Модуль I. Дифференциальное исчисление функции одной переменной
ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ
1.1. Основные понятия

Сокращенно последовательность будем обозначать символом $\{x_n\}$.

Последовательность может быть задана формулой ее общего члена, эта формула позволяет вычислить любой член последовательности по номеру n.

Например, равенство $x_n = \frac{1}{n}$ задает последовательность:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

Для задания последовательностей также используется рекуррентный способ, когда задается первый член последовательности x1 и правило определения n-го члена по (n − 1)

Например, соотношения $x_1 = 1, x_n = nx_{n-1}$ определяют последовательность

$$x_1 = 1, \; x_2 = 2x_1 = 2, \; x_3 = 3x_2 = 6, \; x_4 = 4x_3 = 24,$$

Если все элементы последовательности {xn} равны одному и тому же числу C , то ее называют постоянной.

Последовательность {xn} называется ограниченной, если существует число M > 0 такое, что для любого n ∈ N выполняется неравенство |xn| ≤ M .

Последовательность {xn} называется неограниченной, если для любого положительного числа M существует элемент xn этой последовательности, удовлетворяющий неравенству |xn| > M .

Например, последовательности $\{\frac{1}{n}\}$ и {4} – ограниченные, а последовательность $\{2^n\}$ – неограниченная.

1.2. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Последовательность {αn} называется бесконечно малой, если для любого положительного числа ε существует номер N такой, что при n > N выполняется неравенство |αn| < ε .

Последовательность {xn} называется бесконечно большой, если для любого положительного числа A существует номер N такой, что при n > N выполняется неравенство |xn| > A.

Свойства бесконечно малых последовательностей :

1. Сумма и разность двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность. Следствие. Алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.
2. Произведение двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность. Следствие. Произведение любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.
3. Произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую последовательность есть бесконечно малая последовательность. Следствие. Произведение бесконечно малой последовательности на число есть бесконечно малая последовательность.

1.3. Предел числовой последовательности

Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся. Последовательность, не являющаяся сходящейся, называется расходящейся.

Основные свойства сходящихся последовательностей:

1. Сходящаяся последовательность имеет только один предел.
2. Сходящаяся последовательность ограничена.
3. Постоянная последовательность xn = C имеет предел, равный числу C , то есть $lim_{n \to \infty} C = C$.
4. Сумма (разность) двух сходящихся последовательностей {xn} и {yn} есть сходящаяся последовательность, предел которой равен сумме (разности) пределов последовательностей {xn} и {yn} : $lim_{n \to \infty} x_n y_n = lim_{n \to \infty} x_n + lim_{n \to \infty} y_n$
5. Произведение двух сходящихся последовательностей {xn} и {yn} есть сходящаяся последовательность, предел которой равен произведению пределов последовательностей {xn} и {yn} :$lim_{n \to \infty} x_n y_n = lim_{n \to \infty} x_n * lim_{n \to \infty} y_n$
6. Частное двух сходящихся последовательностей {xn} и {yn} при условии, что lim y не равен 0 , есть сходящаяся последовательность, предел которой равен

частному пределов последовательностей {xn} и {yn}: $lim_{n\to\infty} x_n y_n = \frac{lim_{n\to\infty} x_n}{lim_{n\to\infty} y_n}$

Пример 3. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+3n-5}{3n^2-n+6}$.

При n → ∞ числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности, применять свойство о пределе частного нельзя, так как оно предполагает существование конечных пределов последовательностей. Преобразуем данную последовательность, разделив числитель и знаменатель на n^2 . Затем применим свойства о пределе частного, пределе суммы,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n-5}{3n^2-n+6} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}}{3-\frac{1}{n}+\frac{6}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2})}{\lim\limits_{n\to\infty}(3-\frac{1}{n}+\frac{6}{n^2})} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{6}{n^2}} = \frac{1+0-0}{3-0+0} = \frac{1}{3}.$$

Пример 4. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\sin n}{2n+6}$.

