Математический анализ
Лекция 3

Никитин А.А.

МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК
Кафедра общей математики

Онлайн-курс по математике в Data Science

3 ноября, 2020г.

О замене эквивалентных сомножителей

Пусть равенство $f(x) = h(x) \cdot g(x)$ выполняется при $x \to a$. Тогда, если $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 1$, то функции f и g называются эквивалентными. **Обозначение**: $f \sim g$ при $x \to a$.

Теорема

Пусть $f \sim g$ при $x \to a$. Тогда для любой функции φ одновременно существуют или не существуют пределы:

$$\lim_{x\to a} f(x)\varphi(x) \text{ и } \lim_{x\to a} g(x)\varphi(x),$$

причём если пределы существуют, то они равны. Тоже самое справедливо для пределов

$$\lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} \text{ и } \lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{g(x)}.$$

Доказательство.

Предположим, что существует предел $\lim\limits_{x\to a} g(x)\varphi(x)$. Тогда

$$\lim_{x\to a} f(x)\varphi(x) = \lim_{x\to a} h(x)g(x)\varphi(x) = \lim_{x\to a} h(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)\varphi(x) = \lim_{x\to a} g(x)\varphi(x).$$

Если известно, что существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)\varphi(x)$, то

$$\lim_{x\to a} g(x)\varphi(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{h(x)}\varphi(x) = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)\varphi(x)}{\lim\limits_{x\to a} h(x)} = \lim_{x\to a} f(x)\varphi(x).$$

Аналогично проверяется возможность замены на эквивалентную функцию в знаменателе. **(Д/З)** $\square$

Непрерывность функции

Пусть функция $f : \mathbf{E} \mapsto \mathbb{R}$ определена в некоторой окрестности точки $a \in \mathbf{E}$, предельной для множества $\mathbf{E}$.

Определение

Будем говорить, что функция f непрерывна в точке a, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
Обозначение: $f \in C(a)$.
Это тождество можно переписать как: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(\lim\limits_{x \to a} x)$, т.е непрерывные в точке функции, и только они, перестановочны с операцией предельного перехода.

Определение

Будем говорить, что функция f непрерывна на множестве $\mathbf{X} \subset \mathbf{E}$, если она непрерывна в каждой точке этого множества.
Обозначение: $f \in C(\mathbf{X})$.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \mathbf{E},\ |x - a| < \delta(\varepsilon) \ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Примеры

1. $f(x) = c = const \in C(\mathbb{R})$, т.к. $\forall a \in \mathbb{R}$ имеем:
$$|f(x) - f(a)| = |c - c| = 0 < \varepsilon,\ \forall \varepsilon > 0.$$
2. $f(x) = x \in C(\mathbb{R})$, т.к. $\forall a \in \mathbb{R}$ имеем:
$$|f(x) - f(a)| = |x - a| < \delta = \varepsilon.$$
3. $f(x) = \sin x \in C(\mathbb{R})$, т.к. $\forall a \in \mathbb{R}$ имеем:
$$|f(x) - f(a)| = |\sin x - \sin a| = 2\left|\cos\frac{x+a}{2}\right|\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \leqslant 2\left|\frac{x-a}{2}\right| = |x-a| < \delta = \varepsilon.$$

Свойства непрерывных функций

Арифметические операции над непрерывными функциями

Теорема : Пусть на одном и том же множестве заданы функции f и g, непрерывные в точке a. Тогда функции $f \pm g$, $f \cdot g$ и $\frac{f}{g}$ также непрерывны в точке a (в случае частного нужно дополнительно требовать, чтобы $g(a) \neq 0$).

Доказательство.

Вытекает из теоремы об арифметических операциях над функциями, имеющими предел. $\square$

Непрерывность композиции функций

Теорема : Если $f : \mathbf{X} \to \mathbf{X} \mapsto \mathbb{R}$, $g : \mathbf{Y} \to \mathbf{X} \mapsto \mathbb{R}$, $f(\mathbf{X}) \subset \mathbf{Y}$ и функция f непрерывна в точке $x_0 \in \mathbf{X}$, а функция g непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция $g\big(f(x)\big)$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство.

