степень — свернутая запись произведения $x^k = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots x}_{k\text{-раз}}$

x - основание степени, k - показатель степени

$-1^4 \neq (-1)^4$!

любое число, кроме 0, в 0 степени равно 1, $x^1 = x$, $x^0 = 1$

иррациональность в знаменателе нужно устранять:

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

1.4

сначала выполняется умножение/деление

затем сложение/вычитание

если есть скобки, сначала выполняется то, что в скобках

если перед скобками множитель, то можно раскрыть, умножив каждое слагаемое на множитель

1.5. Дробь - форма записи числа, одно и тоже слагаемое можно записать разными дробями

$1\frac{1}{2}$ $1{,}5$ $\frac{3}{2}$ $\frac{6}{4}$ $\frac{15}{10}$ $A\frac{a}{b} = \frac{A \cdot b + a}{b}$

Все действия в высшей математике мы планируем проводить в правильных и неправильных дробях

1.5.1. Сокращение дробей - это деление её числителя и знаменателя на одно и то же натуральное число, большее единицы, без остатков, если такое деление возможно

Переменные величины тоже можно сокращать:

$$\frac{2ab^2}{6b^3} = \frac{a}{3b}, \quad \frac{p^2q}{pq^2} = \frac{p}{q}$$

При сокращении функций и уравнений:

$$y = \frac{(x+1)(x+3)}{(x+1)}$$ – если мы сократим её на $(x+1)$, то обязательно условие $x \neq -1$

$(x-1)(x^2+2x-3)=0$ – тут нельзя сокращать на $(x-1)$, т.к. мы потеряем корень уравнения $x=1$

1.5.3

умножение числа на дробь:

$$A \cdot \frac{a}{b} = \frac{A \cdot a}{b}$$

$$\frac{-1}{1-x} = \frac{1}{-(1-x)} = \frac{1}{-1+x} = \frac{1}{x-1}$$

умножение числа на дробь:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Возведение дроби в степень:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

1.5.4 Деление дробей:

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

1.5.5 Сложение дробей:

При одинаковых знаменателях:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

При разных знаменателях:
сначала нужно привести к общему знаменателю

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{c\cdot b}{db}$$

1.5.6

Подбор общего знаменателя наиболее рационально:

общий знаменатель должен делиться на знаменатель каждой дроби и быть как можно меньше

$$\frac{3}{10}+\frac{2}{15}=\frac{3\cdot 3}{10\cdot 3}+\frac{2\cdot 2}{15\cdot 2}=\frac{13}{30}$$

1.6

Одночлен — произведение, состоящее из числовых множителей и переменных в целых неотрицательных степенях

степень одночлена — сумма степеней при различных переменных

$6x^2$ — одночлен 2ой степени

$-\frac{3}{2}xy^2$ — 3-й степени

$-2a^2b^4cd$ — 8-й степени

Если в произведении есть что-то еще (корни, нечисловые дроби, другие функции) или других действия, то это уже просто члены

многочлен — сумма одночленов:

$ab + c$, $x^4 - 2x + 3$

двучлен трехчлен

Степень многочлена — максимальная степень, входящих в него одночленов

1.6.1

Подобные слагаемые — слагаемые, имеющие одинаковую буквенную часть

При сложении подобных слагаемых нужно сложить их числовые коэффициенты, а буквенную часть оставить неизменной

чтобы умножить сумму на сумму 1.6.2
нужно каждое слагаемое одной суммы умножить на каждое слагаемое другой суммы:

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

формулы сокращенного умножения 16.3

Квадрат суммы:

$$(a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

Квадрат разности:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Формула разности квадратов:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Куб суммы:

$$(a+b)^3 = a^3 + 2a^2b + b^2a + a^2b + 2ab^2 + b^3 =$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Куб разности:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Сумма и разность кубов:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$$

1.7. Свойства степеней и корней:

Степень — свернутая запись произведения:

$$x^k = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{k\text{ - раз}}$$

x — основание степени, k — показатель степени

Особый случай: $x^0 = 1$, при $x \neq 0$

Чтобы возвести в степень произведение, нужно возвести в эту степень каждый множитель

$$(xy)^k = x^k \cdot y^k$$

Чтобы умножить степени с одинаковыми основаниями, нужно основание оставить прежним, а показатели степени сложить

$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$

Чтобы возвести степень в степень, нужно перемножить показатели $(x^a)^b = x^{ab}$

При переносе степени из знаменателя в числитель (или наоборот) у показателя следует сменить знак.