Решение. Числитель и знаменатель дроби не имеют конечных пределов, и поэтому сначала нужно выполнить некоторые преобразования. Разделим числитель и знаменатель на n, получим

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\sin n}{2n+6} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\sin n}{2+\frac{6}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \sin n}{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{6}{n}}.$$

В числителе стоит произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность, поэтому получим

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{0}{2+0} = 0.$$

Пример 5.

Пример 5. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

Решение. Сразу применить свойство о пределе разности последовательностей нельзя, так как слагаемые не имеют конечных пределов. Умножим и разделим формулу для x_n на сопряженное выражение $(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = 0.$$

Функции одной переменной. Предел функции

2.4. Предел функции в точке и на бесконечности

https://mooc.lektorium.tv/assets/courseware/v1/a107b5c418d1241d83eaffc2a0ac3530/asset-v1:MKGTU+MA+2020_11+type@asset+block/1_2-4-predel-funkcii-v-tochke-i-na-beskonechnosti.pdf

5. Основные теоремы о пределах :

Теорема 4. Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Следствие. *При $x \to x_0$ функция может иметь только один предел.*

Теорема 5. *Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:*

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Теорема 5. Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Следствие 1. *Постоянный множитель можно выносить за знак предела:* $\lim\limits_{x\to x_0}(Cf(x)) = C\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Следствие 2. *Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела:* $\lim\limits_{x\to x_0} f^n(x) = (\lim\limits_{x\to x_0} f(x))^n$. В частности, $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0^n$, $n\in\mathbb{N}$.

Теорема 6. Предел частного равен частному пределов при условии, что предел делителя не равен нулю:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2-4x+5)$.

Решение. Так как предел суммы функций равен сумме пределов этих функций, постоянный множитель можно выносить за знак предела, предел целой положительной степени равен такой же степени предела, предел постоянной равен самой постоянной, то последовательно получим

$$\lim_{x\to3}(2x^2-4x+5)=\lim_{x\to3}2x^2-\lim_{x\to3}4x+\lim_{x\to3}5=2\lim_{x\to3}x^2-4\lim_{x\to3}x+5=$$

$$=2(\lim_{x\to3}x)^2-4\cdot3+5=2\cdot3^2-12+5=11.$$

Замечание. Вычисление предела многочлена второй степени свелось к вычислению его значения при предельном значении аргумента. Поэтому, чтобы вычислить предел многочлена n-й степени $P_n(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$ при $x\to x_0$, достаточно найти его значение при $x=x_0$.

Например,

$$\lim_{x\to2}(3x^4-3x^3+5x^2-6x+1)=3\cdot2^4-3\cdot2^3+5\cdot2^2-6\cdot2+1=33.$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-2x}{x-3}$.

Решение. Чтобы применить теорему о пределе частного, сначала проверим, не равен ли нулю предел делителя при $x=4$. Так как $\lim\limits_{x\to4}(x-3)=4-3=1\neq0$, то воспользуемся указанной теоремой:

$$\lim_{x\to4}\frac{x^2-2x}{x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to4}(x^2-2x)}{\lim\limits_{x\to4}(x-3)}=\frac{4^2-2\cdot4}{4-3}=\frac{8}{1}=8.$$

Замечание. Вычисление предела рациональной функции свелось к нахождению значения этой функции при предельном значении аргумента. Однако это правило нельзя применять в следующих случаях:

а) если функция не определена при x → x0 ;

б) если знаменатель дроби при подстановке x = x0 оказывается равным нулю;

в) если числитель и знаменатель дроби при подстановке x = x0 одновременно оказываются равными нулю или бесконечности. В таких случаях пределы функций находят с помощью различных искусственных приемов.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-2x}{x-3}$.

