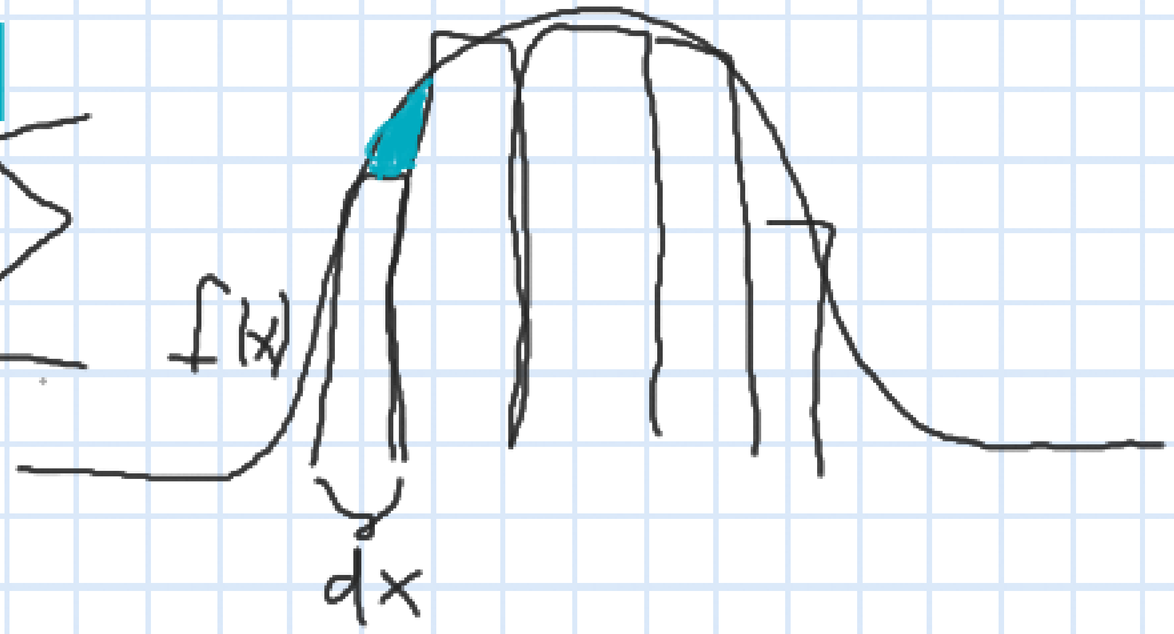
Интегралы

Интегральное исчисления

$$\int \approx \sum$$



Неопределенный интеграл -
подинтегральное выражение

первообразная

$$\int f(x)dx = F(x) + C_{const}$$

знак интеграла, подинтегральная функция, дифференциал =

dx - это диффренуиал по переменной X, тк аргумент функции f(x) - это X. диффренуиал - это бесконечно малая прибавка(приращение) к аргументу. Он не является числом - это символ. dx !=1. Он постоянно меняется.

dx - это ширина каждого эл-та в бесконечной сумме, которая составляет интеграл. f(x) - длина прямогульника. Интеграл - сумма площадей прямоугольников.

Ряд тейлора - разложение функции на полином. Используется для аппроксимации сложных функций. Изучение функции в окрестности точки

Геометрический смысл интеграла - площадь под кривой.

$F(x) + C$ - МНОЖЕСТВО ПЕРВООБРАЗНЫХ ФУНКЦИЙ

$F(x)$ первообразная

ПЕРВООБРАЗНАЯ функции = антипроизводная , взяв от которой производную, получишь подинтегральную функцию.

