Математический анализ
Лекция 3

Емельянов Д.П., Никитин А.А.

МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК
Кафедра общей математики

Онлайн-курс «Математике в Data Science»
11 марта, 2021г.

Определение

Отображение $f : X \longrightarrow Y$ называется *инъективным*, если

$$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

Определение

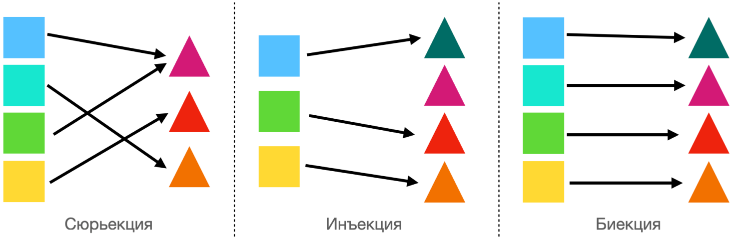
Отображение $f : X \longrightarrow Y$ называется *сюрьективным*, если

$$\forall y \in Y \ \exists x \in X : f(x) = y.$$

Определение

Отображение $f : X \longrightarrow Y$ называется *биективным* (*взаимно однозначным*), если оно одновременно инъективно и сюрьективно.
Обозначение: $f : X \longleftrightarrow Y$.

Свойства функции



Свойства функции

Определение

Пусть задано $f : X \longrightarrow Y$.
Отображение $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ называется *обратным* к f, если:
1. $\forall x \in X \implies f^{-1}(f(x)) = x$,
2. $\forall y \in Y \implies f(f^{-1}(y)) = y$.

Примеры

1. $f(x) = x^2, x \in [0, 2] \implies f^{-1}(y) = \sqrt{y}, y \in [0, 4]$.
2. $f(x) = x^2, x \in [-2, 2]$ – не обратима (на данном множестве).

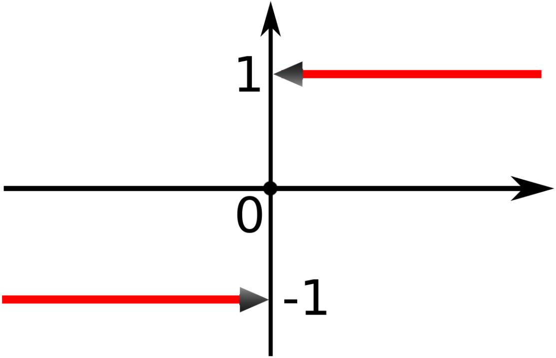
Теорема

Отображение $f : X \longrightarrow Y$ является биективным тогда и только тогда, когда существует обратное отображение $f^{-1} : Y \longrightarrow X$.
При этом f^{-1} будет также биективным.

Доказательство. I. Пусть f обратима. Тогда:
1. $\forall y \in Y\ \exists x = f^{-1}(y) \in X : f(x) = y \implies f$ – сюрьективна.
2. Пусть f не инъективна. Тогда найдётся пара $x_1 \neq x_2 : f(x_1) = f(x_2)$. Но тогда применим к обеим частям равенства f^{-1}: $f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) \implies x_1 = x_2$ – противоречие, следовательно f инъективна, следовательно – биективна.
II. Пусть f биективна. Тогда у любого $y \in Y$ существует ровно один прообраз $x \in X : f(x) = y$. Положим по построению $f^{-1}(y) = x$. Тогда f^{-1} – по построению обратная функция к f.
III. f является обратной функцией для f^{-1}, следовательно, f^{-1} биективна (пункт I). Теорема полностью доказана.

