Элементарный курс теории вероятностей

Глава 1. Теория множеств

Выборочное пространство состоит из некоторого кол-ва точек и просто случай называем для каждой совокупности точек

Ω - выборочное пространство (не менее одной точки $1 \leq \Omega < \infty$

Подмножество - любой набор точек Ω

Частные случаи - Ω и $\varnothing$ (пустое мн-во)

$|S|$ - размер множ-ва S, целочисленно, > 0

ω - точка выборочного пространства

$A \subset B$ - каждый эл-т множ-ва A принадлежит множ-ву B =>

=> ~~...~~ $B \supset A$ - B надмножество по отнош к A

$A = B \Rightarrow A \subset B \Rightarrow B \subset A$

Операции над множествами

Дополнение:

A^c — множество точек, кот. не входят в A (A^c — дополнение A)

$A^c = \{\omega \mid \omega \notin A\}$ — A^c это множество точек ω не принадлежащих множеству A.

В частности $\Omega^c = \emptyset$, $\emptyset^c = \Omega$

Св-во A^c — $(A^c)^c = A$

Объединение:

$A \cup B = \{\omega \mid \omega \in A$ или $\omega \in B\}$

Это мн-во точек, кот. принадлежат хотя бы одному из этих мн-в

Пересечение

$A \cap B = \{\omega \mid \omega \in A$ и $\omega \in B\}$

мн-во точек, принадлежащих обоим множ-вам

Очевидно, что справедливы следующие правила:

$A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ - Коммутативный закон

Ассоциативный закон: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Пусть $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{3\}$. Тогда

$(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3\}$ и $A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3\}$

Дистрибутивные законы:

D_1 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

D_2 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

1.3 Разные формулы.

Законы Де Моргана:

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (C1) дополнение объединения равно пересечению дополнений

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (C2) дополнение пересечения равно объединению дополнений

Формулы C1 и C2 логически выводятся одна из другой. Убедимся в этом.

Пусть верна формула С1 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Тогда ввиду того, что A и B произвольные множ-ва, мы можем подставить в С1 их дополнения и прийти к соотношению

$$(A^c \cup B^c)^c = (A^c)^c \cap (B^c)^c = A \cap B$$

Теперь возьмем дополнение от первого и от третьего множеств и снова используем равенство $(A^c)^c = A \Rightarrow A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$

Важное следствие:

Объединение можно выразить через пересечение, а пересечение - через объединение с помощью дополнения:

$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ - пересечение через дополнение и объединение

$A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$ - объединение через дополнение и пересечение

Однако, дополнение само по себе нельзя выразить через объединение или пересечение. Для этого нужна специальная операция

Разность:

Множество ~~A\B~~ $A \setminus B$ содержит точки, принадлежащие A но не принадлежащие B

$$A \setminus B = A \cap B^c = \{\omega \mid \omega \in A \text{ и } \omega \notin B\}$$

Пусть $A = \{1,2,3\}$ и $B = \{2,3,4\}$

Разность $A \setminus B = \{1\}$, потому что только 1 есть в A, но его нет в B

Разность не коммутативна (рез-т зависит от порядка)

$A \setminus B = \{1\}$, но $B \setminus A = \{4\}$ => результаты разные, значит разность не коммутативна

Разность не ассоциативна (значит важно как мы группируем элементы)

$$(A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C)$$

Пример: пусть $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3\}$, $C = \{3\}$

1. $(A \setminus B) \setminus C$: $A \setminus B = \{1\}$, а $\{1\} \setminus C = \{1\}$
2. $A \setminus (B \setminus C)$: $B \setminus C = \{2\}$, а $A \setminus \{2\} = \{1,3\}$

результат: $\{1\} \neq \{1,3\}$

Симметрическая разность

Определение: симметрическая разность $A \triangle B$ – это все элементы, кот. принадлежат только одному из двух множеств A и B, но не обоим сразу

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

или: $A \triangle B = \{\omega \mid \omega \in A$ или $\omega \in B$, но не в обоих$\}$

Пример: Пусть $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$

Тогда $A \setminus B = \{1, 2\}$ (т.е. эл-ты из A, кот. не в B)

$B \setminus A = \{4, 5\}$ (т.е. эл-ты из B, кот. нет в A)

$A \triangle B = \{1, 2, 4, 5\}$

$A \triangle B = B \triangle A$

Проверить ассоциативность, т.е. $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ сложнее.

На практике можно док-ть через индикаторные функции (объясняется позднее)

Непересекающиеся множества:

Два множ-ва назыв. непересекающимися, если у них нет общих элементов

$$A \cap B = 0$$

Это значит никакой эл-т не может одновременно принадлежать A и B

Пример: $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$

Эти множ-ва непересек. → нет общих элементов

Разбиение пространства

Все множ-во (называемое Ω) можно разбить на две части: элементы из A и элементы из A^c (дополнение A)

$\Omega = A^c + A$ ("+" знак объединения непересек. множеств)

Если A - это "математики", а A^c - "не математики", то все пространство Ω - это все студенты, кот. либо математики, либо нет

Атомы множеств.

Когда мы берём несколько множеств и их дополнения, они делят все пространство на части (называемые атомами)

Пример для 3-ех множ-в: A, B, C

Атомы: $A \cap B \cap C$; $A \cap B \cap C^c$; $A \cap B^c \cap C$; ...

