Математический анализ
Лекция 8

Никитин А.А.

МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК
Кафедра общей математики

Онлайн-курс по математике в Data Science
23 января, 2021г.

Несобственные интегралы

При построении определённого интеграла Римана (или собственного интеграла) $\int\limits_a^b f(x)dx$ было существенно выполнение следующих условий:

1. отрезок $[a,b]$ конечен, т.е. $-\infty < a < b < +\infty$;
2. функций f ограничена на $[a,b]$;

Если не выполнено условие 1., то по меньшей мере один из отрезков разбиения $[a,b]$ будет бесконечным, и поэтому теряет смысл интегральная сумма $\sigma_\tau(f,\xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$. При невыполнении условия 2., не выполняется необходимое условие интегрируемости по Риману.

Интегралы, для которых не выполнено условие 1. или 2. называются **несобственными интегралами**.

Несобственные интегралы

Определение.

Функция f называется **локально интегрируемой (по Риману) на промежутке** E, если f – интегрируема (по Риману) на каждом отрезке, содержащемся в E. **Обозначение**: $f \in \mathfrak{R}_{\ell oc}(\mathrm{E})$.

Определение.

Пусть $f \in \mathfrak{R}_{\ell oc}([a,+\infty))$ (т.е. $f \in \mathfrak{R}([a,A])$, $\forall\ A\ >\ a$). Предел интеграла $\int\limits_a^A f(x)\,dx$ (конечный или бесконечный) при $A \to +\infty$ называют **несобственным интегралом первого рода от функции f по лучу** $[a,+\infty)$.

Обозначение: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{A\to\infty} \int\limits_a^A f(x)\,dx$.

Если этот предел существует и конечен, говорят, что *несобственный интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится*, а функцию f называют *интегрируемой на* $[a,+\infty)$ (*в несобственном смысле*). **Обозначение**: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \to$. В противном случае, про интеграл говорят, что он *расходится*, а функция f *не интегрируема*. **Обозначение**: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \not\to$.

Несобственные интегралы

Интеграл от функции f по бесконечному промежутку $(-\infty, +\infty)$ определяется как: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{\substack{A\to+\infty \\ A'\to-\infty}} \int\limits_{A'}^{A} f(x)\,dx$, при независимом стремлении $A \to +\infty$, $A' \to -\infty$.

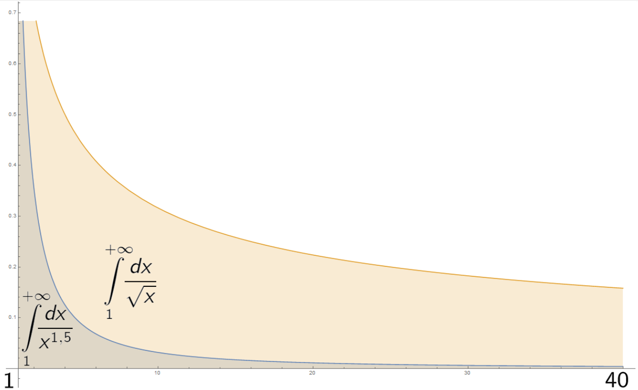
Определение.

Пусть $f \in \mathfrak{R}_{\ell oc}([a,b))$ (т.е. $f \in \mathfrak{R}[a, b-\varepsilon]$, $\forall \varepsilon > 0$). Предел интеграла $\int\limits_{a}^{B} f(x)\,dx$ (конечный или бесконечный), при $B \to b - 0$ называют *несобственным интегралом второго рода от функции f по промежутку* $[a,b)$. **Обозначение**: $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{B\to b-0} \int\limits_{a}^{B} f(x)dx$.

Суть этого определения состоит в том, что в любой окрестности конечной точки функция f может оказаться неограниченной.

