```python
import numpy as np

# Adicionar uma coluna de 1s para o termo de viés (intercepto)
X_train_qr = np.c_[np.ones(X_train.shape[0]), X_train]
X_test_qr = np.c_[np.ones(X_test.shape[0]), X_test]

# Aplicar a decomposição QR
Q, R = np.linalg.qr(X_train_qr)
theta_qr = np.linalg.solve(R, Q.T @ y_train)  # Resolver sistema linear

# Fazer previsões no conjunto de teste
y_pred_qr = X_test_qr @ theta_qr
```

```python
def qr(a, mode='reduced'):
    """
    Compute the qr factorization of a matrix.

    Factor the matrix `a` as *qr*, where `q` is orthonormal and `r` is
    upper-triangular.

    Parameters
    ----------
    a : array_like, shape (..., M, N)
        An array-like object with the dimensionality of at least 2.
    mode : {'reduced', 'complete', 'r', 'raw'}, optional
        If K = min(M, N), then

        * 'reduced'  : returns Q, R with dimensions (..., M, K), (..., K, N) (default)
        * 'complete' : returns Q, R with dimensions (..., M, M), (..., M, N)
```

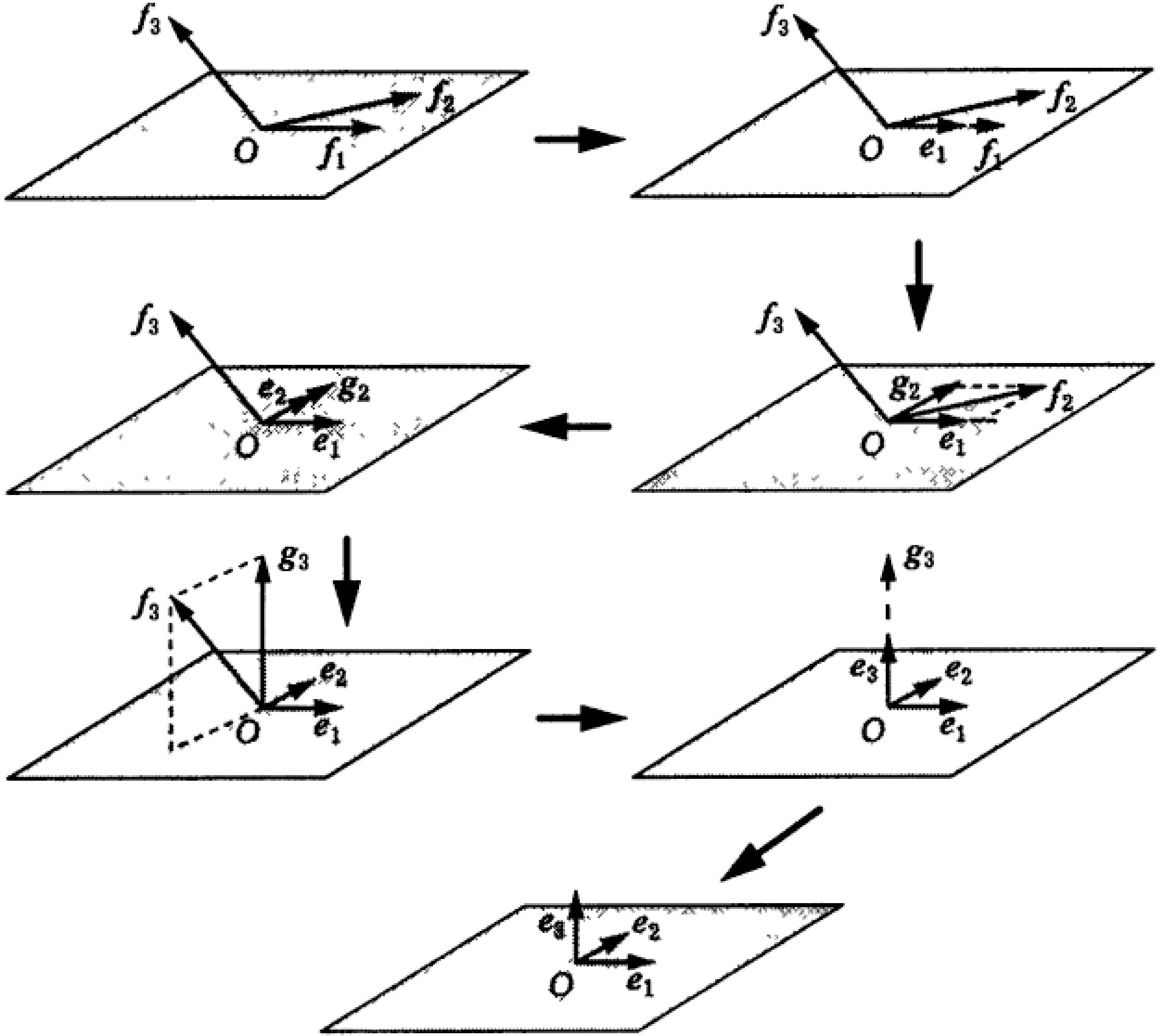
$$A = Q\,R,$$