$\frac{1}{x^k} = x^{-k}$

Числа a и a^{-1} называют взаимно обратными, их произведение равно:

$a \cdot a^{-1} = 1$

Деление степеней с одинаковыми основаниями: $\frac{x^a}{x^b} = x^a \cdot x^{-b} = x^{a-b}$

Корень — тоже степень, вида:

$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$, где $\frac{m}{n}$ — положительная

рациональная дробь ($m \neq n$, $n \geq 2$)

$$x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$$

Если n — чётное число, большее нуля, то корень $\sqrt[n]{x}$ определён только для неотрицательных значений x.

Если n — нечётное число, большее единицы, то корень определён для всех x

Корни вида $\sqrt[n]{x^m}$ ($n \neq m$, $m \geq 2$, m не делится на n) определены только для неотрицательных значений x

Если m делится на n, то корень $\sqrt[n]{x^m}$ определён для всех значений x

Арифметическая прогрессия 1.1.1

Под прогрессией понимают упорядоченный список чисел, в котором есть определенная закономерность. Может быть конечным или ∞

Арифметическая прогрессия — последовательность с равными расстояниями между соседними числами:

$-8, -3, 2, 7, 12, 17 \ldots$

расстояние между членами АП называют разностью АП

Чтобы задать АП, нужно указать первый член и разность:

$a_1 = -8, \ d = 5$

„энный" член:

$a_n = a_1 + d(n-1)$.

Чтобы найти сумму первых n-членов:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

1.8.2 Геометрическая прогрессия — числовая последовательность, первый член которой $b_1 \neq 0$, а каждый последующий получается умножением предыдущего на некоторое число $q \neq 0$ (знаменатель) Г.П.

Если $b_1 > 0$ и $q > 1$, то прогрессия растущая

Чтобы получить знаменатель, нужно разделить любой член, кроме 1 на предыдущий

Если $-1 < q < 1$, то прогрессия убывает

Если $q < 0$, то члены прогрессии будут чередовать знак

Любой член ГП можно найти по формуле: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

Сумма первых n-членов ГП:

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$$

Члены бесконечно убывающей ГП $(-1 < q < 1)$ - бесконечны и стремятся к 0, но ~~члены~~ сумма такой прогрессии (ее членов) равна конечному числу!

$$S = \frac{b_1}{1-q}$$

2.1 Уравнение — равенство, которое содержит <u>переменную</u>, состоит из левой и правой частей и знака =

Корень уравнения — это такое значение переменной, которое обращает уравнение в верное числовое равенство

решить уравнение, значит найти все его корни или доказать, что их не существует

2.2. Преобразование уравнений:

1) в любой части уравнения можно выносить множители за скобки и раскрывать скобки

2) в любой части можно приводить подобные слагаемые

3) Части уравнений можно менять местами

4) любое слагаемое можно перенести в другую часть, сменив у него знак

5) обе части можно делить / умножать на одно и то же число, отличное от нуля

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = ad = bc$$

Нельзя сокращать на множитель, который содержит переменную. Это ведет к потере корней.

При возведении обеих частей уравнения в степень могут появиться посторонние корни.

2.3 Квадратное уравнение.

Имеет вид:

$ax^2 + bx + c$, где a, b, c - числа, $a \neq 0$

Частные случаи:

При b и $c = 0$, то

$ax^2 = 0$

$x^2 = 0$, то $\overbrace{x_1 = x_2}^{\text{корни}} = 0$

При $b = 0$, то

$ax^2 + c = 0$, тут „2 ветки".

