События и их вероятности

Виды событий

События бывают достоверными, невозможными и случайными.

1) Достоверным называют событие, которое в результате испытания (осуществления определенных действий, определённого комплекса условий) обязательно произойдёт. Например, в условиях земного тяготения подброшенная монета непременно упадёт вниз.
2) Невозможным называют событие, которое в результате испытания заведомо не произойдёт. Пример невозможного события: в условиях земного тяготения подброшенная монета улетит вверх.

3) И, наконец, событие называется случайным, если в результате испытания оно может, как произойти, так и не произойти, при этом должен иметь место принципиальный критерий случайности: случайное событие – есть следствие случайных факторов, воздействие которых предугадать невозможно или крайне затруднительно

Любой результат испытания называется исходом, который, собственно и представляет собой появление определённого события. В частности, при подбрасывании монеты возможно 2 исхода (случайных события): выпадет орёл, выпадет решка. Естественно, подразумевается, что данное испытание проводится в таких условиях, что монета не может встать на ребро или, скажем, зависнуть в невесомости.

События (любые) обозначают большими латинскими буквами A, B, C, D, E, F, ...

либо теми же буквами с подстрочными индексами, например:

A1 A2 A3 A4 A5

При этом стараются избегать буквы P, которая зарезервирована под другие нужды.

A_O – в результате броска монеты выпадет «орёл»;

B5 – в результате броска игральной кости (кубика) выпадет 5 очков;

C_T– из карточной колоды будет извлечена карта трефовой масти.

– выпадение орла или решки при броске монеты;
– выпадение 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков при броске игрального кубика;
– появление трефы, пики, бубны или червы при случайном извлечении карты из полной колоды.

При этом предполагается, что монета и кубик однородны и имеют геометрически правильную форму, а колода хорошо перемешана и «идеальна» с точки зрения неразличимости рубашек карт.

Совместные и несовместные события. Противоположные события. Полная группа событий

События называют несовместными, если в одном и том же испытании появление одного из событий исключает появление других событий. Простейшим примером несовместных событий является пара противоположных событий. Событие, противоположное данному, обычно обозначается той же латинской буквой с чёрточкой наверху:

$A_1 = 4$, A_2 – четн

A_O – в результате броска монеты выпадет орёл;

$\overline{A}$O – в результате этого же броска выпадет решка

Совершено ясно, что в отдельно взятом испытании появление орла исключает появление решки (и наоборот), поэтому данные события и называются несовместными. Противоположные события легко формулируются из соображений элементарной логики:

B5 – в результате броска игрального кубика выпадет 5 очков;

$\overline{B}$5 – в результате этого же броска выпадет число очков, отличное от пяти.

5, либо не 5, т.е. данные события несовместны и противоположны.

C_T– из колоды будет извлечена карта трефовой масти, либо:
$\overline{C}$_T– извлечена пика, черва или бубна.

Множество несовместных событий образуют полную группу, если в результате отдельно взятого испытания обязательно появится одно и только одно из этих событий.

я пара противоположных событий, например,B5 и не B5 (выпадение / невыпадение «пятёрки») образует полную группу. Но, разумеется, полную группу могут образовывать не только противоположные события:

B1– в результате броска игрального кубика выпадет 1 очко;
B2– ... 2 очка;
B3– ... 3 очка;
B4– ... 4 очка;
B5– ... 5 очков;
B6– ... 6 очков.

События B1 , B2 , B3 , B4 , B5 , B6
несовместны (поскольку появление какой-либо
грани исключает одновременное появление других) и образуют полную группу (так как
в результате испытания обязательно появится одно из этих шести событий).

элементарность исхода (события). Если совсем просто, то элементарное событие нельзя «разложить на другие события».

Например, события B1 , B2 , B3 , B4 , B5 , B6
элементарны, но событие

не B5 не является таковым, так как
подразумевает выпадение 1, 2, 3, 4 или 6 очков (включает в себя 5 элементарных исходов).

В примере с картами события $C_Т$ $C_П$ $C_Ч$ $C_Б$ (извлечение трефы, пики, червы или бубны соответственно) несовместны и образуют полную группу, но они неэлементарны.