QR-разложение – это метод разложения матрицы на произведение ортогональной матрицы Q и верхней треугольной матрицы R .

В каждом ли евклидовом пространстве существует ортонормированный базис?

ДА!

построить ортонормированный базис можно, отталкиваясь от некоторого исходного базиса, при помощи алгоритма, который называют процессом ортогонализации Грама - Шмидта



Грама — Шмидта — это алгоритм ортогонализации набора векторов в линейном пространстве. Он преобразует произвольный набор линейно независимых векторов в ортонормированный набор, сохраняя при этом линейную оболочку исходных векторов.

евклидово пространство = линейной пространство + скалярное произведение

геометрический смысл скалярного произведения(внутреннего произведения, точечного произведения)

Скалярным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется ЧИСЛО, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними

вектор длина

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\angle(\bar{a}; b)$$

Результат операции является ЧИСЛОМ: умножается вектор на вектор, получаем число.

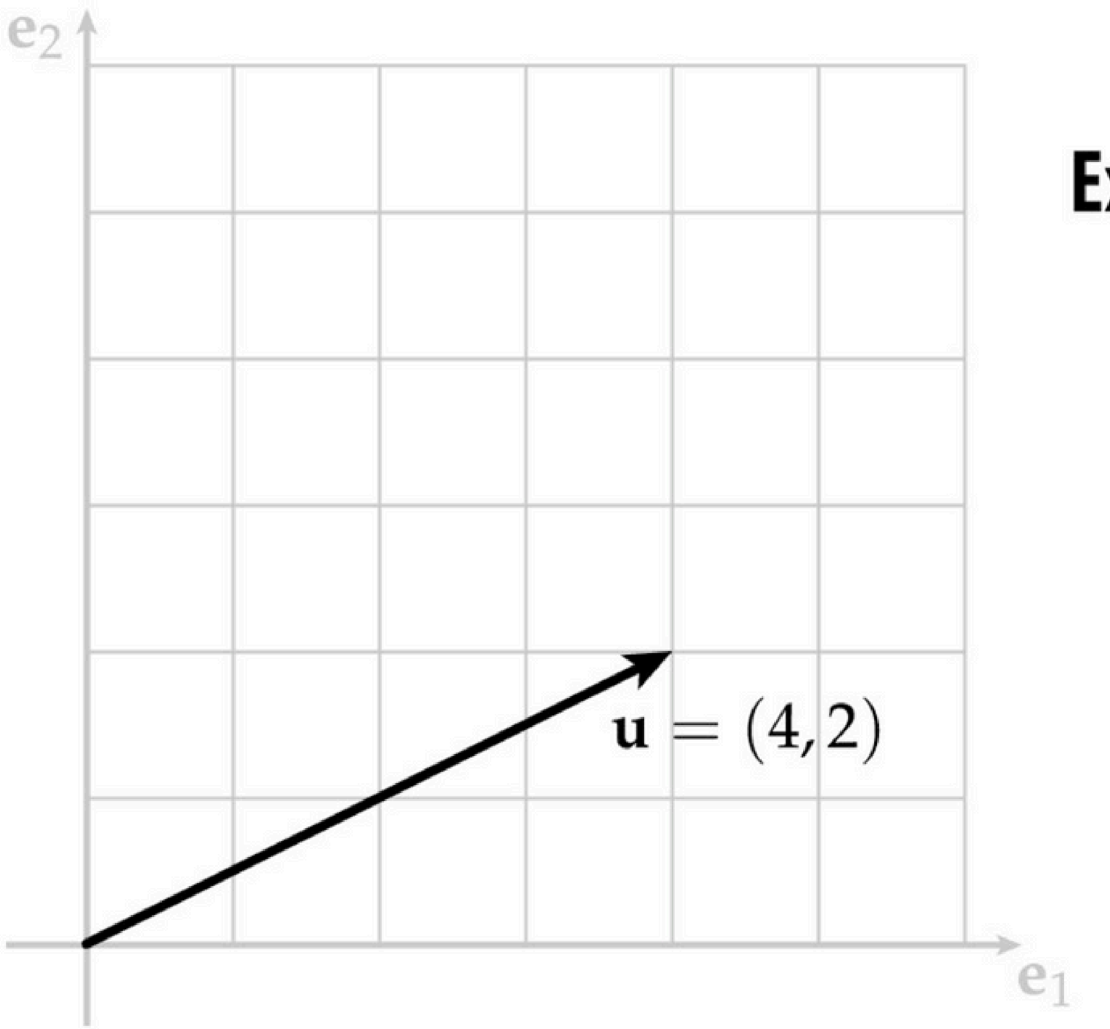
$\perp$ $|a||b|$ - числа, $\cos\angle$ - число