Производная какой функуии дает функцию

const

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \Rightarrow -\cos x + \sin 2;\ -\cos x - 4;\ -\cos x - e$$

$$(F(x)+C)' = f'(x) + 0 = f(x) \qquad \int f(x)\,dx$$

$$(-\cos x + C)' = -(-\sin x) + 0 = \sin x$$

Свойства линейности в интегральном исчислении

1. $\int ku\,dx = k\int u\,dx$
2. $\int (u \pm v)\,dx = \int u\,dx \pm \int v\,dx$

$$\int \left(x + \sqrt{x} - 3x^5 + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{\sin^2 x} + \underset{\text{const}}{\operatorname{tg} 5}\right) dx$$

$$= \int x\,dx + \int \sqrt{x}\,dx - 3\int (x^5)\,dx + 2\int \frac{1}{x^3}\,dx - \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx + \operatorname{tg} 5 \int dx$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x^{1+1}}{1+1} = \frac{x^2}{2} \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - 3 \cdot \frac{x^6}{6} + 2 \cdot \frac{x^{-3+1}}{-2} + \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg}(5) \cdot x =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} x^6 - x^{-2} + \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg}(5) \cdot x =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^6}{2} - \frac{1}{x^2} + \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg}(5) \cdot x + C$$

Интегралы, которые не берутся. Решение конечно

$$\int e^{-x^2}dx$$ — Интеграл Пуассона

$$\int \sin x^2 dx, \int \cos x^2 dx$$ — Интерралы Френеля

$$\int \frac{dx}{\ln x}$$ — Интегральный логарифм

$$\int \frac{e^x dx}{x}$$ — Интегральная экспонента

$$\int \frac{\sin x dx}{x}$$ Интегральный синунс

$$\int \frac{\cos x dx}{x}$$ — Интегральный косинус

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad \int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

1) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

2) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$

Проверка неопределенного интеграла через диффекренциал

$$d\left(\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^6}{2} - \frac{1}{x^2} + ctg\,x + tg5\cdot x + C\right) =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^6}{2} - \frac{1}{x^2} + ctg\,x + tg5\cdot x + C\right)' \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}(x^2)' + \frac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}})' - \frac{1}{2}(x^6)' - (x^{-2})' + (ctg\,x)' + tg5(x)' + (C)'\right]dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}\cdot 2x^1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\cdot 6x^5 - (-2)x^{-3} + \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) + tg5\cdot 1 + 0\right]dx =$$

$$= \left(x + \sqrt{x} - 3x^5 + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{\sin^2 x} + tg5\right)dx$$

$$d(\ \ \ \ \ \ ) = dV = d[f(x)]$$

Диф

1) d убрали

2) d x справа, + ( )'

$d(2x-1) = (2x-1)'dx = (2-0)dx = 2$

$\int x^2(3+4x)^2 dx = \int x^2(9+24x+16x^2)dx =$

$\cancel{\int uv\,dx = \int u\,dx \cdot \int v\,dx}$, $\cancel{\int \frac{u}{v}\,dx = \frac{\int u\,dx}{\int v\,dx}}$

$$\int(9x^2+24x^3+16x^4)\,dx = 9\int x^2\,dx + 24\int x^3\,dx + 16\int x^4\,dx =$$

$$= \frac{9\cdot x^3}{3} + \frac{24\cdot x^4}{4} + \frac{16x^5}{5} + C = 3x^3 + 6x^4 + \frac{16}{5}x^5 + C$$

$$\int x(1-2x)^3\,dx = \int x\left(1^3 - 3\cdot 1^2\cdot 2x + 3\cdot 1(2x)^2 - (2x)^3\right)dx =$$

$$= \int x(1-6x+12x^2-8x^3)\,dx = \int x\,dx - \int 6x^2\,dx + \int 12x^3\,dx - \int 8x^4\,dx =$$

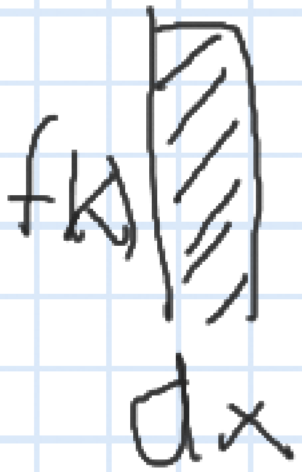
$$= \frac{x^2}{2} - \frac{6x^3}{3} + \frac{12}{4}x^4 + \frac{8\cdot x^5}{5} + C \quad +$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

План урока 22.03 :

1. Свойства линейности ✓
2. Подведение фунции под знак интеграла ✓
3. Метод замены переменной
4. Интегрирование по частям ✓
5. Тригонометрический интеграл
6. Определнный интеграл
7. Несобственный интегрвал

$$S = f(x)\,dx$$



Базовые свройства интеграла:

1) $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$ 2) $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\cdot dx$

Свойства линейности:

1) $\int k f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ 2) $\int (f(x)+f(g))\,dx = \int f(x)\,dx + \int f(g)\,dx$

Подведение функции под знак дифференциала

$d(2x-1) = (2x-1)'\,dx = 2\,dx$ $(2x)' = 2\cdot 1\cdot x^{1-1} = 2\cdot 1 = 2$

$dx = \frac{1}{2}\,d(2x-1)$

$\int \sin(3x+1)\,dx = \frac{1}{3}\int \sin(3x+1)\,d(3x+1) =$ $d(3x+1) = (3x+1)'dx = 3\,dx$

$= \frac{1}{3}\int \sin(3x+1)\cdot(3x+1)'\,dx = \frac{1}{3}\int \sin(3x+1)\cdot 3\,dx = \int \sin(3x+1)\,dx$ $dx = \frac{d(3x+1)}{3}$

$$\int \sin(3x+1)\,dx = \frac{1}{3}\int \sin(3x+1)\,d(3x+1) =$$
$$= -\frac{1}{3}\cos(3x+1) + C$$

Метод замены перемнной .

$$\int \sin(\underbrace{3x+1}_{t})\,\underbrace{dx}_{\frac{dt}{3}} = \frac{1}{3}\int \sin t \cdot dt = -\frac{1}{3}\cos t + C = -\frac{1}{3}\cos(3x+1) + C$$

$$t = 3x+1 \qquad dt = dy = f(x)'\,dx$$
$$dt = (3x+1)' \cdot dx = 3dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{3}$$

$$\int \sin(3x+1)\,dx = \frac{1}{3}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{3}\cos t + C = -\frac{1}{3}\cos(3x+1) + C$$
$$dt = 3dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{3}$$

Интегрирование по частям

$$\cancel{\int uv\,dx = \int u\,dx \cdot \int v\,dx}$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Ex: $\int \underbrace{\ln x}_{u}\, \underbrace{dx}_{v}$, $\int x e^{x} dx$, $\int (x^2 - 2x + 5) e^{-2x} dx$

1) $\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$

$u = \ln x \Rightarrow du = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx$

$dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x$

$u = \ln^2 x \Rightarrow du = (\ln^2 x)' dx = 2\ln x (\ln x)' dx = \frac{2\ln x\, dx}{x}$

$dv = x\,dx \Rightarrow v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$

2) $\int \underbrace{x}_{}\, \underbrace{\ln^2 x}_{u}\, \underbrace{dx}_{v} = \frac{x^2 \ln^2 x}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{2\ln x\, dx}{x} = \frac{x^2 \ln^2 x}{2} - \int x\ln x\, dx = (*)$

$$\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$$

$$u = \ln x \Rightarrow du = (\ln(x))'\,dx = \frac{dx}{x}$$

$$dv = x\,dx \Rightarrow v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$$

$$(*) = \frac{x^2\ln^2 x}{2} - \frac{x^2\ln x}{2} + \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2(2\ln^2 x - 2\ln x + 1)}{4} + C$$

+

$$\int \underbrace{(x-2)}_{u}\,\underbrace{e^{2x}\,dx}_{v}$$

$$u = x-2 \Rightarrow du = (x-2)'\,dx = dx$$

$$dv = e^{2x}\,dx \Rightarrow v = \int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}$$

Неопред интеграл от тригонометрической формулы

$$\int \sin 5x \cdot \sin 7x\,dx = \int\frac{\cos(5x-7x)-\cos(5x+7x)}{2}\cancel{dx} = \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx -$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$-\frac{1}{2}\int \cos(12x)\,dx =$$