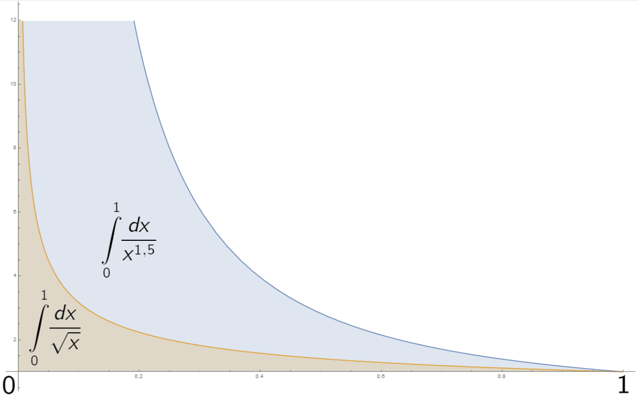
При каких $\alpha \in \mathbb{R}$ сходится интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$?

$$\int\limits_1^A \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^A, & \alpha \neq 1, \\ \ln x|_1^A, & \alpha = 1 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{A\to+\infty} \int\limits_1^A \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{если } \alpha > 1, \\ +\infty, & \text{если } \alpha \leqslant 1. \end{cases}$$



При каких $\alpha \in \mathbb{R}$ сходится интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$?

$$\int\limits_A^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \left.\dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_A^1, & \alpha \neq 1, \\ \ln x\big|_A^1, & \alpha = 1 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{A \to 0+0} \int\limits_A^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}, & \text{если } \alpha < 1, \\ +\infty, & \text{если } \alpha \geqslant 1. \end{cases}$$



Теорема (признак сравнения)

Пусть
$$f, g \in \mathfrak{R}_{\ell oc}([a, +\infty)) \text{ и } \forall x \geqslant a \implies 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x).$$

Тогда из сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ вытекает сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \leqslant \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ вытекает расходимость $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$.

Следствие 1.

Пусть $f, g \in \mathfrak{R}_{\ell oc}([a, +\infty))$; $f, g \geqslant 0$, $f = \underline{O}(g)$, $x \to +\infty$. Тогда

1. если $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx \to$, то и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \to$;
2. если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \not\to$, то и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx \not\to$.

Следствие 2.

Пусть $f, g \in \mathfrak{R}_{\ell oc}([a, +\infty))$; $f, g \geqslant 0$, $f \asymp g$.[a] Тогда несобственные интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

[a] Т.е. $\exists C_1, C_2 > 0, \exists \Delta > a: C_1 f(x) \leqslant g(x) \leqslant C_2 f(x), \forall x > \Delta > a$.

Теорема (признак сравнения в предельной форме)

Пусть $f, g \in \mathfrak{R}_{\ell oc}([a, +\infty))$; $f, g \geqslant 0$; $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k$. Тогда справедливы утверждения:

1. если $0 < k < +\infty$, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \to \iff \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx \to$;
2. если $k = 0$, то если $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx \to$, то и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \to$;
3. если $k = +\infty$, то если $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx \not\to$, то и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \not\to$;

Теорема (частный признак сравнения)

1. Пусть $a > 0$, $f : [a, +\infty) \mapsto \mathbb{R}_+$, $f(x) \geqslant 0$, $\exists p \in \mathbb{R}$ и $\exists k, 0 < k < +\infty$, что $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^p f(x)) = k$, т.е. $f = O^*\left(\dfrac{1}{x^p}\right), x \to +\infty$. Тогда при $p > 1$ несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, а при $p \leqslant 1$ – расходится.

2. Пусть $-\infty < a < b < +\infty$, и $f : [a, b) \mapsto \mathbb{R}_+$, $f(x) \geqslant 0$, $\exists p \in \mathbb{R}$ и $\exists k, 0 < k < +\infty$, что $\lim\limits_{x \to b-0} (b-x)^p f(x) = k$, т.е. $f = O^*\left(\dfrac{1}{(b-x)^p}\right), x \to b-0$. Тогда при $p < 1$ интеграл $\int\limits_a^{\to b} f(x)dx$ сходится, а при $p \geqslant 1$ – расходится.

Доказательство.

Доказательство вытекает из признака сравнения в предельной форме и поведения интегралов $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{1}{x^p} dx$ и $\int\limits_a^{b} \dfrac{1}{(b-x)^p} dx$, которые вычисляются явно при всех значениях параметра p. $\square$

Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, $f \in \mathfrak{R}_{\ell oc}([a, b))$.

Определение.

