$y = f(x) = \sqrt[3]{4x^3 - 12x}$

Решение: Проведем исследование функции.

1) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой, область определения: $D(f) = \Re$.

$$f(-x) = \sqrt[3]{4(-x)^3 - 12(-x)} = \sqrt[3]{-4x^3 + 12x} = \sqrt[3]{-(4x^3 - 12x)} = -\sqrt[3]{4x^3 - 12x} = -f(x)$$

Таким образом, данная функция является нечетной, её график симметричен относительно начала координат.

Очевидно, что функция непериодическая.

2) Асимптоты.

Так как функция непрерывна на $\Re$, очевидно, что вертикальные асимптоты отсутствуют.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{4x^3 - 12x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{4x^3 - 12x}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{4 - \frac{12}{x^2}^{\to 0}} = \sqrt[3]{4}$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{4x^3 - 12x} - \sqrt[3]{4}x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{4x^3 - 12x} - \sqrt[3]{4x^3}\right) = \infty - \infty = (*)$$

Умножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение:

$$(*) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt[3]{4x^3 - 12x} - \sqrt[3]{4x^3})(\sqrt[3]{(4x^3 - 12x)^2} + \sqrt[3]{4x^3(4x^3 - 12x)} + \sqrt[3]{16x^6})}{\sqrt[3]{(4x^3 - 12x)^2} + \sqrt[3]{4x^3(4x^3 - 12x)} + \sqrt[3]{16x^6}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4x^3 - 12x - 4x^3}{\sqrt[3]{(4x^3 - 12x)^2} + \sqrt[3]{4x^3(4x^3 - 12x)} + \sqrt[3]{16x^6}} =$$

$$= -12 \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{(4x^3 - 12x)^2} + \sqrt[3]{4x^3(4x^3 - 12x)} + \sqrt[3]{16x^6}} = \frac{\infty}{\infty} = (*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^2:

$$(*) = -12 \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{\sqrt[3]{(4x^3 - 12x)^2} + \sqrt[3]{4x^3(4x^3 - 12x)} + \sqrt[3]{16x^6}}{x^2}} = -12 \cdot \frac{0}{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{16}} = 0$$

Прямая $y = \sqrt[3]{4}x$ является наклонной асимптотой для графика $f(x)$ при $x \to \pm\infty$.

3) Точки пересечения графика с координатными осями, интервалы знакопостоянства функции.

График функции проходит через начало координат.

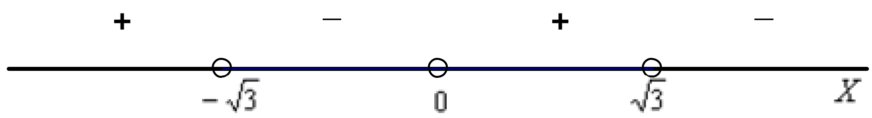
С осью абсцисс: $f(x) = \sqrt[3]{4x^3 - 12x} = 0$

$4x^3-12x=0$

$4x(x^2-3)=0$

$x=0$, $x=\pm\sqrt{3}\approx\pm1{,}73$

Определим знаки $f(x)$:



$f(x)<0$ при $x\in(-\infty;-\sqrt{3})\cup(0;\sqrt{3})$

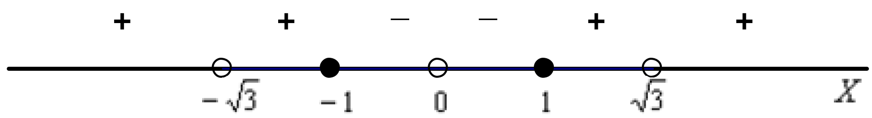
$f(x)>0$ при $x\in(-\sqrt{3};0)\cup(\sqrt{3};+\infty)$

4) Возрастание, убывание, экстремумы функции.

$$f'(x)=\left(\sqrt[3]{4x^3-12x}\right)'=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(4x^3-12x)^2}}\cdot(4x^3-12x)'=\frac{12x^2-12}{3\cdot\sqrt[3]{(4x^3-12x)^2}}=\frac{4(x^2-1)}{\sqrt[3]{(4x^3-12x)^2}}=0$$

$x=\pm1$ – критические точки.

Определим знаки $f'(x)$:



$f(x)$ возрастает на $(-\infty;-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3};-1)\cup(1;\sqrt{3})\cup(\sqrt{3};+\infty)$ и убывает на $(-1;0)\cup(0;1)$.

В точке $x=-1$ функция достигает максимума: $f(-1)=\sqrt[3]{-4+12}=\sqrt[3]{8}=2$

В точке $x=1$ функция достигает минимума: $f(1)=-2$.

5) Выпуклость, вогнутость, перегибы графика.

$$f''(x)=\left(\frac{4(x^2-1)}{\sqrt[3]{(4x^3-12x)^2}}\right)'=4\cdot\frac{(x^2-1)'\cdot\sqrt[3]{(4x^3-12x)^2}-(x^2-1)((4x^3-12x)^{\frac{2}{3}})'}{\sqrt[3]{(4x^3-12x)^4}}=$$

$$=4\cdot\frac{2x\cdot\sqrt[3]{(4x^3-12x)^2}-(x^2-1)\cdot\dfrac{2(12x^2-12)}{3\cdot\sqrt[3]{4x^3-12x}}}{\sqrt[3]{(4x^3-12x)^4}}=8\cdot\frac{x\cdot\sqrt[3]{(4x^3-12x)^2}-\dfrac{4(x^2-1)^2}{\sqrt[3]{4x^3-12x}}}{\sqrt[3]{(4x^3-12x)^4}}=$$

$$=8\cdot\frac{x\cdot(4x^3-12x)-4(x^4-2x^2+1)}{\sqrt[3]{(4x^3-12x)^5}}=8\cdot\frac{4x^4-12x^2-4x^4+8x^2-4}{\sqrt[3]{(4x^3-12x)^5}}=$$

$$=8\cdot\frac{-4x^2-4}{\sqrt[3]{(4x^3-12x)^5}}=-\frac{32(x^2+1)}{\sqrt[3]{(4x^3-12x)^5}}\neq0$$

Определим знаки $f''(x)$:

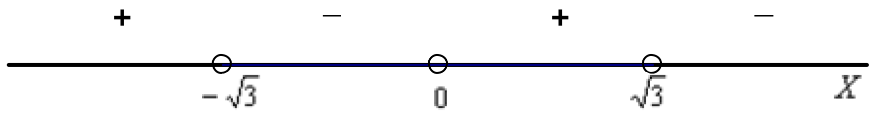


График $f(x)$ является выпуклым на $(-\sqrt{3};0)\cup(\sqrt{3};+\infty)$ и вогнутым на $(-\infty;-\sqrt{3})\cup(0;\sqrt{3})$

6) Найдем дополнительные точки и построим график:

x	0,2	0,5	1,5	2,5	3	4
$f(x)$	-1,33	-1,77	-1,65	3,19	4,16	5,92