Аналитическая геометрия

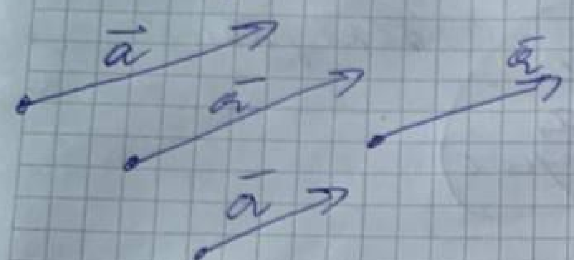
Длина нулевого вектора → $|\overline{0}| = 0$

длина/модуль ненулевого → $|\overline{AB}| = AB$

она обозначается знаком модуля

$|\overrightarrow{AB}|$, $|a|$

Свободный вектор – это множество сонаправленных отрезков равной длины:



ОДИН И ТОТ ЖЕ ВЕКТОР: если равен второму по длине и направлению

обычно имеют разные длины

Коллинеарные векторы – те, что лежат на одной прямой или параллельных прямых. Нет параллельных векторов, есть коллинеарные.

Если направление коллинеарных век. совпадают, то они являются сонаправленными.

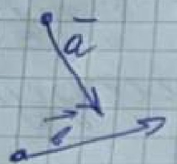
Если в разные стороны то они являются противоположно направленными.

Коллинеарность векторов обозначается $\vec a \parallel \vec b$ или детальнее:

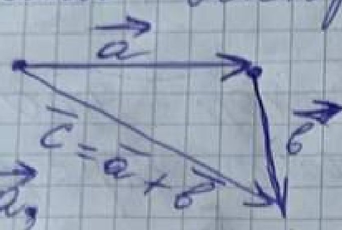
$\vec a \uparrow\uparrow \vec b$ (если сонаправленные); $\vec a \uparrow\downarrow \vec b$ (если направ. противопол.

~~Действия с векторами~~

Сложение векторов по правилу треугольников:



в силу того, что векторы свободны, отложим вектор $\vec{b}$ от конца в. $\vec{a}$;



если вектор $\vec{b}$ отложить от начала век. $\vec{a}$, то получится эквивалентное правило параллелограмма сложения векторов

это работает для суммы любого количества векторов.

Умножение вектора на число

$$\vec{a} \cdot \lambda = \vec{b} = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$$

если $\lambda \geq 0$, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены
если $\lambda < 0$, то направлены противоположно

векторы перпендикулярны = векторы ортогональны

$$\vec{i} \perp \vec{j}$$

координатные векторы или орты

ЗАПОМНИМ пока что $\Rightarrow$ векторы $\boxed{\text{базиса}}$ задают "координатную сетку"

Иногда построенный базис называют ортонормированным базисом плоскости, „орто" — потому что координатные векторы ортогональны, а „нормированный" — единичный, т. е. длины векторов этого базиса = единице.

Базис записывают в круглых скобках, внутри которых в строгой последовательности перечисляются базисные векторы, например: $(\vec{i}; \vec{j})$. Координатные векторы переставлять местами нельзя.

$$\underbrace{\vec{b} = 2\vec{i} \quad ; \quad \vec{c} = -5\vec{j}}$$

иллюстрируют правило умножения вектора на число.

$\vec{b} = 2\vec{i}$ сонаправлен с базисным $\vec{i}$

$\vec{c} = -5\vec{j}$ направлен противоположно по отношению к базисному вектору $\vec{j}$.

Вычитание это частный случай сложения, поэтому вычитание векторов мы не рассматриваем, а просто используем сложение векторов по правилу ... (треуг-ка например)

$$\vec{d} = \vec{i} + (-4\vec{j}) \quad ; \quad \vec{e} = -3\vec{i} + (-3\vec{j})$$

Разложение вида или разложение вектора в системе орт. (т.е. в системе ед. векторов)

$\boxed{\text{I вариант}}$ $\vec{v} = v_1 \cdot \vec{i} + v_2 \cdot \vec{j}$

есть ещё варианты записи:

$\boxed{\text{II вар.}}$

$\vec{a}\,(3;2)$ или $\vec{a} = (3;2)$

$\vec{b}\,(2;0)$ $\quad$ $\vec{b} = (2;0)$

$\boxed{\text{III вариант}}$

то есть в круглых скобках в строгой последовательности указываются координаты вектора.

Сами базисные векторы можно записать так:

$$\vec{i} = 1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j}$$

$$\vec{j} = 0 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j}$$

или соответств.

$\vec{i}\,(1;0)$

$\vec{j}\,(0;1)$

Ортонормированный $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ базис трёхмерного пространства.

ед. векторы данного базиса

$$\vec{i} \perp \vec{j} \; ; \; \bar{i} \perp \bar{k} \; ; \; \bar{j} \perp \bar{k}.$$

(Ось OX наклонена под углом 45° для того, чтобы складывалось визуальное впечатление пространства)

Любой вектор $\vec{v}$ трёхмерного пространства можно единственным способом разложить по ортонорм. базису

$$\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$$

или

$$\bar{a}(2; 3; 4)$$

если в разложении отсутствует 1 или 2 координатных вектора, то вместо них ставятся нули

Например.

