Вектора

1) Длина вектора: $\vec{AB} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

2) Ф-ла скалярного произведения $\vec{a}\,\vec{b} = |a|\,|b| \cos$

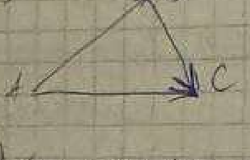
Алгебраическая $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$ (упорядоченный список чисел)

Скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на себя называется скалярным квадратом вектора $\vec{a}$

$\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$ – норма вектора

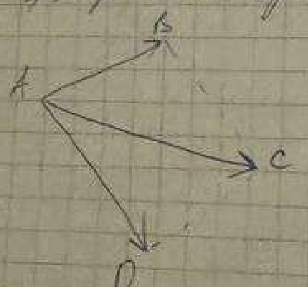
Правила сложения векторов

1) Треугольник



$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

2) параллелограмм



$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$

1) Операции с векторами $\vec{a}$ $\vec{b}$; $\vec{a}(1;-2)$; $\vec{b}(2;3)$

$2\vec{a} = (2;-4)$

$\bar{a} + \bar{b} = (1+2;\ -2+3)$

2) Длина вектора: AB, $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$

$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ $\quad |\bar{a}| = \sqrt{(x^2)+(y^2)}$

$\bar{a}(-2;1)$

$|\bar{a}| = \sqrt{(-2)^2+1^2}$

$A(5,3)$; $B=(-3,-1)$

A M B

Если необходимо найти координаты M, то зная, что $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$, то для $M(x_M, y_M)$

$$\Rightarrow x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda} = \frac{5 + \frac{1}{3}(-3)}{1+\frac{1}{3}} = 3$$

$$y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda} = \frac{3 + \frac{1}{3}(-1)}{1+\frac{1}{3}} = 2$$

$M = (3;2)$

§2 Произведение векторов в координатах

$\vec{a}(x_1, y_1)$ $\vec{b}(x_2, y_2)$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$,

если произведение положительно, то угол острый, иначе тупой

§3 Проверка векторов на ортогональность

$\bar{a} \perp \bar{b}$ $x_1 y_1 + x_2 + y_2 = 0$

Задача:

$\bar{a}(1, 2, -4)$; $\bar{b}(6; -1; 1)$

$a \perp b$ если $ab = 0 \Rightarrow$

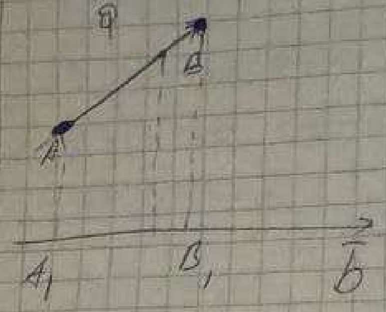
$\Rightarrow ab = 1 \cdot 6 - 2 - 4 = 6 - 6 = 0 \Rightarrow \bar{a} \perp \bar{b}$

§4 Угол между векторами

Знаем $\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}| \cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$ или $\cos\alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}$

§1.7.1 Проекция вектора на вектор



Опустим перпендикуляры на вектор $\bar{b}$. Опускаем из начала и конца вектора $\bar{a}$. Проекцией $AB(\bar{a})$ является A_1B_1, то есть проекция — число.

$Пр_{\bar{b}}\bar{a}$ — проекция вектора $\bar{a}$ на $\bar{b}$

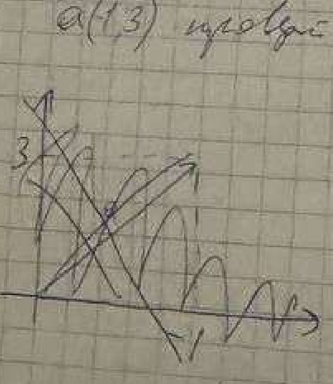
$Пр_{\bar{b}}\bar{a} > 0$ — острый угол, иначе тупой

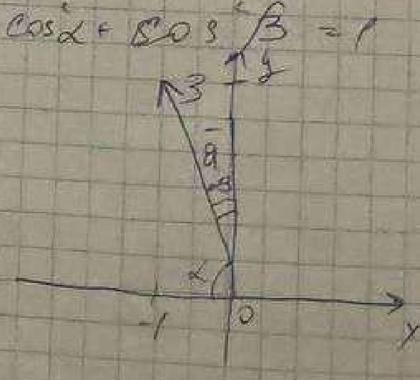
$Пр_{\bar{b}}\bar{a} = 0$ — векторы ортогональны $\bar{a} \perp \bar{b}$

§1.7.2 Проекция вектора на координаты оси.

Задача

$\bar{a}(1,3)$ доказать, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$





$\cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{(-1)^2+3^2}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \frac{1}{10} + \frac{9}{10} = 1$, чтд

§1.8.1

Любой вектор на плоскости раскладывается по базису $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$: $\bar{\upsilon} = \alpha\bar{e}_1 + \beta\bar{e}_2$, где α и β — действительные числа. $\bar{\upsilon}$ представим в виде линейной комбинации базисных векторов $\alpha\bar{e}_1 + \beta\bar{e}_2$ — разложение вектора $\bar{\upsilon}$ по базису.

