Excel

Первообразная и неопред. интеграл ($\int$)

Ф-я $F(x)$ - первообр-я для ф-ции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если $\forall x \in [a;b]$ вып-ся равенство $F'(x) = f(x)$

Теорема 1.

Неопред. $\int$ ф-ции $f(x)$ - наз-ся совокупность всех ее первообразных на отрезке $[a;b]$ и обозн. символом $\int f(x)dx$.

переменная интегрирования

$$\underbrace{\int \underbrace{f(x)}_{\text{подинтегр. ф-ция}} dx}_{\text{подинтегральное выраж-е}} = \underbrace{F'(x)}_{\text{первообразная}} + C \leftarrow \text{произвольная постоянная}$$

Теорема 2.

Если $f(x)$ - непрерывна на $[a;b]$, то ~~бе~~ $\exists$ первообр-я и $\Rightarrow \exists$ неопред. $\int$

Интегрирование - операция обратная дифференцир-ю.

Свойства неопред. $\int$.

1° $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

2° $d\left(\overbrace{\int f(x)dx}^{\text{неопред. интеграл}}\right) = f(x)dx$

3° $\int dF(x) = F(x) + C$

4° $\int k\cdot f(x)dx = k\int f(x)dx$, k - const

5° $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

4° и 5° - линейные св-ва $\int$.

Теорема инвариантности формул интегрирования:

6° Если $\int f(x)dx = F(x)+C$, то и $\int f(u)du = F(u)+C$, где $u=\varphi(x)$ - произвольная ф-я, имеющая непрерывную производную.

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C, \quad a\neq 0$$

6° - Инвариантность ф-лы интегриров-я

Т.е. ф-ла $\int$ может ~~прого~~ принимать независ. перем-го или ф-цию от независ. перем-ной, имеющую непрерывную производную

Основные методы интегрирования

Пример №1.

$$\int\left(2\sin x - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{5}{25+x^2}\right)dx = \int 2\sin x\,dx - \int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx + \int\frac{5dx}{25+x^2} =$$

$$= 2\int \sin x\,dx - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x}} + \frac{5}{1}\int\frac{dx}{25+x^2} =$$

$$= 2(-\cos x)+C_1 - \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x}+C_2 + 5\cdot\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{x}{5}+C_3 = -2\cos x - \sqrt{x} + \operatorname{arctg}\frac{x}{5}+C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = dx \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = dx \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \cancel{dx}\ \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$$

$$\int \frac{dx}{5^2 + x^2} = \frac{1}{5} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{5} + C$$

Пример 2.

$$\int \frac{dx}{2x^2 - 32} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - 4^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 4} \ln\left|\frac{x-4}{4+x}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{16} \ln\left|\frac{x-4}{4+x}\right| + C$$

Пример 3.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = (*)$$

$$(*) = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(*) = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx + \int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx =$$

$$= \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$$

Пример 4

$$\int \frac{5x^2+1}{x^2(4x^2+1)}\, dx = \int \frac{(4x^2+1)+x^2}{(4x^2+1)\, x^2}\, dx = \int \left(\frac{(4x^2+1)}{(4x^2+1)\, x^2} + \frac{x^2}{(4x^2+1)\, x^2}\right) dx =$$

$$= \int \frac{1}{x^2}\, dx + \int \frac{1}{(2x)^2 + 1^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x^2 + \frac{1}{4}} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} =$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1/2} \operatorname{arctg} \frac{x}{1/2} + C = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2x + C$$

Пример 5.

$$\int \frac{x^5-4x^3+2x}{x^2}\,dx = \int\left(\frac{x^5}{x^2}-\frac{4x^3}{x^2}+\frac{2x}{x^2}\right)dx = \int\left(x^3-4x+\frac{2}{x}\right)dx =$$

$$= \int x^3dx - 4\int x\,dx + 2\int \frac{1}{x}dx = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2} + 2\cdot\ln|x| + C =$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2\ln|x| + C$$

Пример 6

$$\int \sin^2\frac{x}{2}\,dx = (*)$$

Используем триг. ф-лу понижения степени.