Вытекает из теоремы о пределе композиции функций. $\square$

Определения

Односторонняя непрерывность

Определение: Функция f называется непрерывной в точке a справа (слева), если правый (левый) предел этой функции в точке a существует и равен частному значению $f(a)$ функции f в точке a.

Точка разрыва

Определение: Если функция $f : \mathbf{E} \mapsto \mathbb{R}$ не является непрерывной в некоторой точке множества $\mathbf{E}$, то эта точка называется точкой разрыва функции f, т.е.

a – точка разрыва функции f, если:

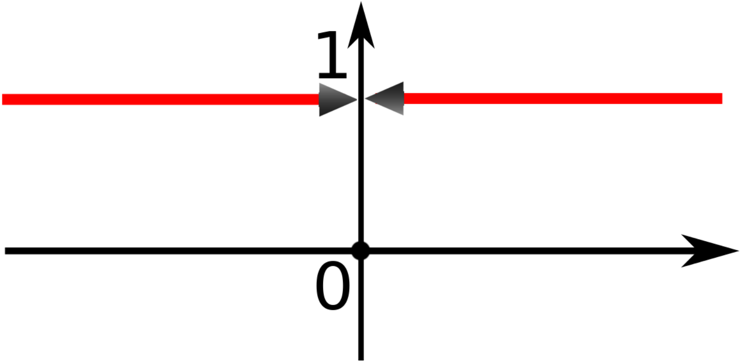
$$\exists \varepsilon_0 > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x \in \mathbf{E}, \; |x - a| < \delta \; : \; |f(x) - f(a)| \geqslant \varepsilon_0.$$

Примеры

Пример 1

$$f(x) = |sgn x| = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

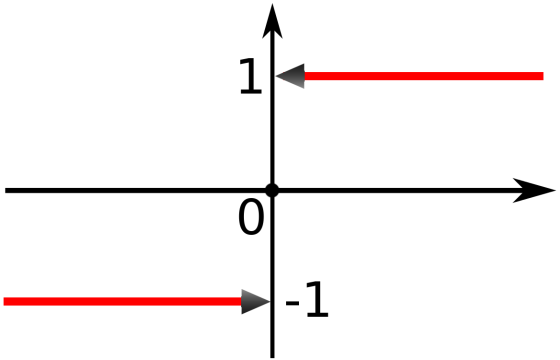
$$\exists \lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} f(x) = 1, \text{ но } f(0) = 0 \neq 1 = \lim_{x \to 0} f(x).$$



Пример 2

$$f(x) = sgn(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ 1, & \text{если } x > 0 \end{cases}$$

$$\exists \lim_{x\to 0-0} f(x) = -1 \neq 1 = \lim_{x\to 0+0} f(x).$$

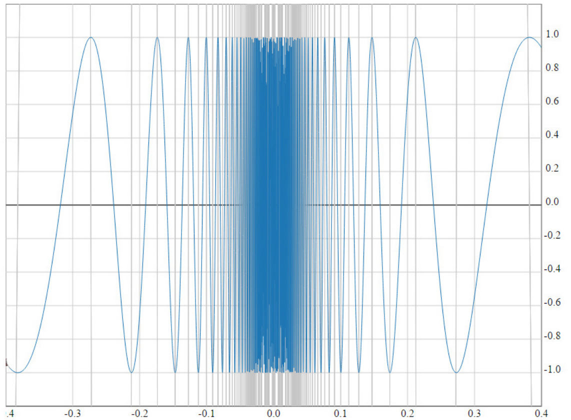


Примеры

Пример 3

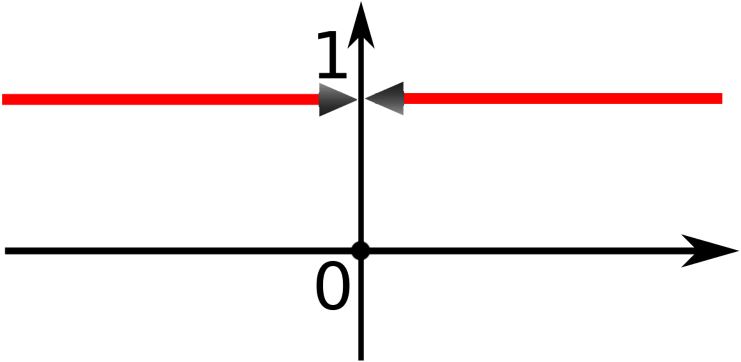
$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