Говорят, что интеграл $\int\limits_a^{\to b} f(x)dx$ *сходится абсолютно*, если сходится интеграл $\int\limits_a^{\to b} \big|f(x)\big|\,dx$. **Обозначение**: $\int\limits_a^{\to b} f(x)\,dx \xrightarrow{\text{абс}}$.

Определение.

Говорят, что интеграл $\int\limits_a^{\to b} f(x)dx$ *сходится условно*, если сам он сходится, но интеграл $\int\limits_a^{\to b} \big|f(x)\big|\,dx$ расходится. **Обозначение**: $\int\limits_a^{\to b} f(x)\,dx \xrightarrow{\text{усл}}$.

Теорема

Если несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится абсолютно, то он сходится. При этом справедливо неравенство:

$$\left|\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_a^{+\infty} \big|f(x)\big|dx.$$

Доказательство.

Применим критерий Коши сходимости несобственного интеграла к сходящемуся интегралу $\int\limits_a^{+\infty} \big|f(x)\big|\, dx$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists A_0(\varepsilon) > a\ :\ \forall A_2 > A_1 \geqslant A_0(\varepsilon) \implies \int\limits_{A_1}^{A_2} \big|f(x)\big|dx < \varepsilon.$$

Пусть $f \in \mathfrak{R}_{\ell oc}(\mathbb{R})$[a]. Под несобственным интегралом $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ понимается предел: $\lim\limits_{\substack{A \to +\infty \\ A' \to +\infty}} \int\limits_{-A'}^{A} f(x)\,dx$, при независимом стремлении A и A' к $+\infty$. Может так случится, что в этом смысле предела нет, но существует предел, отвечающий частному предположению $-A' = -A$. Его называют **главным значением интеграла** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ (**в смысле Коши**).

Обозначение: $v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \lim\limits_{A \to +\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)dx$.

[a] т.е. у функции f нет особых точек, кроме $\pm\infty$.

Аналогично водится понятие главного значения несобственного интеграла второго рода:

$$v.p. \int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx \right).$$

Замечание.

Если интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ существует как несобственный, то он существует и в смысле главного значения. Обратное, вообще говоря, неверно.

Пример 1.

Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$ расходится. Однако,

$$v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x\, dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} \sin x\, dx = \lim_{A\to+\infty}(-\cos x)\Big|_{-A}^{A} = 0.$$

Пример 2.

Интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ расходится. Однако,

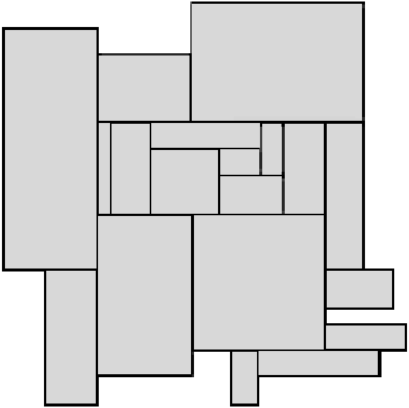
$$v.p.\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to0+0}\left(\int\limits_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x}\right) = \lim_{\varepsilon\to0+0}\left(\ln|x|\Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \ln|x|\Big|_{\varepsilon}^{1}\right) = 0.$$

Определение.

Плоской фигурой назовём любое ограниченное множество $\mathbf{P} \subset \mathbb{R}^2$.

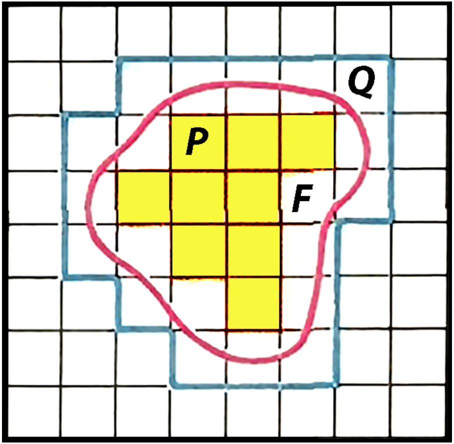
Определение.

Многоугольной (или **простейшей**) **фигурой на плоскости** назовём множество, составленное из конечного объединения (непересекающихся) прямоугольников со сторонами параллельными осям координат.



