Повторение школьной математики

1. Числа, буквы ~~ноты~~ и действия с ними

1.1. Числа. Кратко о главном

С делимость на 3 чуть сложнее: целое число делится на 3 без остатка, если сумма входящих в него цифр делится на 3

Следующим числовым множеством идёт *множество* **#рациональных** *чисел*:

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N} \right\}$$

Характерным «опознавательным» признаком *рационального числа* является то обстоятельство, что при делении числителя на знаменатель получается: *целое число, либо конечная* десятичная дробь, бесконечная *периодическая* десятичная дробь.

В высшей математике все действия стремимся выполнять в обыкновенных (правильных и неправильных) дробях

Помимо рациональных существует множество $\mathbf{I}$ иррациональных чисел, каждое из которых представИмо в виде бесконечной *НЕпериодической* десятичной дроби. Иными словами, в бесконечных «хвостах» иррациональных чисел нет никакой закономерности:

$\pi = 3{,}1415926535\ldots$

$e = 2{,}7182818284\ldots$ («год рождения Льва Толстого» дважды)

$\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$ и так далее.

1.2. Буквы в математике

Интервал – это промежуток $(a; b)$, где a и b – произвольные *действительные числа*, удовлетворяющие условию $a < b$. Для полуинтервалов $[a; b), (a; b]$ должно выполняться то же условие. А для отрезка $[a; b]$ допустимо *нестрогое неравенство* $a \le b$. Если $a = b$, то отрезок *вырождается* в точку и имеет нулевую длину.

1.3. Арифметические действия

Вычитание – это частный случай сложения, разность всегда можно представить в виде суммы: $a-b=a+(-b)$.

От перестановки слагаемых сумма не меняется: $a+b=b+a$.

Деление – это частный случай умножения, любое частное $a:b$ или *(что то же самое)* любую *правильную* или *неправильную* дробь можно представить в виде произведения: $\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}$, где $b\neq 0$ *(ибо **на ноль делить нельзя!**)*

От перестановки множителей произведение не меняется $a\cdot b=b\cdot a$.

Степень – это свёрнутая запись произведения: $x^k=\underbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{k\text{ раз}}$, x называют основанием *степени*, а k – показателем *степени* или тоже степенью.

Если корень **нечётный**: 3, 5, 7… то его можно извлекать и из отрицательных чисел!

Например: $\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{(-2)^3}=-2,\qquad \sqrt[5]{-1}=\sqrt[5]{(-1)^5}=-1$

Хорошим считается **устранение иррациональности в знаменателе**. Попросту говоря, это когда в знаменателе есть корень: $\frac{2}{\sqrt{2}}$. В таких случаях нужно использовать искусственный приём – **умножить числитель и знаменатель на корень**, ТАКОЙ, **чтобы в знаменателе корень извлёкся нацело**. Распишу очень подробно:

$\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ (на последнем шаге сократили дробь на 2)

1.4. Порядок действий

При вычислении арифметических выражений **сначала** выполняется умножение / деление, **затем** сложение / вычитание

Если число возводится в степень или находится под корнем, то **в первую очередь** нужно возвести в степень / извлечь корень.

1.5. Действия с обыкновенными дробями

Во-первых, следует заметить, что **дробь и число – это не одно и то же**. Дробь – это *форма записи* числа. **Одно и то же число можно записать разными дробями**

Согласно аксиоме, **все действия в высшей математике мы стремимся проводить в правильных и неправильных дробях**

1.5.1. Сокращение дробей

Сокращение числовой дроби – это деление её числителя и знаменателя на **одно и то же** натуральное число, бОльшее единицы, *без остатков*. Если, конечно, такое деление возможно, ибо у дроби $\frac{3}{2}$ и сокращать-то нечего. Такие дроби называют **несократимыми**.

1.5.2. Как перевести десятичную дробь в обыкновенную?

Сначала её нужно прочитать человеческим языком: 1,5 - *одна целая, пять десятых.* И теперь всё понятно: $1\frac{5}{10}$. Дробную часть сокращаем на пять, и вуаля: $1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

1.5.3. Умножение дробей

Число на дробь умножается просто: $A\cdot\frac{a}{b}=\frac{A\cdot a}{b}$, например: $5\cdot\frac{3}{4}=\frac{5\cdot 3}{4}=\frac{15}{4}$. Оставляем именно в таком виде!

Дробь на дробь тоже умножается просто: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

Далее. Степень. Тоже очевидное правило, которое следует из определения степени: чтобы возвести дробь в степень, нужно возвести в эту степень числитель и знаменатель:
$\left(\frac{a}{b}\right)^k=\frac{a^k}{b^k}$, например: $\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2^3}{3^3}=\frac{8}{27}$, $\left(\frac{3x}{5}\right)^2=\frac{3^2x^2}{5^2}=\frac{9x^2}{25}$ и тому подобное.

1.5.4. Деление дробей

Дробь $\frac{a}{b}$ **делится на число** c следующим образом: $\frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{a}{b\cdot c}$. Разделим, например, три четверти на пять: $\frac{\frac{3}{4}}{5}=\frac{3}{4\cdot 5}=\frac{3}{20}$.

Число a **делится на дробь** $\frac{b}{c}$ следующим образом: $\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a \cdot c}{b}$. Разделим, например, два на одну треть: $\frac{2}{\frac{1}{3}} = \frac{2 \cdot 3}{1} = 6$.

И, наконец, **дробь** $\frac{a}{b}$ **делится на дробь** $\frac{c}{d}$ по формуле: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$.

1.5.5. Сложение дробей

1) Если знаменатели одинаковые, то никаких проблем – знаменатель остаётся таким же, а числители складываются: $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$

2) Если одно из чисел целое, то тоже никаких проблем: $\frac{a}{b} + c = \frac{a}{b} + \frac{c \cdot b}{b} = \frac{a + c \cdot b}{b}$, например:

$\frac{1}{3} + 1 = \frac{1}{3} + \frac{3}{3} = \frac{4}{3}$, $\quad 2 + \frac{2}{5} = \frac{10}{5} + \frac{2}{5} = \frac{12}{5}$, $\quad \frac{3}{10} - 3 = \frac{3}{10} - \frac{30}{10} = \frac{3-30}{10} = -\frac{27}{10}$

3) Если знаменатели разные $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ $(b \neq d)$, то сначала нужно привести дроби к общему знаменателю, проще всего, по формуле $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{db}$

1.5.6. Как приводить дроби к общему знаменателю?

Принцип прост: общий знаменатель должен делиться на знаменатель каждой дроби *(само собой)* **и быть как можно меньше** (по возможности). Запишу общую формулу *(не пугаемся)*:

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad_1}{bd_1} + \frac{cd_2}{dd_2} = \frac{ad_1 + cd_2}{Z}$, где $d_1 = \frac{Z}{b}, d_2 = \frac{Z}{d}$ – дополнительные множители; общий знаменатель Z должен делиться на b и на d **и быть как можно меньше**.

1.6. Одночлены, многочлены и другие члены

Одночлен – это произведение, состоящее из числовых множителей и переменных в *целых неотрицательных* степенях, например: $1,\ 5k,\ 2a^2b,\ -7x^2,\ xy^2z^3$ и так далее.

Многочленом называют сумму одночленов, например: $ab+c$, x^4-2x+3, причём первый также величают *двучленом*, а второй – *трёхчленом*. По количеству одночленов. **Степенью многочлена** является максимальная степень входящих в него одночленов. Так, первый многочлен имеет 2-ю степень (1 +1), а второй – 4-ю степень.

1.6.1. Приведение подобных слагаемых

Подобные слагаемые – это слагаемые, имеющие одинаковую буквенную часть.

При сложении подобных слагаемых нужно сложить их числовые коэффициенты, а буквенную часть оставить неизменной.

1.6.2. Как перемножать суммы?

Чтобы умножить сумму на сумму нужно **каждое** слагаемое одной суммы умножить на **каждое** слагаемое другой суммы

В частности: $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$. Порядок перемножения можно поменять: $(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$. Либо начать умножение с любого слагаемого второй скобки. Кому как нравится, кому как удобнее.

1.6.3. Формулы сокращенного умножения

Квадрат суммы:

$(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2$ или кратко: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

Аналогично для **квадрата разности**:

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ba+b^2=a^2-2ab+b^2$$

Теперь перемножим сумму и разность:

$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ba-b^2=a^2-b^2$ – эту формулу называют **формулой разности квадратов**.

Куб суммы:

$$(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^3+2a^2b+b^2a+a^2b+2ab^2+b^3=$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Аналогично выводится **куб разности**:

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

Также в ходу формулы **суммы кубов** и **разности кубов**:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

1.6.4. Как представить сумму в виде произведения?

Это обратное действие, и самый простой случай – вынесение общего множителя за скобки: $x^2-2x=x(x-2),\quad ab+b=(a+1)b,\quad 3xyz^2+yz=yz(3xz+1)$.

1.7. Свойства степеней и корней

Для того чтобы возвести в степень произведение, нужно возвести в эту степень **каждый** множитель: $(xy)^k=x^ky^k$. Правило работает для любого количества множителей.

Чтобы умножить степени с одинаковыми основаниями, нужно основание оставить таким же, а показатели **сложить**: $x^a\cdot x^b=x^{a+b}$

Чтобы возвести степень в степень нужно перемножить показатели:
$(x^a)^b=x^{b\cdot a}$

При переносе степени из знаменателя в числитель *(или наоборот)* **у показателя следует сменить знак:** $\dfrac{1}{x^k}=x^{-k}$

Деление степеней с одинаковыми основаниями: $\dfrac{x^a}{x^b}=x^a\cdot x^{-b}=x^{a+(-b)}=x^{a-b}$

Радикал *(корень)* можно **записать в виде** $\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$, где $\dfrac{m}{n}$ – положительная рациональная дробь $(m\neq n,\ n\geq 2)$. При $n=2$ получается квадратный корень: $\sqrt{x^m}=x^{\frac{m}{2}}$. Если же дробь отрицательна, то речь идёт о корне, который находится в знаменателе:
$x^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{x^{\frac{m}{n}}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$, таким образом: $\dfrac{1}{\sqrt[n]{x^m}}=x^{-\frac{m}{n}}$.

