

## Числовая последовательность

Каждому  $n$  (натуральное число) поставлено определение, действительное число  $x_n$ .

Числовая послед-ть выглядит так:

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Это элемент последовательности (или ее член). Последовательность может быть задана формулой ее общего члена, что позволяет вычислить любой член последовательности.

Пример:

$$x_n = \frac{1}{n} \\ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

## Рекуррентный способ задания послед-ти

Это способ, при котором задается первый член последовательности  $x_1$  и правило определения  $n$ -го члена по  $(n-1)$ -му:

$$x_n = f(x_{n-1})$$

В этом способе, для определения  $n$ -го члена послед-ти, надо посчитать все  $(n-1)$  предыдущих членов.

Соотношения  $x_1 = 1, x_n = n x_{n-1}$  определяют последовательность.

$$1. x_1 = 1, 2. x_2 = 2x_1 = 2, 3. x_3 = 3x_2 = 6, 4. x_4 = 4x_3 = 24, x_5 = 5x_4 = 120, \dots \\ x_n = n x_{n-1} = n!, \dots$$

Если все элементы последовательности  $\{x_n\}$  равно одному и тому же числу  $C$ , то ее называют **постоянной**.

**Ограниченная послед-ть**, это такая послед-ть для которой существует число  $M > 0$ , что для любого  $n \in \mathbb{N}$  выполняется неравенство

$$|x_n| \leq M$$

послед-ть ограничена этим числом  $M$ .



тогда как у неограниченной, для  
любого числа (положительного)  $M$   
существует элемент  $x_n$ , отвечающий  
неравенству:

$$|x_n| > M.$$

$\left\{\frac{1}{n}\right\}$  и  $\{4\}$  — пример ограниченных  
последовательностей

$\{2^n\}$  — неограниченная.

Последовательности  $\{x_n + y_n\}$ ,  $\{x_n - y_n\}$ ,  
 $\{x_n, y_n\}$ ,  $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ ,  $y_n \neq 0$

это сумма, разность, произведение и  
частное двух последовательностей.

$\{mx_n\}$  — произведение последовательности  
 $\{x_n\}$  на  $m$ .

Бесконечно малые и бесконечно  
большие послед-ти,

Послед-ть  $\{a_n\}$  бесконечно мала, если  
для любого  $\varepsilon$  существует такой  $N$ ,  
что при  $n > N$  выполняется неравенство  
 $|a_n| < \varepsilon$

Послед-ть  $\{x_n\}$  бесконечно большая, если  
для любого  $A$  существует номер  $N$  такой, что при  $n > N$   
 $|x_n| > A$

Теорема 1 (о связи бесконечно малых  
и бесконечно больших послед-й)

Если  $\{x_n\}$  — бесконечно больш. п-ть, и  $x_n \neq 0 \forall n$ ,  
то последовательность  $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$  — бесконечно мала, и,  
обратно,  
если  $\{a_n\}$  — бесконечно малая п-ть и  $a_n \neq 0 \forall n$ ,  
то послед-ть  $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$  — бесконечно большая.



## Свойства бесконечно мал. посл. (БМП)

1. Сумма и разность БМП есть БМП.

Следствие: Арифметическая сумма любого конечного числа БМП есть БМП.

2. Произведение  $2x$  БМП есть БМП.

Следствие: Произведение любого конечного числа БМП есть БМП.

3. Произведение ограниченного послед-ти на БМП есть БМП.

Следствие: Произведение БМП на число есть БМП.

## Предел числовой послед-ти.

$\square$  — Пусть

$\sqsubset$  — Если

$\exists$  — такое что

$\forall$  — для любого, для всех (квантор всеобщности)

$\exists$  — существует или найдется (квантор существования)

! — единственный (квантор единственности)

$$\{K_n\} = 10^n$$

Б.В.

$$\left\{ \frac{1}{K_n} \right\} = \frac{1}{10^n}$$

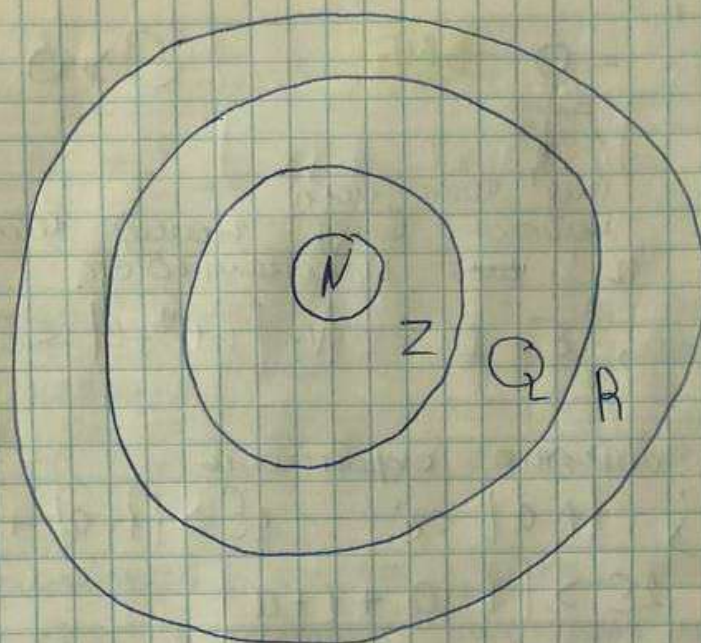
Б.М.



