правило дифференцирования сложной функции

$$f'(t(x)) = f'(t(x)) \cdot t'(x)$$

$$u(v)' = u'(v) \cdot v'$$

$$y' = \sin(\underbrace{3x-5}_{v=})' = \cos(3x-5) \cdot 3 = 3\cos(3x-5)$$

$$y = (2x+1)^5 = 5(2x+1)^4 \cdot 2 = 10(2x+1)^4$$

$$y' = (\operatorname{arctg} \underbrace{\sqrt{x}}_{v})' = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\,(1+x)}$$

$v = \sqrt{x}$ $\qquad v=$

$y = \operatorname{arctg}(v)$

$$y' = \left(\sqrt[3]{x^2 + tg\,x + 15}\right)' = \frac{(x^2 + tg\,x + 15)^{-\frac{2}{3}}}{3} \cdot (x^2 + tg\,x + 15)' =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2 + tg\,x + 15)^2}} \cdot \left(2x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) =$$

$$= \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + tg\,x + 15)^2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2 + tg\,x + 15)^2} \cdot \cos^2 x} =$$

$$= \frac{2x\cos^2 x + 1}{3\sqrt[3]{(x^2 + tg\,x + 15)^2} \cdot \cos^2 x}$$

$$y = \frac{5}{\sqrt[5]{x+\ln x}} = \frac{5' \cdot \sqrt[5]{x+\ln x} - (5 \cdot \sqrt[5]{x+\ln x})'}{(\sqrt[5]{x+\ln x})^2} =$$

$$= \frac{0 - 5 \cdot \frac{1}{5} \cdot (x+\ln x)^{\frac{1}{5}-1} \cdot (x+\ln x)'}{\| - \|}$$

Логарифмическая производная и производная степенно-пока

1. $C' = 0$
2. $x' = 1$
3. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$
5. $\left(x^\alpha\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, x \in R$
6. $(e^x)' = e^x$
7. $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
8. $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$
9. $(\sin x)' = \cos x$
10. $(\cos x)' = -\sin x$
11. $\left(tgx\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
12. $(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
13. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$
16. $\left(arcctg\, x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$
17. $\left(sh\, x\right)' = ch\, x$
18. $(ch\, x)' = sh\, x$
19. $(th\, x)' = \frac{1}{ch^2 x}$
20. $(cth\, x)' = -\frac{1}{sh^2 x}$

$$e^{2x} = 2 \cdot e^{2x}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$\ln|y| = \ln\left|\frac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1)^2 \cdot (x+3)^5}\right|$$

$$\ln y = \frac{1}{\dfrac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1)^2 \cdot (x+3)^5}} = \frac{(x-1)^2 \cdot (x+3)^5}{\sqrt[5]{(x+4)^3}} =$$

$$= \frac{\left((x-1)^2 (x+3)^5\right)' \cdot \sqrt[5]{(x+4)^3} - (x-1)^2 (x+3)^5 \cdot \left((x+4)^{\frac{3}{5}}\right)'}{\sqrt[5]{\left((x+4)^3\right)^2}} =$$

$$= \left[\left((x-1)^2 \right)' \cdot (x+3)^5 + (x-1)^2 \left((x+3)^5 \right)' \right] \cdot \sqrt[5]{(x+4)^3}$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$$\ln y = \ln \sqrt[5]{(x+4)^3} - \ln\left((x-1)^2 \cdot (x+3)^5\right)$$

$$\ln y = \ln (x+4)^{\frac{3}{5}} - \ln (x-1)^2 + \ln (x+3)^5$$

$$\ln y = \frac{3}{5}\ln(x+4) - \left(2\ln(x-1) + 5\ln(x+3)\right)$$

$$\ln y = \frac{3}{5}\ln(x+4) - 2\ln(x-1) - 5\ln(x+3)$$

приступаем к дифференцированию

$$(\ln y)' = \left(\frac{3}{5}\ln(x+4) - 2\ln(x-1) - 5\ln(x+3)\right)'$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{3}{5}(\ln(x+4))' - 2(\ln(x-1))' - 5(\ln(x+3))'$$

