Понятие функции. Способы задания функции.

Существует два произвольных мн-ва X и Y. Если элементу x из мн-ва X соответствует y определенное число (элемент) из мн-ва Y, то говорят что задана функция

$$y = f(x).$$

x – независимая переменная (аргумент).
y – зависимая переменная (зн-е ф-ии)
f = означает закон соответствия.

$D(x)$ ООП $\quad y = f(x)$

$x \longrightarrow y$

$1 \longrightarrow 2$

$2 \longrightarrow 3$

(аргументу x соответствует значение y)

Это значит что x и y находятся в функциональной зависимости.
Все значения принимаемые x образуют область определения $D(x)$.

Все значения которые принимает зависимая переменная y образуют множество значений ф-ии $E(f)$

Если $\underset{\text{входит}}{D(f) \subset R}$ и $E(f) \subset R$, то функцию $y = f(x)$ называют числовой.

Если ф-я задана формулой и ООП ф-ии не указана, то считают что $D(f)$ состоит из всех зн-ий переменной, при к-х эта формула имеет смысл.

Особенности поиска ООП нек-х ф-ций!

1. При поиске ООП дробной ф-ии нужно исключить зн-я аргумента, при к-х знаменатель обращ-ся в нуль.

2. Если аналит-е выражение ф-ии содержит f корень четной степени, то при поиске ООП f нужно исключить зн-я аргумента, при которых подкоренное выр-е принимает отриц. зн-я.

3. Если аналит-е выраж-е ф-ии содержит log, то при поиске ООП f исключаем зн-я аргумента к-е сделают выражение под log отриц. или ~~обраща~~ обратит его в нуль.

4. Если аналит-е выр-е ф-ии содержит обратные тригонометр-е ф-ии arcsin и arccos, то при нахождении ООП нужно включать только те зн-я при к-х значения под зн-м ф-ии (выражения) ~~примут~~ по модулю не превосходят 1.

Найти ООП ф-ии

$$y = 4/(x^2-9)$$

определена если знаменатель равен нулю. Поэтому ООП данной ф-ии находится из условия:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - 9 \neq 0 \\ x_1 \neq 3 \text{ и } x_2 \neq -3 \end{array}\right\} D(f) = (-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$$

Найти ООП $y = \sqrt{x} + \sqrt[4]{x-1}$

$\sqrt{x},\ x \geq 0$ $\quad$ $\sqrt[4]{x-1},\ x \geq 1$

$$D(f) = [1;+\infty)$$

Числовые последовательности

Каждому n (натуральное число) поставлено определенное, действительное число x_n

Числовая послед-ть выглядит так:

$$x_1, x_2, \dots x_n, \dots$$

это элементы последовательности (или ее члены)
последовательность может быть задана формулой ее общего члена, что позволяет вычислить любой член последовательности.

Пример: $x_n = \frac{1}{n}$

$$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots$$

Рекурентный способ задания послед-ти

Это способ, при котором задается первый член последовательности x_1 и правило определения n-го члена по $(n-1)$-му:

$$x_n = f(x_{n-1})$$

В этом способе, для определения n-го члена послед-ти, надо посчитать все $(n-1)$ предыдущих членов.

Соотношения $x_1 = 1$, $x_n = n\,x_{n-1}$ определяют последовательность.

1. $x_1 = 1$, 2. $x_2 = 2x_1 = 2$ 3. $x_3 = 3x_2 = 6$
4. $x_4 = 4x_3 = 24$, $x_5 = 5 \cdot x_4 = 120 \dots$)
$x_n = n\,x_{n-1} = n!, \dots$

Если все элементы последовательности $\{x_n\}$ равны одному и тому же числу C, то ее называют **постоянной**.

Ограниченная послед-ть, это такая послед-ть для которой существует число $M > 0$, что для любого $n \in N$ выполняется неравенство

$$|x_n| \leq M$$

послед-ть ограничена этим числом M.

тогда как у неограниченной для любого числа (положительного) M существует элемент x_n, отвечающий неравенству:

$$|x_n| > M.$$

$\left\{\frac{1}{n}\right\}$ и $\{4\}$ — пример ограниченных последовательностей

$\{2^n\}$ — неограниченная.

Последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n, y_n\}$, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$, $y_n \neq 0$

это сумма, разность, произведение и частное двух последовательностей.

