Предел последовательности

Члены последовательности расположены в определенном порядке
Каждому члену послед-ти можно присвоить индекс

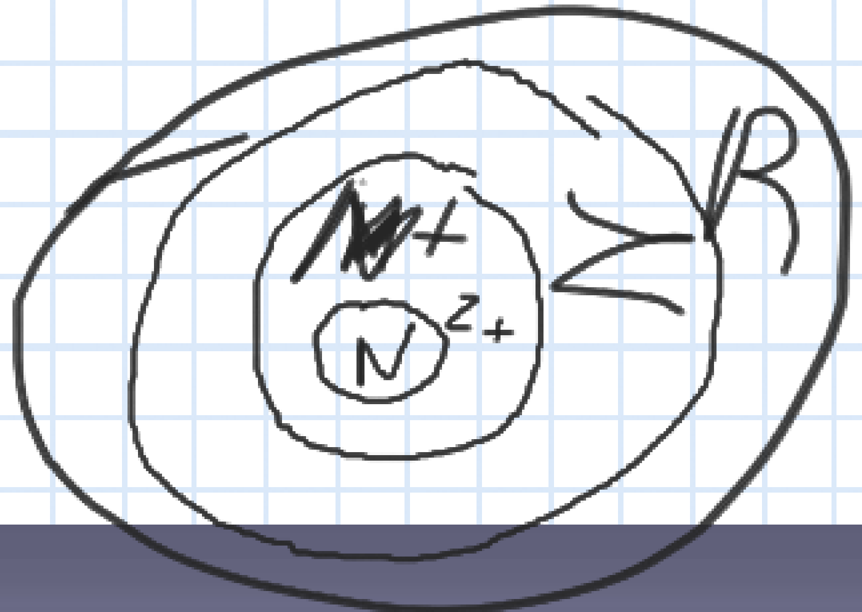
1 2 3 4 . . . n

Диаграмма Венна или круги Эйлера, это графическое отображение теории множеств

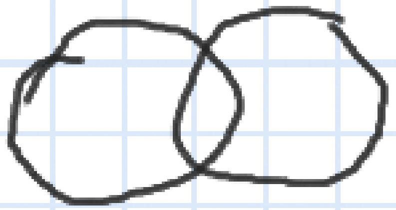
$\subset \quad \subseteq$

$< \quad \leq$

Диаграмма Венна NUMBERS



Круги Эйлера в SQL



$N - \{1, 2, \ldots n\}$

$N_+ / Z_+ - \{0, 1, 2 \ldots n\}$

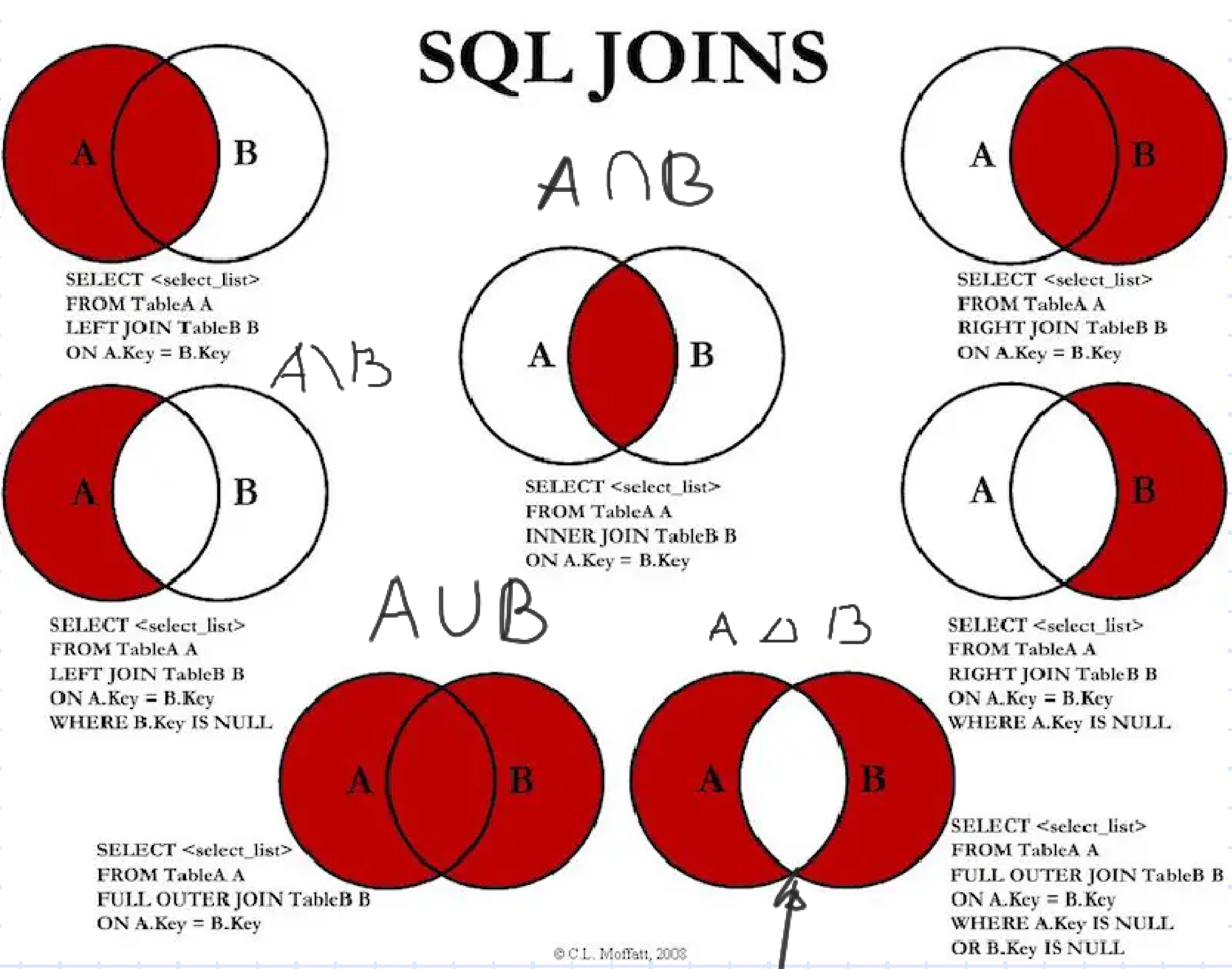
$Z \{-\infty, 0, \infty^+\}$

$1 \in N$

$N \subset Z$

Комплексные числа C

Вещественные числа



подкова похожа на букву П - это применение мнемонического правила

симетрическая разность
или инверсия прересечений

$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

$(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

$\rceil$ — пусть $\quad$ $|$: — такое что

$\rfloor$ — Если

$\forall$ — для любого для всех, это квантор всеобщности

$\exists$ — квантор существования, существует или найдется

$!$ — квантор единственности, единственный

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ общий член послед-ти

$x_n = 2n$

$y_n = 2n - 1$

$x_n = \frac{1}{n}$

рекурентный способ, это задание последовательности с помощью формулы общего члена, когда задается первый член последовательности и правило определения n-го члена

ограниченная последовательн

$\rceil \exists M > 0 \mid \forall n \in N \Rightarrow |x_n| \leq M$

неограниченная посл

$\rfloor \forall M > 0 \exists |x_n| > M$

постоянная последовательность, это послед-ть в которой все эл-ты равны одному и тому же числу С, где С это конст рекурентная формула