Если считать, что в колоде 36 карт, то каждое из перечисленных выше событий включает в себя 9 элементарных исходов. Аналогично – события D_6 D_7 D_8 D_9 D_{10}

(извлечение шестёрки, семёрки, ..., короля, туза) несовместны, образуют полную группу и неэлементарны (каждое включает в себя 4 исхода).

Таким образом, элементарным исходом здесь считается лишь извлечение какой-то конкретной карты, и 36 несовместных элементарных исходов тоже образуют полную группу событий.

И коротко о событиях совместных. События называются совместными, если в отдельно взятом испытании появление одного из них не исключает появление другого.
Например:

$C_Т$ – из колоды карт будет извлечена трефа;
D_7 – из колоды карт будет извлечена семёрка.

– данные события совместны, т.к. при излечении семёрки треф одновременно имеют место оба события.
Понятие совместности охватывает и бОльшее количество событий:

D – завтра в 12.00 будет дождь;
G – завтра в 12.00 будет гроза;
S – завтра в 12.00 будет солнце.

Алгебра событий

Сложение событий обозначает логическую связку ИЛИ,
а умножения событий – логическую связку И.

A B A B

1) Суммой двух событий и называется событие которое состоит в том, что наступит или событие , или событие , или оба события одновременно. В том случае, если события несовместны, последний вариант отпадает, то есть может наступить или событие или событие . A B

Правило распространяется и на бОльшее количество слагаемых, например, событие

$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$ состоит в том, что произойдёт хотя бы одно из событий A_1, A_2, A_3, A_4, A_5

A_1 A_2

а если события несовместны – то одно и только одно событие из этой суммы: или событие , или событие , или событие , или событие , или .

A_3 A_4 A_5

Событие $\overline{B}_5 = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_6$ состоит в том, что выпадет 1, или 2, или 3, или 4, или 6 очков.

Событие $B_{1,2} = B_1 + B_2$ состоит в том, что выпадет не более двух очков (1 или 2 очка) событиями совместные: Ст + Д7

Событие состоит в том, что из колоды будет извлечена трефа или семёрка или семёрка треф.

Согласно данному выше определению, хотя бы что-то – или любая трефа или любая семёрка или их «пересечение» – семёрка треф. Легко подсчитать, что данному событию соответствует 12 элементарных исходов (9 трефовых карт + 3 оставшиеся семёрки).

$D+G+S$

Событие состоит в том, что завтра в 12.00 наступит ХОТЯ БЫ ОДНО из суммируемых совместных событий, а именно:

– будет только дождь / только гроза / только солнце;
– или наступит только какая-нибудь пара событий (дождь + гроза / дождь + солнце / гроза + солнце);
– или все три события появятся одновременно.

A B   AB   AB

Произведением двух событий и называют событие , которое состоит в совместном появлении этих событий, иными словами, умножение означает, что при некоторых обстоятельствах наступит и событие A и событие B. Аналогичное утверждение справедливо и для бОльшего количества событий, так, например, произведение

A1   A2   An

$A_1 A_2 A_3 \cdot \ldots \cdot A_{10}$ подразумевает, что при определённых условиях произойдёт и событие , и событие , и событие , ..., и событие

Рассмотрим испытание, в котором подбрасываются две монеты (не имеет значения, одновременно или нет) и следующие события:

A_1 на 1-й монете выпадет орёл;
$\overline{A_1}$ – на 1-й монете выпадет решка;
A_2 – на 2-й монете выпадет орёл;
$\overline{A_2}$ – на 2-й монете выпадет решка.

$A_1 A_2$ – событие состоит в том, что на 1-й монете выпадет орёл и на 2-й орёл;
$\overline{A_1}\,\overline{A_2}$ – событие состоит в том, что на 1-й монете выпадет решка и на 2-й решка;
$A_1 \overline{A_2}$ – событие состоит в том, что на 1-й монете выпадет орёл и на 2-й монете выпадет решка;
$\overline{A_1} A_2$ – событие состоит в том, что на 1-й монете выпадет решка и на 2-й монете выпадет орёл.

$A_1 A_2,\ \overline{A_1}\,\overline{A_2},\ A_1 \overline{A_2},\ \overline{A_1} A_2$ несовместны (т.к. не может, например, выпасть 2 орла и в то же самое время 2 решки) и образуют полную группу

Вероятность события

Вероятность события– это количественная мера возможности наступления этого события в результате испытания

$P(A)$ — ф-я, аргумент

Обозначения: вероятность некоторого события обозначается большой латинской буквой P, а само событие берётся в скобки, выступая в роли своеобразного аргумента.