Если n – *чётное* число, бОльшее нуля, то корень $\sqrt[n]{x}$ определён **только для неотрицательных значений** x; если n – *нечётное* число, бОльшее единицы, то корень определён **для всех** x.

1.8.1. Арифметическая прогрессия

Под **прогрессией** понимают **упорядоченный список** *(последовательность)* чисел, в котором есть определённая закономерность. Этот список может быть конечным или бесконечным.

Арифметическая прогрессия - это последовательность с равными расстояниями между соседними числами, например:
–8, –3, 2, 7, 12, 17, 22, 27, … – каждый следующий член данной прогрессии на 5 больше предыдущего. Это расстояние называют разностью *арифметической прогрессии*.

Чтобы задать *арифметическую прогрессию* достаточно указать её первый член $a_1 = -8$ и разность $d = 5$. «Энный» член определяется формулой $a_n = a_1 + d(n-1)$. Найдём, скажем, двадцатое число в списке:
$a_{20} = -8 + 5 \cdot (20-1) = -8 + 5 \cdot 19 = -8 + 95 = 87$.

Чтобы найти сумму *первых «эн» членов* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, их, конечно, не нужно складывать на калькуляторе :), для этого тоже есть формула: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$. Найдём, например, сумму первых пятидесяти членов. Сначала по той же формуле $a_n = a_1 + d(n-1)$ определяем пятидесятый член:
$a_{50} = -8 + 5 \cdot 49 = -8 + 245 = 237$, и с суммой никаких проблем:
$S_{50} = \frac{-8 + 237}{2} \cdot 50 = 229 \cdot 25 = 5725$.

Кроме того, легко составить комбинированную формулу $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$

1.8.2. Геометрическая прогрессия

Геометрическая прогрессия – это числовая последовательность, первый член которой $b_1 \neq 0$, а каждый последующий получается умножением предыдущего на некоторое число $q \neq 0$. Это число называют знаменателем *геометрической прогрессии*.

Если $b_1 > 0$ и $q > 1$, то прогрессия является **растущей**. Например:
2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458, … – здесь каждый следующий член получен умножением предыдущего на 3. *Знаменатель* прогрессии определяется элементарно – делим любой член (кроме первого) на предыдущий: $q = \frac{18}{6} = 3$.

Если же $-1 < q < 1$, то прогрессия **убывает**: $6,\ 3,\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{3}{8},\ \frac{3}{16},\ \ldots$ – здесь каждый следующий член получен умножением предыдущего на $q = \frac{1}{2}$.

Если $q < 0$, то прогрессия будет знакочередующейся, например:

$1,\ -\frac{2}{3},\ \frac{4}{9},\ -\frac{8}{27},\ \frac{16}{81},\ -\frac{32}{243}, \ldots \qquad \left(q = -\frac{2}{3}\right)$

$-3,\ 6,\ -12,\ 24,\ -48,\ 96, \ldots \qquad (q = -2)$

Любой член геометрической прогрессии легко определить по формуле $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$. Найдём, например, 10-й член последней прогрессии:

$b_{10} = -3 \cdot (-2)^9 = -3 \cdot (-512) = 1536$.

Сумма *первых* n *членов* геометрической прогрессии рассчитывается по формуле:

$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, обратите внимание, что для этого не нужно знать b_n («энный» член)

Однако особый интерес представляет бесконечно убывающая *геометрическая прогрессия*. Это прогрессия бесконечным количеством членов и основанием $-1 < q < 1$, пример уже был:

$6,\ 3,\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{3}{8},\ \frac{3}{16},\ \ldots$ – члены такой прогрессии *стремятся* к нулю.

Но главная «фишка» состоит в том, что сумма бесконечного количества членов… равна *конечному* числу! И особо приятно, что для расчёта этой суммы существует очень простая формула: $S = \frac{b_1}{1-q}$. В нашем примере $b_1 = 6,\ q = \frac{1}{2}$, и мы счастливы:

$S = 6 + 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \ldots = \frac{6}{1-\frac{1}{2}} = \frac{6}{\frac{1}{2}} = 6 \cdot 2 = 12$

– главное, правильно упростить

2. Уравнения и неравенства

2.1. Понятие уравнения. Простейшие примеры

Уравнение – это **равенство**, которое содержит переменную. Таким образом, любое уравнение состоит и левой части, правой части и знака «равно», например:

$2x = 10$

Корень *уравнения* – это ТАКОЕ значение переменной, которое обращает уравнение в **верное числовое равенство**.

Решить *уравнение* – это значит найти ВСЕ его корни или доказать, что их не существует.

2.2. Преобразование уравнений

В любой части уравнения (и слева, и справа) **можно выносить множители за скобки и скобки раскрывать**:

Части уравнения можно менять местами, они абсолютно равноценны:

Любое слагаемое можно перенести в другую часть, сменив у него знак:

Обе части можно умножать / делить на одно и то же число, отличное от нуля:

Множители, которые находятся вверху, можно «сбрасывать» на нижний этаж противоположной части. И обратно: **множители, которые находятся внизу, можно «поднимать» в числитель противоположной части**.

Крутим-вертим:
$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow a=\frac{bc}{d}, \quad ad=bc, \quad d=\frac{bc}{a}, \quad \frac{d}{b}=\frac{c}{a}, \quad \frac{ad}{b}=c$ и так далее – смотря что вам нужно выразить в той или иной задаче.

Теперь о том, чего делать нельзя: **нельзя сокращать на множитель, который содержит переменную. Это ведёт к потере корней. Запишите, запомните, зазубрите!**

2.3. Квадратное уравнение

Теперь **общий случай** $ax^2+bx+c=0$, где все коэффициенты отличны от нуля. И сразу то самое уравнение: $x^2-x-2=0$.

Чтобы решить такое уравнение, нужно вычислить дискриминант – по **формуле**:
$D=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)=1+8=9$

1. Если $D<0$, то уравнение имеет два *сопряжённых* **комплексных корня**.
2. Если $D=0$, то уравнение имеет два *совпавших* (кратных) действительных корня, которые определяются по формуле $x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$.
3. И, наконец, $D>0$. Здесь уравнение имеет два действительных корня: $x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, $x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ – обычно их располагают в порядке возрастания.

В практических задачах часто требуется разложить квадратный трёхчлен ax^2+bx+c на множители. Для этого нужно решить уравнение $ax^2+bx+c=0$ и воспользоваться **формулой**:

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1, x_2 – корни данного уравнения.

2.4. Неравенства

Неравенство, как и уравнение, содержит две части, но разделены они не знАком
= *(равно)*, а одним из следующих знаков: > *(больше)*, или < *(меньше)*, или ≥ *(больше либо равно)*, или ≤ *(меньше либо равно)*. Первые два неравенства называют строгими, а последние два – нестрогими.

Решить неравенство – это значит найти ВСЕ значения переменной, которые обращают его в ВЕРНОЕ **числовое неравенство**.

Чаще всего решением является один или несколько промежутков. Иногда бесконечное количество промежутков. Встречаются и точечные решения, так, решением неравенства $(x+1)^2 \le 0$ является единственное значение: $x=-1$. А иногда решений может не быть вовсе, например: $x^2+1<0$ – это неравенство не имеет решений, да и неравенство $x^2<0$ – тоже.

2.5. Действия с неравенствами

В любой части неравенства можно выносить за скобки и раскрывать скобки:
$2-3x<8-4x$

Части неравенства можно менять местами, но тогда у неравенства нужно «развернуть» и значок:
$8-4x>2-3x$ – что логично, осмЫслите это действие!

Слагаемые можно переносить из части в часть, меняя у них знаки:
$-4x+3x>2-8$

В обеих частях можно приводить подобные слагаемые:
$-x>-6$

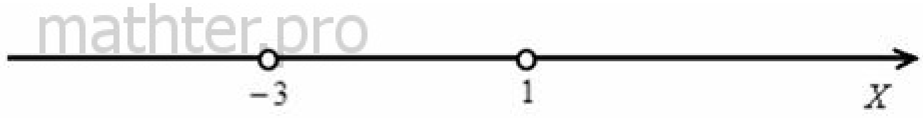
Обе части неравенства можно умножить на одно и то же число, отличное от нуля, но если это число отрицательное, то значок неравенства следует сменить на противоположный

2.6. Метод интервалов

Объяснять буду сразу на конкретном примере: $x^2+2x-3>0$. Кстати, все ли до конца понимают то, что нам предстоит сделать? Здесь нужно определить при каких «икс» квадратный трёхчлен будет больше нуля. Итак, как решить это неравенство?

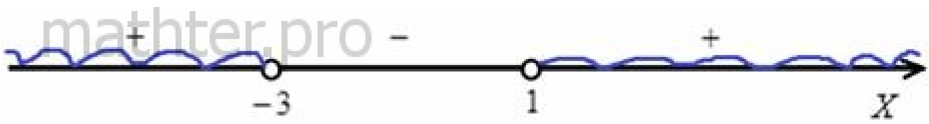
На первом шаге нужно решить соответствующее уравнение, а также определить все недопустимые значения «икс». Что касаемо недопустимых значений, то их здесь нет, поскольку квадратный трёхчлен x^2+2x-3 определён для всех «икс». А вот с розыском корней придётся потрудиться – решаем квадратное уравнение $x^2+2x-3=0$.