$\Rightarrow$ произведение $|a||b|\cos\angle(a,b)$ - число

Euclidean Norm in Cartesian Coordinates

- A standard norm is the so-called *Euclidean norm* of n-vectors:

$$|\mathbf{u}| = |(u_1, \ldots, u_n)| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$$



Example: $\mathbf{u} = (4,2)$

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{4^2 + 2^2}$$
$$= 2\sqrt{5}$$

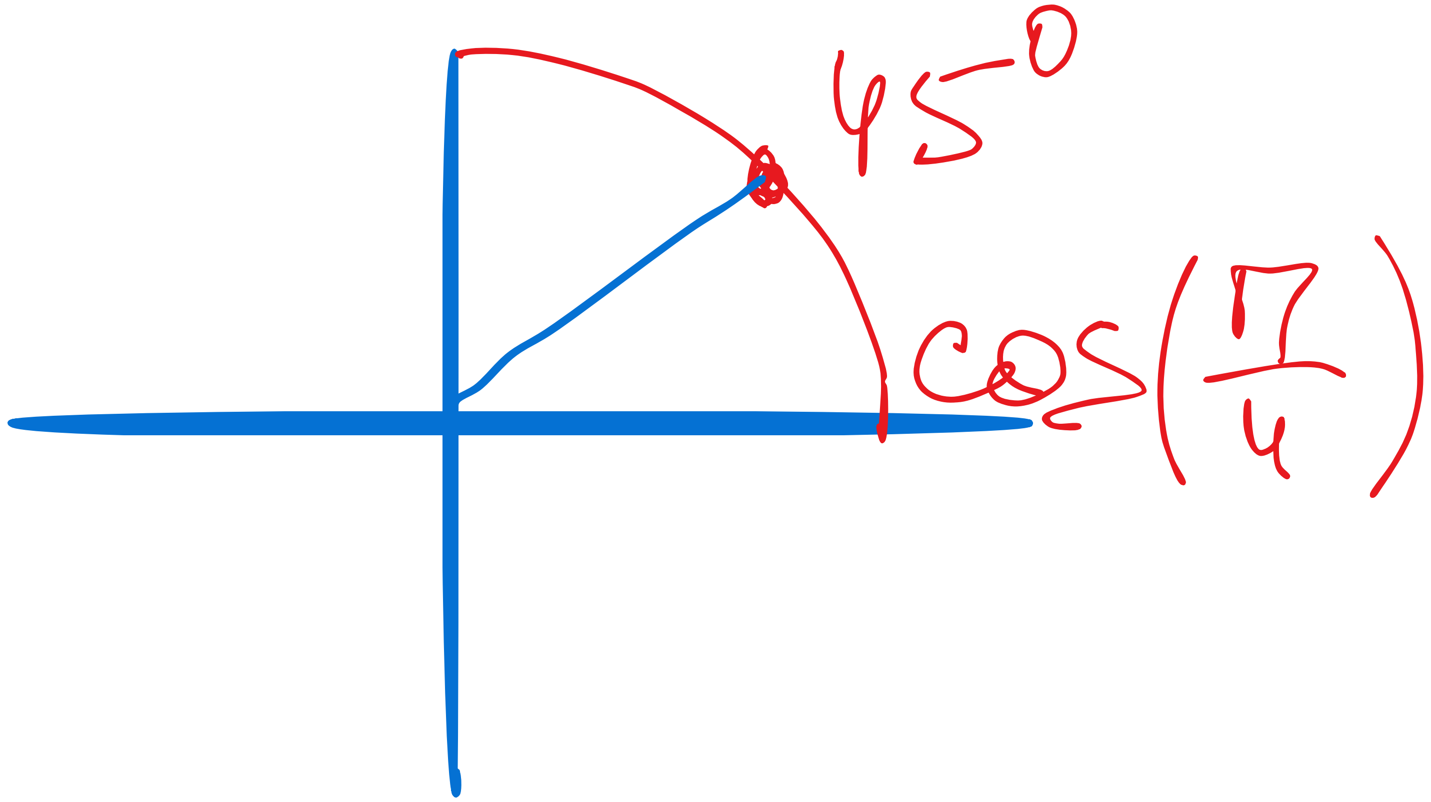
Ex

Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$

