3.1 Функция одной (независимой) переменной — это правило f, по которому каждому допустимому значению x ставится в соответствии одно и только одно значение y $y = f(x)$

x - независимая переменная (аргумент)
y - зависимая переменная, под y так же подразумевают функцию

$f(x) = x+3$ или $y(x) = x+3$ или
$y = x+3$

Функцию так же записывают в виде уравнения $F(x, y) = 0$

Множество допустимых значений x называют областью определения функции — это те значения, для которых определена y, обозначают: $D(f)$ или $D(y)$

областью определения всех перечисленных выше функций являются все действительные числа
$D(y) = \mathbb{R}$, но так бывает не всегда

$y = \frac{1}{x}$ - определена для всех x, кроме 0
$D(y) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
знак исключения

$y = \sqrt{x}$
$D(y) = [0; +\infty)$

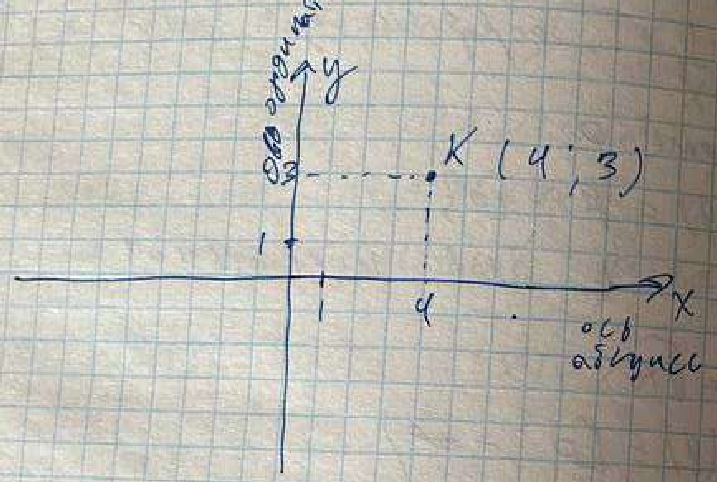
обратная функция $x = f^{-1}(y)$ - возвращает исходное значение x

для $y = 2x$ обратная будет: $x = \frac{y}{2}$

Не каждая функция обратима, например:
$y = x^2$

3.2 График функции в декартовой системе координат.

Это графическое отображение функциональной зависимости



Чтобы построить $\overbrace{y = f(x)}^{\text{график}}$ обычно требуется построить (найти) несколько точек, координаты которых удовлетворяют данному закону.

При этом важно знать принципиальный тип графика этой функции

Семейства функций

Линейные функции: имеет вид $y = kx + b$, где

k и b – константы (числа)

График – прямая

Для построения – достаточно 2 точки

Прямая вида $y = kx$ проходит ч/з начало координат (0) и называется прямой пропорциональности

Коэфф k – называется угловым коэфф. прямой. Если $k > 0$, то график идет снизу вверх. Если $k < 0$ график идет сверху вниз

чем больше $|k|$ по модулю, тем круче идет график и наоборот

Если $k = 0$, то $f(x) = const$

33

чтрек при любом x равен одному числу (при $x=0$) $y=b$

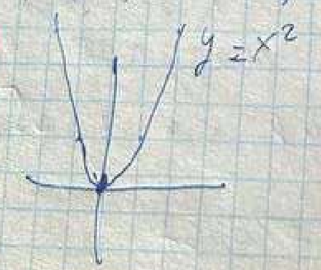
функция $y=0$ задает ось OX!

$x=0$ задает ось OY

3.4 Степенная функция;

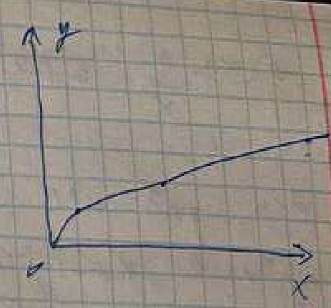
$y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ называется квадратичной функцией, а ее график — парабола $a>0$ ветви вверх, $a<0$ ветви вниз

$f(x)=x^2$ является четной, т.е. график симметричен относительно оси OY, т.е. есть условие $f(-x)=f(x)$