Вычисление площадей плоских фигур

Введём понятие площади для произвольной плоской фигуры F. Рассмотрим для этого всевозможные многоугольные фигуры P, целиком содержащиеся в F, и многоугольные фигуры Q, целиком содержащие F. Фигуры P будем называть **вписанными** в F, а фигуры Q – **описанными** около F.



Числовое множество $\{S(\mathrm{P})\}$ площадей всех вписанных многоугольных фигур ограничено сверху, например площадью любой описанной многоугольной фигуры Q, а множество $\{S(\mathrm{Q})\}$ – ограничено снизу, например, нулём. Следовательно,

$$\exists \sup_{\mathrm{P}\subset \mathrm{F}}\{S(\mathrm{P})\} = S_*(\mathrm{F}) \quad \text{и} \quad \exists \inf_{\mathrm{F}\subset \mathrm{Q}}\{S(\mathrm{Q})\} = S^*(\mathrm{F}),$$

которые мы будем называть *нижней* и *верхней площадями фигуры* F соответственно.

Очевидно, что 0 [a] $\leqslant S_*(\mathrm{F}) \leqslant S^*(\mathrm{F}) < +\infty$.

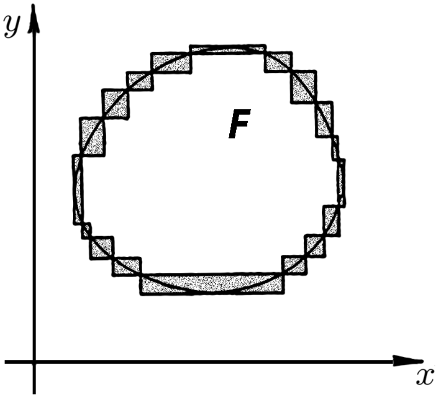
[a] Нижняя площадь кладётся равной нулю, если в F нельзя вписать многоугольной фигуры.

Определение.

Плоская фигура F называется *квадрируемой* (т.е. *имеющей конечную площадь*), если $S_*(\mathrm{F}) = S^*(\mathrm{F})$. А число $S(\mathrm{F}) = S_*(\mathrm{F}) = S^*(\mathrm{F})$ называется при этом *площадью фигуры F* (*по Жордану*).

Утверждение.

1. Плоская фигура F – квадрируема тогда и только тогда, когда её граница представляет собой множество площади нуль.
2. Плоская фигура F – квадрируема тогда и только тогда, когда существуют многоугольные фигуры $\{A_n\}, \{B_n\}$, такие что $A_n \subset F \subset B_n$ и $\lim_{n\to\infty} S(B_n) = \lim_{n\to\infty} S(A_n)$.

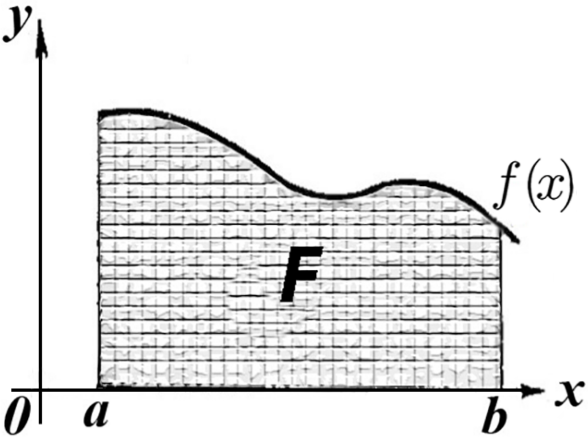


Площадь криволинейной трапеции.

Пусть $f \in C[a,b]$, $f(x) \geqslant 0$, $\forall x \in [a,b]$. Рассмотрим фигуру