$$|a| = 5 \qquad |b| = 2 \qquad \angle(a, b) = \frac{\pi}{4}$$

$$\bar{a}\bar{b} = |a||b| \cdot \cos\angle(a,b) = 5 \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}}$$

(+)



Trigonometric Table

Degree	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	270^0	360^0
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

Угол между векторами

Длины ненулевых векторов всегда положительны:

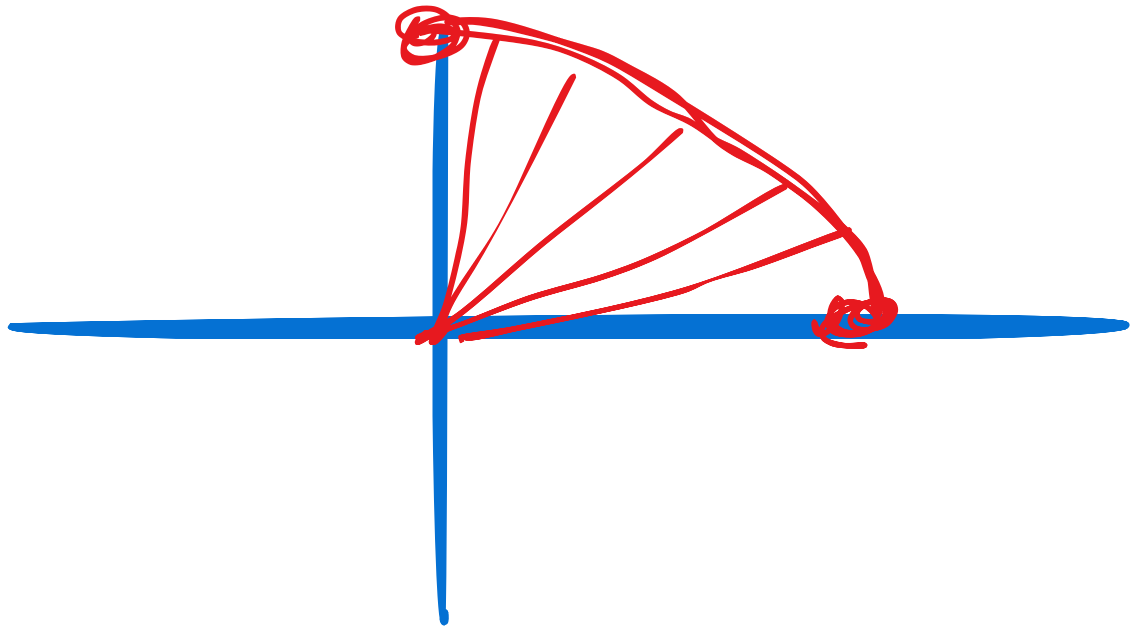
$|a| > 0$ $|b| > 0$, знак dot product зависит от cos