Если оба коэфф. положительные или оба отрицательные, то уравнение имеет 2 комплексных корня

Если коэфф. разных знаков, то дело сводится к $x^2 = \frac{c}{a}$, имеет корни $\pm\sqrt{\frac{c}{a}}$

1

Если $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$, то

$x(ax + b) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$

общий случай, когда все коэфф $\neq 0$

$x^2 - x - 2 = 0$

чтобы решить такое уравнение, нужно вычислить дискриминант

$D = b^2 - 4ac$

На втором шаге извлекаем $\sqrt{D}$

При $D < 0$, уравнение имеет два сопряженных комплексных корня

При $D = 0$, уравнение имеет два совпавшихся (кратных) корня,

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

При $D > 0$ имеем 2 действительных корня

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

Чтобы разложить квадратный трёхчлен на множители:

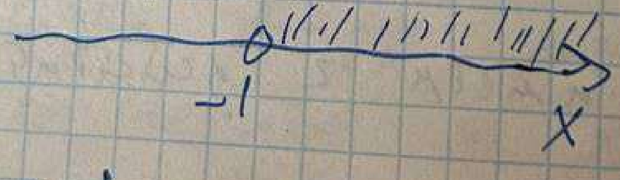
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

где x_1, x_2 — корни данного уравнения

2.4 Неравенство содержит 2 части, разделенных $>$ $\geq$ или $<$ $\leq$

Решением неравенства является обычно не отдельная переменная, а промежутки значений

$x > -1$



$x \leq \frac{1}{3}$

решить неравенство - найти все значения переменной, которые обращают его в верное числовое неравенство

решением может быть несколько промежутков

2.5

с неравенствами можно делать все тоже самое, что и с уравнениями, но есть отличия

$2-3x < 4(2-x)$

В любой части неравенства можно выносить за скобки

$2-3x < 8-4x$

Части неравенства можно менять местами

$8-4x > 2-3x$

Слагаемые можно перемещать в другую часть, сменив знак

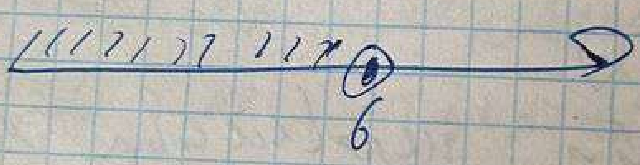
$-4x+3x > 2-8$

В обеих частях мы приводим подобные слагаемые

$-x > -6$

обе части можно умножить на одно и тоже число, отличное от 0, но если это отрицат. число нужно сменить знак неравенства

$x < 6$



2.6. Решение неравенства методом интервалов на примере:

$x^2+2x-3>0$

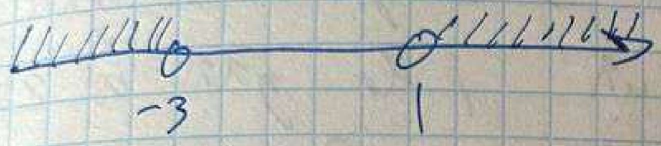
переведем в квадратное уравнение.

$x^2+2x-3=0$

$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$

$\sqrt{D} = 4$

$x_1 = \frac{-2-4}{2} = -3$, $x_2 = \frac{-2+4}{2} = 1$



Ответ:
$x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$

Понятие система: 2.8.

{ - значок система

Система - это множество условий, которые должны выполняться вместе. Решение системы удовлетворяет всем условиям система

$$\begin{cases} x^2=4 \\ (x+2)(2x-3)=0 \end{cases}$$

значит нужно найти все x, которые удовлетворяют системе

$x=-2$ и $x=2$ — решение для 1-го уравнения, но для и 2-го подходит только $x=-2$

Если у система нет решений, ее называют несовместной

2.9 Уравнения и неравенства с несколькими переменными

$y=x+3$

„закон", по которому каждому x соответствует y

Система может не иметь решений

а может иметь множество решений.

Можно решать подстановкой:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 5 - x \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

$$5 - x = 2x - 1$$

$$3x = 6$$

$$x = 2$$