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \Rightarrow \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2x}{2}\right) = \frac{1}{2}(1-\cos x)$$

$$(*) = \int\frac{1}{2}(1-\cos x)dx = \frac{1}{2}\int(1-\cos x)dx = \frac{1}{2}\int 1dx - \int(-\cos x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}(x-\sin x)+C$$

Пример 7

$$\int ctg^2 x\,dx = (*)$$

Исп-ем ф-лу: $1+ctg^2x = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow ctg^2x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$

$$(*) = \int\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx = \int\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx - \int dx = -ctg x - x + C$$

Пример (11)

$$\int ctg\,x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx =$$

$$= \int \frac{\frac{d(\sin x)}{dx}\cancel{dx}}{\sin x}dx =$$

$$= \int \frac{\frac{d(\sin x)dx}{dx}}{\sin x} = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} =$$

$$= \ln|\sin x| + C$$

$$\int ctg\,x\,dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \frac{dx}{\cancel{\sin} x}dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{d(\sin x)}{\sin x}dx = \ln|\sin x| + C$$

$$dy = y' \cdot dx$$

$$d(\cancel{\cos x}\ \sin) = (\cancel{\cos}\ \sin x)' dx$$

$$d(\sin x) = \cos x\,dx$$

$$\cos x = \frac{d(\sin x)}{dx}$$

Пример (12)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}} = ^*$$

* на $\sqrt{x} + \sqrt{x+1}$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) = x - (x+1) = x - x - 1 = -1$$

$$\int x^n dx = \int \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Если переменная $\sqrt{x+1}$, то вносим ее под знак диф-ла

$$dy = y'dx; \quad d(\sqrt{x+1}) = (x+1)'dx$$

$$d(x+1) = 1 \cdot dx$$

$$dx = d(x+1)$$

$$= -\int (\sqrt{x} + \sqrt{x+1})dx =$$

$$= -\left(\int \sqrt{x}dx + \int \sqrt{x+1}dx\right) =$$

$$= -\int \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \int \sqrt{x+1}\,d(x+1) =$$

$$= -\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{(x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = -\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C =$$

$$= -\frac{2}{3}\left(\sqrt{x^3} - \sqrt{(x+1)^3}\right) + C$$

Пример (17)

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5-x^2}} =$$

$$\int x \cdot (5-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

$$x(5-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

Сканировано с CamScanner

Демидович

7.1. $2x^7 = \int 2x^7 dx = 2\int x^7 dx = 2\cdot\frac{x^{7+1}}{8}+C = \frac{1}{4}x^8 + C$

7.2. $4\sqrt[3]{x} = 4\int x^{\frac{1}{3}}dx = 4\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{4}{3}}+C = 4\cdot\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C = 3\sqrt[3]{x^4}+C$

7.3 $\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2} = \int(3x^{-1}+5x^{-2})dx = 3\int x^{-1}dx + 5\int x^{-2}dx = 3\ln|x| + 5\cdot\frac{1}{x} + C$

7.4 $\frac{x^3+5x^2-1}{x} = \frac{x^3}{x}+\frac{5x^2}{x}-\frac{1}{x} = x^2+5x-x^{-1} = \int(x^2+5x-x^{-1})dx$

$= \int x^2dx + \int 5x\,dx - \int x^{-1}dx = \frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 - \ln|x| + C$

7.5. $\frac{(\sqrt{x}+1)^3}{x\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x})^3+3(\sqrt{x})^2\cdot 1+3\sqrt{x}\cdot 1^2+1^3}{\sqrt{x\cdot x^2}} =$ $\sqrt{x^3}$

$= \cancel{\frac{(x^{\frac{1}{2}})^3}{x^{\frac{3}{2}}}} + \frac{3(x^{\frac{1}{2}})^2}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{3x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = \int(3x^{-\frac{1}{2}}+3x^{-1}+x^{-\frac{3}{2}})dx =$

