Математический анализ
Лекция 2

Емельянов Д.П., Никитин А.А.

МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК
Кафедра общей математики

Онлайн-курс «Математике в Data Science»
9 марта, 2021г.

Пределы последовательностей

Определение

Отображение $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ называется *числовой последовательностью*.
Числа $x(n) \equiv x_n$ называются *элементами* последовательности.
Обозначение последовательности в целом: $\{x_n\}$, элемента последовательности: x_n.

Примеры

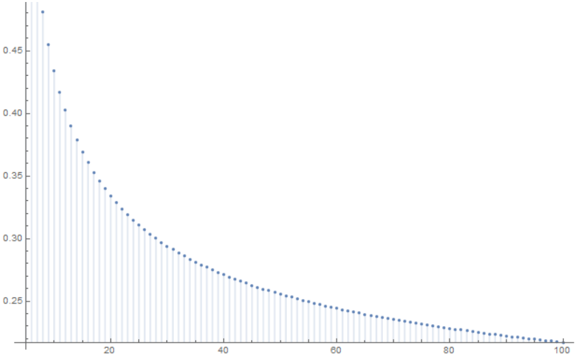
1. $x_n = n$ — последовательность натуральных чисел.
2. $x_n = \frac{1}{n}$.
3. $x_1 = 0, x_2 = 1, x_n = x_{n-2} + x_{n-1}$ при $n > 2$ — последовательность чисел Фибоначчи.
4. $x_1 = a, x_n = x_{n-1} + b$ при $n > 1$ — арифметическая прогрессия.
5. $x_1 = a, x_n = x_{n-1} \cdot b$ при $n > 1$ — геометрическая прогрессия.
6. $x_n = 0$ — тождественный нуль.

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно малой (б.м.), если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n| < \varepsilon.$$

Обозначение: $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.



Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если

$$\forall M > 0 \, \exists N(M) \in \mathbb{N} \, : \, \forall n \geqslant N(M) \Rightarrow |x_n| > M.$$

Обозначение: $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Утверждение

$$x_n \to \infty \iff \frac{1}{x_n} \to 0, \quad n \to +\infty.$$

Доказательство.

$$\forall M > 0 \, \exists N(M) \in \mathbb{N} \, : \, \forall n \geqslant N(M) \Rightarrow |x_n| > M \iff$$

$$\iff \forall \varepsilon = \frac{1}{M} > 0 \, \exists N_1(\varepsilon) = N(M) \in \mathbb{N} \, : \, \forall n \geqslant N_1(\varepsilon) \Rightarrow \left| \frac{1}{x_n} \right| < \varepsilon.$$

Пример

$x_n = \frac{1}{n}$.
Решаем уравнение $|x_n| < \varepsilon$.

$$\frac{1}{n} < \varepsilon, \quad n > \frac{1}{\varepsilon}, \quad N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \ : \ \forall n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon.$$

Итог: $\frac{1}{n} \to 0$ при $n \to +\infty$.

Пример

$x_n = n$.
Последовательность $\frac{1}{n}$ является б. м. $\implies$ $n \to \infty$ при $n \to +\infty$.

Свойства б.м. последовательностей

Теорема 1: 1. Если $\{x_n\}$ – б.м., то $\{x_n\}$ – ограничена ($\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \implies |x_n| < M$).
2. Если $\{x_n\}$ – б.м., $\{y_n\}$ – ограничена, то $\{x_n \cdot y_n\}$ - б.м.
3. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – б.м., то и $\{x_n \pm y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$ – б.м.