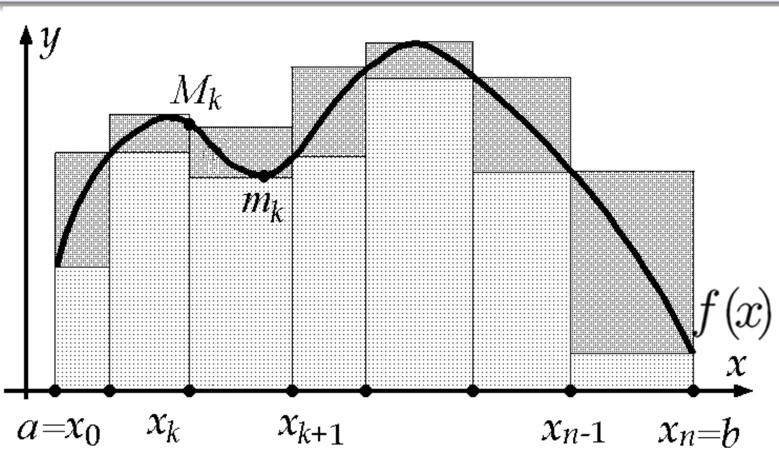
$$F = \{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\} \quad (\textit{криволинейная трапеция})^a$$

[a] Криволинейная трапеция прилегающая к оси Ox



Теорема

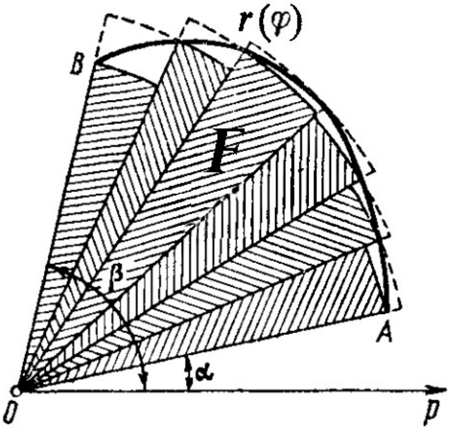
Криволинейная трапеция представляет собой квадрируемую фигуру, площадь которой вычисляется по формуле: $S(\mathrm{F}) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.



Площадь криволинейного сектора.

Пусть $\Gamma = \{(r,\varphi) \mid \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta,\ r = r(\varphi)\}$ – кривая, заданная в полярной системе координат, $r(\varphi) \in C[\alpha,\beta]$. Пусть также

$$F = \{(r,\varphi) \mid \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta,\ 0 \leqslant r \leqslant r(\varphi)\}$$



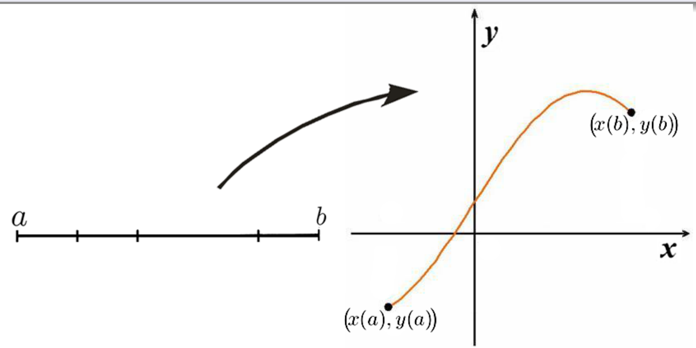
Понятие плоской кривой

Определение.

Путём в $\mathbb{R}^2$ (**плоским путём** или **параметризованной кривой** (**кривой Жордана**) **в** $\mathbb{R}^2$) называется непрерывное отображение отрезка $[a,b]$ в $\mathbb{R}^2$, т.е. непрерывная вектор-функция:
$\overline{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big) \ : \ [a,b] \mapsto \mathbb{R}^2, \quad t \in [a,b].$

Определение.

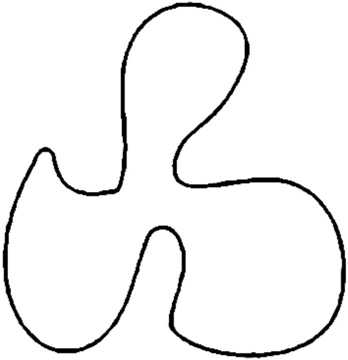
Точка $\overline{r}(a) = \big(x(a), y(a)\big)$ называется **началом кривой** $\overline{r}$; $\overline{r}(b) = \big(x(b), y(b)\big)$ – **концом кривой** $\overline{r}$.