$= 3\int x^{-\frac{1}{2}}dx + 3\int x^{-1}dx + \int x^{-\frac{3}{2}}dx = \frac{3x^{-\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}} + 3\ln|x| + \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{1}{2}} + C =$

$= 6\sqrt{x} + 3\ln|x| + \frac{2}{\sqrt{x^3}} + C$

7.6 $1-2\sin^2\frac{x}{2} = \int \sin 2x =$

7.7. $\int \frac{1}{\sqrt{a+bx}}\,dx = \int (a+bx)^{-\frac{1}{2}}dx =$

$= \frac{1}{b}\int (a+bx)^{-\frac{1}{2}} d(a+bx) = \frac{2}{b}(a+bx)^{\frac{1}{2}} + C$

$\int x^{-\frac{1}{2}}dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C$

$d(a+bx) = (a+bx)'dx$

$d(a+bx) = b\,dx$

$dx = \frac{d(a+bx)}{b}$

7.8. $\int e^{2-3x}\,dx =$

$= -\frac{1}{3}\int e^{2-3x} d(2-3x) = -\frac{1}{3}e^{2-3x} + C$

$\int e^x dx = e^x + C$

$d(2-3x) = (2-3x)'dx$

$dx = -\frac{1}{3}d(2-3x)$

Пример с экзамена:

$\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx =$

$= \frac{1}{t}\int \frac{t-1}{t+1}\,dt = \int \frac{t-1}{t(t+1)}\,dt = I$

$I = \int\left(-\frac{1}{t} + \frac{2}{t+1}\right)dt = -\int \frac{1}{t}dt + 2\int \frac{1}{t+1}dt$

$d(t+1) = dt$

$= -\ln|t| + 2\ln|t+1| + C =$

$= -\ln|\underset{>0}{e^x}| + 2\ln|\underset{>0}{e^x+1}| + C =$

$= -\ln e^x + 2\ln e^x + 1 + C =$

$= -x + 2\ln|e^x + 1| + C$

1. Замена

$e^x = t, \quad x = \ln t$

$dx = \frac{1}{t}dt$

$\frac{t-1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1}$

$t - 1 = A(t+1) + Bt$

метод частных значений

пусть $t = -1$

$t = -1: \; -2 = -B, \; B = 2$

$t = 0: \; -1 = A, \; A = -1$

$\frac{t-1}{t(t+1)} = \frac{-1}{t} + \frac{2}{t+1}$

$\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C$

Пример 2

$$\int \sqrt{1-e^{x}} \cdot \underbrace{e^{x}dx}_{-d(1-e^{x})} =$$

$$d(1-e^{x}) = (1-e^{x})' dx$$

$$d(1-e^{x}) = (\underbrace{1'}_{0} - e^{x'}) dx$$

$$d(1-e^{x}) = -e^{x}dx$$

$$e^{x}dx = -d(1-e^{x})$$

$$= -\int (1-e^{x})^{\frac{1}{2}} \cdot d(1-e^{x}) =$$

$$= -\frac{(1-e^{x})^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{3}(1-e^{x})^{\frac{3}{2}} + C$$

Пример 3.

$$\int \sqrt{e^{x}-1}\, dx =$$

Замена

$$\sqrt{e^{x}-1} = t, \quad dx = d(\ln(t^{2}+1))$$

$$e^{x}-1 = t^{2} \quad dx = \frac{1}{t^{2}+1} \cdot 2t\, dt$$

$$e^{x} = t^{2}+1$$

$$x = \ln(t^{2}+1) \quad dx = \frac{2t}{t^{2}+1} dt$$

$$\underbrace{\ln e^{x}}_{x} = \ln(t+1)$$

$$x = \ln(t+1)$$

$$= \int t \cdot \frac{2t}{t^{2}+1} dt = 2\int \frac{t^{2}}{t^{2}+1} dt =$$

$$= 2\int \frac{t^{2}+1-1}{t^{2}+1} dt =$$

$$= 2\int \frac{t^{2}+1}{t^{2}+1} dt - 2\int \frac{1}{t^{2}+1} dt =$$

$$= 2\int 1 dt - 2\int \frac{1}{t^{2}+1} dt = 2t - 2\,\mathrm{arctg}\, t + C =$$

$$= 2\sqrt{e^{x}-1} - 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{e^{x}-1} + C$$

