

# Условный экстремум

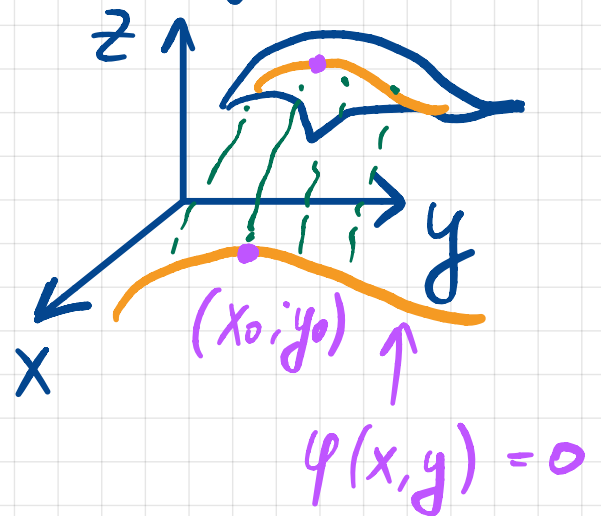
①  $f = f(x, y) \rightarrow \text{extr}$

целевая ф-ия

$\varphi(x, y) = 0$  - уравн. связи

②  $f = f(x, y, z) \rightarrow \text{extr}$


$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = 0 \\ \varphi_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$  - ур-я связи



Метод множителей Лагранжа:

$\Phi(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y) \rightarrow \text{extr}$

функция Лагранжа

Знак  $d^2\Phi$  смотрим с  учётом уравн. связи

$(d\varphi(x, y) = 0)$

✓ 1 (к точке вызвала)

$$z = x^2 - 2y^2$$

$$x + y = 1$$

$$\varphi(x, y, \lambda) = x^2 - 2y^2 + \lambda \cdot (x + y - 1)$$

$$\varphi'_x = 2x + \lambda = 0$$

$$\varphi'_y = -4y + \lambda = 0$$

$$\varphi'_\lambda = x + y - 1 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda = -2x \\ \lambda = 4y \end{cases}$$

$$-2x = 4y$$

$$x = -2y$$

$$M_1(2, -1) \quad \lambda = -4$$

$$y = -1; x = 2; \lambda = -4$$

---

$$\varphi''_{xx} = 2 = A$$

$$\varphi''_{xy} = 0 = B$$

$$\varphi''_{yy} = -4 = C$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \Delta_1 > 0$$

$$\Delta_2 < 0$$

$$d^2\varphi(M_1) = 2dx^2 - 4dy^2$$

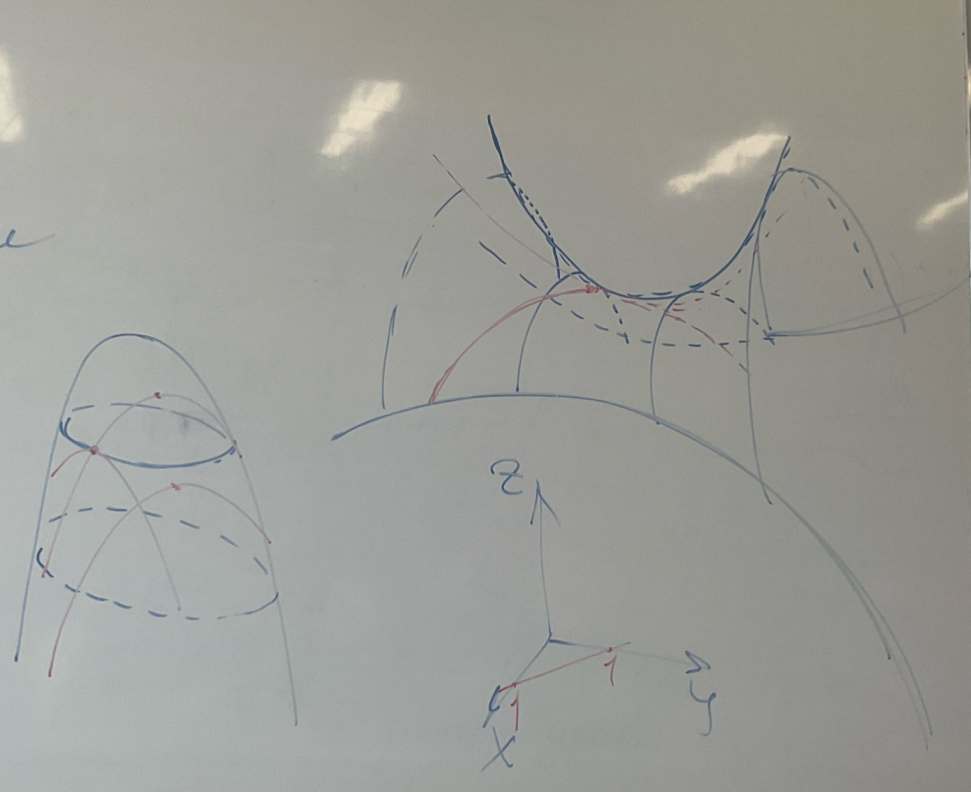
$$x + y = 1 \Rightarrow dx + dy = 0$$

$$dx = -dy$$

$$d^2\varphi(M_1) = 2dy^2 - 4d^2y^2 = -2dy^2 < 0$$

↑  
с учётом уравн. связи

$M_1$  - точка max



$n_2$  (вызов. к доске)

$$U = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\begin{cases} \varphi_1 = x + y - 3z + 7 = 0 \\ \varphi_2 = x - y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\varphi_2 = x - y + z - 3 = 0$$

$$\varphi(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) =$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1 \cdot (x + y - 3z + 7) + \\ + \lambda_2 \cdot (x - y + z - 3)$$

$$\begin{cases} \varphi'_x = 2x + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \varphi'_y = 2y + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \varphi'_z = 2z - 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \varphi'_{\lambda_1} = x + y - 3z + 7 = 0 \\ \varphi'_{\lambda_2} = x - y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2y + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 2z - 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ x + y - 3z + 7 = 0 \\ x - y + z - 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= -1 \\ z &= 2 \\ \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= -1 \end{aligned}$$

$$\varphi''_{xx} = 2$$

$$\varphi''_{xy} = 0$$

$$\varphi''_{yy} = 2$$

$$\varphi''_{zz} = 2$$

$$\varphi''_{yz} = 0$$

$$\varphi''_{xz} = 0$$

$$M_1(0, -1, 2)$$

$$\lambda_1 = 1 \text{ ; } \lambda_2 = -1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 > 0$$

$$\Delta_2 > 0$$

$$\Delta_3 > 0$$

$M_1$  - т. укл. минимума