Пример 1

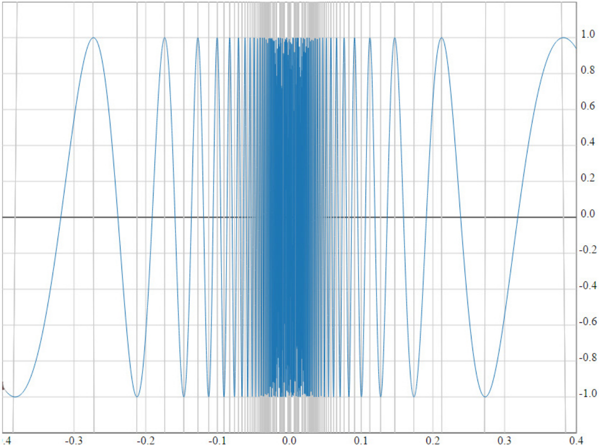
$$y = sgn(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ 1, & \text{если } x > 0 \end{cases}$$



Предел числовой функции

Пример 2

$$y = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

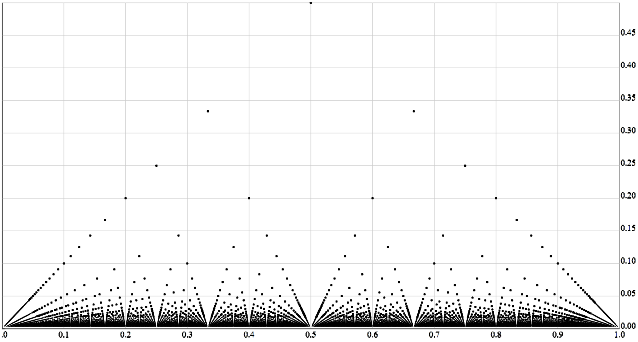


Функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Функция Римана

$$R(x) = \begin{cases} 1/n, & \text{если } x = \dfrac{m}{n},\ \text{НОД}(m,n) = 1,\quad m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{если } x \text{ - иррациональное число.} \end{cases}$$



Определение

δ – окрестностью точки x_0 называется интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Обозначение: $U_\delta(x_0)$.

Определение

Левой δ – полуокрестностью точки x_0 называется полуинтервал $(x_0 - \delta, x_0]$.

Определение

Правой δ – полуокрестностью точки x_0 называется полуинтервал $[x_0, x_0 + \delta)$.

Определение

δ – окрестностью точки ∞ называется множество $(-\infty, -\delta) \cup (\delta, +\infty)$.

Определение

δ – окрестностью точки $+\infty$ называется множество $(+\delta, \infty)$.

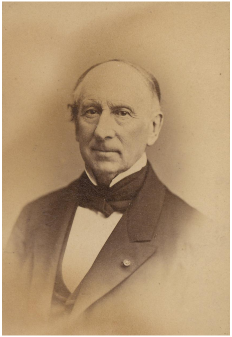
Определение

δ – окрестностью точки $-\infty$ называется множество $(-\infty, -\delta)$.

Определение

Проколотой δ – окрестностью точки x_0 называется множество $U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$.

Обозначение: $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$.



О. Коши

Предел Функции по Коши
Пусть для
области определения числовой функции
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ точка x_0 является предельной.
Число b называется *пределом*
функции f при x стремящемся к x_0, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) : x \in \operatorname{dom} f, x \neq x_0$$

$$\Longrightarrow\ |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Обозначение: $b = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Э. Гейне

Предел Функции по Гейне

Пусть для
области определения числовой функции
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ точка x_0 является предельной.
Число b называется *пределом*
функции f при x стремящемся к x_0, если

$$\forall \{x_n\} : \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0, \forall n : x_n \in \operatorname{dom} f, x_n \neq x_0$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = b.$$

Обозначение: $b = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Эквивалентность определений по Коши и по Гейне

Утверждение: Определения предела функции по Коши и по Гейне равносильны.

Замечание

Эта теорема показывает, что функция f может иметь в точке a только один предел. В самом деле, для определения предела функции по Гейне это вытекает из единственности предела числовой последовательности $\{f(x_n)\}$, а для определения предела функции по Коши – из эквивалентности этого предела пределу функции по Гейне.