$$\nexists \lim_{x\to 0} f(x).$$



Устранимый разрыв

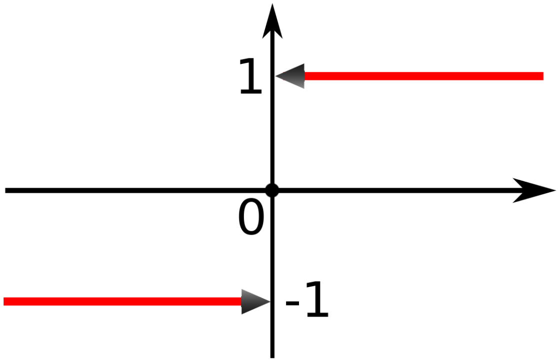
Определение: Точка a называется точкой устранимого разрыва функции f, если предел этой функции в точке a существует, но в данной точке функция f либо не определена, либо имеет частное значение $f(a) \neq \lim\limits_{x \to a} f(x)$.



Разрыв первого рода

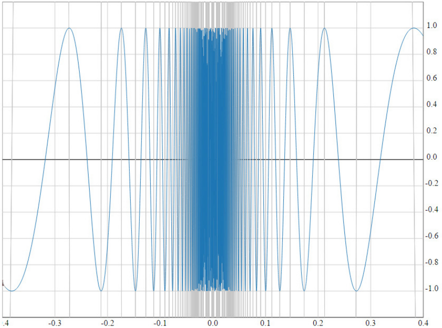
Определение: Точка a называется точкой разрыва первого рода функции f, если существуют не равные между собой, односторонние пределы

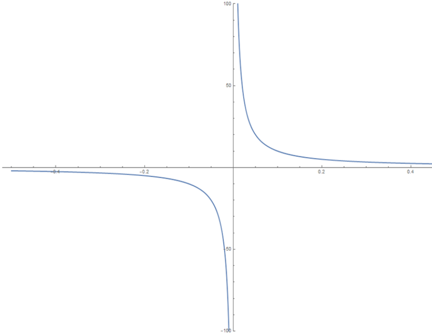
$$\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a-0) \neq f(a+0) = \lim_{x\to a+0} f(x).$$



Разрыв второго рода

<u>Определение:</u> Точка a называется точкой разрыва второго рода функции f, если в этой точке функция f не имеет по крайней мере одного из односторонних пределов, или если хотя бы один из них бесконечен.





Локальные и глобальные свойства непрерывных функций

Локальные свойства

Локальными называют такие свойства функции, которые справедливы в сколь угодно малой окрестности фиксированной точки области определения функции. Эти свойства характеризуют поведение функции при стремлении аргумента к исследуемой точке.

Примеры

1. Непрерывность функции в некоторой точке её области определения;
2. Арифметические операции над непрерывными функциями;
3. Непрерывность композиции;

Локальные и глобальные свойства непрерывных функций

Глобальные свойства

Глобальные свойства – это свойства, связанные со всей областью определения функции.

Примеры

1. Монотонность функции на сегменте $[a, b]$;
2. Непрерывность функции на отрезке;

Финальная ограниченность

Теорема : Если $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$, то функция f – ограничена в проколотой δ-окрестности для некоторого $\delta > 0$.

Доказательство.

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = b \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \, : \, \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(a) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon.$$

Если $a \in \mathbf{E}$, то обозначим $m = \min\{b - \varepsilon, f(a)\}$, $M = \max\{b + \varepsilon, f(a)\}$. Тогда

$$\forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(a) \cap \mathbf{E} \;\Rightarrow\; m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

$\square$

Об устойчивости знака непрерывной в точке функции

Теорема : Пусть $f : \mathbf{E} \mapsto \mathbb{R}$ – непрерывна в точке a этого множества, и её значение в этой точке $f(a) \neq 0$. Тогда существует такая окрестность, в которой функция f сохраняет свой знак.

Доказательство.