$|a||b| \cdot \cos\angle(a,b)$

1) $\perp$ угол между векторами острый

$0 < \angle(a,b) < \frac{\pi}{2}$

$\cos\angle(a,b) > 0$

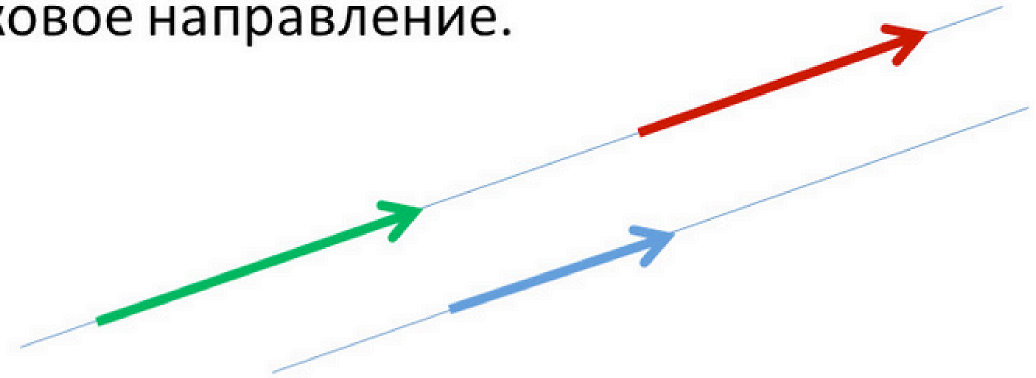


скалярное произведение будет положительным

Если векторы сонаправлены:

Сонаправленные векторы – коллинеарные векторы, имеющие одинаковое направление.

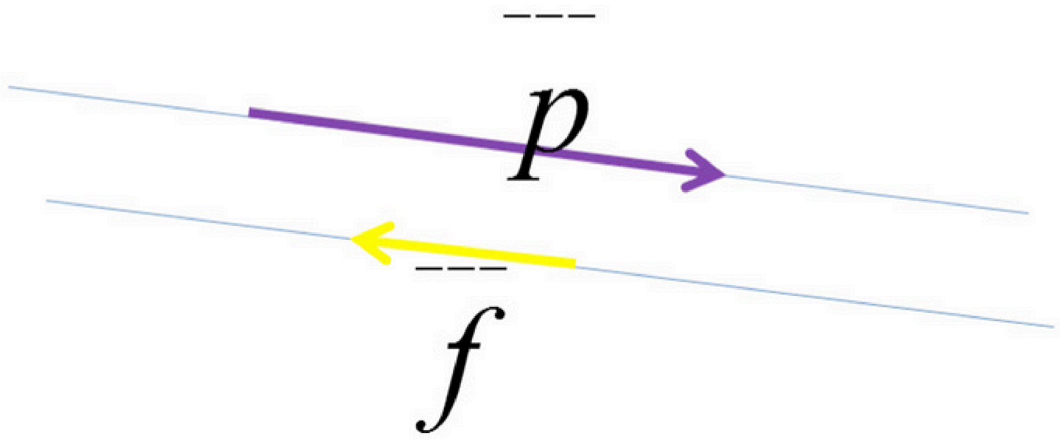
$$\overline{n} \uparrow\uparrow \overline{l}$$