Пример 4

$$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2}\int e^{2x} \cdot d(2x) = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

$$d(2x) = (2x)' dx$$

$$dx = \frac{1}{2} d(2x)$$

Пример 5

$$\int e^{-x} dx = -\int e^{-x} d(-x) = -e^{-x} + C$$

$$d(-x) = (-x)' dx$$

$$dx = \frac{d(-x)}{-1} = -d(-x)$$

$a = e$

$\ln(e) = 1$ $\Big| \Rightarrow \int e^{x} dx = e^{x} + C$

Список интегралов с экспонентой

1. $\int e^{cx} = \frac{1}{c} e^{cx}$

2. $\int a^{cx} dx = \frac{1}{c \ln(a)} a^{cx}, \ a > 0, a \neq 1$

3. $\int x e^{cx} dx = \frac{e^{cx}}{c^2} (cx - 1)$

4. $\int x^2 e^{cx} dx = e^{cx} \left(\frac{x^2}{c} - \frac{2x}{c^2} + \frac{2}{c^3} \right)$

5. $\int x^n e^{cx} dx = \frac{1}{c} x^n e^{cx} - \frac{n}{c} \int x^{n-1} e^{cx} dx$

6. $\int \frac{e^{cx} dx}{x} = \ln|x| + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(cx)^i}{i \cdot i!}$

7. $\int e^{ax+b} \cancel{+} C = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$

Метод подведения под знак ~~интеграла~~ дифференциала

В связи с инвариантностью ф-лы интегр-я ф-лы справедливы для независимой перем-ой и дифференц-емой ф-ции.

Пример 8.

$$\int \sin 4x\,dx = \left| dx = \frac{1}{4} d(4x) \right| = \frac{1}{4}\int \sin 4x\, d(4x) = \frac{1}{4}\cdot(-\cos 4x) + C = -\frac{1}{4}\cos 4x + C$$

$\int \sin x = -\cos x + C$

$dy = y'\cdot dx$

$d(4x) = (4x)'\,dx$

$dx = \frac{1}{4} d(4x)$

Пример

$$\int \cos \underbrace{5x}_{u}\,dx = \left| \begin{array}{l} \int \cos x\,dx = \sin x + C \\ \int \cos u\,du = \sin u + C \\ dy = y'\,dx \\ d(5x) = (5x)'\,dx = 5dx \;|:5 \\ dx = \frac{1}{5} d(5x) \end{array} \right| = \int \cos 5x \cdot \frac{1}{5} d(5x) = \frac{1}{5}\int \cos 5x\, d(5x) =$$

$$= \frac{1}{5}\sin 5x + C$$

Пример 2

$$\int \sqrt{2x+3}\,dx = \int \underbrace{(2x+3)}_{u}^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\int (2x+3)^{\frac{1}{2}}\cdot d(2x+3) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+3)^{\frac{1}{2}+1}}{\underbrace{\frac{1}{2}+1}_{\frac{3}{2}}} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(2x+3)^3} + C$$

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$dy = y'\cdot dx$

$d(2x+3) = (2x+3)'\,dx$

$d(2x+3) = 2\,dx$

$dx = \frac{1}{2} d(2x+3)$

Пример

$$\int \sqrt{2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int (2x+3)^{\frac{1}{2}}\,d(2x+3) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2(2x+3)^{\frac{3}{2}}}{3} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(2x+3)^3} + C$$