Т.к. $f \in C(a)$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \; : \; \forall x \in U_\delta(a) \cap \mathbf{E} \; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; |f(x) - f(a)| < \varepsilon \; \Leftrightarrow \; f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon.$$

Если в качестве ε взять положительное число $\dfrac{|f(a)|}{2}$, то оба числа $f(a) - \varepsilon$ и $f(a) + \varepsilon$ будут положительны при $f(a) > 0$ и отрицательны при $f(a) < 0$. Откуда и вытекает требуемое. $\square$

Глобальные свойства непрерывных функций

О прохождении непрерывной функции через нуль при смене знаков

Пусть функция f – непрерывна на $[a, b]$, и пусть $f(a) \cdot f(b) < 0$ (т.е. её значения на концах есть числа разных знаков). Тогда $\exists \xi \in (a, b) : f(\xi) = 0$.

Доказательство.

Делим отрезок $[a, b] = I_0$ пополам. Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$, то на концах одного их двух полученных в результате деления отрезков, функция снова принимает значения разных знаков. Делим данный отрезок (I_1) пополам, и т.д.
Тогда мы либо на каком-то шаге попадём в точку $c \in (a, b) : f(c) = 0$, либо получим стягивающуюся систему сегментов $\{I_n\}$ на концах которых функция f принимает значения разных знаков. В последнем случае, на основании принципа вложенных сегментов, $\exists! c \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$. По построению $\exists \{a_n\}, \{b_n\}$ – две последовательности концов отрезков I_n такие, что $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$. По свойствам предела и определению непрерывности, получаем:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) \leqslant 0, \quad \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c) \geqslant 0 \ \Rightarrow \ f(c) = 0.$$

$\square$

О прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение

Теорема : Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, причём $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$, а γ – произвольное число, заключённое между α и β. Тогда

$$\exists \xi \in [a, b] \ : \ f(\xi) = \gamma.$$

Доказательство.

Если $\alpha = \beta = \gamma$, то в качестве ξ берём a или b. По этой же причине очевидны случаи, когда $\gamma = \alpha$ или $\gamma = \beta$.
Пусть $\alpha \neq \beta$. Не ограничивая общности считаем, что $\alpha < \gamma < \beta$.
Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - \gamma$. Как разность двух непрерывных функций, функция g – непрерывна на $[a, b]$, и принимает на концах этого сегмента значения разных знаков:

$$g(a) = f(a) - \gamma = \alpha - \gamma < 0, \quad g(b) = f(b) - \gamma = \beta - \gamma > 0$$

По теореме о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение $\exists \xi \in (a, b) : g(\xi) = 0 \ \Rightarrow \ f(\xi) = \gamma$. $\square$

Метод интервалов для решения неравенств

Функция может изменить свой знак только при переходе через точку, в которой она равна нулю, или через точку разрыва. На любом интервале из области определения, не содержащем таких точек, функция во всех точках принимает значения одного знака.

Пример

Решить неравенство: $x^2 - 2x - 8 \geqslant 0$

Первая теорема Вейерштрасса

Первая теорема Вейерштрасса

Теорема : Если f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на нём.

Доказательство.

Докажем, что функция f ограничена сверху. Ограниченность снизу показывается аналогично.

От противного. Предположим, что f не ограничена сверху. Тогда для $\forall n \in \mathbb{N}$ найдётся хотя бы одна точка $x_n \in [a, b]$ такая, что $f(x_n) > n$. Следовательно, последовательность $\{f(x_n)\}$ – бесконечно большая. Т.к. $\{x_n\} \subset [a, b]$, то $\{x_n\}$ – ограничена. По теореме Больцано-Вейерштрасса найдётся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящаяся к точке ξ. Все элементы $\{x_n\}$ лежат на $[a, b]$, следовательно, и $\xi \in [a, b]$. Далее, т.к. $f \in C[a, b]$, то $\{f(x_{n_k})\} \to f(\xi)$, но это противоречит тому, что подпоследовательность $\{f(x_{n_k})\}$, будучи выделена из бесконечно большой последовательности, сама является бесконечно большой. □

Замечание

Для интервала (конечного или бесконечного) данное утверждение уже не имеет места.