Доказательство. I. Пусть b – предел $f(x)$ по Коши.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) : x \in \operatorname{dom} f, x \neq x_0 \implies |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Пусть $x_n \in \operatorname{dom} f, x_n \neq x_0$ и $x_n \to x_0$. Тогда для любого $\delta(\varepsilon) > 0$ найдётся номер $N(\delta(\varepsilon)) = N(\varepsilon)$ такой, что $|x_n - x_0| < \delta(\varepsilon)$ при $n \geqslant N$, то есть $x_n \in U_\delta(x_0)$, следовательно из определения по Коши, $|f(x_n) - b| < \varepsilon$, то есть $f(x_n) \to b$.
II. Пусть b – предел $f(x)$ по Гейне. Предположим, что b не является пределом по Коши.

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \ \exists x(\delta) \in U_\delta(x_0) : x \in \operatorname{dom} f, x \neq x_0 : |f(x) - b| \geqslant \varepsilon.$$

Пусть $\delta = 1/n$, обозначим $x_n = x(\delta)$. $x_n \in U_\delta(x_0) \implies x_n \to x_0$, следовательно, из определения предела по Гейне, $f(x_n) \to b$. Но, из выбора x_n имеем $|f(x_n) - b| \geqslant \varepsilon$, следовательно, $f(x_n) \not\to b$. Получено противоречие, следовательно b – предел $f(x)$ по Коши. Теорема доказана.

Определение как одностороннего предела в конечной точке, так и предела при $x \to \infty$ может быть получено заменой используемой в определении по Коши окрестности.

$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ – левый предел (используется левая полуокрестность),

$\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ – правый предел (используется правая полуокрестность),

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ – предел в бесконечности (используется окрестность бесконечности)ю

Определение по Коши

Определение: Число b называется левым пределом функции f в точке a по Коши, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : x \in \operatorname{dom} f \implies |f(x) - b| < \varepsilon.$$

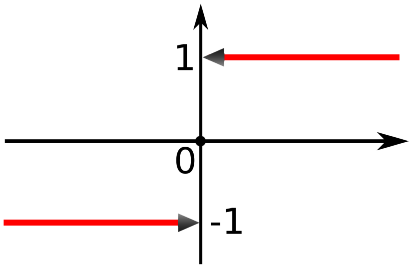
$y = sgn(x)$

$$y = sgn(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ 1, & \text{если } x > 0 \end{cases}$$

Эта функция имеет в точке $a = 0$ как правый, так и левый пределы, причём $sgn(0+0) = 1$, $sgn(0-0) = -1$. Действительно,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = 1 \ : \ \forall x,\ 0 < x < 1 \ \ (-1 < x < 0)$$

$$\Rightarrow |1-1| = 0 < \varepsilon \ \ (|-1+1| = 0 < \varepsilon).$$



Свойства предела

Теорема

Пусть две функции f и g заданы на одном и том же множестве X, и имеют в точке a пределы, соответственно равные B и C. Тогда функции $f \pm g$, $f \cdot g$ и $\dfrac{f}{g}$ (в случае частного требуется, чтобы функция g не принимала нулевые значения на множестве X) имеют в точке a пределы, соответственно равные: $B \pm C$, $B \cdot C$, $\dfrac{B}{C}$ (в случае частного требуем, чтобы $C \neq 0$).

Доказательство.

Данная теорема немедленно следует из определения предела функции в точке a по Гейне и соответствующей теоремы об арифметических операциях над числовыми последовательностями. $\square$

Теорема (предельный переход и неравенства):

1. Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$ таковы, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = C$ и $B < C$. Тогда $\exists \overset{\circ}{U}(a)$ такая, что $\forall x \in \overset{\circ}{U}(a) \Rightarrow f(x) < g(x)$;

2. Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$, $h : X \to \mathbb{R}$ таковы, что $\forall x \in X$ выполнено: $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = B$, то $\exists \lim\limits_{x \to a} g(x) = B$.