§1.8.2 Определение коллинеарности векторов

Для того, чтобы 2 вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их соответствующие координаты были пропорциональны:

$$\begin{cases} \upsilon_1 = \lambda\omega_1 \\ \upsilon_2 = \lambda\omega_2 \end{cases}, \text{ где } \lambda \text{ — конст.}$$

$\bar{\upsilon}(\upsilon_1; \upsilon_2)$
$\bar{\omega}(\omega_1, \omega_2)$

Задача:

Проверить коллинеарны ли вектора $\bar{a}(-2, 4)$, $\bar{b}(1, -2)$

$$\begin{cases} -2 = \lambda 1 \quad \cdot 2 \\ 4 = \lambda 2 \end{cases}; \quad \frac{-4 = \lambda 2}{\lambda = -2} \Rightarrow \text{коллинеарны}$$

II способ — пропорция

$$\frac{-2}{1} = \frac{4}{-2} \qquad -2 = -2 \text{ = коллинеарны}$$

§1.8.4 Базис и СК пространства

Три вектора пространства $\bar{\upsilon}(\upsilon_1; \upsilon_2; \upsilon_3)$, $\bar{\omega}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $\bar{s}(s_1, s_2, s_3)$ компланарны тогда и только тогда, когда определитель, составленный из координат данных векторов, равен 0

$$\begin{vmatrix} \upsilon_1 & \omega_1 & s_1 \\ \upsilon_2 & \omega_2 & s_2 \\ \upsilon_3 & \omega_3 & s_3 \end{vmatrix} = 0$$

§1.9.1 Векторное произведение векторов. Определение и его смысл.

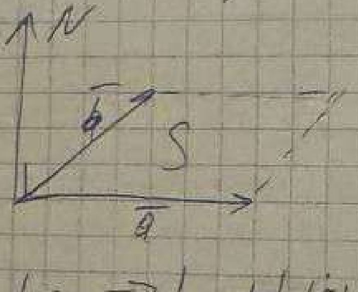
Отличие векторного произведения от произведения скалярного?

— Результат скалярного произведения число.

— Результат векторного произведения вектор

$[\bar{a} \cdot \bar{b}] = \bar{N}$, умножая вектора - получаем вектор

Векторным произведением неколлинеарных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ взятых в данном порядке, называют вектор $\bar{N}$, длина которого численно равна площади параллелограмма, построенного на данных векторах



$$|\bar{N}| = |[\bar{a} \cdot \bar{b}]| = |\bar{a}|\,|\bar{b}| \sin\angle(\bar{a}, \bar{b})$$

Задача

Найти $|[-3\bar{a} \cdot 2\bar{b}]|$, если $|\bar{a}| = \frac{1}{2}$, $|\bar{b}| = \frac{1}{6}$ ∠(...

$|[-3\bar{a} \cdot 2\bar{b}]|$ = вынесем конст за скобки =>

=> $|-3 \cdot 2[\bar{a} \cdot \bar{b}]| = 6|[\bar{a} \cdot \bar{b}]| = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \sin ...$ из модуля

§1.9.3 Векторное произведение в координатах

$$[\bar{\upsilon} \cdot \bar{\omega}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \upsilon_1 & \upsilon_2 & \upsilon_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} \upsilon_2 & \upsilon_3 \\ \omega_2 & \omega_3 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} \upsilon_1 & \upsilon_3 \\ \omega_1 & \omega_3 \end{vmatrix} ...$$

Векторное произведение $\bar{\vartheta}(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$ $\bar{\omega}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, заданных в ортонормированном базисе $(\bar i, \bar j, \bar k)$, выражается верхней ф-ой

Задача

Найти векторное произведение $\bar a(-1, 2, -3)$ $\bar b(0, -4, 1)$ и его длину

$$\begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \bar i \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} - \bar j \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \bar k \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar i(2-12) - \bar j(-1-0) + \bar k(4-0) = -10\bar i + \bar j + 4\bar k$$

$$\bar N(-10, 1, 4)$$

Выполним проверку ортогональности

$\bar N \cdot \bar a = (-10)\cdot(-1) + 1\cdot 2 + 4(-3) = 10+2-12 = 0 \Rightarrow \bar N \perp \bar a$

$\bar N \cdot \bar b = -10\cdot 0 + 1(-4) + 4\cdot 1 = 0 - 4 + 4 = 0 \Rightarrow \bar N \perp \bar b$

$|\bar N| = \sqrt{(-10)^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{100+1+16} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$

§ 1.10.1 Смешанное произведение векторов

Определение и смысл

Смешанное произведение векторов — это произведение 3-х проводников $(\bar a \bar b \bar c)$

Называют объём параллелепипеда, построенного на данных векторах

Смешанное произведение векторов $\bar\vartheta(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$, $\bar\omega(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $\bar s(s_1, s_2, s_3)$, выражается ф-лой

$$p(\bar\vartheta\, \bar\omega\, \bar s) = \begin{vmatrix} \vartheta_1 & \vartheta_2 & \vartheta_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{vmatrix}$$

$V_{пар\text{-}да} = |p| \qquad V_{пир\Delta} = \frac{1}{6}|p|$

Задача

$\bar{a}\,(1\ -1\ 2)$ $\bar{b}\,(0\ 4\ 3)$ $\bar{c}\,(3\ 2\ -6)$

а) смешанное произведение

б) объём

в) объём тетраэдра

а) $p(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \end{vmatrix} = -63$

б) Объём = модуль

$V = |\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}| = |-63| = 63$

в) $V_{\text{тетраэдра}} = \frac{1}{6}\,63 = 10\frac{1}{2}$