На втором шаге отмечаем на числовой прямой все «нелегальные» точки и все корни. Поскольку наше неравенство *строгое*, то корни «выкалываем»:



Теперь нужно определить знаки, в нашем случае трёхчлена x^2+2x-3, **на полученных интервалах**. Как это сделать? Если квадратный трёхчлен больше (либо меньше) нуля **в какой-либо точке интервала**, то он больше (либо меньше) нуля и во всех **точках этого интервала**. В этом и состоит суть метода интервалов:

1. Рассмотрим интервал $(-\infty, -3)$ значит трёхчлен больше нуля **и во всех** точках этого интервала.
2. Рассмотрим интервал $(-3, 1)$ рёхчлен меньше нуля **и во всех** точках интервала.
3. И, наконец, интервал $(1, +\infty)$ трёхчлен положителен **и во всех** точках этого интервала.
   Перечисленные подстановки выполняют устно, а результаты (полученные знаки) отмечают на чертеже. При этом нужные интервалы удобно заштриховать:



Таким образом, решением неравенства являются два интервала, и **ответ** часто записывают в виде *объединения* промежутков: $x^2+2x-3>0$, если $x\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

Что делать, если справа не ноль, а что-то другое? С помощью преобразований получить справа ноль :). Возможно, потребуется ещё «причесать» левую часть: привести дроби к общему знаменателю, привести подобные слагаемые и т.п.

2.7. Уравнения и неравенства с модулем

$|x| = a$ **имеет два корня**: $x_1 = -a,\ x_2 = a$. Если $a = 0$, то корень один.

Если «начинка» модуля более сложная, например, $|2x-1| = 3$, то уравнение разруливается по той же схеме, а именно, нужно решить два уравнения:

1) $2x - 1 = -3 \quad \Rightarrow \quad 2x = -2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1$

2) $2x - 1 = 3 \quad \Rightarrow \quad 2x = 4 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2$

Мысленно подставьте $x_1 = -1,\ x_2 = 2$ в модуль и убедитесь в том, что это корни.

Если «начинка» модуля *неотрицательна*, то модуль становится ненужным и его можно убрать: $|x^2| = x^2$. Также модуль исчезает при возведении его в квадрат: $|x|^2 = x^2$. Разумеется, ВМЕСТО «икс» здесь тоже может быть сложное выражение.

Кроме того, уравнение может оказаться ещё более сложным и тогда от модуля избавляются прямо по ходу решения. В этом случае оно распадается опять же на две ветки **по формуле**: $|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \ge 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$.

ВМЕСТО «икс» может быть сложное выражение, так уравнение $x \cdot |2 - x| = 2x + 5$ раскладываем на следующие части:

$$\begin{cases} x \cdot (2 - x) = 2x + 5, & \text{если } 2 - x \ge 0 \\ x \cdot (-(2 - x)) = 2x + 5, & \text{если } 2 - x < 0 \end{cases}$$

Бывает, модуль возникает в ходе решения других уравнений. Типичный пример: $(x-2)^2 = 3$

Да, здесь можно возвести в квадрат, привести подобные слагаемые и решить квадратное уравнение. Но зачем? Есть путь короче! Извлекаем квадратный корень из обеих частей (ещё одно, кстати, действие с уравнениями):

$\sqrt{(x-2)^2} = \sqrt{3}$ и вспоминаем, что в этом случае необходимо поставить модуль:

$|x - 2| = \sqrt{3}$

после чего решение входит в знакомую колею:

1) $x - 2 = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2 + \sqrt{3}$,

2) $x - 2 = -\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2 - \sqrt{3}$.

Мысленно подставьте полученные значения в исходное уравнение и убедитесь в том, что они действительно являются корнями.

Аналогичные выкладки справедливы для *нестрогих* неравенств: неравенство $|x| \le a$ раскрывается через двойное неравенство $-a \le x \le a$, а неравенство $|x| \ge a$

раскрывается через совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} x \le -a \\ x \ge a \end{array}\right.$, то есть «икс» **или** *меньше либо равен* $-a$, **или** *больше либо равен* a. ВМЕСТО «икс» может быть сложное выражение.

Пользуюсь случаем, сформулирую ещё одно правило: **все три части двойного неравенства можно умножить на одно и то же число, и если это число отрицательно, то «значки» неравенств следует «развернуть» в противоположную сторону**.

Так, для того чтобы решить неравенство $-4 < -2x \le 1$, нужно все его части умножить на $-\frac{1}{2}$, и поскольку это число отрицательное, то «значки» неравенств следует «развернуть» в противоположном направлении:

$2 > x \ge -\frac{1}{2}$, после чего переписать результат «справа налево»:

$-\frac{1}{2} \le x < 2$ – в привычном порядке, или ещё можно записать: $x \in \left[-\frac{1}{2}; 2\right)$.

2.8. Понятие системы

Система – это множество условий, которые должны выполняться **вместе**. Решение системы (если оно существует) удовлетворяет ВСЕМ условиям системы.

ТАКИЕ значения «икс», которые удовлетворяют **каждому** уравнению системы. Или доказать, что их не существует. Очевидно, что $x_1 = -2, x_2 = 2$ – корни 1-го уравнения, а $x_1 = -2, x_2 = 3$ – корни 2-го уравнения. **Но решением системы является лишь значение** $x = -2$ – поскольку оно удовлетворяет **и первому и второму** уравнению.

Если у системы нет решений, то её называют **несовместной**. Так, несовместной является следующая *система неравенств*: $\begin{cases} x < 2 \\ x > 3 \end{cases}$ – совершенно понятно, что «икс» не может быть меньше двух и в то же самое время больше трёх.

Таким образом, с помощью системы можно решить разные задачи! Например, двойное неравенство $-4 < -2x \le 1$ предыдущего параграфа. По сути, здесь записано два неравенства: $-2x > -4$ и $-2x \le 1$, причём, они должны выполняться **одновременно**:

$\begin{cases} -2x > -4 \\ -2x \le 1 \end{cases}$ и, решая каждое неравенство, получаем: $\begin{cases} x < 2 \\ x \ge -\frac{1}{2} \end{cases}$

Решение первого неравенства изобразим сверху, а второго – снизу:

Решением системы является **общий** промежуток: $x \in \left[-\frac{1}{2}; 2\right)$, или, как говорят математики, **пересечение** решений: $(-\infty; 2) \cap \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right) = \left[-\frac{1}{2}; 2\right)$ *($\cap$ - значок пересечения)*.

2.9. Уравнения и неравенства с несколькими переменными

До сих пор мы рассматривали только одну переменную – «икс». Но совершенно понятно, что уравнение или неравенство может содержать и несколько различных переменных. Например, две.

Как и младший брат, уравнение с двумя переменными может иметь единственное решение, например: $x^2 + y^2 = 0$ или не иметь действительных решений вовсе: $x^2 + y^2 = -1$

Популярная система, а-ля $\begin{cases} x + y = 5 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$, может иметь единственное решение, бесконечно много решений или же не иметь их совсем. Давайте вспомним этот школьный метод решения: из 1-го уравнения выразим «игрек» *(можно «икс»)*: $y = 5 - x$, и подставим во 2-е уравнение: $-2x + 5 - x = -1$. Приводим подобные слагаемые:
$-3x = -6 \quad \Rightarrow \quad x = 2$ – подставим в 1-е уравнение: $y = 5 - x = 5 - 2 = 3$.

Таким образом, пара $x = 2, y = 3$ является единственным решением системы. Мысленно подставьте эти значения в **каждое** уравнение системы и убедитесь в том, что они «подходят» и там и там.

3. Функции и графики

3.1. Понятие функции

Функция одной (независимой) **переменной** – это **правило** f *(зависимость, закон)* по которому **каждому допустимому значению** x ставится в соответствие **одно и только одно** значение y. Стандартная запись: $y = f(x)$

Переменная x называется **независимой переменной** или **аргументом**. Переменная y называется **зависимой переменной** и, кроме того, под «игреком» также подразумевают *функцию*.

Таким образом, функцию можно записать так: $f(x)=x+3$, либо так: $y(x)=x+3$, либо так: $y=x+3$, для краткости чаще будем использовать последний вариант. Данное правило увеличивает каждое значение «икс» на три. Например: $f(-1)=-1+3=2$

Функцию также записывают в виде *уравнения* $F(x;y)=0$ (стандартный вид). Возьмём ту же функцию $y=x+3$ и перебросим все члены налево: $y-x-3=0$. В таких случаях говорят, что функция задана неявно или в неявном виде. Потому что сразу не понятно, что делает эта функция :)

Множество допустимых значений «икс» называют **областью определения функции** – это те значения, для которых определены «игреки». Область определения обозначают следующим образом: $D(f)$ или $D(y)$.

Областью определения всех перечисленных выше функций является любое «икс», т.е. все действительные значения: $D(y)=\mathbf{R}$.

Так, функция $y=\frac{1}{x}$ определена для всех «икс» кроме нуля: $D(y)=\mathbf{R}\setminus\{0\}$, вместо *значка исключения* ($\setminus$) здесь также можно использовать *объединение* двух интервалов: $D(y)=(-\infty;\,0)\cup(0;+\infty)$

Функция $y=\sqrt{x}$ определена лишь для неотрицательных значений «икс»: $D(y)=[0;+\infty)$

И в заключение параграфа кратко об обратной функции $x=f^{-1}(y)$ – эта функция «возвращает» исходное значение «икс». Например, для $y=2x$ обратной является: $x=\frac{y}{2}$.