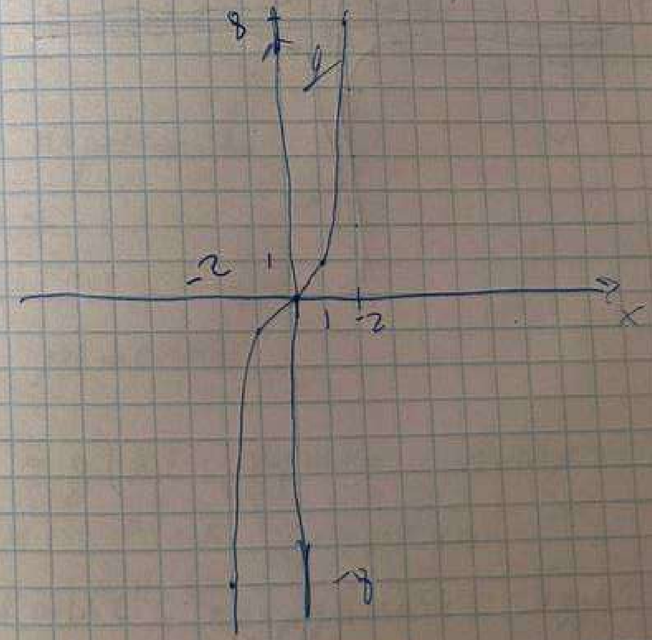
$y=\sqrt{x}$

$D(\sqrt{x})=[0;+\infty)$



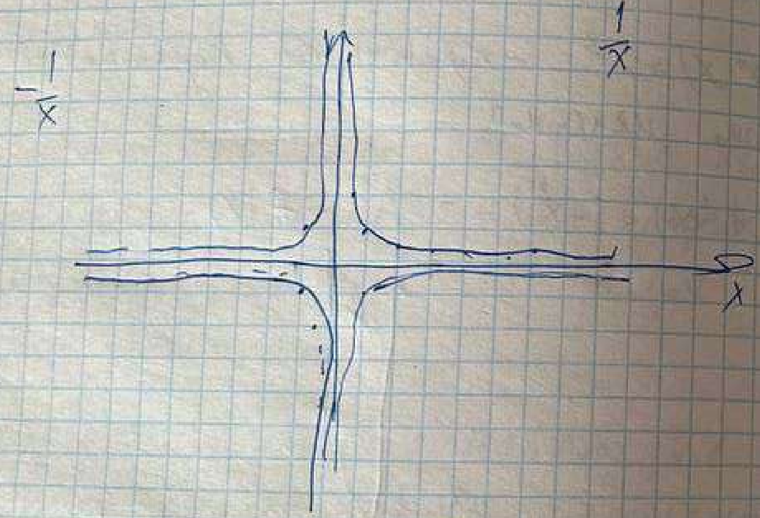
$f(x)=x^3$ — кубическая парабола она нечетная.

$f(-x)=(-x^3)=-x^3=-f(x)$



$f(x) = \frac{a}{x}$ $a \neq 0$ – Гипербола

Оси для нее – асимптоты, т.е. прямые, к которым график приближается бесконечно близко, но не касается.



Графическое решение уравнений: (3.5)

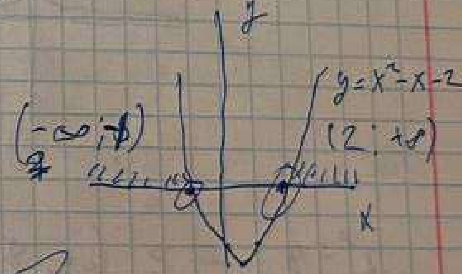
$y = f(x)$

решение $f(x) = 0$

График функции в местах пересечения оси X – находятся корни. Если пересечений нет – уравнение не имеет действительных решений.

$x^2 - x - 2 = 0$

$x_1 = -1$ $x_2 = 2$



для неравенства

$f(x) > 0$:

для решения

$f(x) = g(x)$, нужно построить графики этих функций

„Иксовые" координаты будут решением при их наличии

3.6. Показательная функция

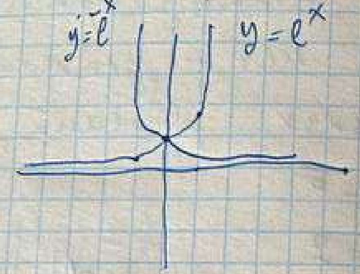
$y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$

рассматривают 2 случая

$0 < a < 1$ и $a > 1$

экспотенциальная функция

$y = e^x$



$2^? = 8 \Rightarrow \log_2 8 \Rightarrow 3$

$e^? = 1 \Rightarrow \log_e 1 = 0$

$\log_{10} 100 = 2$, $\log_{10} \frac{1}{100} = -2$

Логарифм – это степень, в которую нужно возвести данное основание, что бы получить число, из

