Математический анализ
Лекция 4

Никитин А.А.

МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК
Кафедра общей математики

Онлайн-курс по математике в Data Science

7 ноября, 2020г.

Наводящие соображения

В основе дифференциального исчисления и его практических приложений лежит идея приближённого представления функции $f(x + \Delta x)$ (от приращения Δx) линейной функцией $y = A\Delta x + B$ или, более общо, многочленом от Δx. Для широкого класса функций оказывается возможным разумно определить такие приближения, и на этой основе получить различные важные результаты.

Пусть $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$, $x \in (a, b)$ – произвольная фиксированная точка, а Δx – произвольное число (приращение аргумента) такое, что $x + \Delta x \in (a, b)$.

Определение дифференцируемости в точке

Определение: Функция f называется дифференцируемой в точке x, если существует такое $A \in \mathbb{R}$, что приращение функции f в точке x можно представить в виде:

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = A\Delta x + \overline{o}(\Delta x), \text{ при } \Delta x \to 0. \qquad (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow \Delta f = f(x+\Delta x)-f(x) = A\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x, \text{ при } \alpha(\Delta x) \to 0.$$

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta_x f(\Delta x).$$

Определение: Дифференциалом функции f в точке x называется входящая в равенство $(*)$ линейная однородная функция $A \cdot \Delta x$ от переменного приращения Δx.

Обозначение: $d_x f(\Delta x)$.

Однозначность дифференциала

<u>Замечание</u>: Дифференциал функции в точке определён однозначно, ибо из $(*)$ следует:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(A + \frac{\overline{o}(\Delta x)}{\Delta x} \right) = A,$$

и однозначность дифференциала следует из единственности предела.

Понятие производной

<u>Определение</u>: Величина $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ называется производной функции f в точке x. Выражение для производной можно переписать в эквивалентной форме:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x),\ \alpha(\Delta x) \to 0.$$

Дифференцируемость функции

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)+\alpha(\Delta x),\ \alpha(\Delta x)\to 0\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)\Delta x+\overline{o}(\Delta x),\ \Delta x\to 0.$$

Таким образом, дифференцируемость функции равносильна наличию у неё производной в соответствующей точке, а дифференциал записывается в виде:

$$d_x f(\Delta x)=f'(x)\Delta x.$$

Главная линейная часть приращения функции

В силу того, что при $f'(x) = A \neq 0$, получаем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overline{o}(\Delta x)}{d_x f(\Delta x)} = \frac{\overline{o}(\Delta x)}{f'(x) \cdot \Delta x} = 0,$$

то слагаемое $f'(x)\Delta x$ является главной частью, а $\overline{o}(\Delta x)$ – бесконечно малая по сравнению с ним. На этом основании дифференциал $d_x f(\Delta x)$ определяют как главную часть приращения функции f в точке x, линейную относительно Δx.

Пусть $f(x) \equiv x$. Тогда

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = 1 \Rightarrow d_x f(\Delta x) = (dx(\Delta x)) = 1 \cdot \Delta x = \Delta x.$$

Откуда,

$$d_x f(\Delta x) = f'(x) dx(\Delta x) \text{ или } f'(x) = \frac{df}{dx}$$

Односторонние производные

Определение

<u>Определение</u>: Правой (левой) производной функции f в данной точке x называется правый (левый) предел при $\Delta x \to 0$ разностного отношения $\dfrac{\Delta_x f(\Delta x)}{\Delta x}$ (при условии, что данный предел существует).
Обозначение: $f'_+(x)$ $(f'_-(x))$.

Утверждения

1) Если функция f имеет в точке x производную $f'(x)$, то $\exists f'_+(x)$ и $f'_-(x)$, причём: $f'(x) = f'_+(x) = f'_-(x)$.
2) Если функция f имеет в точке x односторонние производные $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$, равные друг другу, то $\exists f'(x)$ и $f'(x) = f'_+(x) = f'_-(x)$. Если же $f'_+(x) \neq f'_-(x)$, то $\nexists f'(x)$.

Соотношение непрерывности и дифференцируемости

Необходимое условие дифференцируемости

<u>Теорема</u>: Если функция f дифференцируема в точке x, то она и непрерывна в этой точке.

Доказательство.

Если f – дифференцируема в точке x, то

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \overline{o}(\Delta x) \to 0, \text{ при } \Delta x \to 0.$$

(разностная форма непрерывности)

Откуда,

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) = f(x) \ \Rightarrow \ f \in C(x).$$

□

Обратное, вообще говоря, неверно.