Определенный интеграл (инт Риммана) - по

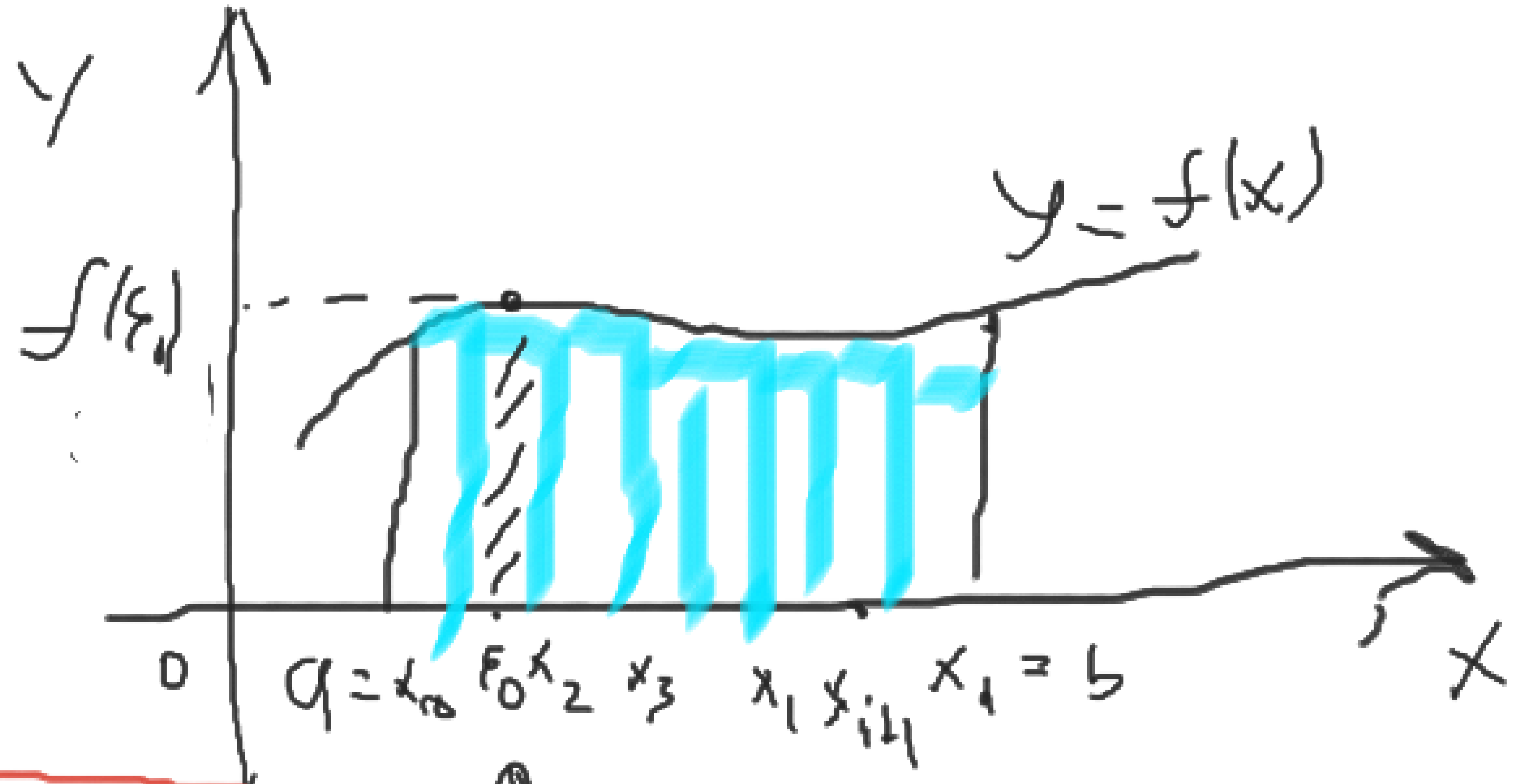
1. Интеграл Риммана(определенный интеграл)
2. Ф-ла Ньютона Лейбница
3. Основные правила интегрирования
4. Вычисление площадей с пом. опред.интеграла

1) $\int_a^b f(x)\,dx$

$\Delta x = dx$

$y = f(x)$, $f(x) > 0$

$[a, b]$



$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

предел интегральной суммы Риммана - ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Римман формализовал флрмулу Ньютона Лейбница и предложил оперировать пределом интегральной суммы. Те разбивать площадь интеграла(под крифвой) на предельное число прямоугольников. При сложении всех прямоугольников мы получаем интегральную сумму - ИНТЕГРАЛ РИММАНА.