$y = U$

Производная от функции заданный в неявном

Таблица производных

1. $c' = 0,$
2. $(u^n)' = nu^{n-1}\cdot u',$
3. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u',$
4. $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2}\cdot u',$
5. $(a^u)' = a^u \ln a \; u',$
6. $(e^u)' = e^u\cdot u',$
7. $(\log_a u)' = \frac{1}{u\ln a}\cdot u',$
8. $(\ln u)' = \frac{1}{u}\cdot u',$
9. $(\sin u)' = \cos u\cdot u',$
10. $(\cos u)' = -\sin u\cdot u',$
11. $(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u}\cdot u',$
12. $(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u',$

Logarithmic Derivatives (3.6)

Recall:

$e^{x+y} = e^x e^y$

$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$

$(e^x)^y = e^{xy}$

$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

$\ln(x^y) = y\ln(x)$

$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$

$\ln x = \log_e x$

$\ln a$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{3}{5}(1\cdot\ln(x+4))' - 2(\ln(x-1))' - 5\ln(x+3))'$$

$$y' = \left(\frac{3}{5(x+4)} - \frac{2}{x-1} - \frac{5}{x+3}\right)\cdot y$$

$$y' = \left(\frac{3}{5(x+4)} - \frac{2}{x-1} - \frac{5}{x+3}\right)\cdot \frac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1)^2(x+3)^5}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}, a>0, a\neq 1$$

$$(\log_a f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)\ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$(a^x)' = a^x\ln a, a>0, a\neq 1$$

$$(x^x)' = x^x(1+\ln x)$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(e^{ax})' = ae^{ax}$$

$$(e^{f(x)})' = f'(x)e^{f(x)}$$

Простые		Сложные	
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$y = U^\alpha$	$y' = \alpha U^{\alpha-1}U'$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$	$y = \frac{1}{U}$	$y' = -\frac{U'}{U^2}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{U}$	$y' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \sin U$	$y' = (\cos U)\cdot U'$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$y = \cos U$	$y' = (-\sin x)\cdot U'$
$y = tgx$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y = tgU$	$y' = \frac{U'}{\cos^2 U}$
$y = ctgx$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$y = ctgU$	$y' = -\frac{U'}{\sin^2 U}$
$y = a^x$	$y' = a^x\ln a$	$y = a^U$	$y' = U^x\ln U\cdot U'$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^U$	$y' = e^U\cdot U'$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x\ln a}$	$y = \log_a U$	$y' = \frac{U'}{U\ln a}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln U$	$y' = \frac{U'}{U}$
$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos U$	$y' = -\frac{U'}{\sqrt{1-U^2}}$
$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arcsin U$	$y' = \frac{U'}{\sqrt{1-U^2}}$
$y = arctgx$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y = arctgU$	$y' = \frac{U'}{1+U^2}$
$y = shx$	$y' = chx$	$y = shU$	$y' = chU\cdot U'$
$y = chx$	$y' = shx$	$y = chU$	$y' = shU\cdot U'$
$y = thx$	$y' = \frac{1}{ch^2x}$	$y = thU$	$y' = \frac{U'}{ch^2U}$
$y = cthx$	$y' = -\frac{1}{sh^2x}$	$y = cthU$	$y' = -\frac{U'}{sh^2U}$

Производная функции заданной неявно

$(y)' = y'$ производная от функции равна её производной

$y = f(x)$ – ф-я одной переменной

$y = 3x^4 + x^2 - 1$ – ф-я заданная в явном виде, те в левой части только y или f(x)

$3x^2 \cdot y^2 - 5x + \sin y = 3y - 1$ ф-я заданная в неявном виде. Если слева y и что-то еще

Алгорит мерешения ф-и в неявном виде:

1. Берем производные левой и правой частей
2. Используем правила линейности производной (константы за скобуи и производная от каждого члена)
3. Дифференцирование
4. В левой части собираем слагаемые, в которых есть «игрек» со штрихом
5. В левой части выносим производную за скобки
6. по правилу пропорции сбрасываем эти скобки в знаменатель правой части

$$(3x^2 \cdot y^2 - 5x + \sin y)' = (3y - 1)'$$

$$3(x^2 y^2)' - 5(x)' + (\sin y)' = 3(y)' - (1)'$$

$$(x^2 y^2)' = (x^2)' y^2 + x^2 (y^2)' = 2xy^2 + x^2 \cdot 2yy' = 2xy^2 + 2x^2 yy'$$

$$3((x^2)' y^2 + x^2 (y^2)') - 5 + \cos y \cdot y' = 3y' - 0$$

$$3(2xy^2 + x^2 \cdot 2yy') - 5 + y' \cos y = 3y'$$

$$6xy^2 + 6x^2 yy' - 5 + y' \cos y = 3y'$$

$$6x^2 yy' + y' \cos y - 3y' = 5 - 6xy^2$$

5) $(6x^2 y + \cos y - 3) y' = 5 - 6xy^2$

6) $y' = \dfrac{5 - 6xy^2}{6x^2 y + \cos y - 3}$

Производная степенно показательной функции

Сьепенно-показательная функция (СПФ) - это функция у котрой и степень и основание зависят от x

$y = x^x$ — СПФ

Навешиваем Ln на левую и правую части

$\ln y = \ln x^x$

$(\ln y)' = (x \ln x)'$ $\quad (uv)' = u'v + uv'$

$\frac{1}{y} \cdot y' = (x)' \cdot \ln x + x(\ln x)'$

$y' = \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) \cdot y$

$y' = (\ln x + 1) \cdot x^x$

Основные свойства логарифмов

1. $\log_a 1 = 0;$
2. $\log_a a = 1;$
3. $\log_a \frac{1}{a} = -1;$
4. $\log_{a^k} a = \frac{1}{k};$
5. $\log_a a^m = m;$
6. $\log_{a^k} a^m = \frac{m}{k};$
7. $\log_a bc = \log_a b + \log_a c;$
8. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c;$
9. $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b;$
10. $\log_a b^m = m \log_a b;$
11. $\log_{a^k} b^m = \frac{m}{k} \log_a b;$
12. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a};$
13. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a};$
14. $\log_a b \cdot \log_c d = \log_c b \cdot \log_a d$
15. $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

Дифференциал

Пусть y = f(x) дифференцируема на [a;b]. Те в любой точке отрезка можем взять производную.Производная = $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$$

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x$$

главная часть приращения. Линейная относительно Δx

$$\boxed{f'(x) \neq 0}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$$

$f'(x) \cdot \Delta x$ – дифференциал функции. Обознаяается dy ✓ $df(x)$ $y = f(x)$

Обознаяается

$$dy = f'(x)\Delta x$$

$y' = (x)' = 1$, $y = x$

$dy = dx = \Delta x$ $\vee$ $dx = \Delta x$ Дифференциал независимой перемнной равен приращению аргумента

$$\boxed{dy = f'(x) \cdot dx} \Big| : dx$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

$\Delta y = dy + \alpha \Delta x$ — бесканечно малая вел-на

$5 = 5 + 0{,}1$

$\Delta y \approx dy \Rightarrow f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \Delta x$