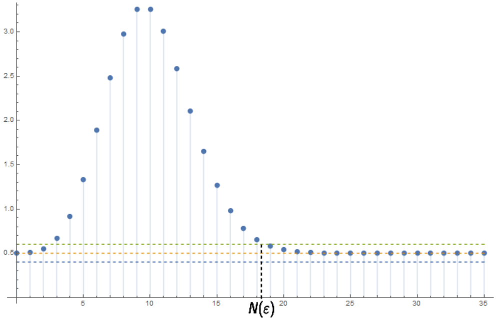
Доказательство. 1. Пусть $\{x_n\}$ – бесконечно малая. Фиксируем $\varepsilon = 1$, и номер $N_0(\varepsilon)$ такой, что $\forall n \geqslant N_0$ выполнено: $|x_n| < \varepsilon$. Пусть $M = \max\{1, |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0-1}|\}$, то $\forall n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; |x_n| \leqslant M$.
2. Пусть $\exists A \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; |y_n| \leqslant A$.
и $\forall \varepsilon > 0\, \exists N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;:\; \forall n \geqslant N_0(\varepsilon) \Rightarrow |x_n| < \frac{\varepsilon}{A}$.
Тогда:
$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_0(\varepsilon) \;:\; \forall n \geqslant N_0(\varepsilon) \;\Rightarrow\; |x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\varepsilon}{A} \cdot A = \varepsilon$.
3.I. Пусть:
$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_1(\varepsilon) : \forall n \geqslant N_1 \Rightarrow |x_n| < \varepsilon/2;\;\; \forall \varepsilon > 0$,
$\exists N_2(\varepsilon) : \forall n \geqslant N_2 \Rightarrow |y_n| < \varepsilon/2$;
Тогда
$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_0 = \max\{N_1, N_2\} : \forall n \geqslant N_0 \Rightarrow |x_n \pm y_n| \leqslant |x_n| + |y_n| < \varepsilon$.
3.II. $\{x_n \cdot y_n\}$ — произведение б.м. на ограниченную $\Longrightarrow$ является б.м. Теорема доказана.

Предел последовательности

Определение: Число $a \in \mathbb{R}$ называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если последовательность $\{x_n - a\}$ является бесконечно малой, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ :\ \forall n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \iff a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

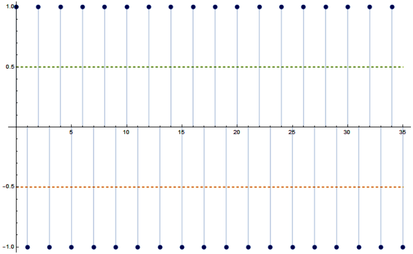
Обозначение: $a = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ или $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.



Сходящаяся последовательность

Определение: Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то говорят, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу a. Последовательность, имеющая конечный предел, называется сходящейся. Последовательность, не имеющая предела называется расходящейся. **Обозначение**: $x_n \not\to$.

$$x_n \not\to, \text{ если } \forall a \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon_0(a) > 0 : \forall n \in \mathbb{N}\ \exists N \geqslant n,\ |x_N - a| \geqslant \varepsilon_0.$$



Примеры

1. $x_n = \dfrac{\sin n}{n} \to 0;$
2. $x_n = \dfrac{n}{n+1} \to 1;$
3. $x_n = (-1)^n \not\to$

Свойства сходящихся последовательностей

Теорема 2:

1. Предел сходящейся последовательности если существует, то единственнен;

2. Всякая сходящаяся последовательность является ограниченной;

3. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, тогда:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b; \quad \lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}, \quad y_n \neq 0, \ b \neq 0;$$

Доказательство.
1. От противного. Пусть у последовательности x_n существуют два различных предела a и b. Тогда $x_n = a + \alpha_n = b + \beta_n$, где α_n и β_n – б.м. последовательности. Откуда,
$b - a = \alpha_n - \beta_n \to 0 \implies a = b$ – противоречие.
2. Аналогично доказательству пункта 2 из теоремы 1.
3. Пусть $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, где α_n и β_n – б.м. последовательности.
Тогда $x_n \pm y_n = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n)$,
$x_n \cdot y_n = (a + \alpha_n) \cdot (b + \beta_n) = ab + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n)$.