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

$$\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

$$dy = y'\,dx$$

$$d(2x+3) = 2\,dx$$

$$dx = \frac{1}{2}\,d(2x+3)$$

Пример

$$\int \frac{dx}{1+4x^2} = \int \frac{dx}{1+(2x)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{1+(2x)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

· Занесем $2x$ под знак диф-ла:

$$dy = y'\cdot dx$$

$$d(2x) = (2x)'\cdot dx$$

$$d(2x) = 2dx$$

$$dx = \frac{1}{2}\,d(2x)$$

Пример

$$\int \frac{dx}{x+1} = \int \frac{d(x+1)}{x+1} = \ln|x+1| + C$$

* Занесем $x+1$ под знак d т.к. стоит в знам-ле, по ф-ле $dy = y'\cdot dx$.

$$\int \frac{dx}{x} = \int x^{-1}\,dx =$$

$$= \frac{x^{-1+1}}{-1+1}\,dx \quad \text{абсурдно}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int x^{-1}\,dx = \ln|x| + C$$

$$dy = y'\,dx$$

$$d(x+1) = (x+1)'\,dx$$

$$d(x+1) = 1\cdot dx \qquad x^{n-1} = x^0 = 1$$

$K^{m/n} = \sqrt[n]{K^m}$

7.9. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{5^x}} dx = \int 5^{-\frac{x}{3}} dx = (*)$ (—)

Пусть $u = -\frac{x}{3}$, тогда $du = (-\frac{x}{3})' dx$

$du = -\frac{1}{3} \cdot 1\, dx \Rightarrow \cancel{-\frac{1}{3}dx}\ dx = du : (-\frac{1}{3}) = -3du$

$= (*) \int 5^u \cdot (-\frac{1}{3}) dx = -\frac{1}{3} \int 5^u du = \left| \int a^u du = \frac{a^u}{\ln(a)} \right|_u =$

$= -\frac{1}{3} \int \frac{5^u}{\ln(5)} + C = -\frac{1}{3} \frac{5^{-\frac{x}{3}}}{\ln(5)} + C = -\frac{3}{\ln(5) \cdot 5^{\frac{x}{3}}} + C$

7.6.

$\int 1 - \sin^2(\frac{x}{2}) dx = \int \cos^2(\frac{x}{2}) dx = \left| u = \frac{x}{2};\ du = (\frac{x}{2})' dx = \cancel{\frac{1}{2}dx} \Rightarrow dx = du : \frac{1}{2} = 2du \right| =$

$= 2\int \cos^2 u\, du = \left| \cancel{\int \cos^2(u) du} = \text{понизим степень } \cos^2 u = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos 2u) \right| =$

$= 2 \cdot \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2u) du = \int 1 du + \int \cos 2u\, du = \cancel{\ } \int 1du = u + C$, $\int \cos 2u\, du$. (*)

Пусть $2u = t$, тогда $dt = (2u)' du \Rightarrow du = \frac{dt}{2}$ $\Big| \Rightarrow \int \cos 2u du = \frac{1}{2} \int \cos t dt = \frac{1}{2} \sin t + C$

$\int \cos(t) dt = \frac{\sin(t)}{2} = \left| t = 2u \right| = \frac{\sin 2u}{2}$

$(*) = u + \frac{1}{2} \sin t + C = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin 2u + C = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{x \cdot 2}{2} =$

$\cancel{(*) \int \cos^2(u) du = \frac{\sin 2u}{2} + u}$

$\frac{1}{2} \int \cos(2u) du + \frac{1}{2} \int 1 du = \frac{1}{2} \frac{\sin 2u}{2} + \frac{u}{2} + \cancel{C} = \left| \begin{matrix} \text{обр. замена} \\ u = \frac{x}{2} \end{matrix} \right| = 2\int \cos^2 u du = \frac{\sin(2u)}{2} + u =$

$= \frac{\sin(x)}{2} + \frac{x}{2} + C = \frac{\sin(x) + x}{2} + C$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \Rightarrow 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$ и $1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$

$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$; $\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$