что следует

$a^{\log_a b} = b$

Логарифмирование:

это перевод чисел или уравнений в логарифмический масштаб

$\cancel{23}$ $2^{25} \cdot 10^{-100}$

$\lg (2^{25} \cdot 10^{-100}) = \lg 2^{25} + \lg 10^{-100} =$

$= 25 \lg 2 - 100 \lg 10 = 25 \lg 2 - 100$

для уравнений

$5^x = 80$

$\ln 5^x = \ln 80$

$5^x = \frac{\ln 80}{\ln 5} \approx 2,72$

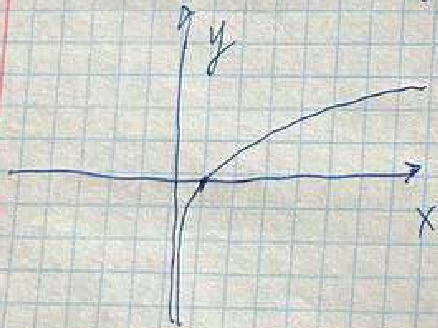
Потенцирование — обратная операция „избавления“ от логарифма

$3\lg 2 + 12$ 10?

$10^{3\lg 2 + 12} = 10^{3\lg 2} \cdot 10^{12} = 10^{\lg 8} \cdot 10^{12} = 8 \cdot 10^{12}$

График логарифмической функции:

в лог. функции фиксируется основание a .. $y = \log_a x$



$y = \ln x$

Уравнения и неравенства с логарифмами

$\log_a h(x) = p$ $(p = const)$ $\Rightarrow$

$h(x) = a^p$

$\ln(2x-1) = 0$

$2x - 1 = e^0$

$2x - 1 = 1$

$2x = 2$

$x = 1$

$\log_3(x+1) = \log_3(3x-1)$

$x + 1 = 3x - 1$ $\quad \log_3 2 = \log_3 2$

$2x = 2$

$x = 1$

$\ln x > 0$, [illegible]: $x \in (1; +\infty)$

$\ln x < 0$ $\quad x \in (0; 1)$

$\log_a h(x) > p$

„Начинка“ логарифма должна быть больше нуля

$h(x) > 0$!

$\log_a h(x) > p \log_a a$

$\log_a h(x) > \log_a a^p$, если

$0 < a < 1$, то $\begin{cases} h(x) > 0 \\ h(x) < a^p \end{cases}$

если $a > 1$, то $\begin{cases} h(x) > 0 \\ h(x) > a^p \end{cases}$

Неравенство $\log_a h(x) < p$:

$\begin{cases} h(x) > 0 \\ h(x) > a^p \end{cases}$, если $0 < a < 1$ и

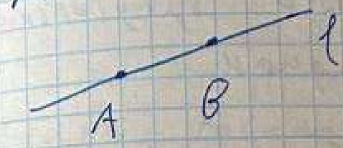
$\begin{cases} h(x) > 0 \\ h(x) < a^p \end{cases}$, если $a > 1$

Геометрия

4.1

Точка – не имеет длины, ширины, площади, объема и т.д.

Прямая. Она бесконечна



Луч – множество точек прямой, которые лежат по одну сторону от некоторой фиксированной точки

О – начало луча

Отрезок AB

Углы – геом. фигура, образованная двумя лучами, исходящими из одной точки

с 

4.2

Треугольники

это фигура, состоящая из 3-х точек, не лежащих на одной прямой и 3-х соедин. отрезков

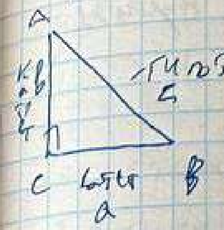
сумма углов любого треугольника 180° или π - радиан

Высота – перпендикуляр, опущенный из вершины треуг. на противопол. сторону. все высоты треуг. пересекаются в одной точке

Медиана – соединяет вершину с серединой противоположной стороны

Биссектриса – луч, из вершины, который делит угол пополам

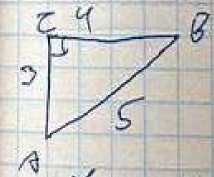
Прямой треугольник



$c^2 = a^2 + b^2$

Синус, косинус, тангенс, котангенс – это пропорции (соотношения) между сторонами прямоугольного треугольника, зависящие от его острых углов