$\vec{b} = -\bar{i} + 3\bar{k}$ запишем $\bar{b}(-1;0;3)$

$\bar{c} = 2\bar{j} - 5\bar{k}$ запишем $\bar{c}(0;2;-5)$

$\bar{d} = 3\bar{k}$ (если детально $\bar{d} = 0\cdot\bar{i} + 0\cdot\bar{j} + 3\cdot\bar{k}$) $\bar{d}(0;0;3)$

Базисные векторы записываются:

$\bar{i}(1;0;0)$, $j(0;1;0)$, $k(0;0;1)$

Практика

$A(x_1;y_1)$
$B(x_2;y_2)$ то $\overrightarrow{AB} = (x_1 - x_1)i + (y_2 - y_1)j$

пример $\bar{A}(2;1)$ $B(-2;3)$ $\overrightarrow{AB}$ - ?

$\overrightarrow{AB} = (-2-2)\bar{i} + (3-1)\bar{j} = -4\bar{i} + 2\bar{j} = (-4;2)$

Координаты точек

— это обычные координаты в прямоуг. системе координат (единичные векторы тут вообще ни при чём) каждая (·) обладает строгим местом и перемещать их куда-либо нельзя

Координаты вектора

— это его разложение по базису ($\vec{i}$; $\vec{j}$), в данном случае
$\overrightarrow{AB} = -4\vec{j} + 2\vec{j}$.

Любой вектор является свободным, поэтому при желании мы легко можем переобозначить его через $\vec{a}$ и отложить от какой-нибудь другой точки плоскости.

→ Следует отметить, что для векторов <u>можно</u> вообще не строить оси, прямоугольную систему координат, нужен лишь базис, в данном случае ортонормированный базис плоскости ($\vec{i}$; $\vec{j}$)

Запись координат точек

↳ $A(2;1)$, $B(-2;3)$

Запись координат вектора

↳ $\overrightarrow{AB}(-4;2)$

смысл координат абсолютно разный

дано точки

$A(-4;5)$ и $B(1;-3)$

найти вектори

$\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{AB} = (1+4)i + (-3-5)j$

$\overrightarrow{AB} = (5;-8)$

$\overrightarrow{BA} = \cancel{(-8;5)}\ (-5;8)$

$A(2;0)$, $B(-7;1)$, $C(4;1)$

$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{bmatrix} 11 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \end{bmatrix}$

$F(-2;-1;0)$ $E(0;-1;-2)$

$\overrightarrow{FE} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ $\overrightarrow{EF} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$A_1(10;5;-4)$
$A_2(-8;6;3)$
$A_3(1;1;-1)$
$A_4(0;0;1)$

$\overrightarrow{A_1A_3} = \begin{bmatrix} -9 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\overrightarrow{A_1A_4} = \begin{bmatrix} -10 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\overrightarrow{A_1A_2} = \begin{bmatrix} -18 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$

$AB = |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$

как найти длину отрезка?

$$|AB| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

если $A(x_1;y_1;z_1)$ $B(x_2;y_2;z_2)$

$$|AB| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Пример

длина отрезка AB - ?

$A(-3;5)$ и $B(1;-3)$

$$|AB| = \sqrt{(1+3)^2+(-3-5)^2} = 4\sqrt{5}$$

Ответ: $AB = 4\sqrt{5} = 8,94$ ед.

! Момент из школьной программы

если под корнем получается не-
удобное число, то пытаемся
вынести множитель из под корня,
проверим делитель ли число на:
4, 9, 16, 25, 36, 49 и т.д.

$A(2;3;-1)$ $B(-5;3;0)$

$|AB| = \sqrt{(-5-2)^2 + (3-3)^2 + (0+1)^2} =$

$= \sqrt{49+0+1} = \sqrt{\underset{25}{50}} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$

как найти длину вектора?

$\vec{v}(v_1; v_2)$, то его длина $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

если $\vec{v}(v_1; v_2; v_3)$, то длина $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

Пример:

$A(-3;5)$ $B(4;-3)$ $\vec{AB}$ – длина?

$\vec{AB} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix}$

$|\vec{AB}| = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{\underset{4}{80}} = \sqrt{4 \cdot 20} =$
$= \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$

designed by beSmart

Пример 6

а) $A(0;2;5)$ $B(-4;7;15)$

$\overline{BA} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ -10 \end{bmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(4)^2+(-5)^2+(-10)^2} =$

$= \sqrt{16+25+100} = \sqrt{141}$

б) $\bar{a}(-2;6)$ $\bar{b}(-4\sqrt{2};2;0)$

$\bar{c} = 4\bar{i} + \sqrt{2}\bar{j}$ и $\vec{d} = 4\vec{j} - 3\vec{k}$

$|\vec{a}| = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = \sqrt{4 \cdot 10} = 2\sqrt{10}$

$|\vec{b}| = \sqrt{(-4\sqrt{2})^2+(2)^2+(0)^2} = \sqrt{16 \cdot 2 + 4} = \sqrt{36} = 6$

$|\bar{c}| = \sqrt{(4)^2+(\sqrt{2})^2} = \sqrt{16+2} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$

$|\vec{d}| = \sqrt{(4)^2+(-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

1) Правило сложение векторов.