Для частного двух последовательностей получаем:

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}\right|=\left|\frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n}-\frac{a}{b}\right|=\left|\frac{ab+\alpha_n b-ab-a\beta_n}{y_n b}\right|=\left|\frac{\alpha_n b-\beta_n a}{y_n b}\right|$$

Не ограничивая общности считаем, что $b>0$. Тогда

$$\forall\varepsilon>0\,\exists N(\varepsilon):\forall n\geqslant N\ \Rightarrow\ b-\varepsilon<y_n<b+\varepsilon\Leftrightarrow\{\varepsilon=b/2>0\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0<\frac{b}{2}<y_n<\frac{3b}{2}\Rightarrow\frac{1}{y_n}<\frac{2}{b}\Rightarrow\frac{1}{y_n b}<\frac{2}{b^2}\Rightarrow\frac{1}{y_n b}\cdot|\alpha_n b-\beta_n a|=$$

$$=(\text{б.м.})\cdot(\text{огр.})=\text{б.м. Откуда }\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{a}{b}.$$

Теорема доказана.

Предельный переход и неравенства

<u>Теорема 3</u>: Пусть существуют пределы: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Причём $a < b$. Тогда, начиная некоторого номера выполнено: $x_n < y_n$.

Следствие

Пусть существуют пределы: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Если $\exists N : \forall n \geqslant N$ выполнено

1. $x_n > y_n$, то $a \geqslant b$;
2. $x_n \geqslant y_n$, то $a \geqslant b$;
3. $x_n > b$, то $a \geqslant b$;
4. $x_n \geqslant b$, то $a \geqslant b$.

Теорема о двух милиционерах

<u>Теорема 4</u>: Пусть последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ таковы, что $\forall n \geqslant N \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$. Тогда, если при этом последовательности $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ сходятся к одному и тому же пределу, то и последовательность $\{y_n\}$ также сходится к тому же пределу.

Доказательство.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем N_1 и N_2 так, чтобы при $\forall n \geqslant N_1$ выполнялось $a - \varepsilon \leqslant x_n$, а при $n \geqslant N_2$ выполнялось $z_n < a + \varepsilon$.

Тогда при $\forall n \geqslant N = \max\{N_1, N_2\}$ получаем:

$$a - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a + \varepsilon,$$

или $|y_n - a| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. Теорема доказана.

Пределы последовательностей

Монотонные последовательности

Определение: Последовательность $\{x_n\}$ называется неубывающей (невозрастающей), если для $\forall n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство: $x_n \leqslant x_{n+1}$ $(x_n \geqslant x_{n+1})$.
Обозначение: $x_n \nearrow$ $(x_n \searrow)$.

Определение: Последовательность $\{x_n\}$ называется монотонной, если она является либо неубывающей, либо невозрастающей.

Замечание: Если элементы неубывающей (невозрастающей) последовательности для всех номеров удовлетворяют строгому неравенству $x_n < x_{n+1}$ $(x_n > x_{n+1})$, то эту последовательность называют *строго* возрастающей (убывающей).

Теорема Вейерштрасса (Критерий сходимости монотонной последовательности):

Для того, чтобы монотонная последовательность имела предел, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть x_n сходится. Тогда она ограничена в силу свойств сходящихся последовательностей.

Достаточность. Пусть $x_n \nearrow$ и ограничена. Тогда у неё существует точная верхняя грань M такая, что $\forall n \in \mathbb{N} \implies x_n \leqslant M$, и $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : x_N > M - \varepsilon$.

Тогда для любого $n \geqslant N$ справедливо $M - \varepsilon < x_N \leqslant x_n \leqslant M$, то есть $|x_n - M| < \varepsilon$, то есть M – предел. Теорема доказана.

Предельная точка множества

Определение: Точка $p \in \mathbb{R}$ называется предельной точкой множества $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$, если любая окрестность этой точки содержит бесконечное подмножество множества $\mathbf{X}$:
$\forall \delta > 0$ множество $(p - \delta, p + \delta) \cap X$ бесконечно.
Обозначение: $\mathbf{X}^*$ (множество предельных точек), $p \in \mathbf{X}^*$.
Определение: Множество $\overline{X} = X \cup X^*$ называется замыканием множества X.