3.2. График функции в декартовой системе координат

И на всякий пожарный повторим, как отмечать точки. **Любая точка плоскости однозначно определяется двумя координатами**, при этом 1-я координата – это **строго** «иксовая» координата (по *оси* OX), а 2-я координата – это **строго** «игрековая» координата (по *оси* OY) В качестве примере отмечу точки $K(2;\,2),\ L(-1;\,3),\ M(-4;\,-3/2),\ N(3;\,-1)$

3.3. Линейная функция

Имеет вид $y = kx + b$, где k и b – константы (числа). Графиком линейной функции является прямая. Для её построения достаточно знать две точки. Так, для функции $y = x + 3$ удобно выбрать значение $x = 0$ и найти $y = 0 + 3 = 3$, и, например, для $x = -3$ вычислить $y = -3 + 3 = 0$. Отмечаем найденные точки $P(0; 3), R(-3; 0)$ на чертеже и аккуратно, по линейке проводим прямую:

Прямая вида $y = kx$ проходит через начало координат и называется прямой пропорциональностью. Для её построения нужно найти одну точку. Так, для прямой $y = -\frac{x}{2}$ удобно выбрать $x = 2 \Rightarrow y = -1$. Отмечаем на чертеже точку $S(2; -1)$ и порядок!

Коэффициент k называется угловым коэффициентом прямой. Если $k > 0$, то график идёт «снизу вверх», например, график $y = x + 3$. Если $k < 0$, то график идёт «сверху вниз», например, $y = -\frac{x}{2}$.

3.7. Логарифмы и логарифмическая функция

Понятие логарифма

Логарифмом числа b по основанию a $(a > 0, a \neq 1)$:
$\log_a b$ – называется **степень «пэ»** $\log_a b = p$, в которую нужно возвести «а», чтобы получить «бэ».
Из чего следует основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b$.
…*тождество* – это такое железобетонное равенство :)
Сама запись $\log_a b$ читается как « *логарифм «бэ» по основанию «а»* », и очевидно, что логарифм определён лишь для положительных «бэ»: $b > 0$ – по той причине, что любое положительное «а» в **любой** действительной степени «пэ»: $a^p = b$ – положительно.

Логарифм по основанию 10 называют десятичным логарифмом, и для краткости обозначают значком $\lg$, например: $\log_{10} 100 = \lg 100$.

Логарифм по основанию «е» называют натуральным логарифмом и обозначают значком $\ln$, например: $\log_e 1 = \ln 1$. В высшей математике в ходу именно натуральные логарифмы, и в дальнейшем мы уделим им самое пристальное внимание.

Свойства логарифмов

Переход к новому основанию: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, причём новое основание «цэ» вы можете выбрать по своему желанию *(из доступных вариантов:* $c > 0, c \neq 1$*)*, например:

$\log_3 5 = \dfrac{\ln 5}{\ln 3}$. Но гораздо чаще встречается частный случай формулы: $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, например: $\log_3 5 = \dfrac{1}{\log_5 3}$. Разумеется, формула работает и в обратном направлении, что бывает удобным, когда нужно избавиться от знаменателя: $\dfrac{1}{\lg e} = \ln 10$.

Если $b_1 > 0, b_2 > 0$ **то справедливо следующее** *(и слева направо и справа налево)*:

$\log_a b_1 + \log_a b_2 = \log_a(b_1 \cdot b_2)$

$\log_a b_1 - \log_a b_2 = \log_a \dfrac{b_1}{b_2}$

Далее. **Для** $b > 0$ **и любого действительного числа** k**:**

$\log_a b^k = k \log_a b$

Например: $\ln 2^{50} = 50 \ln 2$ – и это просто волшебство! Ведь это здОрово избавиться от 50-й степени! Популярно и обратное действие, особенно, когда нужно выполнить другие упрощения: $3\lg 2 + \lg 5 = \lg 2^3 + \lg 5 = \lg 8 + \lg 5 = \lg(8 \cdot 5) = \lg 40$

Перечисленные правила можно распространить на отрицательные значения «бэ», но тогда нужно добавить модули:

$\log_a |b_1| + \log_a |b_2| = \log_a |b_1 \cdot b_2|$

$\log_a |b_1| - \log_a |b_2| = \log_a \left|\dfrac{b_1}{b_2}\right|$

$\log_a b^k = k \log_a |b|$, если k *чётное*. Например: $\ln x^2 = 2\ln|x|$ – и равносильность соблюдена, поскольку полученный логарифм тоже определён для отрицательных «икс».

А вот такое преобразование **неравносильно**: $2\ln x = \ln x^2$, и поэтому здесь следует обязательно указать, что $x > 0$.

В случае иных значений k модуль не нужен: $\ln x^3 = 3\ln x, \quad \ln \sqrt[3]{x^2} = \ln x^{\frac{2}{3}} = \dfrac{2}{3}\ln x$ – по той причине, что и исходные и полученные логарифмы определены только для положительных значений «икс».

Логарифмирование и потенцирование

Логарифмирование – это перевод чисел или уравнений в *логарифмический масштаб* или, попросту говоря, «навешивание» логарифмов.
Данное действие удобно использовать при работе с астрономическими или микроскопическими числами, особенно, если они находятся в произведении. Так, число $2^{25}\cdot 10^{-100}$ целесообразно упростить, «навесив» на него логарифм, выгодно взять *десятичный* логарифм:
$\lg(2^{25}\cdot 10^{-100})=\lg 2^{25}+\lg 10^{-100}=25\lg 2-100\lg 10=25\lg 2-100$ – далее переводим другие числа в тот же масштаб (логарифмируем по основанию десять)
и работаем (выполняем действия) с гораздо более удобными значениями.
Логарифмирование незаменимо при решении некоторых уравнений, например:
$5^x=80$

Для разрешения этого уравнения относительно «икс» «навесим» на обе его части логарифмы, обычно используют натуральные логарифмы:
$\ln 5^x=\ln 80$

в левой части «сносим» степень, и порядок:

$$x\ln 5=\ln 80 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{\ln 80}{\ln 5}\approx 2{,}72$$

При логарифмировании нужно следить за знаками, так, обе части уравнения (функции) $y=x^2+1$ определены и положительны при любом значении «икс», поэтому здесь можно смело логарифмировать: $\ln y=\ln(x^2+1)$, получая *равносильное* уравнение.

А вот у функции $y=\frac{\sqrt{x+3}}{x}$ обе части могут быть меньше нуля, и поэтому здесь нужно добавить модули: $\ln|y|=\ln\left|\frac{\sqrt{x+3}}{x}\right|$, квадратному корню модуль не нужен:
$\ln|y|=\ln\frac{\sqrt{x+3}}{|x|}$. Однако это действие всё равно *неравносильно* т.к. мы потеряли значение $x=-3$ *(почему?)*. Но это не помеха для решения некоторых задач, например, для нахождения производной, где можно пренебречь даже модулями.
Да, а зачем логарифмировать? Чтобы упростить правую часть:

$$\ln\frac{\sqrt{x+3}}{|x|}=\ln\sqrt{x+3}-\ln|x|=\frac{1}{2}\ln(x+3)-\ln|x|.$$

Потенцирование – это обратная операция, «избавление» от логарифмов.
Предположим юные физики вдоволь нарезвились с вычислениями в *десятичном*

логарифмическом масштабе, и хотят перевести результат $3\lg 2+12$ обратно. Без проблем:
$10^{3\lg 2+12}$, используем свойства степеней, логарифмов и основное логарифмическое тождество: $10^{3\lg 2+12}=10^{\lg 2^3}\cdot 10^{12}=10^{\lg 8}\cdot 10^{12}=8\cdot 10^{12}$.
Потенцирование используют для того, чтобы выразить функцию *в явном виде*, например: $\ln|y|=\ln 5+3\ln|x|$ – «упаковываем» логарифмы в правой части:

$$\ln|y|=\ln 5+\ln|x|^3$$

$\ln|y|=\ln 5|x|^3$, после чего просто убираем логарифмы и модули заодно:

$$y=5x^3$$

Такие действия выполняют при решении некоторых дифференциальных уравнений

Уравнения и неравенства с логарифмами

Уравнение вида $\log_a h(x)=p$ (p – константа) очевидным образом приводится к уравнению $h(x)=a^p$. Например:

$$\log_3 x=2 \quad\Rightarrow\quad x=3^2=9$$

$$\lg x^2=-2 \quad\Rightarrow\quad x^2=10^{-2}=\frac{1}{100} \quad\Rightarrow\quad x_1=-\frac{1}{10},\ x_2=\frac{1}{10}$$

ну и давайте что-нибудь посодержательнее:

$$\ln(2x-1)=0 \quad\Rightarrow\quad 2x-1=e^0 \quad\Rightarrow\quad 2x-1=1 \quad\Rightarrow\quad 2x=2 \quad\Rightarrow\quad x=1$$

$$\log_3 x=2 \quad\Rightarrow\quad x=3^2=9$$

$$\lg x^2=-2 \quad\Rightarrow\quad x^2=10^{-2}=\frac{1}{100} \quad\Rightarrow\quad x_1=-\frac{1}{10},\ x_2=\frac{1}{10}$$

Уравнение вида $\log_a h(x)=\log_a e(x)$ тоже разрешимо из естественных соображений: логарифмы с одинаковыми основаниями равны, если $h(x)=e(x)$, при этом корни должны быть ТАКИМИ, чтобы для них выполнялись условия $h(x)>0, e(x)>0$. Так, для решения уравнения $\log_3(x+1)=\log_3(3x-1)$ потенцируем обе части:
$x+1=3x-1$, откуда получаем корень $x=1$, после чего обязательно подставляем его в исходное уравнение: $\log_3(1+1)=\log_3(3\cdot 1-1) \quad\Rightarrow\quad \log_3 2=\log_3 2$ – верное равенство.