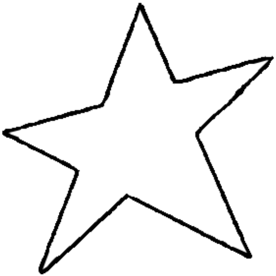


Понятие плоской кривой

Определение.

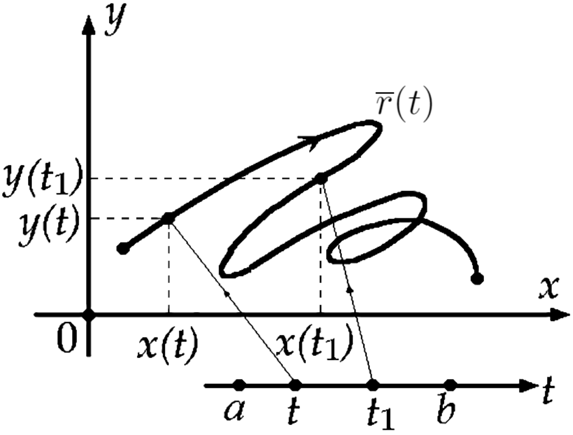
Плоская кривая $\overline{r} : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^2$ называется **гладкой**, если вектор-функция $\overline{r}$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную вектор-функцию $\overline{r}'$, нигде не обращающуюся в нуль-вектор.





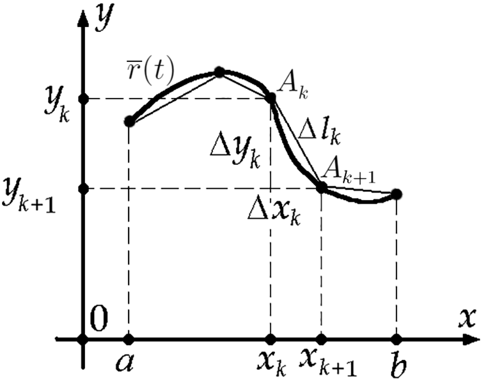
Вычисление длины плоской кривой

Введём в рассмотрение **образ отрезка** $[a, b]$ (**носитель кривой** $\overline{r}$) на плоскости $\mathbb{R}^2$ при отображении $\overline{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, $t \in [a, b]$. Упорядочим точки образа так, как упорядочены точки $[a, b]$. Затем рассмотрим разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{n}$: $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, и обозначим $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$.



Ломанную линию, вписанную в данную кривую, получим, соединяя отрезками прямых все пары соседних точек следующей последовательности: $A_0(x(t_0), y(t_0))$, $A_1(x(t_1), y(t_1)), \ldots, A_n(x(t_n), y(t_n))$.
За **длину ломанной линии** принимаем сумму длин всех её звеньев:

$$\ell(\tau) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}, \text{ где } \Delta x_k = x(t_k) - x(t_{k-1}),\ \Delta y_k = y(t_k) - y(t_{k-1}).$$



Вычисление длины плоской кривой

Определение.

Плоская кривая $\overline{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, $t \in [a, b]$ называется *спрямляемой*, если множество $\big\{\ell(\tau) \bigm| \tau - \text{разбиение}\,[a, b]\big\}$ длин вписанных ломанных линий, ограничено сверху, а sup этого множества называется *длиной кривой* $\overline{r}(t)$.

$$\ell = \sup_{\tau} \ell(\tau)^{a}, \text{ где } \ell(\tau) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}.$$

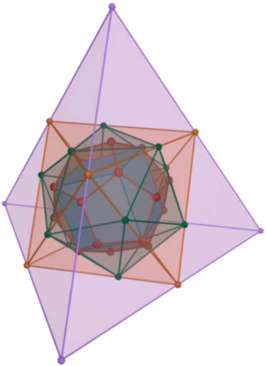
[a] sup берётся по длинам всех ломанных, вписанных в $\overline{r}$.

Теорема.

Если кривая $\overline{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, $t \in [a, b]$ – гладкая, то она спрямляемая, а для её длины справедливо равенство:

$$\ell = \int_{a}^{b} \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\, dt. \qquad (*)$$

Подобно тому, как была введена квадрируемость плоских фигур, можно ввести понятие кубируемости (измеримости по Жордану) пространственных тел. Будем называть простейшими фигурами в $\mathbb{R}^3$ – конечные объединения (непересекающихся) прямоугольных параллелепипедов со сторонами, параллельными координатным осям. Аналогично случаю в $\mathbb{R}^2$ вводятся понятия верхнего и нижнего объёма тела U, как $\inf\limits_{U \subset Q}$ и $\sup\limits_{P \subset U}$. **Обозначение**: $V^*(U)$ и $V_*(U)$.



