Ранг матрицы меньше числа её столбцов (признаки)

ранг матрицы меньше числа её столбцов (признаков), это означает, что не все столбцы (признаки) в этой матрице являются линейно независимыми.

Ранг матрицы – это максимальное количество линейно независимых столбцов (или, что эквивалентно, максимальное количество линейно независимых строк) в этой матрице.

3

$X_1 \quad X_2 \quad X_3$

$$X_3 = X_1 + X_2$$

Чел1 [170, 60, 230], // F1, F2, F3 для человека 1
Чел2 [180, 75, 255], // F1, F2, F3 для человека 2
Чел3 [165, 55, 220], // F1, F2, F3 для человека 3
Чел4 [190, 90, 280] // F1, F2, F3 для человека 4

Линейная комбин

$$X_3 = \overset{1}{\lambda} \cdot X_1 + \overset{1}{\lambda} \cdot X_2 \qquad \lambda \in R$$

ранг $2 < 3$

Мультиколлинеарность – предельный случай коллинеарности

Коллинеарность признаки имеют высокую корреляцию

$$
\begin{array}{cc}
X_1 & X_2 \\
\end{array}
$$

$$A = \begin{bmatrix} 14 & 28 \\ 28 & 56 \end{bmatrix} = \overset{784}{14 \cdot 56} - \overset{784}{28 \cdot 28} = 0$$

$$X_2 = X_1 \cdot 2$$

$$\frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}^T \qquad \det(A) = 0$$

inv

np.linalg.matrix_rank(X) и np.linalg.det(X.T @ X)

correlation_matrix = income.corr() корреляция между столбцами, между фичами

$$\theta = (X^T X)^{-1} X^T y$$

$$X^T X \theta = X^T y$$

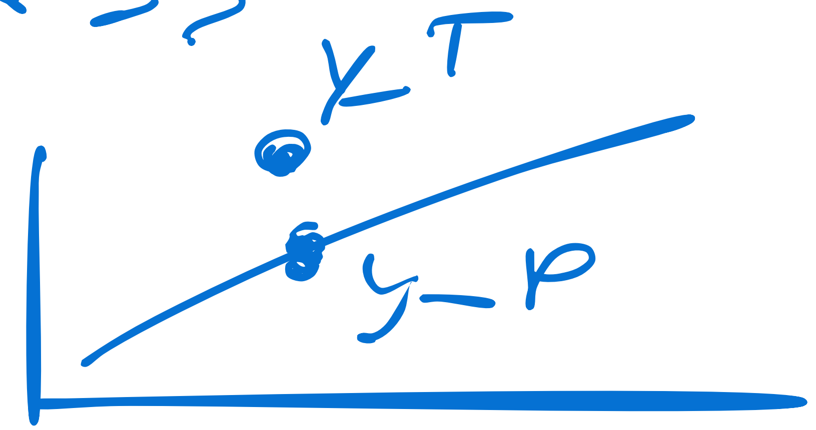
1. $y = X\theta + \varepsilon$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_d \\ x_0 & x_1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_0 & x_1 & \vdots & x_{nd} \end{bmatrix}$$

$$n\begin{bmatrix}1 & x_1 & x_2\\ 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & x_1 & x_2\end{bmatrix}_{j} \times \begin{bmatrix}\theta_0\\ \theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \varepsilon_4\end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{bmatrix}}$$

Функция потерь Loss

$$\varepsilon = \overset{y\_p}{X\Theta} - \overset{y\_T}{y}$$



Loss L_2

$$SSE = \sum (y - X\theta)^2$$

$$MSE = \frac{1}{2n} \sum (y - \theta X)^2$$

МНК

$$\theta = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

$$\varepsilon = Y - \hat{y} = y - X\theta$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i^T \theta)^2$$

$$\varepsilon = y - X\theta$$

сумму квадратов всех элементов этого вектора

$$SSE = \varepsilon^T \varepsilon = (\underset{n \times 1}{y - X\theta})^T \overset{1 \times n}{(y - X\theta)}$$

$$\underbrace{(y - X\theta)^T (y - X\theta)} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$$

Матричная форма суммы квадратов ~~ошибок~~ ошибок

$$(y - X\theta)^T (y - X\theta)$$

1. квадрат разности

$$y^T y - y^T (X\theta) - (X\theta)^T y + (X\theta)^T (X\theta)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A^T B = B^T A$$

$$A^T B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 11$$

$$B^T A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 11$$

$$y^T y - \underbrace{(X\theta)^T y} - \underbrace{(X\theta)^T y} + (X\theta)^T (X\theta)$$

$$y^T y - 2(X\theta)^T y + (X\theta)^T (X\theta)$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$y^T y - 2X^T \theta^T y + X^T \theta^T X \theta$$

$$y^T y - 2\theta^T X^T y + \theta^T X^T X \theta$$

$$\nabla J(\theta) \left(y^T y - 2\theta^T X^T y + \theta^T X^T X \theta \right)$$