Доказательство. 1. Возьмём число $\gamma : B < \gamma < C$. По определению предела существуют такие проколотые окрестности точки a, $\overset{\circ}{U}_1(a)$, $\overset{\circ}{U}_2(a)$, что

$$\forall x \in \overset{\circ}{U}_1(a) \Rightarrow |f(x) - B| < \gamma - B, \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}_2(a) \Rightarrow |g(x) - C| < C - \gamma.$$

Тогда $\forall x \in \overset{\circ}{U}_1(a) \cap \overset{\circ}{U}_2(a)$ имеем:

$$f(x) < B - \gamma - B = \gamma = C - C + \gamma < g(x).$$

2. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = B$, то по $\forall \varepsilon > 0$ найдём окрестности $\overset{\circ}{U}_1(a), \overset{\circ}{U}_2(a)$ такие, что $\forall x \in \overset{\circ}{U}_1(a) \Rightarrow B - \varepsilon < f(x)$,
$\forall x \in \overset{\circ}{U}_2(a) \Rightarrow h(x) < B + \varepsilon$. Поэтому при $\forall x \in \overset{\circ}{U}_1(a) \cap \overset{\circ}{U}_2(a)$ выполнено:

$$B - \varepsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < B + \varepsilon \;\Leftrightarrow\; |g(x) - B| < \varepsilon.$$

Следствие:

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = C$. Если в некоторой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ выполнено:

1. $f(x) > g(x)$, то $B \geqslant C$;
2. $f(x) \geqslant g(x)$, то $B \geqslant C$;
3. $f(x) > C$, то $B \geqslant C$;
4. $f(x) \geqslant C$, то $B \geqslant C$;

Доказательство.

Утверждения 1) и 2) получаются из теоремы о предельном переходе в неравенствах доказательством от противного. Утверждения 3) и 4) – частные случаи 1) и 2), получающиеся при $g(x) \equiv C$. □

Критерий Коши

Определение

Будем говорить, что функция $f : X \to \mathbb{R}$ удовлетворяет в точке a условию Коши, если

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \, : \, \forall x', x'' \in X, \, 0 < |x' - a| < \delta, \, 0 < |x'' - a| < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \, |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Критерий Коши

Для того, чтобы функция f имела в точке a конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы эта функция удовлетворяла в точке a условию Коши.

Определение

Определение: Пусть $f, g : X \to \mathbb{R}$, x_0 – предельная точка множества X и существуют функция $\varphi : X \to \mathbb{R}$ и окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такие, что: $f(x) = \varphi(x) \cdot g(x)$, $\forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0) \cap X$. Тогда:

1. Если φ ограничена на $\overset{\circ}{U}(x_0) \cap X$, то говорят, что функция f ограничена по сравнению с g при $x \to x_0$. **Обозначение**: $f(x) = \underline{O}(g(x)), x \to x_0$.
2. Если $\varphi(x) \to 0$, при $x \to x_0$, то говорят, что функция f – бесконечно малая по сравнению с g при $x \to x_0$. **Обозначение**: $f(x) = \overline{o}(g(x))$, $x \to x_0$.
3. Если $\varphi(x) \to 1$, при $x \to x_0$, то говорят, что функции f и g эквивалентны или асимптотически равны при $x \to x_0$. **Обозначение**: $f(x) \sim g(x)$, $x \to x_0$.

Примеры

1. $\frac{1}{x} = \underline{O}\left(\frac{1}{x^2}\right), x \to 0$, т.к. $\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant \left|\frac{1}{x^2}\right|$ при $|x| \leqslant 1$;
2. $\frac{1}{x^2} = \underline{O}\left(\frac{1}{x}\right), x \to \infty$, т.к. $\left|\frac{1}{x^2}\right| \leqslant \left|\frac{1}{x}\right|$ при $|x| \geqslant 1$;
3. $x^2 = \overline{o}(x)$, при $x \to 0$;
4. $\dfrac{x^6}{1+x^4} \sim x^6$, при $x \to 0$;
5. $\dfrac{x^6}{1+x^4} \sim x^2$, при $x \to \infty$.

