Математический анализ
Лекция 7

Никитин А.А.

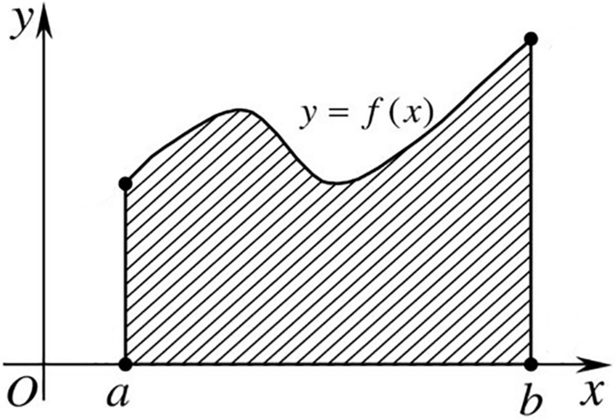
МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК
Кафедра общей математики

Онлайн-курс по математике в Data Science

22 декабря, 2020г.

Задача о вычислении площади криволинейной трапеции

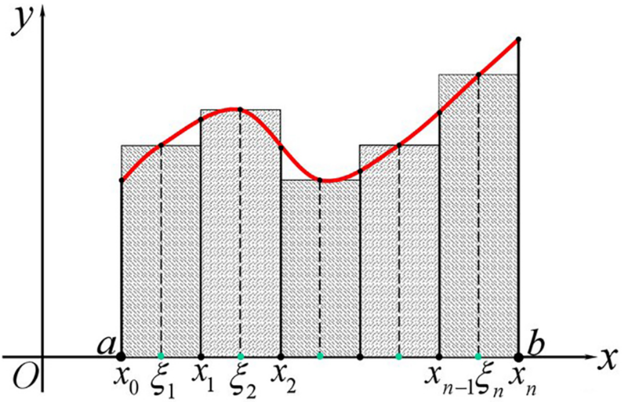
Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $y = f(x) \geqslant 0$. Фигура, ограниченная сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу – осью Ox, сбоку — прямыми $x = a$ и $x = b$, называется **криволинейной трапецией**. Требуется найти её площадь.



Определённый интеграл Римана

Разобьём отрезок $[a, b]$ на n частей, и выберем на каждой из них некоторую точку ξ_k. Тогда площадь криволинейной трапеции, S будет приблизительно равна:

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$



Бернхард Риман (17.09.1826 - 20.07.1866)
Georg Friedrich Bernhard Riemann

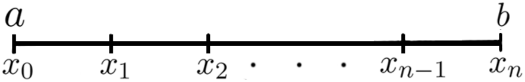
Определённый интеграл Римана

Определение.

Разбиением отрезка $[a, b]$ называется множество точек

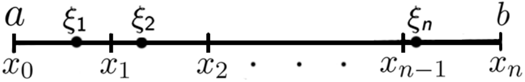
$$\tau = \{x_k\}_{k=0}^{n} : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ – **длина k-го отрезка разбиения**; $d_\tau := \max\limits_k \Delta x_k$ – **диаметр (мелкость) разбиения** τ.



Определение.

Размеченным разбиением отрезка $[a, b]$ называется пара (τ, ξ), где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ – множество произвольно зафиксированных точек $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

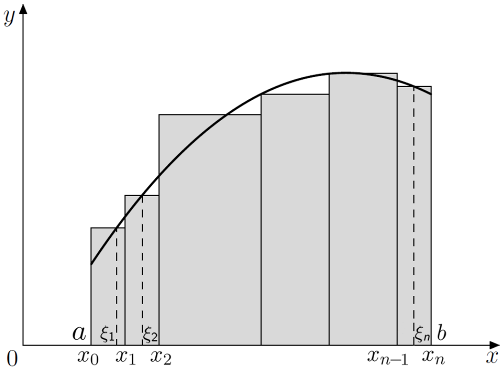


Определение.

Пусть $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$. Сумма

$$\sigma = \sigma_\tau(f, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

называется **интегральной суммой Римана функции** f, отвечающей разбиению (τ, ξ) отрезка $[a, b]$.

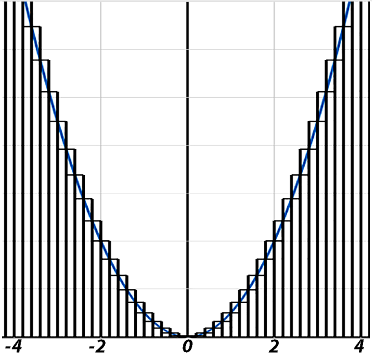


Определение.