Определение

Число M (число m) называется точной верхней (точной нижней) гранью функции f на множестве $\mathbf{E}$, если выполнены два требования:

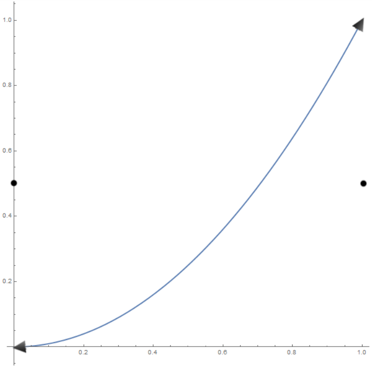
1. $\forall x \in \mathbf{E} \;\Rightarrow\; f(x) \leqslant M \;(f(x) \geqslant m)$;
2. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x' \in \mathbf{E} \;:\; f(x') > M - \varepsilon \;\; (f(x') < m + \varepsilon)$.

Обозначение: $M = \sup\limits_{\mathbf{E}} f(x), \quad m = \inf\limits_{\mathbf{E}} f(x)$

Утверждение

Если функция f ограничена на множестве $\mathbf{E}$ сверху (снизу), то $\exists \sup\limits_{\mathbf{E}} f(x) \; (\exists \inf\limits_{\mathbf{E}} f(x))$

Вторая теорема Вейерштрасса



$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \in (0,1); \\ 1/2, & \text{если } x = 0,\ x = 1. \end{cases}$$

Верхняя $(M = 1)$ и нижняя $(m = 0)$ грани этой функции не достижимы, т.е. $\nexists x \in [0,1] : f(x) = 1$ $(f(x) = 0.)$

Вторая теорема Вейерштрасса

<u>Теорема</u>: Если f непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на нём точных верхней и нижней граней. Т.е.

$$\exists x_1, x_2 \in [a,b] \ : \ f(x_1) = \sup_{[a,b]} f(x), \ f(x_2) = \inf_{[a,b]} f(x).$$

Доказательство.

По первой теореме Вейерштрасса функция f ограниченна на $[a,b]$. Поэтому $\exists \sup\limits_{[a,b]} f(x)$, $\exists \inf\limits_{[a,b]} f(x)$. Обозначим их через M и m соответственно.

Предположим, что точная верхняя грань не достижима, т.е. $\forall x \in [a,b] \Rightarrow f(x) < M$.

Рассмотрим функцию $F(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$. Т.к. $M - f(x) > 0$, то F – непрерывна на $[a,b]$. По первой теореме Вейерштрасса функция F – ограничена на $[a,b]$. Следовательно,

$$\exists A > 0 \ : \ \frac{1}{M - f(x)} \leqslant A \iff f(x) \leqslant M - \frac{1}{A}, \ \forall x \in [a,b].$$

Это противоречит тому, что $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$.

Обратная функция

Понятие обратной функции

Функция $g : \mathbf{Y} \mapsto \mathbf{X}$ называется обратной для функции $f : \mathbf{X} \mapsto \mathbf{Y}$, если $g\big(f(x)\big) = x$ для $\forall x \in \mathbf{X}$ и $f\big(g(y)\big) = y$ для $\forall y \in \mathbf{Y}$

Критерий обратимости

Обратная функция существует тогда и только тогда, когда f есть взаимно однозначное отображение множества $\mathbf{X}$ на множество $\mathbf{Y}$.

Доказательство.

Действительно, если существует обратная функция, то $\forall y \in \mathbf{Y}$ найдётся прообраз $x = g(y)$, т.к. тогда $f(x) = f(g(y)) = y$.
Кроме того, при $x_1 \neq x_2$ обязательно
$g(f(x_1)) = x_1 \neq x_2 = g(f(x_2))$. Поэтому $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Обратно, если известно, что f есть взаимно однозначное отображение множества $\mathbf{X}$ на множество $\mathbf{Y}$, то обратное отображение определяется правилом: каждому $y \in \mathbf{Y}$ ставится в соответствие тот элемент $x \in \mathbf{X}$, для которого $y = f(x)$.
Здесь по построению $f(g(y)) = y$ и $g(f(x)) = x$ $\square$

Теорема о монотонности и непрерывности обратной функции

Теорема

Если числовая функция f непрерывна и монотонно возрастает (убывает) на промежутке $\mathbf{X}$, то множество её значений $\mathbf{Y}$ также является промежутком и существует обратная функция $g : \mathbf{Y} \mapsto \mathbf{X}$, которая непрерывна и монотонно возрастает (убывает) на $\mathbf{Y}$.