Решение. При $x\to3$ числитель x^2-2x стремится к $3^2-2\cdot3=3$, то есть является ограниченной функцией, а знаменатель $(x-3)$ является бесконечно малой величиной, тогда по теореме о связи между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями: $\dfrac{1}{x-3}$ – бесконечно большая функция. Значит, при $x\to3$ функция $\dfrac{x^2-2x}{x-3}$ является бесконечно большой, то есть $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-2x}{x-3}=\infty$.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos2x}{x^3}$.

Решение. Знаменатель дроби x^3 при $x\to\infty$ является бесконечно большой величиной, $\dfrac{1}{x^3}$ при $x\to\infty$ является бесконечно малой величиной. Значит, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos2x}{x^3}=0$, как произведение ограниченной функции $\cos2x$ и бесконечно малой функции.

Замечание. Укажем часто встречающиеся пределы

1) $\lim\limits_{x\to\infty} cx = \infty$, $\quad \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{c} = \infty$, $\quad \lim\limits_{x\to\infty} \frac{c}{x} = 0$;

2) $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{c}{x} = -\infty$, $\quad \lim\limits_{x\to 0+} \frac{c}{x} = +\infty$, $\quad \lim\limits_{x\to 0} \frac{c}{x} = \infty$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} c^x = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < c < 1, \\ +\infty, & \text{если } c > 1; \end{cases}$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} c^x = \begin{cases} +\infty, & \text{если } 0 < c < 1, \\ 0, & \text{если } c > 1. \end{cases}$

2.5. Замечательные пределы

Термин "замечательный предел "используется для обозначения важных тожеств, которые упрощают вычисления пределов.

Теорема 1. Предел отношения синуса к его аргументу равен единице, когда аргумент стремится к нулю для неопределённостей $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Следствия.

1. $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1.$ **2.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1.$ **3.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg} x}{x} = 1.$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1.$ **5.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg} x}{x} = 1.$

–

Примеры:

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}2x}{\sin 3x}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}2x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\mathrm{tg}2x}{2x}\cdot 2x}{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x} = \frac{2}{3}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}2x}{2x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{2}{3}\frac{\lim\limits_{2x\to 0}\frac{\mathrm{tg}2x}{2x}}{\lim\limits_{3x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1} = \frac{2}{3}.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0} x\mathrm{ctg}3x$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 0} x\mathrm{ctg}3x = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\mathrm{tg}3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\mathrm{tg}3x} = \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x - \sin 2x}{\arcsin 3x}$.

Решение. Используя формулу разности синусов

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x - \sin 2x}{\arcsin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x\cos 4x}{\frac{\arcsin 3x}{3x}3x} =$$

$$= \frac{2\cdot 2}{3}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\cos 4x}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{3x}}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{1}\cdot 1 = \frac{4}{3}.$$

Теорема 2. Для раскрытия неопр 1^{inf}

Теорема 2. *Предел функции* $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ *при* $x \to \infty$ *равен числу* e*:*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \qquad (2)$$

Предел (2) называют **вторым замечательным пределом**.

Следствия.

1. $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e.$ **2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{x} = 1.$ **4.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \dfrac{1}{\ln a}.$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

Примеры:

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^x$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2=\left[\lim_{\frac{x}{2}\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2=e^2.$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-1}{2x-1}\right)^{3/x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида 1^∞, выделим целую часть дроби, находящейся в основании степени:

$$\frac{x-1}{2x-1}=\frac{(2x-1)-x}{2x-1}=\frac{2x-1}{2x-1}-\frac{x}{2x-1}=1+\frac{-x}{2x-1}.$$

Показатель степени представим в следующем виде:

$$\frac{3}{x}=\frac{2x-1}{-x}\cdot\frac{-x}{2x-1}\cdot\frac{3}{x}=\frac{2x-1}{-x}\cdot\frac{-3x}{x(2x-1)}.$$