Пусть $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$. Число I называют пределом интегральных сумм при диаметре разбиения стремящемся к нулю, и пишут: $I = \lim\limits_{d_\tau \to 0} \sigma_\tau(f, \xi)$, если:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ :\ \forall \tau,\ d_\tau < \delta(\varepsilon) \text{ и } \forall \xi \Longrightarrow |\sigma_\tau(f, \xi) - I| < \varepsilon.$$

То есть, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon)$, что для любого размеченного разбиения (τ, ξ), диаметр которого меньше, чем δ, вне зависимости от выбора точек ξ, интегральная сумма $\sigma_\tau(f, \xi)$ отличается от I меньше, чем на ε.



Определение.

В этом случае функция f называется *интегрируемой по Риману на* $[a, b]$, а число I называется **определённым интегралом** (*Римана*) **от функции** f **по отрезку** $[a, b]$.

Обозначение: $\int\limits_a^b f(x)dx$; $\mathfrak{R}[a, b]$ – множество интегрируемых на $[a, b]$ функций.

Поставим ряд вопросов:

1. Какие функции интегрируемы по Риману?
2. Какими свойствами обладает интеграл?
3. Как вычислить интеграл?

Теорема (единственность определённого интеграла)

Если существует предел интегральных сумм $\sigma_\tau(f, \xi)$ при $d_\tau \to 0$, то этот предел единственен.

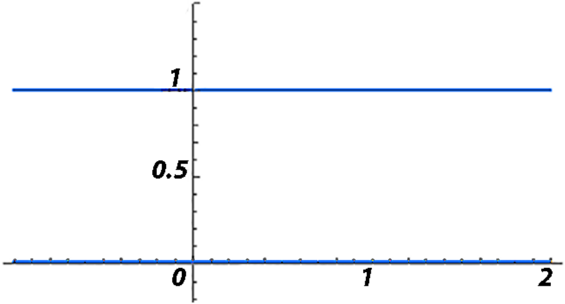
Теорема (необходимое условие интегрируемости)

Если функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на нём.

Условие теоремы не достаточно. Рассмотрим **функцию Дирихле** на отрезке $[0,1]$:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$$

Для этой функции и произвольного разбиения τ, т.к. в каждом отрезке найдутся и рациональные и иррациональные точки, выполнено: $\sigma_\tau(D,\xi) \equiv 1$, если все отмеченные точки рациональные, и $\sigma_\tau(D,\xi) \equiv 0$, если все отмеченные точки иррациональные. Откуда $\nexists \lim\limits_{d_\tau \to 0} \sigma_\tau(D,\xi)$, и функция D не интегрируема.



Классы интегрируемых функций

Теорема

Если функция $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на нём.

Теорема

Если функция $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ монотонна на $[a, b]$, то она интегрируема на нём.

Утверждение.

Если значение интегрируемой функции изменить на конечном множестве точек, то интегрируемость при этом не нарушится и интеграл не изменится.

Классы интегрируемых функций

Определение

Говорят, что *множество* $\mathbf{E} \subset \mathbb{R}$ *имеет лебегову меру нуль*, если $\forall \varepsilon > 0$ множество $\mathbf{E}$ можно заключить в не более, чем счётное объединение интервалов, суммарная длина которых меньше ε.

Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Тогда данная функция интегрируема тогда и только тогда, когда она ограничена и множество её точек разрыва имеет лебегову меру нуль.

Свойства интегрируемых функций

Интегрируемость сужения

Пусть f – интегрируема на $[a, b]$ и $[a^*, b^*] \subset [a, b]$. Тогда f интегрируема и на $[a^*, b^*]$.

Линейность интеграла

Если f и g – интегрируемы на $[a, b]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то функция $\lambda f \pm \mu g$ также интегрируема на $[a, b]$, причём

$$\int\limits_a^b (\lambda f(x) \pm \mu g(x))\, dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)\, dx \pm \mu \int\limits_a^b g(x)\, dx.$$

Аддитивность интеграла относительно отрезков интегрирования

Пусть $a < c < b$, $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, f интегрируема по отрезкам $[a, c]$ и $[c, b]$. Тогда f – интегрируема на $[a, b]$, причём $\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_a^c f(x)\, dx + \int\limits_c^b f(x)\, dx$.

Положив по определению $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$, $\int\limits_b^a f(x)\,dx = -\int\limits_a^b f(x)\,dx$ убеждаемся, что равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$$

справедливо при любом расположении точек a, b, c для функции f, интегрируемой на отрезке, содержащем эти точки.

Если функция f интегрируема на отрезке, содержащем точки a_0, a_1, … , a_n, то

$$\int\limits_{a_0}^{a_1} f(x)\,dx + \int\limits_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \ldots + \int\limits_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,dx + \int\limits_{a_n}^{a_0} f(x)\,dx = 0.$$

Интегрируемость произведения

Если f и g – интегрируемы на $[a, b]$, то и их произведение $f \cdot g$ также интегрируемо на $[a, b]$.