Вычисление объёмов

Определение.

Если $V^*(\mathrm{U}) = V_*(\mathrm{U})$, то тело U называется *кубируемым*, $V(\mathrm{U}) = V^*(\mathrm{U}) = V_*(\mathrm{U})$ – *объём тела* U.

Аналогично случаю плоских фигур, доказывается утверждение, что тело U кубируемо тогда и только тогда, когда $\forall\varepsilon > 0\ \exists \mathrm{P}, \mathrm{Q}$ – простейшие (или кубируемые) фигуры, такие что $\mathrm{P} \subset \mathrm{U} \subset \mathrm{Q}$ и $V(\mathrm{Q}) - V(\mathrm{P}) < \varepsilon$.

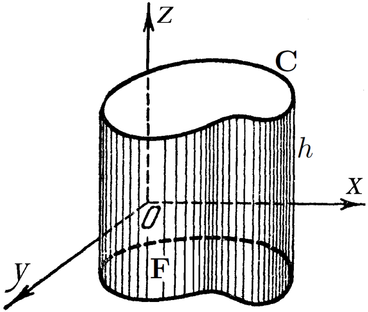
Вычисление объёмов

Определение.

Цилиндрическим телом (*цилиндром*) называется декартово произведение $C = F \times [z_1, z_2]$, где F – фигура, лежащая в плоскости Oxy; $[z_1, z_2]$ – отрезок оси Oz; $h = z_2 - z_1$ – *высота цилиндра*.

Теорема.

Если фигура **F** квадрируема, то цилиндрическое тело **C** кубируемо и $V(\mathbf{C}) = S(\mathbf{F}) \cdot h$.

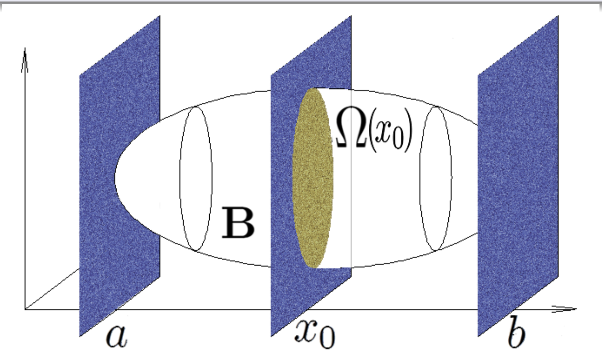


Теорема.

Пусть $\mathrm{B} \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченное пространственное тело, пересечение которого с любой плоскостью $x = x_0$, перпендикулярной оси Ox, квадрируемо и имеет площадь $\Omega(x_0)$. Тогда, если функция $\Omega(x) \in \mathfrak{R}\big([a, b]\big)$, то тело B кубируемо, а его объём равен

$$V(\mathrm{B}) = \int\limits_a^b \Omega(x)\,dx,$$

где $x = a$ и $x = b$ – плоскости, между которыми находится тело B.