Найдем

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-1}{2x-1}\right)^{3/x}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{-x}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{-x}\cdot\frac{-3x}{x(2x-1)}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{-x}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{-x}}\right]^{\frac{-3x}{x(2x-1)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-3x}{x(2x-1)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-3}{(2x-1)}}=e^{\frac{-3}{0-1}}=e^3.$$

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+4)-\ln 4}{6x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, преобразуем ее в неоп-еделенность вида 1^∞. Используя свойства логарифмов

$$\log_a x-\log_a y=\log_a\frac{x}{y},\quad x>0,\ y>0,\ a>0,\ a\neq 1;$$

$$n\log_a x=\log_a x^n,\quad n\in\mathbb{R},$$

апишем функцию в виде

$$\frac{\ln(x+4)-\ln 4}{6x}=\frac{1}{6x}\ln\frac{x+4}{4}=\ln\left(\frac{x+4}{4}\right)^{1/6x}=\ln\left(1+\frac{x}{4}\right)^{1/6x}.$$

Учитывая непрерывность логарифмической функции, можно перес-авить знак логарифма и знак предела, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+4)-\ln 4}{6x}=\lim_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{x}{4}\right)^{1/6x}=\ln\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{4}\right)^{1/6x}=$$

$$=\ln\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{4}\right)^{\frac{4}{x}\cdot\frac{x}{4}\cdot\frac{1}{6x}}=\ln e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{4}\cdot\frac{1}{6x}\right)}=\ln e^{1/24}=\frac{1}{24}.$$

2.6. Раскрытие неопределенностей различных

типов

Далеко не всякая подстановка предельного значения в функцию вместо независимой переменной может сразу привести к нахождению предела. Случаи, в которых подстановка предельного значения в функцию не дает значения предела, называют неопределенностями. К ним относятся неопределенности видов

$\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^{∞}, ∞^{0}, 0^{0}.

Неопределенность вида [inf/inf]

Чтобы раскрыть неопределенность вида ∞ /∞ , заданную отношением двух многочленов, надо числитель и знаменатель дроби разделить на самую высокую входящую в них степень x , а затем перейти к пределу.

Чтобы раскрыть неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, заданную отношением двух многочленов, надо числитель и знаменатель дроби разделить на самую высокую входящую в них степень x, а затем перейти к пределу.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{7x-2x^4}{4x^4+3x^2+1}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, так как поведение числител и знаменателя при $x \to \infty$ определяется членами с наибольшими показателям степеней. Разделим числитель и знаменатель на x^4, то есть на x с наибольшим показателем степени. Используя теоремы о пределах, получим

$$\lim_{x\to\infty} \frac{7x-2x^4}{4x^4+3x^2+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{7}{x^3}-2}{4+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}} = \frac{0-2}{4+0+0} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2},$$

так как $\frac{7}{x^3}, \frac{3}{x^2}, \frac{1}{x^4}$ – бесконечно малые при $x \to \infty$.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x-3x^2}{5x^3+9}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Наибольшая степень среди всех слагаемых – третья. Разделим числитель и знаменатель на x^3, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3x^2}{5x^3+9}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{3}{x}}{5+\dfrac{9}{x^3}}=\frac{0-0}{5+0}=\frac{0}{5}=0,$$

так как $\dfrac{2}{x^2}, \dfrac{3}{x}, \dfrac{9}{x^3}$ – бесконечно малые при $x\to\infty$.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+x^2-2}{3x^2+5x+1}$.

Решение. Разделив числитель и знаменатель на x^3 и перейдя к пределу, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+x^2-2}{3x^2+5x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^3}}{\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}=\infty,$$

так как числитель последней дроби стремится к пределу, отличному от нуля, а знаменатель – к нулю.

Замечание. Полученные результаты можно обобщить следующим образом. Предел частного двух многочленов при $x\to\infty$ равен отношению коэффициентов при старших членах, если степени числителя и знаменателя равны; предел этот равен 0 или ∞, если степень числителя соответственно меньше или больше степени знаменателя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_kx^k}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m}=\begin{cases}\dfrac{a_k}{b_m} & \text{при} \quad m=k,\\ 0 & \text{при} \quad m>k,\\ \infty & \text{при} \quad m<k.\end{cases}$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x-2}{\sqrt[3]{27x^3+6x+1}}$.