Монотонность интеграла

Если $a < b$, а функции f и g – интегрируемы на $[a, b]$ и $f(x) \leqslant g(x)$, $\forall x \in [a, b]$ то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Другими словами, неравенства можно интегрировать.

Следствие.

Если $\forall x \in [a, b]$ выполнено: $f(x) \geqslant 0$, то и $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

Интегрируемость модуля

Если f – интегрируема на $[a,b]$, то и $|f|$ интегрируем на $[a,b]$. Причём справедлива оценка: $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$[a] $\qquad (*)$

[a] Неравенство $(*)$ верно при $a<b$. Если от этого требования отказаться, надо записать: $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int\limits_a^b |f(x)|\,dx\right|$

Интегрируемость $|f|$ на $[a,b]$, вообще говоря, не влечёт интегрируемость самой функции f на этом отрезке.

Например,

$$\widetilde{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R} \cap \mathbb{Q}, \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$$

Для этой функции получаем:

$$\int\limits_a^b |\widetilde{D}(x)|\,dx = \int\limits_a^b 1\,dx = b-a, \text{ но } \nexists \int\limits_a^b \widetilde{D}(x)\,dx.$$

Связь между определённым и неопределённым интегралами

Пусть функция f интегрируема на $[a, b]$. Тогда на этом отрезке определена функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$, $a < x \leqslant b$, называемая **интегралом с переменным верхним пределом**. Аналогично может быть введена функция $G(x) = \int\limits_x^b f(t)\,dt$, $a \leqslant x < b$, называемая **интегралом с переменным нижним пределом**.

Теорема (об интеграле с переменным верхним пределом)

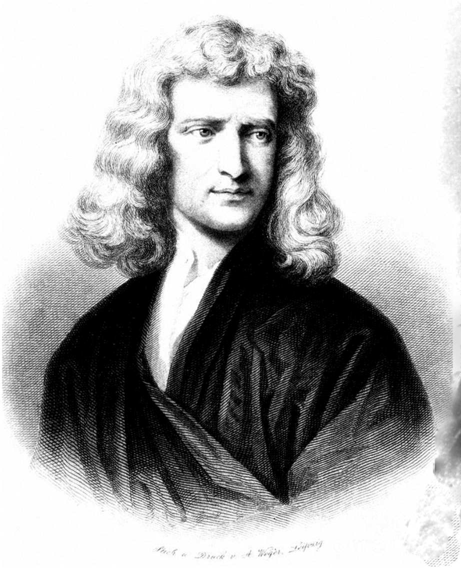
Пусть функция f интегрируема на $[a, b]$, $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. функция F непрерывна на $[a, b]$;
2. если, кроме того, f непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$, то F дифференцируема в точке x_0, и $F'(x_0) = f(x_0)$[a].

---

[a]Если $x_0 = a$ или $x_0 = b$, то под производной $F'(x_0)$ понимается односторонняя производная.

Формула Ньютона-Лейбница



Теорема (формула Ньютона-Лейбница)

Пусть $f \in C[a,b]$ и Φ – её произвольная первообразная на этом отрезке. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Доказательство.

Функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ является первообразной функции f на $[a,b]$.

Поэтому, $F(x) = \Phi(x) + C$, $a \leqslant x \leqslant b$, т.е.

$$\int\limits_a^x f(t)dt = \Phi(x) + C.$$

Отсюда, при $x = a$ получаем: $0 = \Phi(a) + C \Rightarrow C = -\Phi(a)$. При $x = b$:

$$\int\limits_a^b f(t)dt = \Phi(b) + C = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Попробуем применить формулу Ньютона-Лейбница к интегралу $\int\limits_{-1}^{2} \dfrac{dx}{x^2}$:

$$\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{2} = -1/2 - 1 = -3/2.$$

Очевидно, что данный результат неверный, т.к. получено отрицательное число при интегрировании строго положительной функции $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Почему? В этом примере были нарушены два условия теоремы формула Ньютона-Лейбница:

1. $f \notin \mathfrak{R}[-1, 2]$, т.к. она не ограничена на этом отрезке;
2. Равенство $\left(-\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{1}{x^2}$ не имеет смысла в точке $x = 0$.

Теорема (интегрирование по частям)

Пусть функции u, v – дифференцируемы на $[a, b]$, а $u', v' \in \mathfrak{R}[a, b]$. Тогда справедливо равенство:

$$\int\limits_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)\,v(x)\,dx.$$

Доказательство.