А теперь рассмотрим такое уравнение: $\lg(x^2-1)=\lg(x-1)$, где после избавления от логарифмов всё вроде бы хорошо: $x^2-1=x-1 \quad\Rightarrow\quad x^2-x=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=0, x_2=1$, однако **корнями эти значения не являются**, т.к. не входят в область определения логарифмов.

Неравенства. Простейшие из них удобно решать графически, причём мысленно. Рассмотрим неравенство $\ln x > 0$. Это неравенство предлагает нам определить участок, где график натурального логарифма **выше** оси OX.

$x \in (1; +\infty)$. Аналогично, неравенству $\ln x < 0$ соответствует интервал $x \in (0; 1)$, где график логарифма **ниже** оси абсцисс. В случае *нестрогих* неравенств в решения следует добавить единичку.

И рассмотрим **общий случай** $\log_a h(x) > p$, где «пэ» – произвольная константа. Во-первых, «начинка» логарифма должны быть **строго больше** нуля: $h(x) > 0$. Это незыблемое условие, о котором **ни в коем случае** забывать нельзя! Теперь разбираемся с основным неравенством: сначала в правой части искусственно добавляем множитель: $\log_a h(x) > p\log_a a$. Обратите внимание, что $\log_a a = 1$ и статус-кво соблюдён. В правой части поднимаем «пэ» в показатель: $\log_a h(x) > \log_a a^p$ и дальше следует развилка:

если $0 < a < 1$, то решаем систему $\begin{cases} h(x) > 0 \\ h(x) < a^p \end{cases}$, если $a > 1$ – то систему: $\begin{cases} h(x) > 0 \\ h(x) > a^p \end{cases}$.

Как видите, **в 1-м случае после** потенцирования **знак неравенства следует сменить на противоположный**.

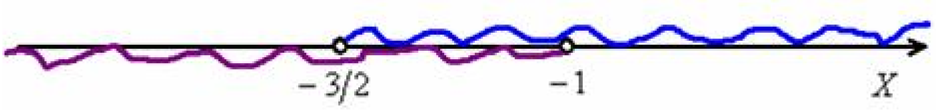
Неравенство $\log_a h(x) < p$ решается аналогично с финальными системами: $\begin{cases} h(x) > 0 \\ h(x) > a^p \end{cases}$, если $0 < a < 1$ и $\begin{cases} h(x) > 0 \\ h(x) < a^p \end{cases}$ *(без смены знака)*, если $a > 1$.

Если изначальные неравенства *нестрогие*, то нижние неравенства в системах тоже будут *нестрогими*. **И ещё раз – условие** $h(x) > 0$ **незыблемо при любых раскладах**!

Как я уже отмечал, на практике почти всегда встречает второй случай, когда $a > 1$, ему и уделим внимание. Дорешаем неравенство $\ln(2x+3) < 0$, которое мы начали в параграфе Метод интервалов. Там была найдена область определения логарифма $h(x) > 0$:

$2x + 3 > 0 \Rightarrow x > -\frac{3}{2}$ и сейчас нужно решить вторую часть задания. Согласно формальному алгоритму, домножаем правую часть неравенства: $\ln(2x+3) < 0 \cdot \ln e$, поднимаем ноль наверх: $\ln(2x+3) < \ln e^0$ и получаем: $\ln(2x+3) < \ln 1$. Так как основание логарифма $a > 1$, то при потенцировании знак неравенства менять не нужно: $2x + 3 < 1$. Преобразуя это простенькое неравенство, получаем: $x < -1$.

Таким образом, имеем систему $\begin{cases} x > -\frac{3}{2} \\ x < -1 \end{cases}$. Решение 1-го неравенства я отмечу сверху, а 2-го – снизу:

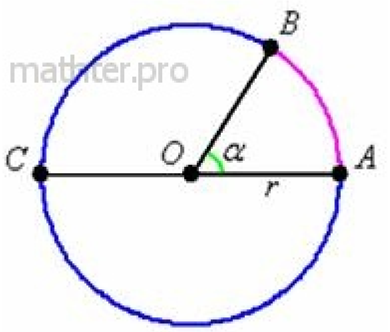


Решением системы и исходного неравенства $\ln(2x+3)<0$ является *пересечение* (общая часть) промежутков: $x \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right)$ – да, вот такой вот совсем небольшой интервал.

Тригонометрия

5.1. Об угле подробно

Углы измеряют в градусах, радианах и более редких единицах. Изобразим на чертеже окружность произвольного радиуса $r \neq 0$ с центром в точке O:



Радиан – это центральный угол α, **такой**, что длина соответствующей дуги $\overset{\frown}{AB}$ *(малиновый цвет)*, **равна** *радиусу* r окружности. **Радиан не зависит от конкретного значения** r и примерно равен $\alpha \approx 57°$.

Радианная мера угла – это **отношение** длины дуги $\overset{\frown}{l}$ между сторонами угла к радиусу окружности: $\alpha_{рад} = \frac{|\overset{\frown}{l}|}{r}$.

Выясним, сколько радиан содержит, например, *развёрнутый* угол $\angle AOC = 180°$. Из известной формулы длины окружности $L = 2\pi \cdot r$ следует, что длина верхней *полуокружности* равна $|\overset{\frown}{AC}| = \pi \cdot r$, таким образом, **в 180 градусах содержится**: $\alpha_{рад} = \frac{|\overset{\frown}{AC}|}{r} = \frac{\pi \cdot r}{r} = \pi \approx 3{,}14$ радиан. Полный оборот $(360°)$ включает в себя $2\pi \approx 6{,}28$ радиан (примерно 6,28 углов α). Да, углы мы измеряем… в углах! (радианах)

Для перевода градусов в радианы удобно использовать **формулу** $\alpha_{рад} = \frac{\alpha_{град} \cdot \pi}{180}$. Переведём в радианы, например, угол $\alpha_{град} = 30°$: $\alpha_{рад} = \frac{30 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{6}$ радиан.

Обратно, **радианы переводятся в градусы по формуле:** $\alpha_{град} = \alpha_{рад} \cdot \dfrac{180}{\pi}$.

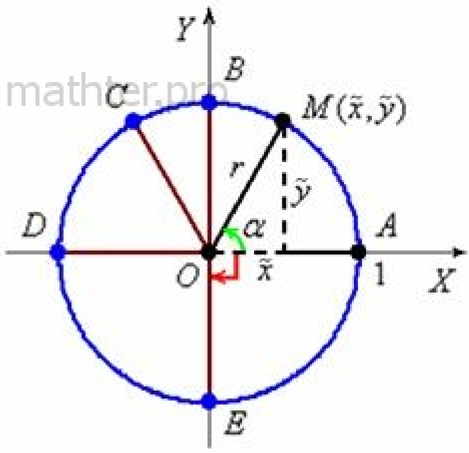
Например, переведём в градусы $\alpha_{рад} = \dfrac{\pi}{3}$: $\alpha_{град} = \dfrac{\pi}{3} \cdot \dfrac{180}{\pi} = 60°$.

В тригонометрии в ходу радианы.

Это, можно сказать, тригонометрическая практическая аксиома :) И поэтому если вам предложены градусы, то для дальнейших преобразований их почти всегда придётся перевести в радианы *(формула выше)*. Теперь возвращаемся к знакомой теме:

5.2. Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса через единичную окружность

Не так давно мы определили эти отношения для острого угла, и сейчас распространим на произвольный угол. Для этого используют так называемую **единичную окружность** (радиуса $r = 1$). Изобразим её в декартовой системе с центром в начале координат:



Рассмотрим **произвольную** точку $M(\tilde{x}, \tilde{y})$, принадлежащую окружности, и *положительно ориентированный* угол $\alpha = \angle AOM$ *(зелёная стрелка)*.

Синусом угла α называют отношение *ординаты* точки M к радиусу окружности: $\sin\alpha = \dfrac{\tilde{y}}{r}$.

Косинусом угла α называют отношение *абсциссы* точки M к радиусу окружности: $\cos\alpha = \dfrac{\tilde{x}}{r}$.

Тангенс угла α – есть отношение $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\tilde{y}}{\tilde{x}}$ (если $\tilde{x} \neq 0$), и **котангенс**: $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\tilde{x}}{\tilde{y}}$ (если $\tilde{y} \neq 0$).

Так, **углам** $0°, 360°, 720°, \ldots$ *(да-да, угол можно «накручивать» и дальше!)* соответствуют точка $A(1,0)$, и поэтому: $\sin 0 = \frac{0}{1} = 0,\ \cos 0 = \frac{1}{1} = 1,\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{0}{1} = 0$, а котангенса не существует, ибо ордината этой точки равна нулю.

Угол в градусах	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Угол в радианах	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не сущ.	0	не сущ.	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	не сущ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	не сущ.	0	не сущ.

Аналогично для отрицательно ориентированных углов. В частности, **углу** $\angle AOE = -\frac{\pi}{2}\ (-90°)$ *(красная стрелка на чертеже)*, соответствует точка $E(0,-1)$, следовательно: $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{1} = -1,\ \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{0}{1} = 0$, тангенс аминь, $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{0}{1} = 0$.
На практике бывает удобно как «прикрутить» оборот к углу, так и «скрутить лишние». Так, угла $-\frac{\pi}{2}$ нет в ***Тригонометрической таблице***, но к нему можно мысленно прибавить 2π (один оборот), в результате чего получится угол в $\frac{3\pi}{2}$ радиан **с теми же самыми значениями синуса, косинуса и котангенса**. И, наоборот, в некоторых задачах появляются углы с «лишними» оборотами. Рассмотрим, например, угол 5π – здесь целесообразно «скрутить» два оборота: $5\pi - 4\pi = \pi$, получая эквивалентный угол.