Примеры

1. $\mathbf{X} = (0, 1) \cup \{2\}, \quad \mathbf{X}^* = [0, 1]$;
2. $\mathbf{X} = \left\{ \dfrac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}, \quad \mathbf{X}^* = \{0\}$;
3. $\mathbf{X} = \mathbb{Q}, \quad \mathbf{X}^* = \overline{\mathbf{X}} = \mathbb{R}$.

Частичные пределы последовательностей

Определение

Определение: Если $\{x_n\}$ – некоторая последовательность, а $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ – строго возрастающая последовательность натуральных чисел, то последовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$ называется подпоследовательностью (п./п.) последовательности $\{x_n\}$.

Обозначение: $\{x_{n_k}\}$.

Примеры

1. Подпоследовательность $1, 3, 5, \ldots$ – нечётных чисел, взятых в их естественном порядке, является п./п. последовательности натуральных чисел.

2. Последовательность $3, 1, 5, \ldots$ такой не является – нарушен порядок.

Утверждение

Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится к пределу a. Тогда любая её п./п. сходится к тому же пределу a.

Доказательство.

Фиксируем $\forall \varepsilon > 0$. Т.к. $x_n \to a$, то

$$\exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Далее, т.к. $n_k \geqslant n$, то $\forall n_k \geqslant n \geqslant N(\varepsilon)$ элементы последовательности $\{x_{n_k}\}$ удовлетворяют неравенству $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$, а это и означает, что п./п. $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} a$. Теорема доказана.

Частичные пределы последовательностей

Определение

Определение: Точка $x \in \mathbb{R}$ называется частичным пределом последовательности $\{x_n\}$, если из этой последовательности можно выделить п./п., сходящуюся к пределу x.

Теорема Больцано-Вейерштрасса

Каждая ограниченная числовая последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Рассмотрим множество $X = \operatorname{im} x_n$ – множество всех значений последовательности. По условию X – ограниченное. Если X – конечное, то утверждение теоремы очевидно (так как при больших номерах n элементы последовательности будут вынуждены начать повторяться). Иначе рассмотрим также множество

$$Y = \{x \in \mathbb{R} : |X \cap (x, +\infty)| = +\infty\},$$

где $|X \cap (x, +\infty)|$ – количество элементов (мощность) множества. Y не пусто, так как X ограничено и бесконечно, Y ограничено сверху, так как X ограничено, следовательно существует $L = \sup Y$. Покажем, что L является предельной точкой. Действительно, из определения ТВГ, $\forall \varepsilon = 1/n\ \exists k = k(n) : L - \varepsilon < x_k \leqslant L$. Последнее утверждение совпадает с утверждением, что $x_{k_n} \to L$. Теорема доказана.

Обозначим через $\mathbf{X}^*$ – множество предельных точек последовательности $\{x_n\}$, и рассмотрим следующие примеры:

Примеры

1. $x_n = (-1)^n$, $\mathbf{X}^* = \{-1, 1\}$.

2. $x_n = \left\{1, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$,

$X^* = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$.

3. $x_n = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$, $\mathbf{X}^* = [0, 1]$.

Критерий Коши

Фундаментальная последовательность

Определение: Последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной (или последовательностью Коши), если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) \; : \; \forall n \geqslant N(\varepsilon), p \in \mathbb{N} \; \Rightarrow \; |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Эквивалентное определение

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) \; : \; \forall n, m \geqslant N(\varepsilon) \; \Rightarrow \; |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Критерий Коши

Критерий Коши сходимости ЧП

Пусть $\{x_n\}$ – числовая последовательность. Тогда $\{x_n\}$ сходится $\Longleftrightarrow$ $\{x_n\}$ фундаментальна.

Лемма

Любая фундаментальная последовательность ограничена.

Доказательство.