Решение. При $x\to\infty$ числитель и знаменатель стремятся к бесконечности, получаем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Чтобы найти предел, разделим числитель и знаменатель на x и подведем x под знак корня:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{12x-2}{\sqrt[3]{27x^3+6x+1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{12-\dfrac{2}{x}}{\sqrt[3]{27+\dfrac{6}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}}=\frac{12}{\sqrt[3]{27}}=\frac{12}{3}=4,$$

так как $\frac{2}{x}, \frac{6}{x^2}, \frac{1}{x^3}$ – бесконечно малые при $x \to \infty$.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^8+1}}{x^2+\sqrt[3]{x}}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Выражению, стоящему в числителе, условно можно приписать степень $k = 8/3$, а в знаменателе $m = 2$; так как $k > m$, то на основании приведенного правила искомый предел равен ∞. Чтобы это показать, достаточно числитель и знаменатель разделить на $\sqrt[3]{x^8}$ и перейти к пределу.

Если имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ в случае показательных функций, то нужно числитель и знаменатель разделить на наиболее быстро возрастающее слагаемое среди всех слагаемых дроби.

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3^x+2^x}{1+3^x}$.

Решение. При $x \to +\infty$ показательная функция $y = a^x$ при $a > 1$ стремится к $+\infty$. Быстрее будет возрастать та функция, у которой основание больше, поэтому разделим числитель и знаменатель на 3^x:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3^x+2^x}{1+3^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{2^x}{3^x}}{\frac{1}{3^x}+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\left(\frac{1}{3}\right)^x+1} = \frac{1+0}{0+1} = 1,$$

так как $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$ при $a = \frac{2}{3} < 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$ при $a = \frac{1}{3} < 1$.

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x+8\cos x}{3x+2}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ разделим числитель и знаменатель на x, получим

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x+8\cos x}{3x+2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{5+8\frac{\cos x}{x}}{3+\frac{2}{x}} = \frac{5+8\cdot 0}{3+0} = \frac{5}{3},$$

так как $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ и $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 0$.

Неопределённость вида [0/0]

Чтобы раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$, заданную отношением двух многочленов, надо в числителе и в знаменателе дроби выделить критический множитель (то есть множитель, равный нулю при предельном значении x) и сократить на него.

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-4x}$.

Решение. При $x = 4$ числитель и знаменатель данной функции обращаются в нуль. Получена неопределенность $\frac{0}{0}$, которую нужно раскрыть. Преобразуем данную функцию, разлагая числитель с помощью формулы

$$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2+px+q=0$; в знаменателе вынесем общий множитель x за скобку.

Так как уравнение $x^2-6x+8=0$ имеет корни $x_1 = 2$ и $x_2 = 4$, то $x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$. Подставляя это выражение в заданную функцию и сокращая на общий множитель $x-4\neq 0$, получим

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-4x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{(x-2)(x-4)}{x(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-2}{x}=\frac{4-2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{4x^2-5x+1}$.

Решение. При $x = 1$ числитель и знаменатель функции обращаются в нуль, имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Преобразуем данную функцию, разлагая на множители числитель и знаменатель по формуле

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Подставляя соответствующие выражения и сокращая на общий множитель $x-1\neq 0$, получим

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{4x^2-5x+1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)\left(x+\dfrac{2}{3}\right)}{4(x-1)\left(x-\dfrac{1}{4}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3\left(x+\dfrac{2}{3}\right)}{4\left(x-\dfrac{1}{4}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{3x+2}{4x-1}=\frac{3\cdot 1+2}{4\cdot 1-1}=\frac{5}{3}.$$

Пример 10. Найти $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+7x+6}{x^2+4x+4}$.