Каждое множ-во можно записать как объединение некоторых атомов

Пример: у тебя есть 3 свойства — любишь мат-ку (A), музыку (B), спорт (C)

Каждое сочетание этих св-в ~~для~~ создает отдельный атом:

- любишь только мат-ку: $A \cap B^c \cap C^c$
- любишь мат-ку и муз., но не спорт: $A \cap B \cap C^c$

и так далее

Бесконечное объединение и пересечение

Если у нас бесконечная последовательность множеств $A_1, A_2, \ldots$, то:

- Бесконечное объединение ($\cup$) - это все элементы, кот. есть хотя бы в одном множ-ве
- Бесконечное пересечение ($\cap$) - это все элементы, кот. есть во всех множ-вах одновреме[нно]

Пример, Пусть $A_n = \{n, n+1, n+2\}$ для $n = 1, 2, 3 \ldots$

- объединение всех A_n: $\cup A_n = \{1, 2, 3 \ldots\}$ (все натуральные числа)
- пересечение всех A_n: $\cap A_n = \emptyset$ (т.к. нет элемента кот. принадлежит всем A_n)

Итог:

- Симметрическая разность помогает находить элементы, кот. принадлежат только одному из множеств
- Непересекающиеся множества не имеют общих эл-тов
- Разбиение на непустые подмножества

- Разбиение пространства и работа с атомами позволяет анализировать сложные сочетания множ-в
- Бесконечные объединения и пересечения расширяют теорию множ-в для работы с бесконечными последовательност.

Индикатор

Индикатор функции (индикатор) это способ классификации элементов множ-ва с использованием дихотомии - элемент либо принадлежит множеству A, либо нет. В основе метода лежит идея отображения каждого элемента ω из выборочного пространства Ω в значение 1 (если $\omega \in A$) или 0 (если $\omega \notin A$).
Индикаторная функция опред-ся как:

$$I_{A}(\omega) = \begin{cases} 1, \text{ если } \omega \in A \\ 0, \text{ если } \omega \notin A \end{cases}$$

Св-ва индикаторных функций:

Индикатор I_A однозначно определяется множ-вом A. Если множ-ва A и B идентичны $(A = B)$, то $I_A = I_B$

Используются операции: $\vee$(max), $\wedge$(min)

$a \vee b = \max(a, b)$

$a \wedge b = \min(a, b)$

Применение индикаторов

Для множ-ва пересечения и объединения $A \cap B$ и $A \cup B$ индикаторы связаны следующими формулами:

$$I_{A \cap B}(\omega) = I_A(\omega) \wedge I_B(\omega) = I_A(\omega) \cdot I_B(\omega) \quad (1)$$

Эта формула описывает индикатор пересечения 2-ух множ-в A и B. Если точка ω принадлежит обоим множ-вам A и B, то индикатор $I_{A \cap B}(\omega)$ принимает значение 1. В противном случае он равен 0.

Используются 2 эквивалентных выражения:

$\wedge$: логическое „И" (min из значений индикаторов $I_A(\omega)$ и $I_B(\omega)$)

$\cdot$: умножение индикат. (т.к. $1 \cdot 1 = 1$, а любое умножение с 0 даёт 0)

Формула для объединения множ-в:

$$\underline{I}_{A\cup B}(\omega) = \underline{I}_A(\omega) \vee \underline{I}_B(\omega) \quad (2)$$

Эта формула описывает индикатор объединения двух множ-в A и B. Если точка ω принадлежит <u>хотя бы одному</u> из множеств A или B, то индикатор $\underline{I}_{A\cup B}(\omega)$ принимает значение 1. В противном случае 0.

Здесь используется операция:

$\vee$: логич. „или" / max из значений индикаторов $\underline{I}_A(\omega)$ и $\underline{I}_B(\omega)$

Пересечение $(A \cap B)$: точка принадлежит обоим множествам одновременно. Здесь работает „жесткое" правило: оба индикатора д. б. $= \underline{1}$

Объединение $(A \cup B)$: точка принадлежит хотя бы одному множ-ву. Здесь работает „мягкое" правило: достаточно, чтобы хотя бы один индикатор был 1

Сумма индикаторов: если $A \cap B = \emptyset$ (множества не пересекаются), то максимум индикаторов равен их сумме

$$I_{A \cup B} = I_A + I_B, \text{ если } A \cap B = \emptyset$$

Дополнение множ-ва: индикатор дополнения множества A^c выражается как:

$$I_{A^c} = 1 - I_A$$

Дополнительные св-ва: используя св-ва дополнения, пересечения и объединения, можно доказать следующие равенства:

1. $I_{A \cup B} + I_{A \cap B} = I_A + I_B$

2. Для симметрич. разности $A \Delta B$ выполняется: $I_{A \Delta B}(\omega) = I_A(\omega) + I_B(\omega) - 2 \cdot I_{A \cap B}(\omega)$ либо $I_{A \Delta B}(\omega) = I_A(\omega) + I_B(\omega)$ по модулю 2

Ассоциативность симметрич. разности: доказывается, что симметрич. разность обладает ассоциатив. св-вом.

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$$