И, как вы правильно догадались, угол можно «накручивать» до бесконечности в любом направлении. Представьте, что по единичной окружности «ездит» точка. По мере того, как мы будем проходить оборот за оборотом (в любую сторону) **значения синусов и компании будут периодически повторяться**. Таким образом, возникают:

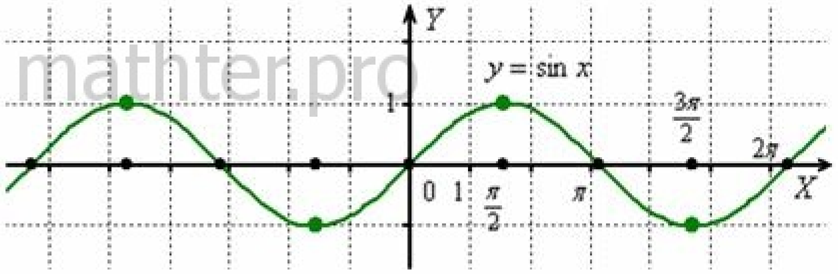
5.3. Тригонометрические функции

$y = \sin x, \; y = \cos x, \; y = \text{tg} x, \; y = \text{ctg} x$, где угол x выражен в радианах (!)**.**

Данные функции **каждому действительному углу** x ставят в соответствие его синус, косинус, тангенс и котангенс *(если они существуют)*.

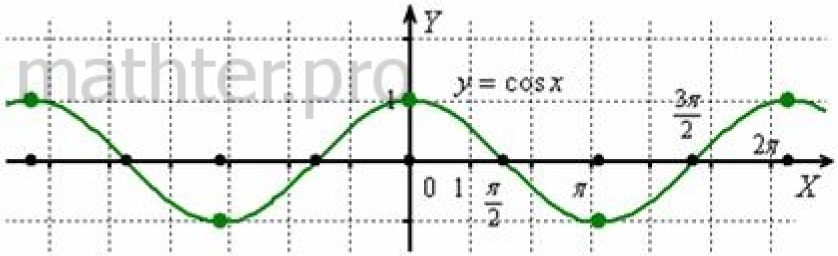
По указанной выше причине тригонометрические функции **периодичны**. Геометрически это выражается тем, что у графика бесконечно повторяется один и тот же кусок. Рассмотрим наших пациентов по порядку:

График функции $y = \sin x$ называется **синусоидой**:



Данная функция является **периодической** с **периодом** 2π. Выберем **любой промежуток длиной «два пи»**, проще всего посмотреть на отрезок $[0; 2\pi]$. … Взглянули? Легко понять, что этот кусок графика бесконечно «тиражируется» влево и вправо. Кроме того, синус нечётен: $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$ и синусоида симметрична относительно начала координат.

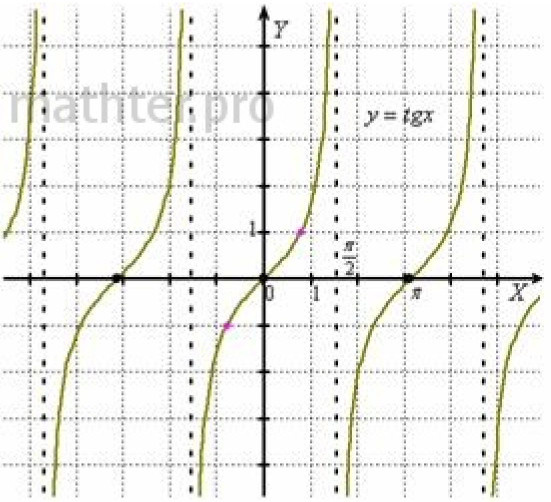
График $y = \cos x$ представляет собой *синусоиду*, сдвинутую на $\frac{\pi}{2}$ влево:

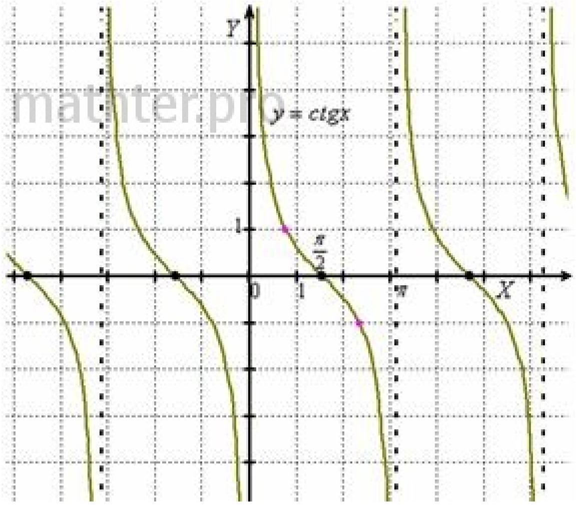


Данная функция тоже *периодическая* (с тем же периодом), однако является чётной:
$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$, и её график симметричен относительно оси OY .

Синус и косинус **ограничены** и могут принимать значения лишь из отрезка $[-1; 1]$:
$-1 \le \sin x \le 1, \quad -1 \le \cos x \le 1$

ангенс $y=\operatorname{tg}x$ *(слева)* и котангенс $y=\operatorname{ctg}x$ тоже как братья:





И если синус с косинусом непрерывны на всей числовой прямой, то здесь графики терпят разрывы. А именно, тангенс **не определён** в точках $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, где k принимает все целые значения, а котангенса не существует в точках $x=\pi k$. Через эти точки проходят *вертикальные асимптоты* графиков *(пунктирные линии)*.

Легко видеть, что обе функции *периодичны*, но *период* у них меньше, чем у синуса с косинусом, и составляет π радиан (т.е. через каждые π график повторяется). При этом тангенс *нечётный*: $f(-x)=\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg}x=-f(x)$ и его график симметричен относительно начала координат. С котангенсом та же история.

5.4. Периодичность и взаимосвязь функций. Формулы приведения

На это уже все обратили внимание. Если к ЛЮБОМУ углу α прибавить или вычесть 2π, то получится **то же самое** значение синуса и косинуса: $\sin(\alpha+2\pi)=\sin\alpha,\quad \cos(\alpha+2\pi)=\cos\alpha$ – по причине периодичности этих функций. И, кроме того, синус и косинус можно взаимно превращать друг в друга, «сдвигая» аргумент на $\frac{\pi}{2}$, например: $\cos\alpha=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$. Желающие могут построить график функции $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ и убедиться в том, что это не что иное, как график $y=\cos x$.

Кстати, почему для общих объяснений я использую букву «альфа»? А дело в том, что **«альфа» может быть не только переменной «икс»**, но и сложной функцией, например: $\alpha=2x,\ \alpha=1-3x,\ \alpha=x^2$ или ещё более сложной.

Аналогично, в силу периодичности тангенса и котангенса:
$\operatorname{tg}(\alpha+\pi)=\operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{ctg}(\alpha+\pi)=\operatorname{ctg}\alpha$ и, кроме того, эти функции тоже могут превращаться друг в друга, в частности: $\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{ctg}\alpha$.

Таким образом, если к углу прибавлены *(или вычтены)* значения $\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$, то мы можем избавиться от этих «добавок». Для этого используют так называемые формулы приведения:

Формулы приведения

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=\cos a$	$\sin(\pi+a)=-\sin a$	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+a\right)=-\cos a$	$\sin(2\pi+a)=\sin a$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=-\sin a$	$\cos(\pi+a)=-\cos a$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+a\right)=\sin a$	$\cos(2\pi+a)=\cos a$
$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=-\operatorname{ctg} a$	$\operatorname{tg}(\pi+a)=\operatorname{tg} a$	$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+a\right)=-\operatorname{ctg} a$	$\operatorname{tg}(2\pi+a)=\operatorname{tg} a$
$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=-\operatorname{tg} a$	$\operatorname{ctg}(\pi+a)=\operatorname{ctg} a$	$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+a\right)=-\operatorname{tg} a$	$\operatorname{ctg}(2\pi+a)=\operatorname{ctg} a$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\cos a$	$\sin(\pi-a)=\sin a$	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-a\right)=-\cos a$	$\sin(2\pi-a)=-\sin a$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\sin a$	$\cos(\pi-a)=-\cos a$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-a\right)=-\sin a$	$\cos(2\pi-a)=\cos a$
$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\operatorname{ctg} a$	$\operatorname{tg}(\pi-a)=-\operatorname{tg} a$	$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-a\right)=\operatorname{ctg} a$	$\operatorname{tg}(2\pi-a)=-\operatorname{tg} a$
$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\operatorname{tg} a$	$\operatorname{ctg}(\pi-a)=-\operatorname{ctg} a$	$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-a\right)=\operatorname{tg} a$	$\operatorname{ctg}(2\pi-a)=-\operatorname{ctg} a$

Иногда формулы приведения используют не для упрощения, а для того, чтобы наоборот – усложнить запись, например, записать $y=\operatorname{ctg}x$ в виде $y=\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$ с целью дальнейших преобразований или анализа этой функции.

Разумеется, эти принципы справедливы и для бОльшего количества *периодов*, например: $\sin(\alpha-4\pi)=\sin\alpha, \quad \operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+2\pi\right)=\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{ctg}\alpha$ и т.д.

5.5. Распространённые тригонометрические формулы

$ледующие несколько фактов и формул нужно просто запомнить наизусть!

Без них ваша учёба может закончиться самым скверным образом.

Во-первых, на практике очень часто используют нечётность синуса и чётность косинуса, а именно, выносят «минус» из-под синуса: $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$, например,

$\sin(-2x) = -\sin 2x$, и **уничтожают** минус под косинусом: $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, например, $\cos(-2x) = \cos 2x$. Минус, кстати, выносится и у тангенса с котангенсом.

Осуществимы и обратные действия – «минус» можно «затолкать» под синус: $-\sin(1-3x) = \sin(-(1-3x)) = \sin(3x-1)$ или поставить его под косинусом: $\cos x = \cos(-x)$.