# Предел последовательности

Каждому члену последовательности можно присвоить индекс, следовательно, каждому члену можно присвоить индекс.

## Иерархия Вейля.



$\mathbb{N}$  - натуральные числа

$\mathbb{Z}$  - целые числа

$\mathbb{Q}$  - рациональные

$\mathbb{R}$  - действительные

Графическое отображение теории множеств

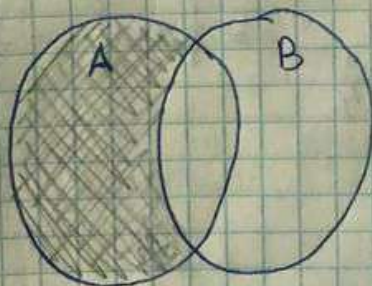
Обозначения

$\subset$   $\subseteq$   
 $<$   $\leq$

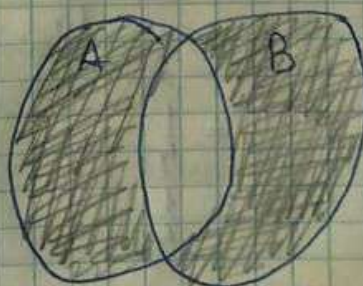
$\cap$  - не входит  
 $\cup$  - входит

$\exists$  - пусть  
 $\exists$  - если

$A \setminus B$



$A \Delta B$



$\exists$  - такое что  
 $\forall$  - для любого (квантор всеобщности)  
 $\exists$  - (квантор существования) существует или найдется  
 $!$  - единственный (квантор единственности)



## последовательности

- ограниченные
- неограниченные
- постоянные

## Пределы

Предел числовой послед-ти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0 \quad \text{БМЛ} \quad \varepsilon > 0$$

чтоб узнать  
подставить в  $n$

какого числ. посп.  
какой бесконечности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = a, \quad \varepsilon = 1 \quad N: |(-1)^n - a| < \varepsilon, n > N$$

каким ввел конские окрестность

$$|(-1)^n - a| < \varepsilon \quad ; \quad |1-a| < \varepsilon \quad 2\varepsilon > |1-a| + |-1-a| =$$

$$|1-a| < \varepsilon = 2\varepsilon > |1-a| + |-1-a|$$

$$2\varepsilon > 2$$

$$2 \cdot 1 > 2 \quad 2 \geq 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} \right)$$

$$X_1 = \frac{1}{4} \quad S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

$$X_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} \quad b_1 = \frac{1}{4} \quad q = \frac{1}{4}$$

## Свойства сходящихся последовательностей

$\lim_{n \rightarrow \infty} C = C$  - конст.

1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n * \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} \rightarrow \infty$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n - 5}{3n^2 - n + 6} = \frac{\infty}{\infty} \quad / n^2$$

$$\frac{\frac{n^2}{n^2} + \frac{3n}{n^2} - \frac{5}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2} - \frac{n}{n^2} + \frac{6}{n^2}} = \frac{1 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2}}{3 - \frac{1}{n} + \frac{6}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (3 - \frac{1}{n} + \frac{6}{n^2})} =$$

$$= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{n^2}} = \frac{1 + 0 - 0}{3 - 0 + 0} = \frac{1}{3}$$

Геометрическая послед-ть широк из коорд. прам. 1-го вида  
послед-ти точек, коорд-ты  $k$ -х равны соответ-м  
элементам послед-ти.  
Если все  $2n$ -ты послед-ти  $\{x_n\}$  равно одному  $n$   
тому же  $C$ , то ее чл-ва имеют постоянный.

Геометрический смысл числ. посл.  $\{x_n\}$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , значит что для любой  $\varepsilon$ -окрестности  
точки  $a$  найдется натуральное  $N$  и все знач  
 $x_n$ , для которых  $n > N$ , попадут в  $\varepsilon$ -окр-ть  $a$ .

**Основные св-ва след-ств послед-и**

1. Сходящаяся посл-ть имеет только 1 предел.
2. СП ограничена.
3. Постоянная посл-ть  $x_n = C$  имеет предел, равный  
числу  $C$ , то есть  $\lim_{n \rightarrow \infty} C = C$
4. Св-ва пределов  
работают только для конечных пределов.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n - 5}{3n^2 - n + 6} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \text{там предела} \quad / n^2$$

при  $n \rightarrow \infty$  числитель и знаменатель дроби  $\rightarrow \infty$ ,  
применяя св-во о пределе частного числа, тк оно  
предполагает существование конечного предела.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2} + 3)}{(3 - \frac{1}{n} + \frac{6}{n^2})} = \frac{1}{3}$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \cdot \sin n}{2n + 6} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n)}{2 + 0} = \frac{0}{2 + 0} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + \lim_{n \rightarrow \infty} 6}{n} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \infty - \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$$

$$= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} n+1 - n}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \neq \frac{\infty}{\infty} \quad - \text{нельзя применять правило Лопиталя}$$

$$= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}} = \frac{1}{\infty} = 0$$