$$\nabla J(\theta) = \frac{d\, y^T y}{d\theta} = 0 \qquad 2X^T X \theta$$

$2A\theta^*$

$X = X^T$

симметрич

$$\nabla J(\theta) = \frac{d(-2\theta^T X^T y)}{d\theta} = \boxed{-2X^T y}$$

$$-2\theta^T \underbrace{X^T y}_{m\times n \quad m\times 1} = -2X^T y$$

$$[\quad][\quad] = m\times 1$$

$$R^{m\times 1}$$

$$\theta^T\left(R^{m\times 1}\right) = 1\times 1 = \text{число}$$

→ вектор-строка

$$-2\theta^T X^T y = a^T \theta \Rightarrow 1 \times 1 = \text{число}$$

1. ассоциативность матричного умнож

$$\theta^T (X^T y) = (X^T y)^T \theta =$$

$m \times 1$

$[\;]\;[\;] = |X|\; m \times n \Rightarrow n \times m$

$n \times 1 - a \rightarrow a^T \theta$

$$a^T\theta = \nabla_\theta (a^T\theta) =$$

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \qquad a^T\theta = a_1\theta_1 + a_2\theta_2 \cdots a_n\theta_n$$

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix} \qquad \nabla_\theta (a^T\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial (a^T\theta)}{\partial \theta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial (a^T\theta)}{\partial \theta_n} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1}\left(a_1\theta_1 + \cancel{a_2\theta_2} \cdots\right) = a_1$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_2} = a_2$$

$$\nabla_\theta (a^T\theta) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_n} = a_n$$

$$\theta^T X^T X \theta \qquad x = \theta$$

$$\frac{d(x^T A x)}{dx} = 2Ax \qquad \boxed{2X^T X \theta}$$

$$A = X^T X$$

$X^T X$ — симметрична

$$\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & y \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad X^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 5 = 35$$
$$1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 = 44$$

$$X^T X = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 & 44 \\ 44 & 56 \end{bmatrix}$$

$$-2X^T y = -2X^T X\theta \quad \Big| -1$$

$$2X^T y = 2X^T X\theta \quad \Big| \, 2$$

$$\boxed{X^T y = X^T X\theta}$$ — нормальные уравнения

$$\theta X^T X = X^T y \quad \Big| \, (X^T X)^{-1}$$

$$\theta \underbrace{\boxed{X^T X \cdot (X^T X)^{-1}}}_{1} = (X^T X)^{-1} X^T y$$

$$\theta = (X^T X)^{-1} X^T y$$

$+$

$$\theta = (X^T X)^{-1} X^T y$$

CAAY

$$A\theta = b \; ; \quad \underset{n \times k}{A} x = b$$

$$A = \begin{bmatrix} \vdots & & & \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_k \\ \vdots & & & \end{bmatrix} \quad n \times k$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

линейно матричное уравнение

$$A \quad X = b$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad n \times k$$

$$A = X^T X \qquad \Theta = (X^T X)^{-1} X^T y$$

$$b = X^T y$$

Θ ~~x^2~~ вектор параметров

$AX = b \mid A^{-1}$ обратимая квадратная матрица

$\underbrace{A^{-1}A}X = A^{-1}b$

I ед. матрица

$\Theta = A^{-1}b$

$I\Theta = \Theta$

$X = A^{-1}b$

Решим матричное уравнение

$$Ax = b \mid A^{-1}$$

$$\overset{I}{\cancel{A^{-1}A}}\,x = A^{-1}b$$

$$X = A^{-1}b$$

Решим систему

$$\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & y \\ \end{array}$$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}} \quad \underset{b}{\begin{bmatrix} 6 \\ 14 \end{bmatrix}}$$

$$3\theta_0 + 6\theta_1 = 6$$

$$6\theta_0 + 14\theta_1 = 14$$

из 1

$$\theta_0 = 2 - 2\theta_1$$

$$6(2 - 2\theta_1) + 14\theta_1 = 14$$

$$12 - \overbrace{\cancel{12\theta_1} + \cancel{14\theta_1}}^{2\theta_1} = 14$$

$1 \quad 2 + 2\theta_1 = 14$

$2\theta_1 = 14 - 12 \quad 2$

$2\theta_1 = 2 \quad | 2$

$$\boxed{\theta_1 = 1}$$

$Ax = b$

$\theta_0 = 2 - 2\theta_1$

$\theta_0 = 2 - 2(1)$

$\theta_0 = 2 - 2$

$\theta_0 = 0$

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$A \qquad x \qquad b$$

CλAY

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$A\Theta = b$

Метод Гаусса

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & y \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 13 \end{bmatrix}$$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 8 \\ 13 \end{bmatrix}$

Расш. матрица

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 13 \end{array}\right]$$

$R_2 \leftarrow R_2 - \frac{1}{2} R_1$

$$\begin{array}{rccc} & 1 & 3 & 13 \\ - & 1 & 0{,}5 & 4 \\ \hline & 0 & 2.5 & 9 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 8 \\ 0 & 2.5 & 9 \end{array}\right]$$

Обратный ход

$$\overset{0}{\cancel{\theta_1 0}} + \theta_2 2.5 = 9 \quad | : 2.5$$

$$\theta_2 = 3.6$$

$$2\theta_1 + 3.6 = 8 \Rightarrow 2\theta_1 = 4.4 \quad | : 2 \quad \theta_1 = 2.2$$