Зафиксируем $\varepsilon = 1 > 0$. Для этого ε найдём номер N такой, что $\forall n, m \geqslant N$ выполнено: $|x_n - x_m| < 1$. В частности, тогда $|x_n - x_N| < 1$ для $\forall n \geqslant N$. Следовательно для таких n:

$$|x_n| = |x_n - x_N + x_N| \leqslant |x_n - x_N| + |x_N| < 1 + |x_N|.$$

Положим $M = \max |x_1|, \ldots, |x_{N-1}|, 1 + |x_N|$. Тогда неравенство $|x_n| \leqslant M$ выполняется для $\forall n \in \mathbb{N}$. Лемма доказана.

Критерий Коши

Доказательство критерия Коши

<u>Необходимость.</u> Пусть $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N(\varepsilon) \, : \, \forall n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon/2.$$

Поэтому, $\forall n, m \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - x_m| \leqslant |x_n - x| + |x - x_m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$

<u>Достаточность.</u> По предыдущей лемме, фундаментальная последовательность ограничена. По теореме Больцано-Вейерштрасса у неё найдётся сходящаяся п./п. Пусть $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x$. Докажем, что и вся последовательность $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. **Выберем произвольное** $\varepsilon > 0$.

$$\exists \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \;\Rightarrow\; \exists K(\varepsilon) : \forall k \geqslant K(\varepsilon) \Rightarrow |x_{n_k} - x| < \varepsilon/2;$$

$$\{x_n\} - \text{фундаментальна} \;\Rightarrow\; \exists N(\varepsilon) : \forall n, m \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon/2$$

Положим $M = \max\{K(\varepsilon), N(\varepsilon)\}$. Тогда $n_M \geqslant n_{N(\varepsilon)} \geqslant N$, $n_M \geqslant n_{K(\varepsilon)} \geqslant K$. Следовательно, $\forall n \geqslant N(\varepsilon)$ $|x_n - x| \leqslant |x_n - x_{n_M}| + |x_{n_M} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Теорема полностью доказана.

Пределы последовательностей

Десятичное разложение

$r_n = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cdot \frac{1}{10} + \varepsilon_2 \cdot \frac{1}{10^2} + \ldots + \varepsilon_n \cdot \frac{1}{10^n}$, где $\varepsilon_0 \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon_n = \{0, 1, \ldots, 9\}$;
$\forall \varepsilon > 0$ и $\forall p \in \mathbb{N}$ получим:

$$|r_n - r_{n+p}| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \varepsilon_k \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^k < 9 \cdot \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{10}\right)^k = 9 \cdot \frac{1}{9 \cdot 10^n} = \frac{1}{10^n} < \varepsilon,$$

при $n \geqslant N(\varepsilon) = \left\lfloor \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln (1/10)} \right\rfloor + 1.$

Гармонический ряд

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n};$$

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \; : \; \forall n \in \mathbb{N}, \; \exists p \in \mathbb{N} \; \Rightarrow \; |x_n - x_{n+p}| \geqslant \varepsilon_0?$$

$$|H_n - H_{n+p}| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p} = \{p = n\} =$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon_0 \; \Rightarrow \; \nexists \lim_{n\to\infty} H_n.$$

Исследовать предел $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Применим формулу бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n a^0 b^n,$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

Тогда:

$$x_n = 1 + \frac{C_n^1}{n} + \frac{C_n^2}{n^2} + \ldots + \frac{C_n^n}{n^n}.$$

При росте n: растёт число слагаемых, каждое слагаемое не убывает (так как C_n^k при фиксированном $k \nearrow$ по n). Следовательно, $x_n \nearrow$.

$$x_n = 1 + \frac{C_n^1}{n} + \frac{C_n^2}{n^2} + \ldots + \frac{C_n^n}{n^n}.$$

$$\frac{C_n^k}{n^k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n} \leqslant \frac{1}{k!}.$$

Оценим x_n.

$$x_n \leqslant 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leqslant 1 + 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \leqslant 3.$$

Итого, $x_n \nearrow$ и ограничена, по теореме Вейерштрасса она имеет предел.

Обозначение: $e = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ – число Эйлера. $e \approx 2{,}7182818285$.

Рекомендуемые задачи для решения

«Листочки» – 3.1, 3.2, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10(абв), 4.4, 4.5(а), 6.1(абг).