Ф-ла Ньютона Лейбница устанавливает взаимосвязь между формулой определннного и неопределнного интеграла.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

$$\int_6^0 (1-x)dx = -\int_0^6 (1-x)dx =$$

$$\int_0^6 (x-1)dx = \frac{x^2}{2} - x\Big|_0^6 = \frac{6^2}{2} - 6 - 0 = 12$$

$$x = \frac{x^{1+1}}{1+1} = \frac{x^2}{2}$$

$$1 = x$$

опред. интеграл - это ЧИСЛО! В геометрическом смысле - площоль под кривой

Свойства определенного интеграла

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
2. $\int_a^a f(x)dx = 0$
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$
4. $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$
5. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$
6. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,\ a < c < b$

$$\int_1^2 2x^2\,dx = 2\int_1^2 x^2\,dx = 2\cdot\frac{1}{3}|x|^3\Big|_1^2 = \frac{2}{3}(2^3-1^3) = \frac{2}{3}\cdot 7 = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

Способ ЗАМЕНЫ ПЕРЕННОЙ

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+16}} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2)^2+16}} = \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right| + C$$

4^2

$a = 0$

$b = \sqrt{3}$

$t = x^2$

$dt = d(x^2+4)' = 2x\,dx \Rightarrow x\,dx = \frac{dt}{2}$

новые пределы интегрирования

$t_1 = 0^2 = 0$

$t_2 = (\sqrt{3})^2 = 3$

$$= \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{t^2+16}} = \frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+16}\right|\Big|_0^3 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln|3+\sqrt{25}| - \ln(0+\sqrt{16})\right) = \frac{1}{2}(\ln 8 - \ln 4)$$

$$\frac{1}{2}\ln\frac{8}{4} = \frac{\ln 2}{2}$$

Метод интегрирования по частям

$\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad \ln 1 = 0$

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\,tg^2x\,dx = x(tgx - x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (tgx - x)\,dx = \frac{\pi}{4}\left(\overbrace{tg\frac{\pi}{4}}^{1} - \frac{\pi}{4}\right) - 0\cdot(tg0 - 0) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} tgx\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + \ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$u = x \Rightarrow du = 1\cdot dx = dx$

$dv = tg^2x\,dx \Rightarrow v = \int tg^2x\,dx = tgx - x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} tgx\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\,dx = -\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{2}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{16} + \left(\ln\cos\frac{\pi}{4} - \ln\overbrace{\cos 0}^{1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{16} - 0^2\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{16} + \left(\ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \ln 1\right)$$

$$+ \frac{\pi^2}{32} - \frac{2\pi^2}{32} + \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Несобственные интегралы

1. Верхний бесконечный предел несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

2. Нижний бесконечный предел несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$

3. Оба бесконечных предела несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

Интегралы
ПЕРВОГО РОДА!!!!

Несобственный интеграл -
число, бесконечность, несуществование интеграла

Интегралы ВТОРОГО РОДА!

$\int_a^b f(x)dx$ визуально имеет вид попределнного интеграла. НО функция его не определена в точке a V b или в a и b одновременно или во внутренних точках отрезка. $[a, b]$

несобств интеграл сходится - те = ЧИСЛУ
несобств интеграл расходится - те = inf
Если функция непрерывна - это не значит, что интеграл су

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=a}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

предел интегральной суммы Римана

Алгоритм решения НЕСОБСТВЕННОГО ИНТЕГРАЛА:

1. Используем формулу Ньютона Лейбница

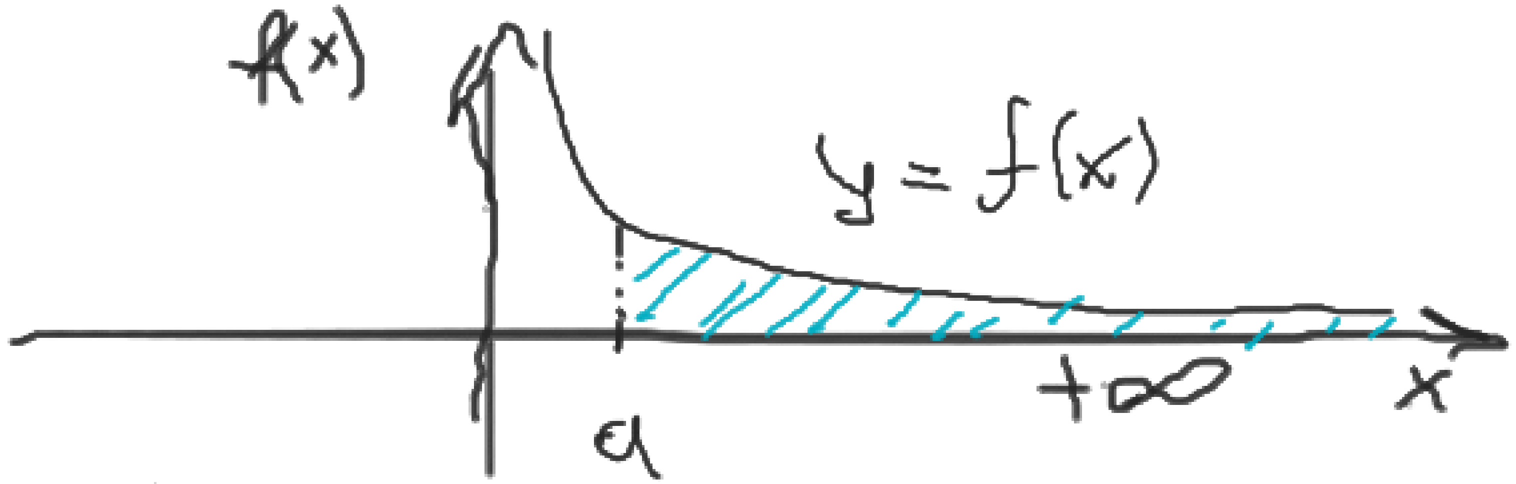
$$\int_b^a f(x) = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Алгоритм.

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(x)\Big|_a^b = \lim_{b\to+\infty}(F(b)-F(a))$$

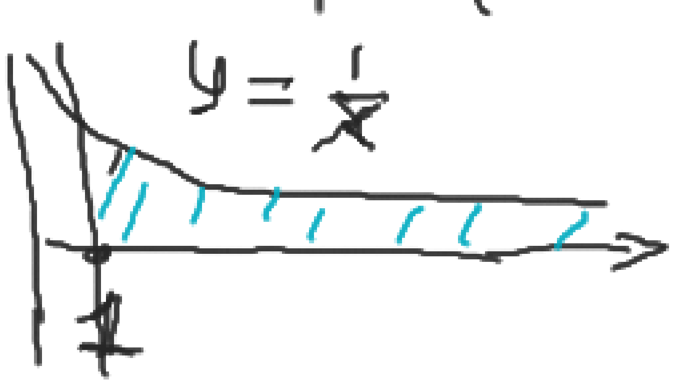
$\ln\infty=\infty$ $\ln 1 = 0$

$f(x)$ — непрерывна на $[a;+\infty) \Rightarrow$ Интеграл Первого рода



Fx

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \ln|x|\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}(\underbrace{\ln b}_{\to+\infty} - \underbrace{\ln 1}_{0}) =$$



$y=\frac{1}{x}$ непрерывна $[1;+\infty)$ $= +\infty$ — расх.

$$\int_{-\infty}^{b} e^{-x}dx = -\lim_{a\to-\infty}(e^{-x})\Big|_a^0 = -\lim_{a\to-\infty}(e^0 - e^{-a}) = -1 - e^{+\infty} = +\infty$$

$\int e^x = e^x + C$

$\int e^{2x} = e^{2x}$

$\int e^{-a} = e^{-a}$

$\bar{e}^x$

$$(-e^{-x})' = \frac{1}{k}e^{kx} + C$$

$$-\frac{1}{1}\cdot -e^{-x} = +e^{-x}$$

$$(-e^{-x})' = -1\cdot -e^{-x} = e^{-x}$$

непрерывна от (-inf; 0).=> Инт 1 рода