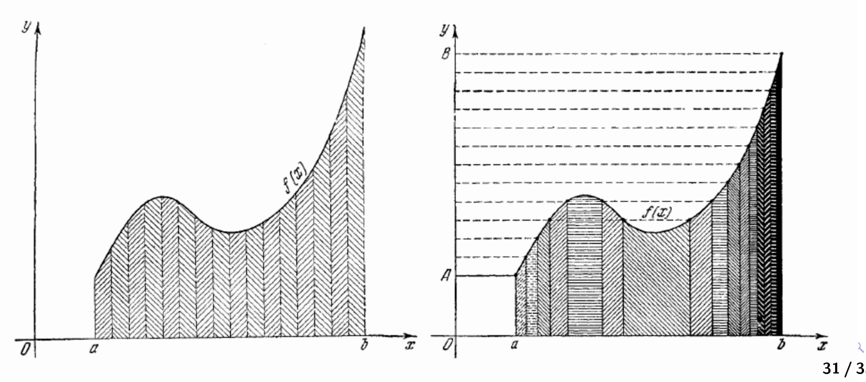


Интеграл Лебега

Пусть имеется большое количество монет различного достоинства и требуется сосчитать общую сумму денег, заключенную в этих монетах. Это можно сделать двумя способами. Можно откладывать монеты подряд и прибавлять стоимость каждой новой монеты к общей стоимости всех ранее отложенных. Однако можно поступить и иначе: сложить монеты стопочками так, чтобы в каждой стопочке были монеты одного достоинства, затем сосчитать число монет в каждой стопочке, умножить это число на стоимость соответствующей монеты, а затем сложить полученные числа. Первый способ счёта денег соответствует процессу **интегрирования Римана**, а второй — процессу **интегрирования Лебега**.

Интеграл Лебега

Переходя к математической формализации, можно сказать, что для вычисления интеграла Римана производится деление на мелкие части области задания функции (оси абсцисс), а для вычисления интеграла Лебега производится деление области значений функции (оси ординат). Последний принцип применялся практически задолго до Лебега при вычислении интегралов от функций, имеющих колебательный характер, однако Лебег впервые развил его во всей общности и дал его строгое обоснование при помощи теории меры.



Предварительные сведения

Точка x называется *внутренней точкой множества* $\mathbf{E}$, если найдётся некоторая окрестность точки x (т.е. интервал, содержащий эту точку), $U(x)$, целиком принадлежащая множеству $\mathbf{E}$.

Точка x называется *предельной точкой множества* $\mathbf{E}$, если в любой окрестности $U(x)$ точки x найдётся хотя бы одна точка множества E, отличная от x.

Множество G называется *открытым*, если все точки этого множества являются внутренними.

Множество F называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Покрытием $S = S(\mathbf{E})$ *множества* $\mathbf{E}$ назовём всякую конечную или счётную систему интервалов Δ_n, объединение которых содержит множество $\mathbf{E}$. Сумму длин всех интервалов Δ_n, составляющих покрытие $S = S(\mathbf{E})$, обозначим символом $\sigma(S)$. Итак,

$$\sigma(S) = \sum_n |\Delta_n| \leqslant \infty.$$

Внешней мерой множества $\mathbf{E}$ называется точная нижняя грань $\sigma(S)$ на множестве всех покрытий $S = S(\mathbf{E})$ множества $\mathbf{E}$. Обозначение: $|\mathbf{E}|^*$. Итак, по определению,

$$|\mathbf{E}|^* = \inf_{S(\mathbf{E})} \sigma(S).$$

Внешняя мера любого интервала совпадает с длиной этого интервала.

Множество $\mathbf{E}$ называется *измеримым*, если $\forall \varepsilon > 0$ найдётся открытое множество $\mathbf{G}$, $\mathbf{E} \subset \mathbf{G}$ и такое, что $|\mathbf{G} \setminus \mathbf{E}|^* < \varepsilon$.

Внешнюю меру измеримого множества $\mathbf{E}$ назовём *мерой* этого множества и обозначим символом $|\mathbf{E}|$.

Критерий измеримости

Для того, чтобы множество $\mathbf{E}$ было измеримо, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ нашлось замкнутое множество $\mathbf{F}$, $\mathbf{F} \subset \mathbf{E}$ и такое, что внешняя мера разности $\mathbf{E} \setminus \mathbf{F}$ была меньше ε.

Предварительные сведения

Будем обозначать символом $E[f$ удовлетворяет условию $A]$ множество всех $x \in \mathbf{E}$, для которых $f(x)$ удовлетворяет условию A.

Функция f, определённая на измеримом множестве $\mathbf{E}$, называется измеримой на этом множестве, если $\forall a \in \mathbb{R}$ множество $E[f \geqslant a]$ измеримо.

Критерий измеримости

Для измеримости функции f на множестве $\mathbf{E}$ необходимо и достаточно, чтобы одно из следующих трёх множеств

$$E[f > a], \quad E[f < a], \quad E[f \leqslant a]$$

было измеримо при любом вещественном a.р