$$y = f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$$

**Решение**: Проведем исследование функции.

1) Найдём область определения функции:

$$\begin{cases} \ln x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x > 0 \end{cases}$$

Таким образом, область определения: $D(f) = (0;1) \cup (1;+\infty)$.

Функция не определена при отрицательных значениях $x$, значит, она не является четной или нечетной.

Очевидно, что функция непериодическая.

2) Асимптоты.

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} \frac{x^2}{\ln x} = \frac{0}{-\infty} = 0 \cdot (-0) = 0$$

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} \frac{x^2}{\ln x} = \frac{1}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} \frac{x^2}{\ln x} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

Прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой для графика $f(x)$ при $x \to 1$.

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x \ln x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x)'}{(\ln x)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} (x) = +\infty$$

Таким образом, наклонная асимптота отсутствует.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\ln x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2)'}{(\ln x)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} (2x^2) = +\infty$$

Функция неограниченно возрастает, если $x \to +\infty$

3) Точки пересечения графика с координатными осями, интервалы знакопостоянства функции.

График функции не пересекает координатные оси.

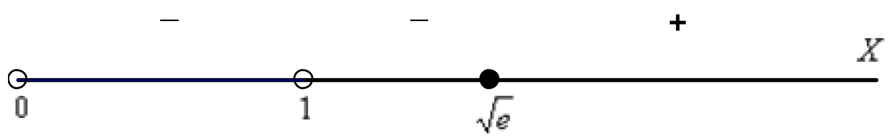
$f(x) < 0$, если $x \in (0;1)$.
$f(x) > 0$, если $x \in (1;+\infty)$,

4) Возрастание, убывание, экстремумы функции.

$$f'(x) = \left( \frac{x^2}{\ln x} \right)' = \frac{(x^2)'(\ln x) - x^2 (\ln x)'}{\ln^2 x} = \frac{2x \ln x - x^2 \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{2x \ln x - x}{\ln^2 x} = \frac{x(2\ln x - 1)}{\ln^2 x} = 0$$

$x=\sqrt{e}\approx 1{,}65$ – критическая точка.

Определим знаки $f'(x)$:




$f(x)$ убывает на $(0;1)\cup(1;\sqrt{e})$ и возрастает на $(\sqrt{e};+\infty)$

В точке $x=\sqrt{e}$ функция достигает минимума: $f(\sqrt{e})=2e\approx 5{,}44$.

5) Выпуклость, вогнутость, перегибы графика.

$$f''(x)=\left(\frac{2x\ln x-x}{\ln^2 x}\right)'=\frac{(2x\ln x-x)'\cdot\ln^2 x-(2x\ln x-x)\cdot(\ln^2 x)'}{\ln^4 x}=$$

$$=\frac{\left(2\ln x+2x\cdot\frac{1}{x}-1\right)\cdot\ln^2 x-(2x\ln x-x)\cdot\frac{2\ln x}{x}}{\ln^4 x}=\frac{(2\ln x+1)\cdot\ln x-2(2\ln x-1)}{\ln^3 x}=$$

$$=\frac{2\ln^2 x+\ln x-4\ln x+2}{\ln^3 x}=\frac{2\ln^2 x-3\ln x+2}{\ln^3 x}=0$$

Проведём замену:

$\ln x=t$

$2t^2-3t+2=0$

$D=9-16=-7<0$

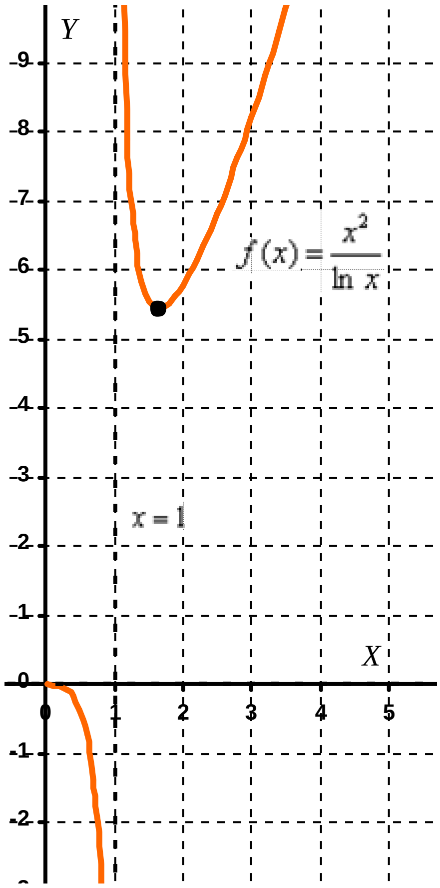
Корней нет.

Определим знаки $f''(x)$:


График $f(x)$ является выпуклым на $(0;1)$ и вогнутым на $(1;+\infty)$.

6) Найдем дополнительные точки и построим график:

| $x$ | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 1,2 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | -0,36 | -0,70 | -1,37 | -2,87 | 7,90 | 5,55 | 5,77 | 6,82 | 8,19 | 9,78 |


Y
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
$f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$
x = 1
X
0
1
2
3
4
5