hw 02.01. Math Solved

Математ. анализ (Пределы)

1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt[3]{7n} - \sqrt[4]{81n^8-1}}{(n+4\sqrt{n})\cdot(\sqrt{n^2-5})} =$$

$$= \frac{\infty - \infty}{\infty} = \text{неопределённость вида } \frac{\infty-\infty}{\infty}$$

предел разности двух бесконечно больших функций

Разделим числитель и знаменатель на n^2:

$$\frac{\dfrac{n\sqrt[3]{7n} - \sqrt[4]{81n^8-1}}{n^2}}{\dfrac{(n+4\sqrt{n})(\sqrt{n^2-5})}{n^2}} =$$

$$\boxed{n\sqrt[3]{7n} = \sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{n^3\cdot n} = \sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{n^4} = \sqrt[3]{7}\cdot n^{\frac{4}{3}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\sqrt[3]{7}\cdot n^{\frac{4}{3}}}{n^2} - \dfrac{\sqrt[4]{81n^8-1}}{\sqrt[4]{n^8}}}{\dfrac{n+4\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}\cdot\dfrac{\sqrt{n^2-5}}{\sqrt{n^2}}} =$$

$$\frac{\cancel{n^{\frac{4}{3}}}\ 1}{n^2} = \frac{1}{n^{2-\frac{4}{3}}} = \frac{1}{n^{1\frac{3}{3}-1\frac{1}{3}}} = \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overset{0}{\frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{n^2}}} - \sqrt[4]{81-\overset{0}{\frac{1}{n^8}}}}{\left(1+\underset{0}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\right)\cdot\sqrt{1-\underset{0}{\frac{5}{n^2}}}} =$$

предел числа делённого на $\infty = 0$

$$\cancel{\lim_{n\to\infty} \frac{0 - 0}{}} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{0-\sqrt[4]{81}}{1\cdot 1} = \sqrt[4]{3^4} = -3$$

Ответ: неопределённость вида $\frac{\infty-\infty}{\infty}$ в данном примере равна $\underline{-3}$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n - 2^n}{3^{n-1} + 2^n} = \dfrac{\infty}{\infty}$

Разделим числитель и знаменатель на 3^n

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{3^n - 2^n}{3^n}}{\dfrac{3^{-1}\cdot 3^n + 2^n}{3^n}} = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n\,\to 0}}{3^{-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n\,\to 0}} = \frac{1}{3^{-1}} = 3$$

Ответ: неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$

$= \underline{3}.$

3) $\lim\limits_{x\to \frac{5}{2}} \frac{2x^2-9x+10}{2x-5}$

$$\frac{\cancel{2}\cdot\frac{25}{\cancel{4}\,2}-9\cdot\frac{5}{2}+10}{2\cdot\frac{5}{2}-5} = \frac{\frac{25}{2}-\frac{45}{2}+10}{0} =$$

$$= \frac{-\frac{20}{2}+10}{0} = \frac{-10+10}{0} = \frac{0}{0}$$

Предел с неопределённостью вида $\frac{0}{0}$

Из формулу сокращенного умножения (теорема Виета) получаем:

$$2x^2-9x+10$$

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$D = b^2-4ac = 81-4\cdot\overset{80}{2\cdot 10} = 1$$

$$x_1, x_2 = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} \qquad x_1, x_2 = \frac{9\pm 1}{4}$$

$$x_1 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \qquad x_2 = \frac{8}{4} = 2$$

$$2\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)(x-2)$$

Scanned with AnyScanner

$$\lim_{x\to\frac{5}{2}} \frac{2x^2-9x+10}{2x-5} =$$

$$= \frac{2\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)(x-2)}{(2x-5)} = \frac{\cancel{(2x-5)}(x-2)}{\cancel{2x-5}}$$

$$\lim_{x\to\frac{5}{2}}(x-2) = \frac{5}{2}-2 = 2\frac{1}{2}-2 =$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\frac{5}{2}}(x-2) = \frac{1}{2}$$

Ответ: неопределённость вида $\frac{0}{0}$ в данном примере $= \frac{1}{2}$.

4) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2} = \dfrac{\sqrt[3]{-2-6}+2}{-2+2}$ $\quad -\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[3]{2^3}$

$= \dfrac{-2+2}{-2+2} = \dfrac{0}{0}$

Умножим и числитель и знаменатель на сопряженное выражение

$$\lim_{x\to -2} \frac{\left(\sqrt[3]{x-6}+2\right)}{(x+2)} \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{x-6}-2\right)^2}{\left(\sqrt[3]{x-6}-2\right)^2}.$$

$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{\left(\sqrt[3]{x-6}+2\right)\left(\left(\sqrt[3]{x-6}\right)^2-2\cdot\sqrt[3]{x-6}+4\right)}{(x+2)\left(\left(\sqrt[3]{x-6}\right)^2-2\cdot\sqrt[3]{x-6}+4\right)}$$

$\sqrt[3]{(x-6)^2}$

$$\boxed{(a+b)(a^2-2ab+b^2) = a^3+b^3}$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{\left(\sqrt[3]{x-6}\right)^3+2^3}{(x+2)\left(\sqrt[3]{(-8)^2}+2\cdot\sqrt[3]{8}+4\right)} =$$

64, 4^3, 4; 2^3, 4

$$\lim_{x\to -2} \frac{x-6+2^3}{(x+2)(4+4+4)} = \frac{(x+2)}{(x+2)\,12}$$

12

$$\frac{1}{12}\lim_{x\to-2}\left(\cancel{\frac{x+2}{x+2}}\right)=\frac{1}{12}$$

Ответ: неопределённость вида $\frac{0}{0}$ в данном примере $=\frac{1}{12}$.

Scanned with AnyScanner