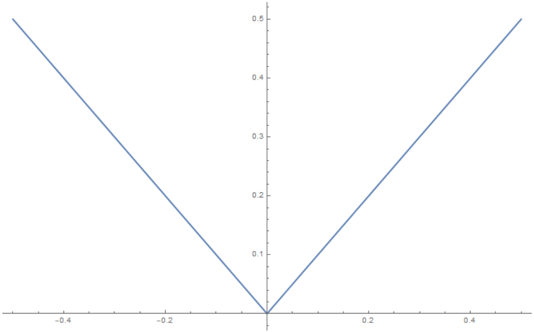
Пример 1

Примеры:

$f(x) = |x|$. Тогда

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0 \pm 0} \frac{|\Delta x| - 0}{\Delta x} = \pm 1.$$

Следовательно, $\nexists f'(0)$ (из критерия существования предела)



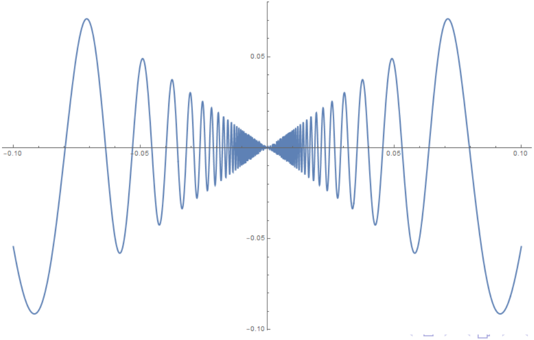
Пример 2

Примеры:

$f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x}$. Тогда

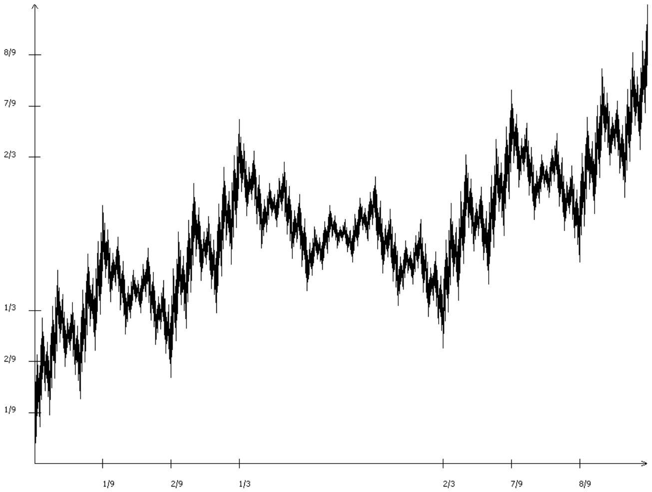
$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0 \pm 0} \frac{\Delta x \cdot \sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0 \pm 0} \sin\frac{1}{\Delta x}$$

Следовательно, $\nexists f'(0)$.



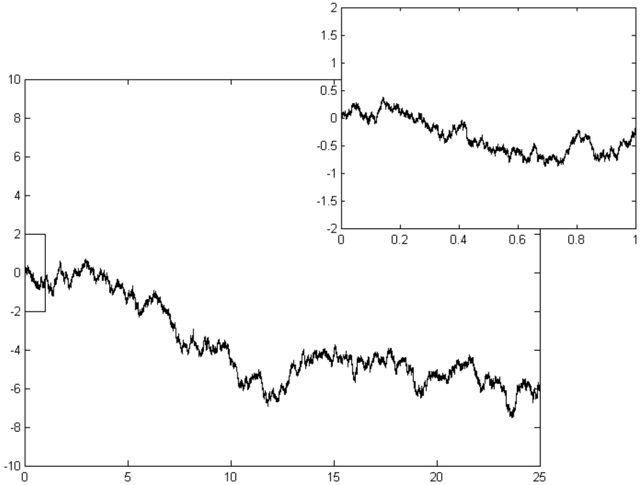
Примеры:

Пример всюду непрерывной, но нигде не дифференцируемой функции

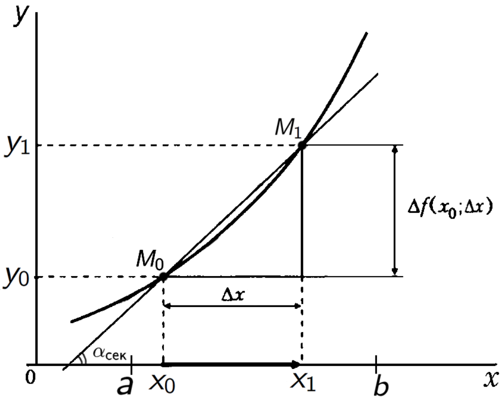


Примеры:

Пример всюду непрерывной, но нигде не дифференцируемой функции



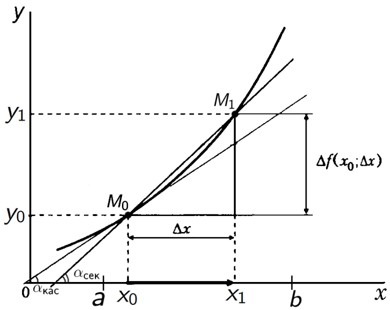
Пусть
$$f : (a,b) \mapsto \mathbb{R},\ x_0 \in (a,b) \text{ и } y_0 = f(x_0).$$
Пусть также $f \in C(x_0)$ и $M_0 = (x_0; y_0)$. Возьмём на графике функции f точку $M_1 = (x_1; y_1)$, $(a,b) \ni x_1 \neq x_0$, $y_1 = f(x_1)$. Проведём прямую M_0M_1, которую будем называть секущей.



Уравнение прямой M_0M_1: $y = y_0 + k_{сек}(x - x_0)$, где $k_{сек} = \operatorname{tg} \alpha_{сек}$ – угловой коэффициент (tg угла наклона) секущей: $k_{сек} = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$.

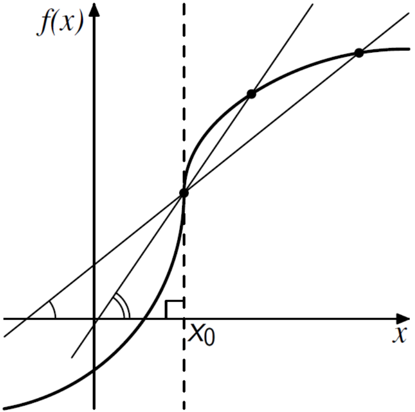
При приближении точки M_1 к M_0 секущая поворачивается вокруг точки M_0. Рассмотрим предельное положение секущей при $M_1 \to M_0$ (или, что тоже самое, при $x_1 \to x_0$).

Определение: Если существует конечный предел $k_{кас} = \lim\limits_{x_1 \to x_0} k_{сек}$, то прямую, проходящую через точку M_0 и имеющую угловой коэффициент $k_{кас}$, называют касательной к графику функции f в точке M_0.



Вертикальная касательная

Если функция f непрерывна в точке x_0 и предельное значение коэффициента $k_{\text{кас}} = \pm\infty$, то касательной к графику функции f в точке M_0 называют вертикальную прямую $x = x_0$.



По определению существование не вертикальной касательной к графику функции f в точке M_0 (т.е. существование конечного предела $k_{\text{кас}}$) равносильно дифференцируемости (существованию производной) f в точке x_0. При этом,

$$k_{\text{кас}} = \operatorname{tg} \alpha_{\text{кас}} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = f'(x_0)$$

Поэтому, уравнение не вертикальной касательной к графику функции f в точке M_0 имеет вид:

$$y_{\text{кас}} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

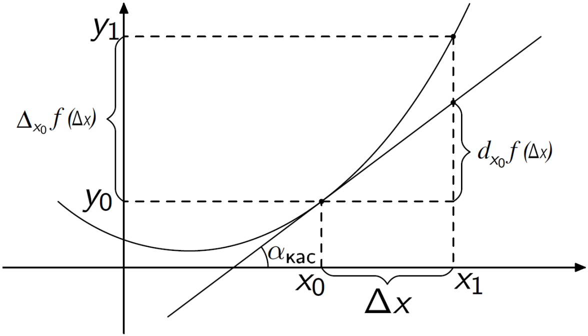
Геометрический смысл производной

$$k_{\text{кас}} = \operatorname{tg} \alpha_{\text{кас}} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = f'(x_0)$$

Производная есть угловой коэффициент касательной (tg угла наклона касательной).

$$\Delta f = df + \overline{o}(\Delta x).$$

Дифференциал функции f в точке x_0 равен приращению, которое получает касательная при переходе из точки x_0 в точку $x_0 + \Delta x = x_1$.



Дифференцирование и арифметические операции

Пусть функции $f, g : X \mapsto \mathbb{R}$ дифференцируемы в точке $x \in X$, а $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ – некоторые константы. Тогда линейная комбинация, произведение и частное этих функций (при условии $g(x) \neq 0$) также дифференцируемы в данной точке. Причём имеют место формулы:

1. $(\alpha f \pm \beta g)'(x) = \alpha f'(x) \pm \beta g'(x)$;
2. $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \; g(x) \neq 0$.

Доказательство.