Найти dy, Δy для ф-и $dx = \Delta x$

$$y = x^2$$

$$\exists x = 20, \ \exists \Delta x = 0{,}1$$

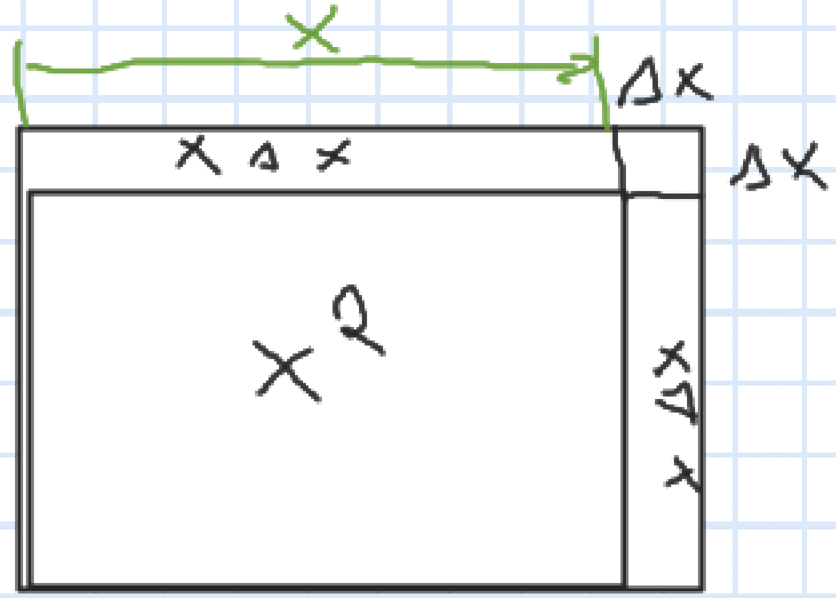
$$\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = \cancel{x^2} + 2x\Delta x + \Delta x^2 - \cancel{x^2} = 2x\Delta x + \Delta x^2$$

$$dy = f'(x)dx = (x^2)' \cdot \Delta x = 2x\Delta x$$

$$\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2 = 2 \cdot 20 \cdot 0{,}1 + (0{,}1)^2 = 4 + 0{,}01 = 4{,}01$$

$$dy = 2x\Delta x = 2 \cdot 20 \cdot 0{,}1 = 4$$

Погрешность - $0{,}01$ —— Бесконечно малая величина. Ей можно принебречь.



$\sqrt[3]{67} \approx ?$

$67 = 64 + 3$

$dy = f'(x_0) \cdot dx$

$dx \to \Delta x$

1) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$f(67) = \sqrt[3]{67}$

$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + d[f(x_0)]$

$x_0 = 64$
$\Delta x = 3$
$\Rightarrow x_0 + \Delta x = 64 + 3$

2) $f(x_0) = f(64) = \sqrt[3]{64} = 4$

$d[f(x_0)] = f'(x_0) \cdot \Delta x$

$f'(x) = (\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$

5) $f(67) = \sqrt[3]{67} \approx 4 + 0{,}0625 = 4{,}0625$

6) $\sqrt[3]{67} \approx 4{,}0625$

3) $f'(x_0) = f'(64) = \frac{1}{3\sqrt[3]{64^2}} = \frac{1}{3 \cdot 16} = \frac{1}{48}$

4) $d[f(64)] = f'(64) \cdot \Delta x$

$= \frac{1}{48} \cdot 3 = \frac{1}{16} = 0{,}0625$

$$\begin{array}{r|l} 1 & 16 \\ \hline -0 & 0{,}0625 \\ 100 & \\ -96 & \\ 4 & \end{array}$$

$\operatorname{tg} 47^\circ - ?$

1) $f(x) = \operatorname{tg}$

$$\boxed{f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + d[f(x_0)]}$$

$\operatorname{tg}(45^\circ + 2^\circ) \Rightarrow \quad x_0 = 45; \ \Delta x = 2$

По формуле перевода градусов в радианы

$x_0 = \frac{\pi}{4}$

$$\Delta x = \frac{2^\circ \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{90}$$

2) $f(x_0) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$

5) $f'(x_0) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{2}{4}} = 2$

3) $d[f(x_0)] = f'(x_0) \cdot \Delta x = 2 \cdot \frac{\pi}{90} = \frac{\pi}{45}$

dy

4) $f'(x) = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\operatorname{tg} 47^\circ = 1 + \frac{\pi}{45} = 1 + \frac{3{,}14}{45} \approx 1{,}07$