Решение. Непосредственная подстановка $x=-2$ показывает, что имеет место неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Разложив числитель на множители, в знаменателе применив формулу квадрата суммы, сократив дробь, находим

$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^2+7x+6}{x^2+4x+4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -2}\frac{2(x+2)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)}{(x+2)^2}=\lim_{x\to -2}\frac{2x+3}{x+2}.$$

Здесь знаменатель дроби стремится к нулю, а числитель приближается к -1. Значит, вся дробь неограниченно растет, что условно записывают так: $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+7x+6}{x^2+4x+4}=\infty$.

Пример 11. Найти $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^4-2x^3-5}{x^3+1}$.

Решение. Непосредственная подстановка $x=-1$ показывает, что имеет место неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Разложив числитель и знаменатель на множители, получим

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1),$$

$$3x^4-2x^3-5=(x+1)(3x^3-5x^2+5x-5).$$

Второе равенство получено в результате непосредственного деления

$3x^4-2x^3-5$ на $x+1$. Сокращая числитель и знаменатель на $x+1\neq 0$ и переходя к пределу, получим
$$\lim_{x\to-1}\frac{3x^4-2x^3-5}{x^3+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(3x^3-5x^2+5x-5)}{(x+1)(x^2-x+1)}=$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{3x^3-5x^2+5x-5}{x^2-x+1}=\frac{3(-1)^3-5(-1)^2+5(-1)-5}{(-1)^2-(-1)+1}=\frac{-18}{3}=-6.$$

Чтобы раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$, в которой числитель или знаменатель содержат иррациональность, следует соответствующим образом избавиться от иррациональности.

Пример 12. Найти $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x}$.

Решение. Здесь пределы числителя и знаменателя при $x\to0$ равны нулю. Умножив числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю, получим
$$\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x}=\frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{5x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=$$
$$=\frac{(\sqrt{2+x})^2-(\sqrt{2-x})^2}{5x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=\frac{2+x-(2-x)}{5x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=$$
$$=\frac{2x}{5x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=\frac{2}{5(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}.$$
Следовательно,
$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x}=\lim_{x\to0}\frac{2}{5(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=\frac{2}{10\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

Пример 13. Найти $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$ умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное знаменателю, получим

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}{(\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{6-x})^2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}{x+2-(6-x)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}{2(x-2)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}{2}=\frac{(2+2)(\sqrt{2+2}+\sqrt{6-2})}{2}=8.$$

Пример 14. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Для раскрытия неопределенности умножим числитель и знаменатель дроби на выражения, сопряженные числителю и знаменателю, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x}+1)}{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[(\sqrt{1+x})^2-(\sqrt{1+x^2})^2](\sqrt{1+x}+1)}{[(\sqrt{1+x})^2-1^2](\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[(1+x-(1+x^2)](\sqrt{1+x}+1)}{[1+x-1](\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(1-x)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-x)(\sqrt{1+x}+1)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}=$$

$$= \frac{(1-0)(\sqrt{1+0}+1)}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0^2}} = \frac{2}{2} = 1.$$

Пример 15. Найти $\lim\limits_{x\to 64} \dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$.

Решение. *Первый способ.* Имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Домножим числитель до разности квадратов $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, а знаменатель до разности кубов $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$. Получим

$$\lim_{x\to 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4} = \lim_{x\to 64} \frac{(\sqrt{x}-8)(\sqrt{x}+8)(\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+16)}{(\sqrt[3]{x}-4)(\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+16)(\sqrt{x}+8)} =$$

$$= \lim_{x\to 64} \frac{(x-64)(\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+16)}{(x-64)(\sqrt{x}+8)} = \lim_{x\to 64} \frac{\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+16}{\sqrt{x}+8} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{64^2}+4\sqrt[3]{64}+16}{\sqrt{64}+8} = \frac{16+16+16}{8+8} = 3.$$