$\{m x_n\}$ — произведение последовательн $\{x_n\}$ на m.

Бесконечно малые и бесконечно большие послед-ти.

Послед-ть $\{a_n\}$ бесконечно малая, если для любого положительного ε существует такой N, что при $n > N$ выполняется неравенство

$$|a_n| < \varepsilon$$

Послед-ть $\{x_n\}$ бесконечно большая, если для любого положительного числа A существует номер N такой, что при $n > N$

$$|x_n| > A$$

Теорема 1 (о связи бесконечно малых и бесконечно больших послед-й)

Если $\{x_n\}$ — бесконечно больш. п-ть, и $x_n \neq 0 \; \forall n$, то последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ - бесконечно малая, и, обратно,

если $\{a_n\}$ — бесконечно малая п-ть и $a_n \neq 0 \; \forall n$, то послед-ть $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ - бесконечно большая.

Свойства бесконечно мал. посл. (БМП)

1. Сумма и разность б.мал. посл есть беск. мал. посл-ть.

Следствие: Алгебраическая сумма любого конечного числа бескон. мал. послед-й есть бесконечно мал. послед-ть

2. Произведение 2х БМП есть БМП.

Следствие. Произведение любого конечного числа послед-й есть БМП.

3. Произведение ограниченной послед-ти на БМП, есть БМП.

Следствие: Произведение БМП на число, есть БМП.

Предел числовой послед-ти.

] – Пусть

⅃ – Если

|, : – такое что

$\forall$ – для любого, для всех (квантор всеобщности)

$\exists$ – существует или найдется (квантор существов-я)

! – единственный (квантор единственности)

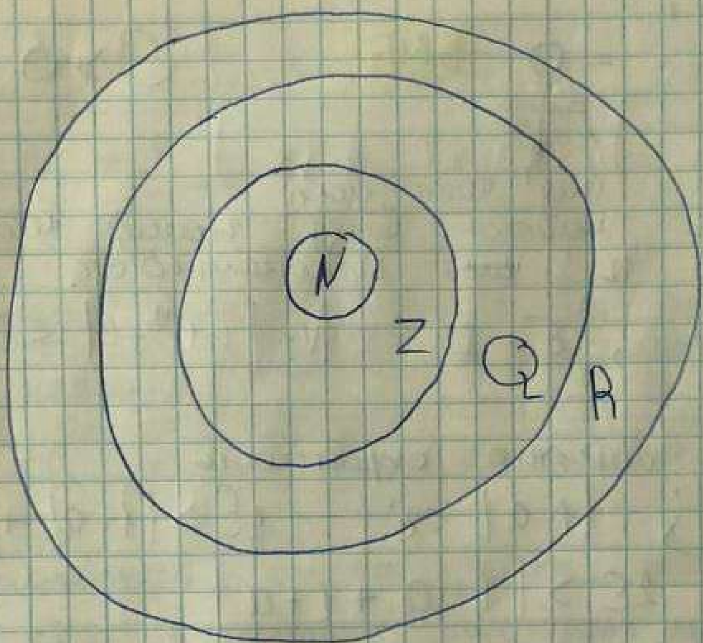
$\{x_n\} = 10^n$ Б.Б.

$\left\{\frac{1}{x_n}\right\} = \frac{1}{10^n}$ Б.М.

Предел последовательности

в Член последовательности расположенный в определенном порядке, каждому члену можно присвоить индекс.

Диаграмма Венна.



N – натуральные числа

Z – целые числа

Q – рациональн

R – действительные

Графическое отображение теории множеств

обозначения | $\subset$ $\subseteq$ $<$ $\leqslant$

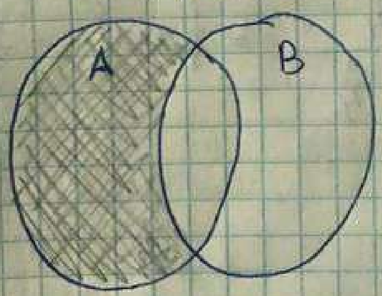
$\cap$ – не входит

$\cup$ – входит

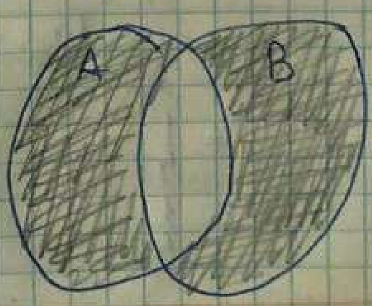
$\exists$ – пусть

$\perp$ – если

$A \setminus B$



$A \Delta B$



$|$, $:$ – такое что

$\forall$ – для любого, для всех (квантор всеобщности)

$\exists$ – (квантор существования) существует или найдется

$!$ – единственный (квантор единственности) последовательности,

- ограниченные
- неограниченные
- постоянные.