$a_n = a_1 + d(n-1)$

$a_n = a_{n-1} + d$

d – шаг

$1, 2, 4, 8, 16 \ldots \Rightarrow b_n = 2^{n-1}$

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

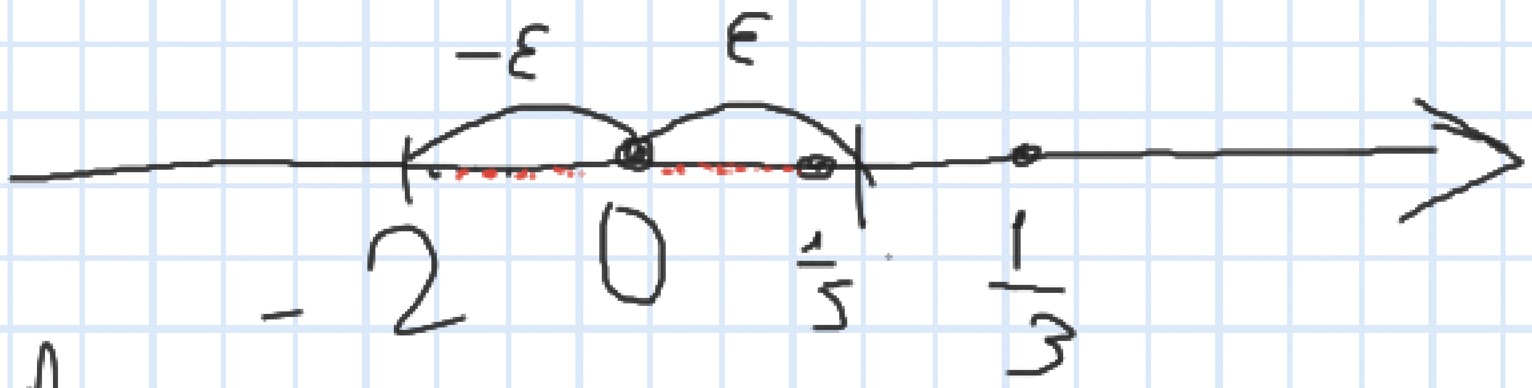
q – знаменатель прогрессии

Пределы

Предел числовой последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=0$$

бесконечно малый предел



$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

Доказательство по определению предела

$$\varepsilon>0$$

$$|x_n-1|=\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\left|-\frac{1}{n+1}\right|=\frac{1}{n+1}$$

$$|x_n-1|<\varepsilon \qquad \frac{1}{n+1}<\varepsilon,\ n+1>\frac{1}{\varepsilon}$$

$$N=\frac{1}{\varepsilon} \qquad n>\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\Longrightarrow$$

$$|x_n-1|<\varepsilon \quad \forall n>N_{\varepsilon}$$

$\lim\limits_{n \to \infty} (-1)^n = a$, $\varepsilon = 1$ $\quad N: |(-1)^n - a| < \varepsilon$, $n > N$

Коши ввел понятие эпсилон окрестность

$|(-1)^n - a| < \varepsilon$

$|1 - a| < \varepsilon$ $\quad 2\varepsilon > |1 - a| + |-1 - a|$

$|-1 - a| < \varepsilon$ $\quad = 2\varepsilon > |1 - \cancel{a} + 1 + \cancel{a}|$

$2\varepsilon > 2$

$2 \cdot 1 > 2$ $\quad 2 \not> 2$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\dots\frac{1}{4^n}\right)=$$

$$x_1=\frac{1}{4}.$$

$$x_2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}.$$

$$S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}=\frac{1}{3}$$

$$b_1=\frac{1}{4}$$

$$q=\frac{1}{4}$$

свойства сходящихся последовательностей

$$\lim_{n\to\infty}C=C \text{ — конст}$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\pm\lim_{n\to\infty}y_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\lim_{n\to\infty}y_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim x_n}{\lim y_n}\quad n\to\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-5}{3n^2-n+6}=\frac{\infty}{\infty}\quad /n^2$$

$$\frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{3n}{n^2}-\frac{5}{n^2}}{\frac{\cancel{3n^2}}{\cancel{n^2}}-\frac{n}{n^2}+\frac{6}{n^2}}=\frac{1+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}}{3-\frac{1}{n}+\frac{6}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}3-\frac{1}{n}+\frac{6}{n^2}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6}{n^2}}=\frac{1+0-0}{3-0+0}=\frac{1}{3}$$

+

Предел числовой последовательности

Число a называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε существует номер N такой, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$

Геометрический смысл предела последовательности:
$\lim_{n\to\infty} x_n = a$ означает, что для любой ε-окрестности точки a найдется натуральное число N, что все значения x_n, для которых $n > N$, попадут в ε-окрестность точки a

Основные свойства сходящихся последовательностей

1. Сходящаяся последовательность имеет только один предел.
2. Сходящаяся последовательность ограничена.
3. Постоянная последовательность $x_n = C$ имеет предел, равный числу C, то есть $\lim_{n\to\infty} C = C$

4. Сумма (разность) двух сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен сумме (разности) пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n.$$

5. Произведение двух сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен произведению пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n$$