1.

$$(\alpha f \pm \beta g)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\alpha f(x+\Delta x) \pm \beta g(x+\Delta x)) - (\alpha f(x) \pm \beta g(x))}{\Delta x} =$$

$$= \alpha \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \pm \beta \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \alpha f'(x) \pm \beta g'(x).$$

2.

$$(f \cdot g)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x+\Delta x) + f(x) \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right) =$$

$$= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x);$$

3.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - g(x+\Delta x)f(x)}{(g(x+\Delta x) \cdot g(x))\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{g(x+\Delta x) \cdot g(x)} \left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x) - \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} f(x) \right) =$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Правила дифференцирования

Дифференцирование сложной функции

Пусть $f : (a,b) \mapsto (c,d)$, $g : (c,d) \mapsto \mathbb{R}$, $x \in (a,b)$. Если функция f дифференцируема в точке x, а g дифференцируема в точке $f(x)$, то их композиция $g \circ f$ дифференцируема в точке x, и

$$(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x).$$

Доказательство.

Придадим аргументу функции f данной точке x приращение $\Delta x \neq 0$. Этому приращению аргумента отвечает приращение $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ функции f. Приращению Δf, в свою очередь, соответствует приращение $\Delta g = g(f + \Delta f) - g(f)$. Т.к. функция g – дифференцируема в точке f, то

$$\Delta g = g'(f)\Delta f + \overline{o}(\Delta f) \Leftrightarrow \frac{\Delta g}{\Delta x} = g'(f)\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\overline{o}(\Delta f)}{\Delta x}. \qquad (*)$$

$$\frac{\overline{o}(\Delta f)}{\Delta x} = \alpha(\Delta f) \cdot \frac{\Delta f}{\Delta x} \to 0, \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ из $(*)$ получаем:

$$g'_x = \Big(g\big(f(x)\big)\Big)' = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x).$$

Дифференцирование обратной функции

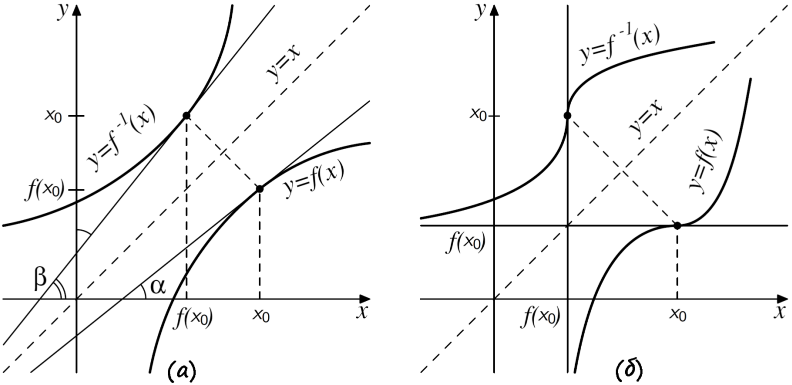
Пусть функции $f : X \mapsto Y$ и $f^{-1} : Y \mapsto X$ взаимно обратны и непрерывны в точках $x_0 \in X$ и $f(x_0) = y_0 \in Y$ соответственно. Если функция f дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$, то f^{-1} дифференцируема в точке y_0, причём

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Дифференцирование обратной функции

Геометрический смысл теоремы ясен из рисунка *(а)*. Т.к. график f^{-1} получается из графика f симметрией относительно прямой $y = x$, то

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{f'(x_0)}.$$



Производные элементарных функций

$$f(x) = c = const, \quad x \in \mathbb{R}. \quad f'(x) = 0;$$

$$f(x) = a^x, \quad a > 0, \; x \in \mathbb{R}. \quad f'(x) = a^x \cdot \ln a;$$

$$f(x) = \log_a x, \quad 0 < a \neq 1, \; x > 0. \quad f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$

$$f(x) = x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \; x > 0. \quad f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1};$$

$$f(x) = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}. \quad f'(x) = \cos x;$$

$$f(x) = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}. \quad f'(x) = -\sin x;$$

$$f(x) = \operatorname{tg} x, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right\}. \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$f(x) = \operatorname{ctg} x, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi k, k \in \mathbb{Z}\}. \quad f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$f(x) = \arcsin x, \quad x \in (-1, 1). \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$$

$$f(x) = \arccos x, \quad x \in (-1, 1). \quad f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$$

$$f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbb{R}. \quad f'(x) = \frac{1}{1 + x^2};$$

$$f(x) = \operatorname{arcctg} x, \quad x \in \mathbb{R}. \quad f'(x) = -\frac{1}{1 + x^2};$$