$(x_1 + x_2 + x_3; y_1 + y_2 + y_3; \ldots)$

2) Правило умножение вектора на число:

$\vec{v}(v_1; x_2) \Rightarrow \lambda\bar{v}(\lambda v_1; \lambda v_2; \lambda v_3)$

Пример 7

Даны векторы $\bar{a}(1;-2)$ и $\vec{b}(2;3)$

Найти: $2\bar{a}$, $\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{a}-\bar{b}$

$2\bar{a}=\begin{bmatrix}2\\-4\end{bmatrix}$; $\bar{a}+\bar{b}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$; $\bar{a}-b=\begin{bmatrix}-1\\-5\end{bmatrix}$

Пример 8

$\vec{a}(0;4;-7)$ $\vec{b}(7;-9;1)$

$3\bar{a}-2\bar{b}$ $\quad -\bar{a}+4\vec{b}$

$$\underset{3\bar{a}}{\begin{bmatrix}0\\12\\-21\end{bmatrix}}-\underset{2\bar{b}}{\begin{bmatrix}14\\-18\\2\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}-14\\30\\-23\end{bmatrix}$$

$$\underset{-\bar{a}}{\begin{bmatrix}0\\-4\\7\end{bmatrix}}+\underset{4\vec{b}}{\begin{bmatrix}28\\-36\\4\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}28\\-40\\11\end{bmatrix}$$

Пример 9

$\bar{a}(1;-2)$, $\bar{b}(2;0)$; $\bar{c}(-4;2)$

$3\bar{a}-5\bar{b}+\frac{1}{2}\bar{c}$ и $-2(\bar{a}-2\bar{c})+4\bar{b}$

$$\begin{bmatrix}3\\-6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}10\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9\\-5\end{bmatrix}$$

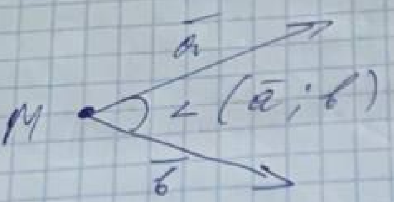
$$-2\begin{bmatrix}\overset{-18}{1+8}\\\overset{12}{-2-4}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}8\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10\\12\end{bmatrix}$$

Понятие скалярного пр-я

$$0^\circ \le \angle(\bar{a};\bar{b}) \le 180^\circ$$

либо

$$0 \le \angle(\bar{a};\bar{b}) \le \pi \text{ (в радианах)}$$



$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\angle(\bar{a};\bar{b})$$

Пример 1

$\bar{a}\cdot\bar{b} =$ [redacted] $2\cdot 5\cdot\cos\frac{\pi}{6} =$

$$= \cancel{10}^{\,5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}_{\,1}} = 5\sqrt{3}$$

Пример 2

$\bar{c}\bar{d} = 3\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\angle 135^\circ =$

$$= 3\sqrt{2}\cdot -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{6}{2} = -3$$

Вектор – это упорядоченный список чисел.

Dimensionality – размерность.

$\mathbb{R}^2$ – 2D => $[1; -2]$

$\mathbb{R}^3$ – 3D => $[3; 1; 4]$ $\quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3$

Вектора обозначаются либо ( ), либо [ ]

6D => $[3, 4, 6, 1, -4, 5]$

$\mathbb{R}^n$ – n координатных space

Легко можно перепутать

вектор элемента v_i или вектор $\mathbf{v}_i$

это понятно по жирности буквы.

Транспонирование векторов это преобразование, сопоставление солитп в чем.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4\,3\,0 \end{bmatrix}^{TT} = \begin{bmatrix} 4\,3\,0 \end{bmatrix}$$

Double-transpose.

$W = [1\ 2\ 3]^T$

можно записать так.

Vector addition and subtraction

вычитание

голова к голове

$V1 - V2$

негативное добавление

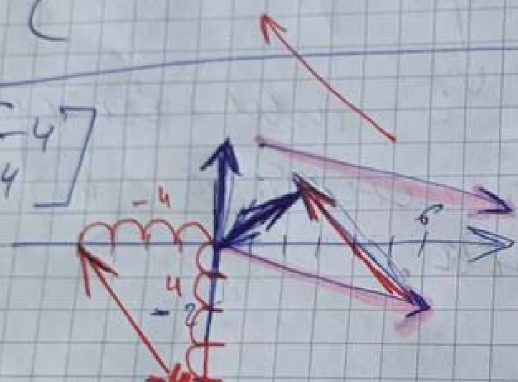
прибавление

tail to head

$V1 + V2$

$\vec{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\vec{a} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$



$\vec{a} + \vec{b}$

$\vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} 6 + (-4) \\ -2 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\vec{b} \times \vec{a}$