Второй способ. Сделаем замену переменной: $\sqrt[6]{x} = t$, тогда $\sqrt[3]{x} = t^2$, а $\sqrt{x} = t^3$, при $x \to 64$ $t \to \sqrt[6]{64}$, то есть $t \to 2$. Теперь

$$\lim_{x\to 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4} = \lim_{t\to 2} \frac{t^3-8}{t^2-4} = \lim_{t\to 2} \frac{(t-2)(t^2+2t+4)}{(t-2)(t+2)} =$$

$$= \lim_{t\to 2} \frac{t^2+2t+4}{t+2} = \frac{2^2+2\cdot 2+4}{2+2} = \frac{12}{4} = 3.$$

Пример 16. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Введем новую переменную t по формуле $1+x = t^6$, показатель степени выбран так, чтобы можно было извлечь корень и второй, и третьей степени. Выполнив замену переменной, получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{t\to 1} \frac{\sqrt[3]{t^6}-1}{\sqrt{t^6}-1} = \lim_{t\to 1} \frac{t^2-1}{t^3-1} =$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{(t-1)(t+1)}{(t-1)(t^2+t+1)} = \lim_{t\to 1} \frac{t+1}{t^2+t+1} = \frac{1+1}{1^2+1+1} = \frac{2}{3}.$$

Чтобы раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$*, в которой числитель или знаменатель содержат тригонометрические функции, следует использовать первый замечательный предел или следствия из него.*

Пример 17. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 4x}{3x^2}$.

Решение. Преобразуем числитель к виду $1-\cos 4x = 2\sin^2 2x$. Далее найдем

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 4x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 2x}{3x^2} = \frac{2\cdot 4}{3} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2 =$$

$$= \frac{8}{3} \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x}\right)^2 = \frac{8}{3} \cdot 1 = \frac{8}{3}.$$

Пример 18. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x+9}-3}$.

Решение. При $x=0$ числитель и знаменатель обращаются в нуль. Знаменатель содержит иррациональность. Освободимся от иррациональности и применим первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x+9}-3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x(\sqrt{x+9}+3)}{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x(\sqrt{x+9}+3)}{(x+9)-9} = 2\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \lim_{x\to 0}(\sqrt{x+9}+3) = 2\cdot 1\cdot 6 = 12.$$

Неопределенность вида [inf - inf]

Если функция, стоящая под знаком предела, представляет собой алгебраическую сумму дробей, то неопределенность устраняется или приводится к виду $\frac{0}{0}$ *в результате приведения дробей к общему знаменателю. Если же неопределенность* $\infty - \infty$ *связана с суммой иррациональных выражений, то неопределенность устраняется или приводится к виду* $\frac{\infty}{\infty}$ *путем домножения и деления на одно и то же сопряженное выражение, приводящее к формулам сокращенного умножения.*

Пример 19. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+6x+5}-x)$.

Решение. При $x \to +\infty$ данная функция представляет собой разность двух бесконечно больших величин, принимающих положительные значения, то есть имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Умножив и разделив данную функцию на $\sqrt{x^2+6x+5}+x$, получим

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+6x+5}-x)=[\infty-\infty]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+6x+5}-x)(\sqrt{x^2+6x+5}+x)}{\sqrt{x^2+6x+5}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+6x+5)-x^2}{\sqrt{x^2+6x+5}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x+5}{\sqrt{x^2+6x+5}+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{6+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}}+1}=\frac{6}{1+1}=3.$$

Пример 20. Найти $\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)$.