6. Частное двух сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ при условии, что $\lim_{n\to\infty} y_n$ 6= 0, есть сходящаяся последовательность, предел которой равен частному пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-5}{3n^2-n+6} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}}{3-\frac{1}{n}+\frac{6}{n^2}} =$$

При n → ∞ числитель и знаменатель дроби стремятся
к бесконечности, применять свойство о пределе частного нельзя, так как
оно предполагает существование конечных пределов последовательностей.
Преобразуем данную последовательность, разделив числитель и знаменатель на n^2

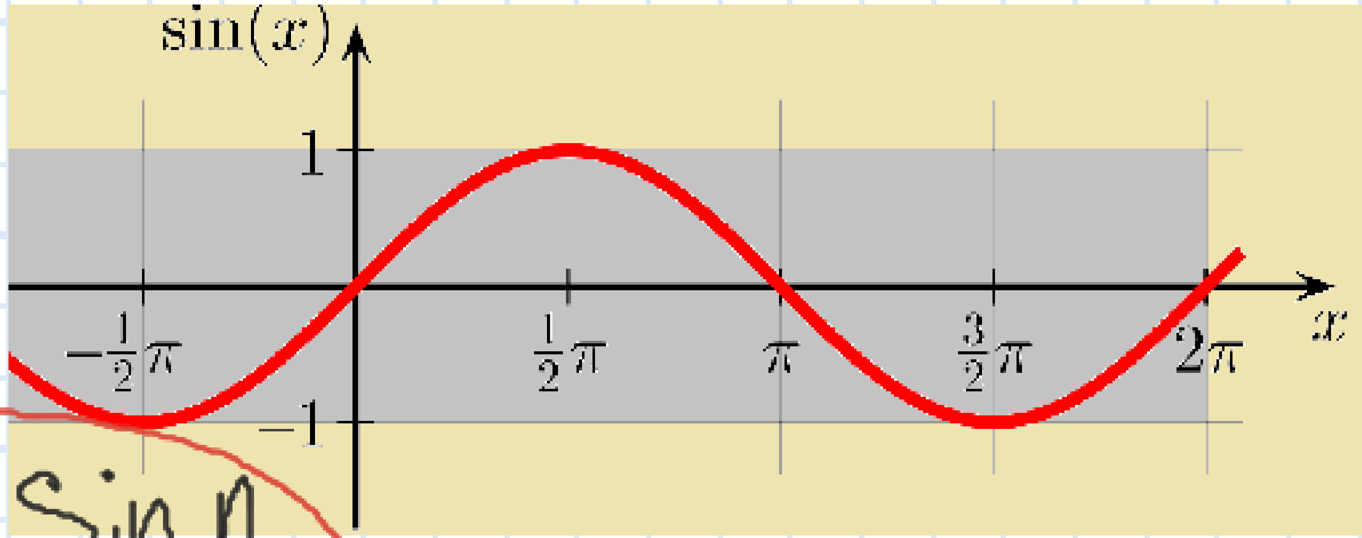
Свойство перделов работает только для конечных пределов

если появляется корень, то можно избавиться от корня с помощью сопряженного числа

$$= \frac{\lim\left(1+\frac{3}{n}\xrightarrow{}0-\frac{5}{n^2}\xrightarrow{}0+3\right)}{\lim\left(3-\frac{1}{n}\xrightarrow{}0+\frac{6}{n^2}\xrightarrow{}0\right)} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot\sin n}{2n+6} = \frac{\infty}{\infty} = \neq \frac{\infty}{\infty}$$

n



Sin n

$$= \lim\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\xrightarrow{}0\cdot\sin(n)}{\frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}}+\frac{6}{n}\xrightarrow{}0} = \frac{0}{2+0} = 0 \quad \frac{\lim(\sqrt{n})\cdot\lim \sin n}{\lim 2+\lim\left(\frac{6}{n}\right)} =$$

$$\frac{n^{\frac{1}{2}}}{n} \to n^{\frac{1}{2}-1} = n^{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \infty - \infty = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} =$$

Умножим и разделим формулу для xn на сопряженное выражение

на основании этого применяем свойство пределов

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}+\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\neq \frac{\infty}{\infty}$$