пусть:



Синус, sin острого угла – это отношение противолежащего катета к ~~прилежащему~~ гипотенузе

$\sin A = \frac{4}{5}$, $\sin B = \frac{3}{5}$

cos острого угла – отношение прилежащего катета к гипотенузе

$\cos A = \frac{3}{5}$ $\cos B = \frac{4}{5}$

Тангенс острого угла – отношение противолежащего катета к прилежащему

$tg A = \frac{4}{3}$ $\quad tg B = \frac{3}{4}$

Котангенс – отношение прилежащего катета к противолежащему

$ctg A = \frac{3}{4}$ $\quad ctg B = \frac{4}{3}$

Синус, косинус, тангенс, котангенс – не зависят от размеров треугольника, они зависят только от значения острого угла!

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ – вне зависимости от того какие размеры сторон треугольника!

Если в прямоугольном треугольнике есть угол 30°, то катет лежащий напротив ~~[illegible]~~ этого угла будет в 2 раза меньше гипотенузы!

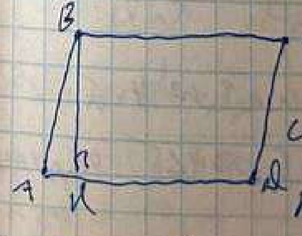
Отметим, что в тригонометрии перечисленные отношения определяются функциями для произвольного угла, не только острого!

Подобные треугольники – подобны, если их углы равны.

Соответствующие стороны пропорциональны $\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = k$

1.7

Четырехугольники:



– Параллелограмм – четырехугольник с попарно параллельными сторонами и эти стороны равны

$S = AД \cdot BK$

Прямоугольник - параллелограм с равными углами

Ромб - параллелограм с равными сторонами

Квадрат - параллелограм с равными углами и сторонами

Трапеция - четырехугольник, у которого две стороны ~~равны~~ параллельны, а две нет

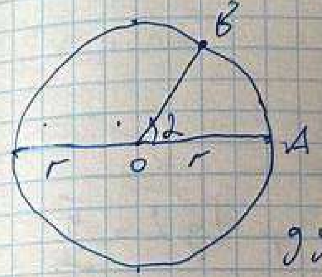
4.4 Окружность - множество точек, равно удаленных от фиксированной точки O. - центра окружности

Радиус - отрезок, соединяющий центр O окружн. с любой точкой окружн.

Длина окружности равна $L = 2\pi r$

Круг - множество точек внутри окружности + сама окружность

$S_{круга} = \pi r^2$



5.1 Радиан - центральный угол α, такой что длина соответствующей дуги AB равна радиусу окружности

Радиан не зависит от конкретного значения r и примерно равен $57° = \alpha$

Радианная мера угла - это отношение длины дуги между сторонами угла к радиусу окружности

Для перевода градусов в радианы:

$\alpha_{рад} = \dfrac{\alpha_{град} \cdot \pi}{180}$

$\alpha_{рад} = \dfrac{30 \cdot \pi}{180} = \dfrac{\pi}{6}$

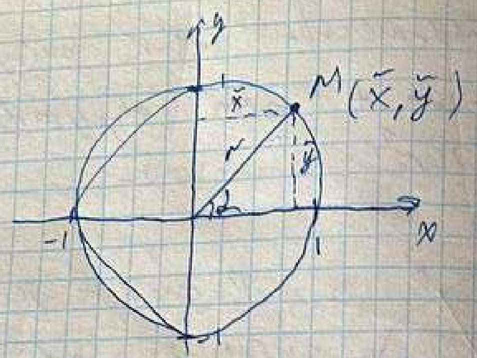
$180° - 3{,}14$

$30° - x$

$180x = 3{,}14 \cdot 30$

$x = \dfrac{\pi \cdot 30}{180}$

5.2



$r = 1$

$\sin\alpha = \frac{\tilde{y}}{r}$, $\cos\alpha = \frac{\tilde{x}}{r}$, $tg\alpha = \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}$, $x \neq 0$