Решение. Здесь имеем неопределенность вида $\infty-\infty$ при $x\to3$. Приведем дроби к общему знаменателю и сократим на множитель $x-3\neq0$, получим

$$\lim_{x\to3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to3}\frac{x+3-6}{x^2-9}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{x^2-9}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{6}.$$

Пример 21. Найти $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{4\sin^2x}-\frac{1}{\sin^2 2x}\right)$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\infty-\infty$ при $x\to0$. Применяя формулу синуса двойного угла, производя вычитание дробей и переходя

Пример 21. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{4\sin^2 x}-\dfrac{1}{\sin^2 2x}\right)$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\infty-\infty$ при $x\to 0$. Приме
ормулу синуса двойного угла, производя вычитание дробей и переход

пределу, найдем

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{4\sin^2 x}-\frac{1}{\sin^2 2x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{4\sin^2 x}-\frac{1}{4\sin^2 x\cos^2 x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{4\sin^2 x\cos^2 x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{4\sin^2 x\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{4\cos^2 x}=-\frac{1}{4}.$$

Неопределённость вида [1^(inf)]

Под неопределенностью вида 1^∞ понимается степенно-показательная функция, основание степени которой стремится к 1 (но не равно тождественно 1), а показатель степени стремится к бесконечности. Неопределенность устраняется при помощи второго замечательного предела.

Пример 22. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида 1^∞. Используя второй замечательный предел, найдем

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x/2}\right]^6=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x/2}\right]^6=e^6.$$

Пример 23. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3+x}{3}\right)^{1/x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида 1^∞. Запишем основание степени в виде $\dfrac{3+x}{3}=1+\dfrac{x}{3}$, показатель степени представим так: $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{3}{3}=\dfrac{3}{x}\cdot\dfrac{1}{3}$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3+x}{3}\right)^{1/x}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{3/x\cdot 1/3}=\left[\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{3/x}\right]^{1/3}=e^{1/3}=\sqrt[3]{e}.$$

Пример 24. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2-1}\right)^{3x^2}$.

Решение. Имеем неопределенность вида 1^∞, так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{2x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x^2}}{2-\dfrac{1}{x^2}}=\frac{2+0}{2-0}=1,\quad \lim_{x\to\infty}3x^2=\infty.$$

Выделим целую часть дроби:

$$\frac{2x^2+3}{2x^2-1}=\frac{(2x^2-1)+4}{2x^2-1}=\frac{2x^2-1}{2x^2-1}+\frac{4}{2x^2-1}=1+\frac{4}{2x^2-1}.$$

Функция $\alpha(x)=\dfrac{4}{2x^2-1}$ является бесконечно малой величиной при $x\to\infty$. Домножим показатель степени на $\left(\alpha(x)\cdot\dfrac{1}{\alpha(x)}\right)$, это действие не нарушает знака равенства. Получим

$$P=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3}{2x^2-1}\right)^{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x^2-1}\right)^{\frac{2x^2-1}{4}\cdot\frac{4}{2x^2-1}\cdot 3x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{4}{2x^2-1}\right)^{\frac{2x^2-1}{4}}\right)^{\frac{12x^2}{2x^2-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x^2}{2x^2-1}},$$

так как $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e$. Теперь найдем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2}{2x^2-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{12}{2-\dfrac{1}{x^2}}=\frac{12}{2-0}=6.$$

Значит, $P=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x^2}{2x^2-1}}=e^6$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\infty\cdot 0$. Это видно, если с помощью свойств логарифмов представить предел в виде

$$P=\lim_{x\to\infty}[x(\ln(x+2)-\ln x)]=\lim_{x\to\infty}\left(x\ln\frac{x+2}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^x.$$

Пример 26. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1+4x}$.

Решение. Так как $\sqrt[x]{1+4x} = (1+4x)^{\frac{1}{x}}$, то имеет место неопределенность вида 1^{∞}, для раскрытия которой понадобится одна из форм второго замечательного предела.

Имеем

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{1+4x} = \lim_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{4x}\cdot 4} = \left[\lim_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{4x}}\right]^4 = e^4.$$

Пример 27. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{5x}$.

Решение. Применяя одно из следствий из второго замечательного предела, получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{5x} = \frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x} = \frac{3}{5}\cdot 1 = \frac{3}{5}.$$