Абсолютная Погрешность вычислений

$$\Delta = |\text{точное знач} - \text{Приб знач}|$$

|Точное значение - Приближенное|

Относительная погрешность вычислений

$$\delta = \frac{|\text{точ зн} - \text{приб зн}|}{\text{точн зн}} \cdot 100$$

Процент отклонения от точного значения

Берем по модулю тк нам важно отклонение, а не его знак

$$\delta = \frac{\Delta}{\text{точн зн}} \cdot 100\ \%$$

$$f(1{,}97) = \sqrt{(1{,}97)^2 + 1{,}97 + 3} = 2{,}975046218$$

$$\Delta = |2{,}975046218 - 2{,}975| \approx 0{,}000046$$

$$\delta \approx 0{,}0016\ \%$$

Производная параметрически заданной функции

В параметрической форме производная записывается в с помощью системы уравненйи

$$\begin{cases} x = 3t+1 \\ y = t^3 \end{cases} \Rightarrow \quad x = 3t+1,\ y = t^3$$

Переменная называется параметром и может принимать значения от «минус бесконечности» до «плюс бесконечности»

Положим $t=1 \Rightarrow \begin{cases} x = 3\cdot 1+1 \\ y = 1^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$ $\quad (4; 1)$

$t = 1$

Отметим точку рна короод полскости. Эта точка = параметру t1
Выразим из первого уравнения параметр и подставим его в ур-е 2.

$$x = 3t+1 \Rightarrow 3t = x-1 \Rightarrow t = \frac{x-1}{3}$$

$$y = t^3 = \left(\frac{x-1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}(x-1)^3$$

$$\left(\frac{1}{3}\cdot(x-1)\right)^3$$

Дифференциал

$$\Delta y \approx dy$$

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\,\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta y &\approx dy \\ \Delta x &\approx dx \end{aligned}\right\} \boxed{\frac{dy}{dx} = f'(x)}$$ ← производная

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \underset{\alpha}{o(\Delta x)}$$

бесконечно малая величина стремится к 0
придельта X стремящемся к 0

$$\Delta y = \underbrace{f'(x)\Delta x}_{} + \underbrace{o(\Delta x)}_{\alpha}\cdot \Delta x$$

главная часть приращения ф-ции.
Также это дифференциал функции $\Rightarrow dy$ или $d[f(x)]$

Операция нахождения производной - ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ.
производная - тангенс угла наклона
Дифференциал (d) - бесконечно малаое приращение
функции = (прибавка к переменной)

$$dy = f'(x)\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = \alpha$$

$$\lim_{x \to k} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$ g(x)более высокогго порядка малости

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2} \quad \frac{0{,}01}{0{,}0001} = \lim \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \to k} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$ $f(x)$ более высокого порядка малости $g(x)$

если $\lim\limits_{x \to k} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, то данные функции бесконечно малые, эквивалентные функции ! $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} =$

$\sin x \sim x \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$ или $\lim \frac{\sin x}{\sin x} = 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim x = 0,$$ когда x^3 более высокого порядка малости чем квадратичная

функции имеют одинаковый порядок малости.
Отрыв =дистанция между ними одинакова и равна константе

$$\lim_{x \to k} \frac{f(x)}{g(x)} = n,\ n \notin 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$y = x$ — найдём дифференциал функции

$$dy = \underbrace{f'(x)}_{1}\,\Delta x$$

$$y' = (x)' = 1$$

$$dy = dx = \Delta x \quad \vee \quad dx = \Delta x$$

Дифференциал независисмой переменной

ширина каждого элемента в бесконечно малой сумме интеграла

$$dy = f'(x)\,dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Производная функции - отношение дифференциала функции к дифференциалу независимой переменной

Дифференциал под знаком интеграла - это бесконечно малая "прибавка" к переменной.