Особо подчёркиваю, что здесь мы не получаем каких-то новых функций! Эти преобразования *равносильны* или, как говорят математики, *тождественны*. В частности, $y = -\sin(1-3x)$ и $y = \sin(3x-1)$ – это две совершенно одинаковые функции, просто запись разная. Одна запись удобна в одних задачах, другая – в других.

Ещё одна ходовая вещь, которую нужно запомнить «намертво» – это **основное тригонометрическое тождество**:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Аргумент α может быть любым: $\sin^2 5x + \cos^2 5x = 1, \quad \sin^2(1-x^2) + \cos^2(1-x^2) = 1$ и т.д. И обратно, единицу можно превратить в нужную сумму, например: $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$

Чуть позже мы выведем из этого тождества ещё несколько полезных формул.

Внимательные читатели ещё в прошлой главе подметили, что тангенс и котангенс – это два взаимно обратных отношения: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$ *(для допустимых углов)* и, наоборот: $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$. По правилу пропорции обе функции можно расположить на одном этаже, и тогда мы получаем формулу $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$.

Тангенс можно выразить через синус и косинус: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, и, соответственно, котангенс равен обратному отношению: $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Прежде всего, здесь напрашивается выразить синус через косинус и наоборот:

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\cos^2\alpha} \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$
$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\sin^2\alpha} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

Думал не говорить, но всё-таки скажу: не путайте записи $\sin^2\alpha$ и $\sin\alpha^2$. В первом случае в квадрате находится синус: $\sin^2\alpha = (\sin\alpha)^2 = \sin\alpha \cdot \sin\alpha$, а во втором – его аргумент: $\sin\alpha^2 = \sin(\alpha\cdot\alpha)$ и, конечно, это не одно и то же: $\sin(\alpha\cdot\alpha) \neq \sin\alpha \cdot \sin\alpha$
.

И ещё раз заостряю внимание, **что параметр «альфа» может быть не только буковкой «икс», но и сложной функцией!** Все формулы работают:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}},\quad \sin(2x+1)=\pm\sqrt{1-\cos^2(2x+1)},\quad \operatorname{tg}^2(\ln x)+1=\frac{1}{\cos^2(\ln x)}$$

и так далее.

Следующая группа – это **формулы двойного угла**:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

и более редкий тангенс: $tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$.

Примеры использования:

$$\sin x=\sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2},\quad \cos 6x=\cos(2\cdot 3x)=\cos^2 3x-\sin^2 3x$$

Мегапопулярные **формулы понижения степени**:

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2},\quad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

Разумеется, все рассматриваемые формулы работают и в обратном направлении, так, степень иногда требуется и повысить:

$$1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha,\quad 1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$$

Ну и еще куча похожих друг на друга формул. Сразу скажу, что них есть одно замечательное свойство – упорно не запоминаться. Я сотни раз искал их в справочнике, так и не запомнилась ни одна. Итак, для произвольных углов «альфа» и «бета» справедливо следующее.

Раз:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

Два:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

Три:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Есть еще аналогичные формулы для тангенсов и котангенсов, но о них не будем, в 99,9% случаях – не встретите. Да и перечисленные формулы встречаются довольно редко. Но встречаются. Поэтому примеры употребления *(1-я формула из каждой группы)*:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sin x\cdot\cos\frac{\pi}{4} + \cos x\cdot\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x$$

$$\sin x\cos 2x = \frac{\sin(x+2x)+\sin(x-2x)}{2} = \frac{\sin 3x + \sin(-x)}{2} = \frac{1}{2}\sin 3x - \frac{1}{2}\sin x$$

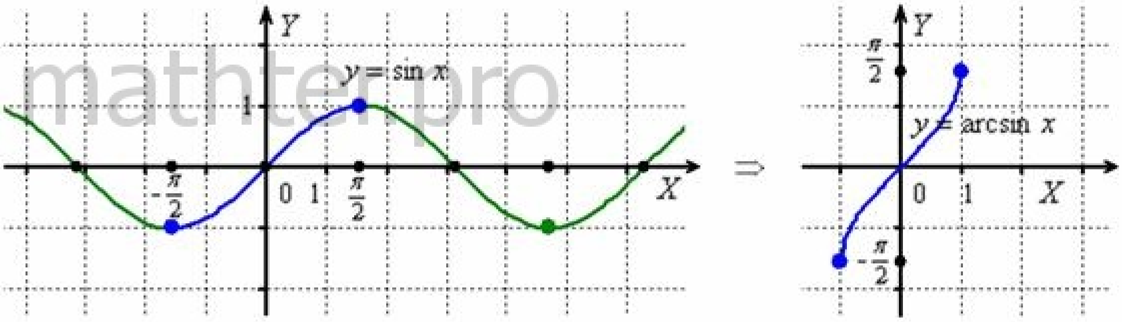
$$\sin x + \sin 2x = 2\sin\left(\frac{x+2x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-2x}{2}\right) = 2\sin\frac{3x}{2}\cdot\cos\left(\frac{-x}{2}\right) = 2\sin\frac{3x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$$

5.6. Обратные тригонометрические функции

Оглашаю весь список: **арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс**. Они предназначены для того, чтобы **по известному синусу, косинусу, тангенсу или арктангенсу угла, определить сам угол**. Например, если $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, то $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Если $\cos\pi = -1$, то $\arccos(-1) = \pi$. Если $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, то $\operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$ и $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}$.

Но здесь есть одна проблемка: дело в том, что значению $\sin x = \frac{1}{2}$ *(например)* соответствует бесконечно много углов, а обратная функция (как и любая функция) должна быть определена **однозначно**. И эта проблемка решена так,… объясню на конкретном примере, а то у меня тут правило кошмарное получилось, которое я сразу удалил :).

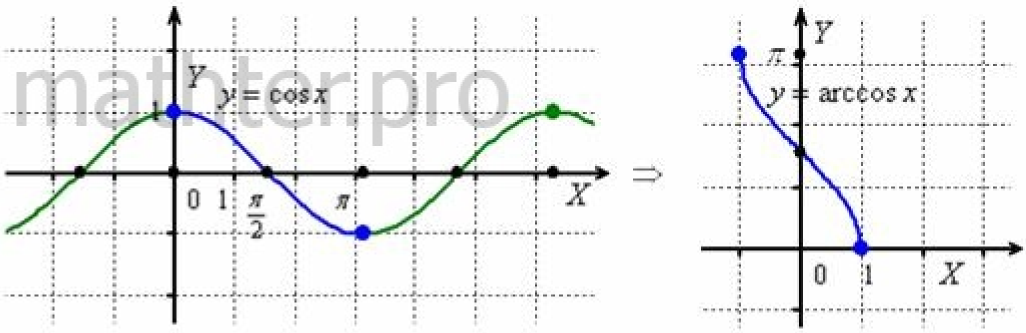
Синус принимает **все свои возможные значения** *(от –1 до 1)* на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, и во избежание разночтений арксинус возвращает углы **только из этого отрезка**:



Так, если $\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$, то обратная функция все равно вернёт угол $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$ и уже к этому результату нужно «прикрутить» нужное количество радиан $\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, чтобы получить $\frac{5\pi}{6}$. Таким образом, функция $y=\arcsin x$ определена на отрезке $D(y)=[-1;1]$

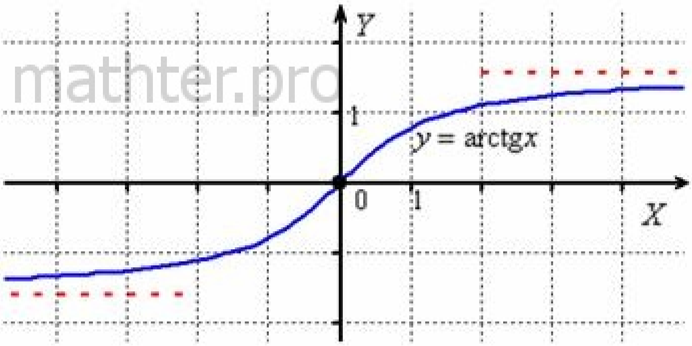
и, очевидно, *нечётна*, то есть, из-под *арксинуса* тоже можно вынести минус: $\arcsin(-x)=-\arcsin x$

Аналогично, косинус принимает **все свои возможные значения** *(от 1 до –1)* на отрезке $[0;\pi]$, и поэтому *арккосинус* возвращает углы только из этого промежутка:



Функция $y=\arccos x$ определена на том же промежутке $D(y)=[-1;1]$, однако не является чётной или нечётной.

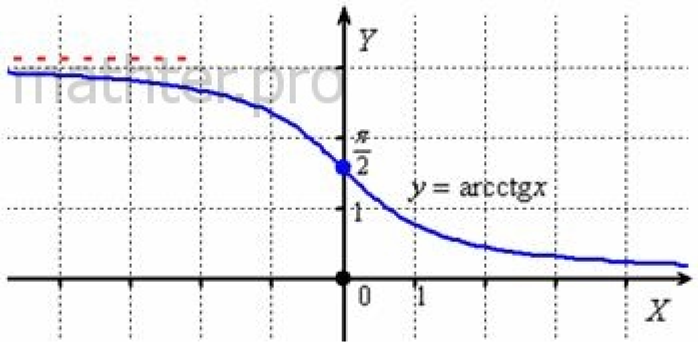
С *арктангенсом* и *арккотангенсом* всё проще. График $y=\mathrm{arctg}x$ представляет собой ветку тангенса, которая «лежит на боку»:



Данная функция определена на всей числовой прямой $D(y)=\mathbf{R}$ и возвращает углы из интервала $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Арктангенс *нечётен*: $f(-x)=\mathrm{arctg}(-x)=-\mathrm{arctg}x=-f(x)$.