Заметим, что из условий теоремы, и соответствующих утверждений из предыдущих пунктов, следует, что функции $u'v$ и uv' – интегрируемы на $[a, b]$. Следовательно и производная $(u\,v)' = u'v + uv'$ – интегрируема на $[a, b]$. По формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_a^b u(x)\,v'(x)\,dx + \int\limits_a^b u'(x)\,v(x)\,dx = \int\limits_a^b (u(x)\,v(x))'\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b.$$

Остаётся перенести второе слагаемое из левой части в правую. □

Иногда формулу интегрирования по частям записывают в виде:

$$\int\limits_a^b u\,dv = u\,v\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du,$$

трактуя $u'(x)dx$ и $v'(x)dx$ как дифференциалы.

$$\int\limits_1^2 \ln x\,dx = \left\{\begin{array}{cc} u = \ln x, & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x}, & v = x \end{array}\right\} = x\,\ln x\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 \frac{x}{x}\,dx = 2\ln 2 - 1.$$

Теорема (замена переменной в определённом интеграле)

Пусть $f \in C[a,b]$; $\varphi : [\alpha,\beta] \mapsto [a,b]$, φ – дифференцируема на $[\alpha,\beta]$, $\varphi' \in \mathfrak{R}[\alpha,\beta]$. Тогда

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(t)^{a}\, \varphi'(t)\, dt = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\, dx. \qquad \text{(ЗП)}$$

[a] $(f \circ \varphi)(t) = f\big(\varphi(t)\big)$

Доказательство.

Поскольку, по теореме о непрерывности композиции функций,

$$f \circ \varphi \in C[\alpha,\beta] \subset \mathfrak{R}[\alpha,\beta], \;\; \varphi' \in \mathfrak{R}[\alpha,\beta],$$

то $(f \circ \varphi)\,\varphi' \in \mathfrak{R}[\alpha,\beta]$, кроме того $f \in \mathfrak{R}\big[\varphi(\alpha), \varphi(\beta)\big]$.

Доказательство.

$f \in C$ следовательно существует первообразная F такая, что $F' = f$ на $[a, b]$.

$$(F \circ \varphi)' =^{a} = (F' \circ \varphi) \cdot \varphi' = (f \circ \varphi) \cdot \varphi' \text{ на } [\alpha, \beta].$$

Поэтому, $F \circ \varphi$ – первообразная для $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$. Применяя к ним формулу Ньютона-Лейбница, получим:

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t)\, dt = (F \circ \varphi)(t)\Big|_{t=\alpha}^{t=\beta} = F(x)\Big|_{x=\varphi(\alpha)}^{x=\varphi(\beta)} = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\, dx.$$

□

[a] $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$

Замена переменной в интеграле может применяться, как слева направо, так и справа налево.

Замечание.

Пусть в интеграле $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ производится замена $x = \varphi(t)$. В этом случае, dx трактуется как дифференциал: $dx = \varphi'(t)dt$. Требуется поменять пределы интегрирования $a \mapsto \alpha$, $b \mapsto \beta$, где $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Получаем:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t)\,dt$$

Замечание.

В условиях теоремы некоторые значения $\varphi(t)$ могут не принадлежать отрезку $[\varphi(\alpha), \varphi(\beta)]$, но важно, чтобы все они принадлежали отрезку $[a, b]$, на котором определена функция f. Кроме того, нижний предел интегрирования не обязательно меньше верхнего. Например, если $\varphi\downarrow$, $\alpha < \beta$, то $\varphi(\alpha) > \varphi(\beta)$.

Пример 1.

$$\int\limits_0^{\sqrt{3}} x^3\sqrt{1+x^2}\,dx = \left\{\begin{array}{c} 1+x^2=t,\\ 2xdx=dt,\\ x=0\mapsto 1=t,\\ x=\sqrt{3}\mapsto 4=t \end{array}\right\} = \frac{1}{2}\int\limits_1^4 (t-1)\sqrt{t}\,dt =$$

$$= = \frac{1}{2}\int\limits_1^4 \left(t^{3/2}-t^{1/2}\right)dt = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}t^{5/2}-\frac{2}{3}t^{3/2}\right)\Big|_1^4 = \frac{58}{15}.$$

Пример 2.

$$\int\limits_0^{\frac{1}{4}} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx = \left\{\begin{array}{c} \sqrt{x}=t,\\ dx=2tdt,\\ x=0\mapsto 0=t,\\ x=1\mapsto \dfrac{1}{2}=t \end{array}\right\} = 2\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin t}{t\sqrt{1-t^2}}\cdot t\,dt =$$

$$= 2\int\limits_0^{1/2} \arcsin t\, d\left(\arcsin t\right) = \frac{\pi^2}{36}.$$