$P(A_O)$

$P(B_5)$

$P(C_T)$

Также для обозначения вероятности широко используется маленькая буква p. В частности, можно отказаться от громоздких обозначений событий A_O, B_5, C_T и их вероятностей $P(A_O), P(B_5), P(C_T)$ и использовать следующую стилистику:

$p_O = \frac{1}{2}$ – вероятность того, что в результате броска монеты выпадет «орёл»;

$p_5 = \frac{1}{6}$ – вероятность того, что в результате броска игральной кости выпадет 5 очков;

$p_T = \frac{1}{4}$ – вероятность того, что из полной колоды будет извлечена трефа.

Вероятности можно выразить и в процентах, например: вероятность выпадение орла равна

$\frac{1}{2}\cdot 100\% = 50\%$ выпадения шестерки $\frac{1}{6}\cdot 100\% \approx 16{,}67\%$

но в теории вероятностей ЭТОГО ДЕЛАТЬ НЕ ПРИНЯТО

достоверное
невозможное
случайное

Принято использовать доли единицы, и, очевидно, что вероятность может изменяться в пределах

$0 \le P(A) \le 1$

$P(A)=0$ $P(A)=1$ $0<P(A)<1$

При этом если , то событие является невозможным, если – достоверным, а если , то речь идёт о случайном событии.

Сумма вероятностей событий, которые образуют полную группу

равна единице

Это теорема. Грубо говоря, если события образуют полную группу, то со 100%-ной вероятностью какое-то из них произойдёт. В самом простом случае полную группу образуют противоположные события, например:

A_o – в результате броска монеты выпадет орёл;
$\bar{A}_o$ – в результате броска монеты выпадет решка.

По теореме: $P(A_o)+P(\bar{A}_o)=1$

Поскольку данные события равновозможны, то их вероятности одинаковы

$P(A_0)=\frac{1}{2}, P(\overline{A}_0)=\frac{1}{2}$ и по этой причине такие события называют равновероятными.

Рассматриваемая теорема удобна тем, что позволяет быстро найти вероятность противоположного события. Так, если известна вероятность

$P(B_5)=\frac{1}{6}$ того, что на кубике выпадет пятёрка, то из суммы $P(B_5)+P(\overline{B}_5)=1$

легко выразить и вычислить вероятность того, что она не выпадет: $P(\overline{B}_5)=1-P(B_5)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

в элементарных исходах и их вероятностях, для которых, к слову, данная теорема тоже справедлива:

$$P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)+P(B_4)+P(B_5)+P(B_6)=1$$

События $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$

как отмечалось выше, равновозможны – и теперь мы можем сказать, что равновероятны. Вероятность выпадения любой грани кубика равна

$$P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=P(B_4)=P(B_5)=P(B_6)=\frac{1}{6}$$

В упрощенном варианте оформления вероятность противоположного события стандартно обозначается строчной буквой

q Например, если $p=0{,}7$ – вероятность того, что стрелок попадёт в цель, то $q=1-p=1-0{,}7=0{,}3$ – вероятность того, что он промахнётся.

Перестановки, сочетания и размещения без повторений

что значит «без повторений»? Это значит, что в данном параграфе будут рассматриваться множества, которые состоят из различных объектов, либо которые считаются таковыми по смыслу задачи.

Представьте, что перед вами на столе слева направо выложены:
яблоко / груша / банан

Вопрос первый: сколькими способами их можно переставить?

Формула количества перестановок: $P_n = n!$

Типичная смысловая нагрузка: *«Сколькими способами можно переставить n объектов?»*

$P_3 = 3! \to 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

яблоко / банан / груша
груша / яблоко / банан
груша / банан / яблоко
банан / яблоко / груша
банан / груша / яблоко

6 комбинаций или 6 перестановок.

n-факториал-

**это произведение всех натуральных чисел от до единицы до n, обозначают символом !
Используя знак факториала, можно, например, записать:**

$1! = 1,$

$2! = 2*1=2,$

$3! = 3*2*1=6,$

$4! = 4*3*2*1=24,$

$5! = 5*4*3*2*1 = 120.$

Необходимо знать, что $0! = 1$