График функции ограничен *горизонтальными асимптотами* $y = -\frac{\pi}{2}$ и $y = \frac{\pi}{2}$ *(красный пунктир)*.

График *арккотангенса* $y = \text{arcctg}x$ ограничен асимптотами $y = \pi$ и $y = 0$:



Арккотангенс тоже определён на всей числовой прямой $D(y) = \mathbf{R}$, но возвращает углы из интервала $(0; \pi)$. Данная функция не является чётной или нечётной.

Внимание! Функцию $y = \text{arcctg}x$ часто машинально «принимают» за арктангенс, и **чтобы не «обознаться», внимательно всматривайтесь, какая функция вам дана!**

Следует отметить, что две взаимно обратные функции *взаимоуничтожают* друг друга. Вспомним экспоненту и натуральный логарифм: $\ln e^x = x$ и наоборот, $e^{\ln x} = x$ *(основное логарифмическое тождество)*.

С тригонометрическими функциями и «арками» то же самое, в частности: $\sin(\arcsin x) = x$ и $\arcsin(\sin x) = x$ *(для допустимых значений «икс»)* и аналогично для трёх других пар.

Кроме того, у «арков» существуют свои формулы и взаимосвязи, но они не столь актуальны в массовой практике. Кстати, здесь к месту такой совет:

5.7. Простейшие тригонометрические уравнения

Нам будет достаточно повторить уравнения $\sin x = a,\ \cos x = a,\ \text{tg}x = a,\ \text{ctg}x = a$, где a – константа. Ну и чуть более сложные, когда аргумент равен $2x, 3x$ и т.п. В силу *периодичности* тригонометрических функций **эти уравнения имеют бесконечно много решений**, а синус с косинусом могут не иметь их вовсе. И в самом деле, уравнению $\sin x = \frac{1}{2}$ или $\text{tg}x = 1$ соответствует бесконечно много углов, а вот с $\sin x = 2$ – печаль.

С синуса и начнём: $\sin x = a$. Поскольку синус *ограничен*, то это уравнение имеет корни только в том случае, если $-1 \le a \le 1$.

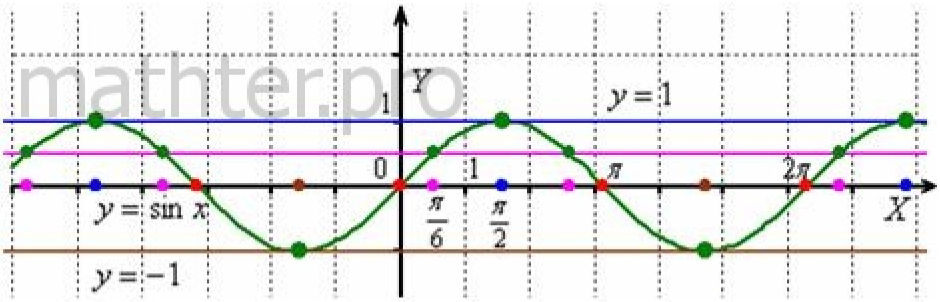
И эти корни таковы, **общая формула**: $x=(-1)^k \arcsin a+\pi k$, где k принимает все целые значения, сокращённо будем писать: $k \in \mathbf{Z}$.

Так решением уравнения $\sin x=\frac{1}{2}$ являются углы:

$$x=(-1)^k \arcsin \frac{1}{2}+\pi k=(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6}+\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$$

Распишем несколько штук для $k=\{-2,-1,0,1,2\}$: $-\frac{11\pi}{6},\ -\frac{7\pi}{6},\ \frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6},\ \frac{13\pi}{6}$

Довольно часто в задачах требуется найти какой-то конкретный угол (или углы), так, если по условию угол должен быть тупым, то следует выбрать корень $\frac{5\pi}{6}$.
А теперь важный вопрос: **откуда взялась общая формула?** В школьном курсе формулы выводятся с помощью единичной окружности, но сейчас нам гораздо полезнее вспомнить графический метод решения уравнений. Строим синусоиду $y=\sin x$ и прямую $y=a$, например, $y=\frac{1}{2}$ *(малиновый цвет)*. После чего определяем «иксовые» координаты их точек пересечения *(малиновые отметки на оси OX)*:



Это и есть корни. Осталось уловить периодичность расположения корней и сконструировать формулу. Отработаем этот принцип на **важных частных случаях**:

Решим графически уравнение $\sin x=1$. Из чертежа следует, что прямая $y=1$ пересекает синусоиду $y=\sin x$ через каждые 2π радиан, начиная от значения $x=\frac{\pi}{2}$ *(выбираем самое маленькое)*. Таким образом, уравнение имеет корни *(синие точки)*:

$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$. Легко видеть, что решением уравнения $\sin x=0$ является множество углов $x=\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$ *(красные точки)*, а решением $\sin x=-1$ – углы $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$.

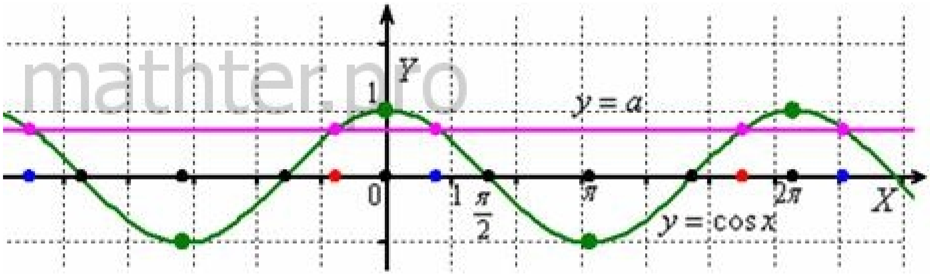
Все формулы справедливы не только для переменной x, но и для сложного аргумента, например, $2x, 3x, 4x$ (самые популярные) и других. Решим, например, уравнение $\sin 2x = -1$. Используем только что выведенную частную формулу, только ВМЕСТО «икс» у нас «два икс»: $2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$. **Но это ещё не всё**, ведь нам нужно выразить «икс»: $x = \frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2} = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$.

Готово.

Разумеется, встречаются и «плохие» решения, рассмотрим уравнение $4\sin x - 3 = 0$. Приведём его к виду $\sin x = \frac{3}{4}$, и по общей формуле: $x = (-1)^k \arcsin\frac{3}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$.

Этот арксинус можно вычислить лишь приближенно: $\arcsin\frac{3}{4} \approx 0{,}85\ рад. \approx 48{,}5^\circ$ и поэтому ответ лучше оставить с арксинусом.

Решим уравнение $\cos x = a$. Как и в случае с синусом, оно имеет корни, только если $-1 \le a \le 1$. Изобразим на чертеже графики функций $y = \cos x, y = a$ и определим «иксовые» координаты их точек пересечения. Во-первых, обращаем внимание на самые близкие к нулю значения: $x = -\arccos a, \ x = \arccos a$ *(красная и синяя точки вблизи нуля)*:



И анализируя точки пересечения графиков, легко понять, что «красные» корни повторяются через каждые 2π радиан: $x = -\arccos a + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$ и «синие» корни тоже повторяются через этот же период: $x = \arccos a + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$. Обе ветки решения можно объединить в **общую формулу**: $x = \pm\arccos a + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$

Решим, например, уравнение $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Уловка здесь детская: избавляемся от иррациональности в знаменателе: $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, после чего записываем «хороший» ответ:

$x = \pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$. Именно это случай я изобразил на схематическом чертеже выше и желающие могут ещё раз осмыслить общую формулу, используя конкретные значения углов.

И в качестве задания я предложу вам вывести **три частные формулы** для уравнений $\cos x = -1, \ \cos x = 0, \ \cos x = 1$. Уже скоро на экранах ваших мониторов! :)

Разумеется, аргумент может быть сложным: $\cos 3x = -\frac{1}{2}$. **Формула та же самая**:

$3x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$. Единственное, не забываем выразить «икс», разделив всё семейство углов на три: $x = \frac{\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{3} = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}, \quad k \in \mathbf{Z}$.

Осталось два более простых уравнения.

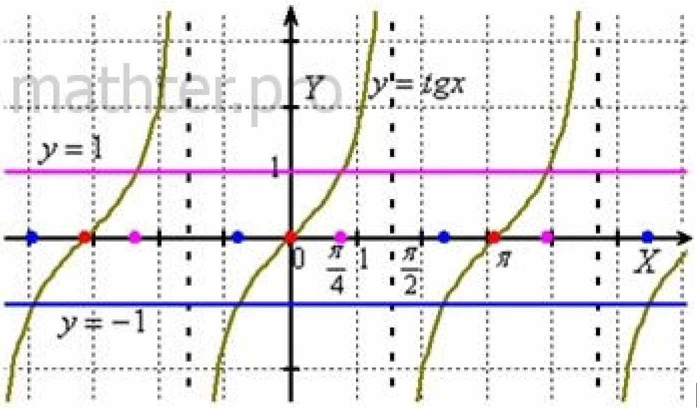
Уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет решения при любом значении a, и ситуация здесь прозрачна, даже чертежа особо не нужно: «главная» ветка тангенса расположена на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, берём отсюда угол: $x = \operatorname{arctg} a$ и добавляем *периоды* тангенса:

$x = \operatorname{arctg} a + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$ – **общая формула**.

В качестве примера решим приятное уравнение $\operatorname{tg} x = 1$:

$x = \operatorname{arctg} 1 + \pi k = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$ Готово!

И всё же приведу чертёж для этого и двух других частных случаев:



Решением уравнения $\operatorname{tg} x = 0$ является множество углов $x = \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$.

Решением уравнения $\operatorname{tg} x = -1$ – множество:

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$

Эти формулы легко получить как аналитически (по общей формуле), так и графически.

5.8. Тригонометрические неравенства