

La forma de la acción del campo electromagnético depende del principio de superposición porque las ecuaciones del campo deben ser ecuaciones diferenciales lineales.

El integrando debe ser una expresión cuadrática del campo, análogamente como lo es el cuadrado de la velocidad para una partícula.

La función de la acción del campo electromagnético

Los potenciales tampoco pueden estar explícitamente debido a que no se determinan por una sola cantidad (principio de invarianza de norma)

$$A'_k = A_k - \frac{\partial f}{\partial x^k}$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f, \qquad \phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$$

Así, la acción debe ser integral de alguna función escalar de F_{ik}, la unica cantidad es el producto $F_{ik}F^{ik}$

La función de la acción del campo electromagnético

La función de la acción del campo electromagnético tiene la forma

$$s_f = \beta \frac{1}{c} \int F_{ik} F^{ik} \, \mathrm{d}V \, c \, \mathrm{d}t$$

Nota: este factor $F_{ik} F^{ik} = 2\big(H^2 - E^2\big)$
El valor numérico de $\beta = -\frac{1}{16\pi}$, esto es por el sistema de unidades de Gauss y de Heaviside

La función de la acción del campo electromagnético

La acción S_f

$$S_f = -\frac{1}{16\pi c}\int F_{ik}F^{ik}\,\mathrm{d}\Omega$$

Donde la lagrangiana es una densidad

$$\mathcal{L}_f = \frac{1}{8\pi}\int \left(E^2 - H^2\right)\mathrm{d}V$$

La función de la acción del campo electromagnético

La acción completa queda

$$S = -\int mc\,\mathrm{d}s - \int \frac{e}{c} A_k\,\mathrm{d}x^k - \frac{1}{16\pi c}\int F_{ik}F^{ik}\,\mathrm{d}\Omega$$

La función de corriente cuatro-dimensional

Cuando se trata a las cargas como puntos se tiene matemáticamente la función delta δ. Así, se tiene una densidad de carga ϱ en el espacio que es:

$$\varrho = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$$

La carga es una propiedad invariante pues es intrínseca de las partículas, al maniobrar las cargas se tiene

$$e \,\mathrm{d}x^i = \varrho \,\mathrm{d}x^i \,\mathrm{d}V$$

Reescribiendo por un factor $\mathrm{d}t \,/\, \mathrm{d}t$

$$e \,\mathrm{d}x^i = \varrho \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} \,\mathrm{d}V \,\mathrm{d}t$$

La función de corriente cuatro-dimensional

De esta forma se tiene un cuatro-vector, definido como cuatro-vector de corriente

$$j^i = \varrho \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}$$

Así se puede reescribir el producto $e\,\mathrm{d}x^i$ como:

$$e\,\mathrm{d}x^i = j^i\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t$$

Este vector se representa de forma cuatro-dimensional como:

$$j^i = (c\varrho, \mathbf{j})$$

La función de corriente cuatro-dimensional

De esta forma, la parte de la acción de la interacción del campo con la partícula S_{mf} en términos del cuatro-vector de corriente.

$$S_{mf} = -\int_a^b \frac{e}{c} A_k \, \mathrm{d}x^k$$

Como ya se obtuvo una expresión de $e \, \mathrm{d}x^i$ y aparte se integra en el espacio y tiempo con $\mathrm{d}V \; c \, \mathrm{d}t = \mathrm{d}\Omega$

$$S_{mf} = -\frac{1}{c^2} \int_a^b j^k A_k \; \mathrm{d}V \; c \, \mathrm{d}t$$

$$S_{mf} = -\frac{1}{c^2} \int_a^b j^k A_k \; \mathrm{d}\Omega$$

Segundo par de ecuaciones de Maxwell

Para obtener estas ecuaciones la variación que se aplica es en el campo a través del potencial.

La variación se realiza en cantidades covariantes.

$$\delta S = \int_a^b \frac{1}{c}\left[\frac{1}{c} j^i \delta A_i + \frac{1}{8\pi} F^{ik}\, \delta F_{ik}\right] \mathrm{d}\Omega = 0$$

Como el tensor electromagnético se construyó como:

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$$

Segundo par de ecuaciones de Maxwell

La variación de la acción es

$$\delta S = -\int_a^b \frac{1}{c}\left[\frac{1}{c}j^i\delta A_i + \frac{1}{8\pi}F^{ik}\frac{\partial\delta A_k}{\partial x^i} - \frac{1}{8\pi}F^{ik}\frac{\partial\delta A_i}{\partial x^k}\right]\, d\Omega = 0$$

En el segundo término se intercambiarán los indice i y k y por la antisimetría del tensor electromagnético. $F^{ik} \to F^{ki} = -F^{ik}$

$$\delta S = -\int_a^b \frac{1}{c}\left[\frac{1}{c}j^i\delta A_i - \frac{1}{4\pi}F^{ik}\frac{\partial\delta A_i}{\partial x^k}\right]\, d\Omega = 0$$

Segundo par de ecuaciones de Maxwell

Integrando por partes el segundo término y el término sin derivadas se obtiene con ayuda del teorema de Gauss generalizado:

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int_a^b \left[\frac{1}{c}j^i + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}\right] \delta A_i \, d\Omega - \frac{1}{4\pi c}\oint F^{ik}\delta A_i \, dS_k = 0$$

En la segunda integral se usa el teorema de Gauss generalizado:

$$\oint A^i dS_i = \int \frac{\partial A^i}{\partial x^i} d\Omega$$

Segundo par de ecuaciones de Maxwell

Este término se anula ya que el campo es cero en el infinito, quedando así la variación de la acción

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int_a^b \left[\frac{1}{c}j^i + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}\right] \delta A_i \, d\Omega = 0$$

Siendo el integrando igual a cero, quedando

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c}j^i$$

Segundo par de ecuaciones de Maxwell

Esta expresión indica que se realiza la suma en el índice k, si el índice $i = 1$ se tiene:

$$\frac{\partial F^{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x^3} = -\frac{4\pi}{c} j^1$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\frac{4\pi}{c} j_x$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial y} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j_x$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$$

Segundo par de ecuaciones de Maxwell

Esta expresión indica que se realiza la suma en el índice k, si el índice $i = 0$ se tiene:

$$\frac{\partial F^{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{03}}{\partial x^3} = -\frac{4\pi}{c} j^0$$

$$-\frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{4\pi}{c} c\varrho$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\varrho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\varrho$$

Segundo par de ecuaciones de Maxwell

Así, se tiene el segundo par de ecuaciones de Maxwell

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\varrho$$

Conclusión

Here are some other equations

$$\epsilon^{iklm}\frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} = 0 \qquad \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\varrho$$