$ctg = \frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}$ $y \neq 0$

5.3 Тригонометрические функции

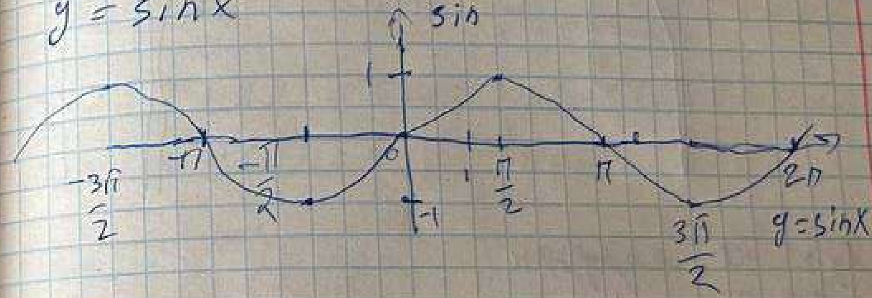
$y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tg x$, $y = ctg x$, где x – выражен в радианах

Данные функции каждому действительному углу x ставят в соответствии его sin, cos, tg, ctg (если они

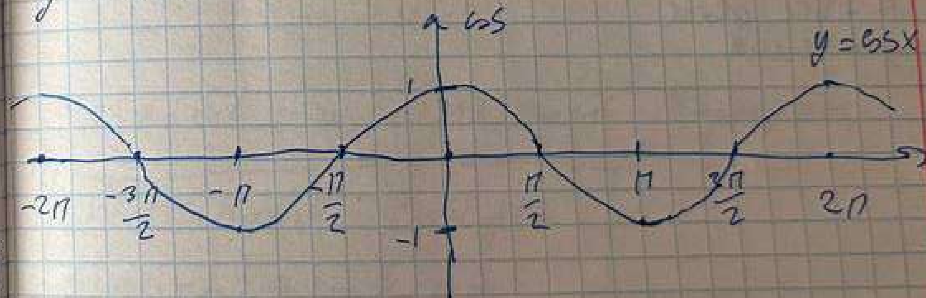
существуют)

Тригонометрические функции периодичны

$y = \sin x$

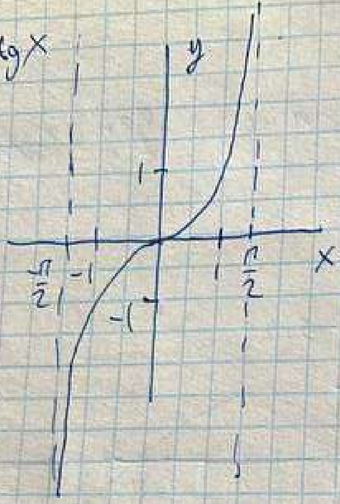


$y = \cos x$



$-1 \le \begin{matrix}\sin \\ \cos\end{matrix} x \le 1$

$y = tg\,x$

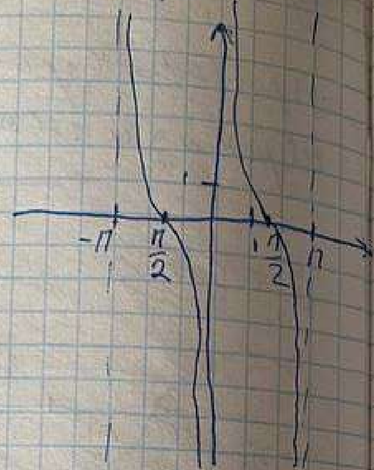


$tg\,x$ не определен

в $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$,

k - все целые значения

$y = ctg\,x$



ctg не определен

в πk

Периодичность и взаимосвязь функций. Формулы приведения (5.4)

Если к $\angle\alpha$ прибавить или вычесть 2π, то получатся такие же значения $\sin x$ и $\cos x$

$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha$, $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$

$\cos\alpha = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$

$tg(\alpha + \pi) = tg\,\alpha$, $ctg(\alpha + \pi) = ctg\,\alpha$

$tg(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -ctg\,\alpha$

Чётность и нечётность. Формулы (5.5)

Нечётность синуса:

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

Чётность косинуса:

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

основные тригонометрические тождество:

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

$$\boxed{tg\,\alpha = \frac{1}{ctg\,\alpha}} \quad , \quad \boxed{ctg\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha}}$$

$$\boxed{tg\,\alpha \cdot ctg\,\alpha = 1}$$

$$\boxed{tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} \quad , \quad \boxed{ctg\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2},$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

обратные тригонометрические функции:

Арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс

Нужны что бы по известному sin, cos, tg или ctg определить сам угол

$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, то $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

Есть [illegible]

например:

$\sin x = \frac{1}{2}$ соответствует бесконечное количество углов

синус принимает все свои возможные значения (от -1 до 1) на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и во избежание разночтений arcsin возвращает углы только из этого отрезка