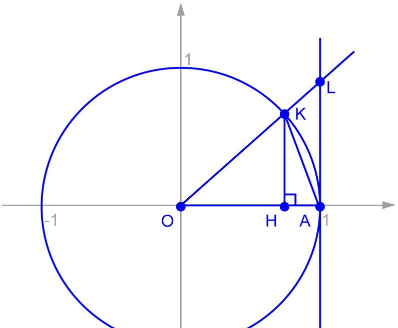
Первый замечательный предел

$$\exists \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

При $0 < x < \frac{\pi}{2}$ Выполнено: $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$ (см. рис.). Откуда получаем

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Далее, т.к. функции $\cos x$, $\frac{\sin x}{x}$, 1 – чётные, то это неравенство справедливо на $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$. Остаётся воспользоваться теоремой о двух милиционерах.



Следствия из первого замечательного предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{\arcsin\sin t}{\sin t}=1;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1;$$

Второй замечательный предел

$$\exists \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e;$$

Рассмотрим последовательность $\{x_k\} : \lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0+0$. Покажем, что $\lim\limits_{k\to\infty}(1+x_k)^{1/x_k} = e$.

Не ограничивая общности считаем, что $x_k < 1$. Найдём такой номер n_k, что:

$$n_k \leqslant \frac{1}{x_k} \leqslant n_k + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{n_k+1} < x_k \leqslant \frac{1}{n_k}.$$

Откуда, $\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} < (1+x_k)^{1/x_k} < \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}$, и $\lim\limits_{k\to\infty}(1+x_k)^{1/x_k} = e$.

Далее, т.к. $\{x_k\}$ – это произвольная числовая последовательность, удовлетворяющая условию: $x_k \to 0+0$, то тем самым доказано, что

$$\lim_{x\to 0+0}(1+x)^{1/x} = e.$$

Доказательство факта, что $\lim\limits_{x\to 0-0}(1+x)^{1/x} = e$ проводится аналогично.

Следствия – «Квази-замечательные» пределы

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, \quad 0 < a \neq 1;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad 0 < a \neq 1;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a, \quad 0 < a \neq 1.$$

(Доказать самостоятельно.)

Следствия из замечательных пределов

При $x \to 0$ выполнено:

$$\sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \ln(1+x) \sim x;$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad e^x - 1 \sim x, (1+x)^a - 1 \sim ax.$$

Теорема о замене эквивалентных сомножителей

Пусть $f \sim g$ при $x \to a$. Тогда для любой функции φ одновременно существуют или не существуют пределы:

$$\lim_{x \to a} f(x)\varphi(x) \text{ и } \lim_{x \to a} g(x)\varphi(x),$$

причём если пределы существуют, то они равны. Тоже самое справедливо для пределов

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} \text{ и } \lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{g(x)}.$$

Доказательство.

$$f(x) \sim g(x) \implies f(x) = g(x) + \bar{o}(g(x)).$$

Предположим, что существует предел $L = \lim\limits_{x \to a} g(x)\varphi(x)$. Тогда

$$\lim_{x \to a} f(x)\varphi(x) = \lim_{x \to a} \left(g(x) + \bar{o}(g(x))\right)\varphi(x) = \lim_{x \to a} g(x)\varphi(x) + \lim_{x \to a} \bar{o}(g(x))\varphi(x) =$$

$$= \lim_{x \to a} g(x)\varphi(x) + \lim_{x \to a} \frac{\bar{o}(g(x))}{g(x)} \cdot \lim_{x \to a} g(x)\varphi(x) = L + 0 \cdot L = L.$$

Аналогично проверяется возможность замены на эквивалентную функцию в знаменателе. Теорема доказана.

Рекомендуемые задачи для решения

«Листочки» – 9.3, 9.6, 9.8(аг), 9.12, 10.1(вг), 10.4, 10.5, 10.6, 10.7, 11.1(аб), 11.4.