Пределы

Предел числовой послед-ти

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{0}{1} \quad \text{БМП} \quad \varepsilon > 0$$

вид числ. посл.

чтоб узнать какого вида наша числ. посл. подставляем в n ~~числ~~ бесконечность

$$\lim_{n \to \infty} (-1)^n = a, \quad \varepsilon = 1 \qquad N: |(-1)^n - a| < \varepsilon, \; n > N$$

Коши ввел понятие окрестность

$$|(-1)^n| - a < \varepsilon; \quad |1-a| < \varepsilon \qquad 2\varepsilon > |1-a| + |-1-a| =$$

$$\cancel{|-1-a| < \varepsilon} \quad = 2\varepsilon > |1 - \cancel{a} + 1 + \cancel{a}|$$

$$2\varepsilon > 2$$

$$2 \cdot 1 > 2 \qquad 2 \not> 2$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots \frac{1}{4^n}\right)$$

$$x_1 = \frac{1}{4} \qquad S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} \qquad b_1 = \frac{1}{4}$$

$$q = \frac{1}{4}$$

Свойства сходящихся последовательностей

1) $\lim_{n \to \infty} C = C$ — конст.

$\lim_{n \to \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \to \infty} x_n \pm \lim_{n \to \infty} y_n$

4) $\lim_{n \to \infty} y_n$

2) $\lim_{n \to \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \to \infty} x_n * \lim_{n \to \infty} y_n$

3) $\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \to \infty} x_n}{\lim_{n \to \infty} y_n} \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n-5}{3n^2-n+6} = \frac{\infty}{\infty} \quad / n^2$$

$$\frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{3n}{n^2}-\frac{5}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2}-\frac{n}{n^2}+\frac{6}{n^2}} = \frac{1+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}}{3-\frac{1}{n}+\frac{6}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}+\frac{6}{n^2}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n} - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{6}{n^2}} = \frac{1+0-0}{3-0+0} = \frac{1}{3}$$

Геометрическая послед-ть изобр на коорд. прям. - в виде послед-ти точек, коорд-ты к-х равны соотв-м элементам послед-ти.
Если все эл-ты послед-ти $\{X_n\}$ равны одному и тому же C, то ее называют постоянной.

Геометрический смысл предел. посл. ε
$\lim\limits_{n\to\infty} X_n = a$, значит что для любой ε-окрестности точки a найдется натуральное N, что все знач X_n, для которых $n \geq N$, попадут в ε-окр-ть a.

Основные св-ва сход-ся послед-й

1. Сходящаяся посл-ть имеет только 1 предел.
2. СП ограничена.
3. Постоянная посл-ть $X_n = C$ имеет предел, равный числу C, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$
4. Св-ва пределов работают только для конечных пределов.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n-5}{3n^2-n+6} = \frac{\infty}{\infty} \to \text{тип предела.} \quad / n^2$$

при $n\to\infty$ числитель и знаменатель дроби $\to\infty$, применять св-во о пределе частного нельзя, тк оно предполагает существование конечных пределов последов-й.

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}^{\to 0}-\frac{5}{n^2}^{\to 0}+3\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}^{\to 0}+\frac{6}{n^2}^{\to 0}\right)} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\cdot\sin n}{2n+6} = \frac{\infty}{\infty} \to$$

$$\to \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \overset{\to 0}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \lim\limits_{n\to\infty} \sin(n)}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{6}{n} \to 0} \to \frac{0}{2+0} = 0$$

$$\lim_{n\to 0} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \infty - \infty$$

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} n+1 - n}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \neq \frac{\infty}{\infty}$$ — можно применить св-во пределов

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1} + \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}} = \frac{1}{\infty} = 0$$