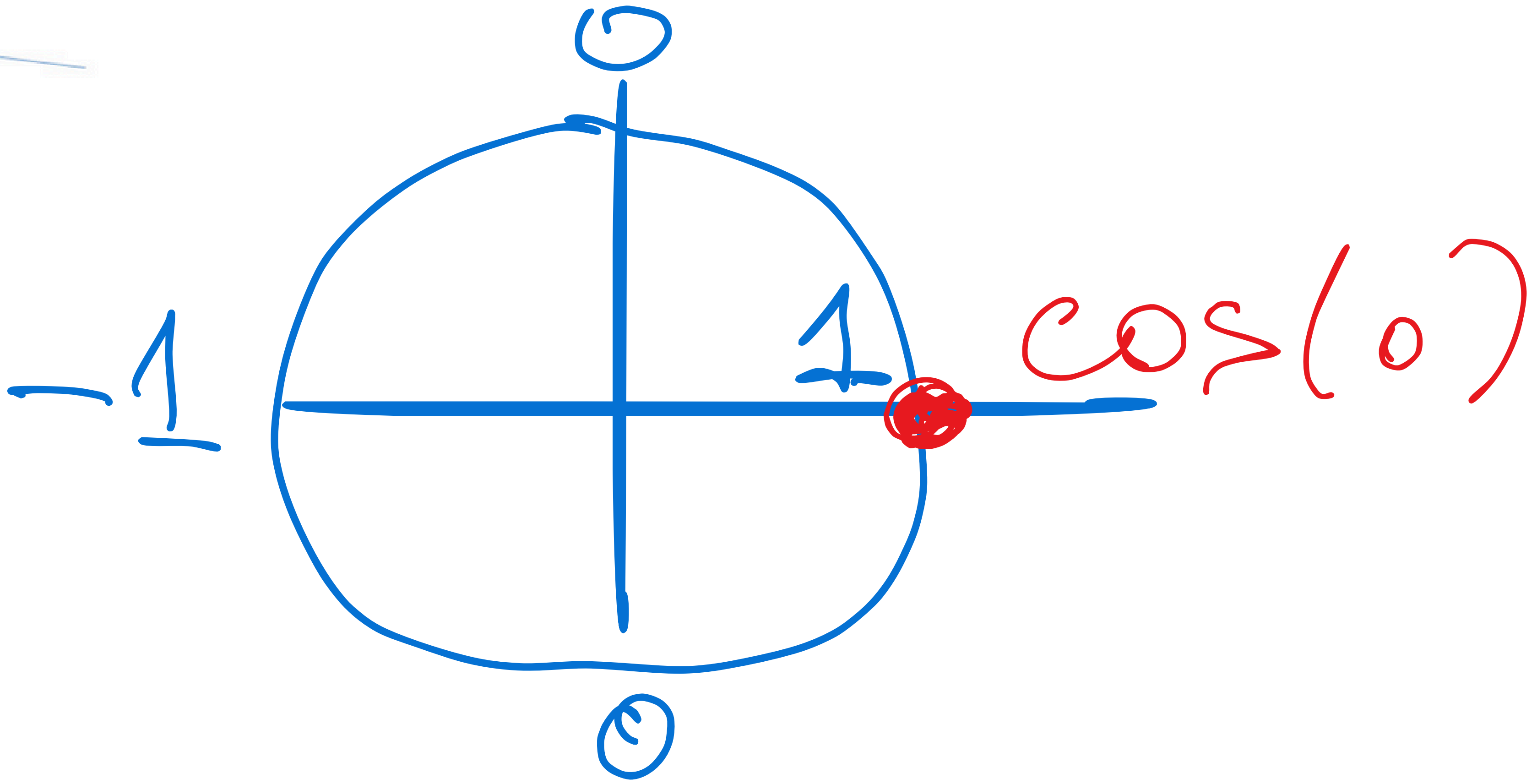
$$\longrightarrow \quad \longrightarrow \quad \angle 0^\circ$$

Противоположно направленные векторы – коллинеарные векторы, имеющие противоположное направление.

$$\overline{p} \uparrow\downarrow \overline{f}$$



$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |a|\,|b| \cdot \cancel{\cos(0)}^{\,1}$$



$$\angle(a, b) = 0^\circ$$

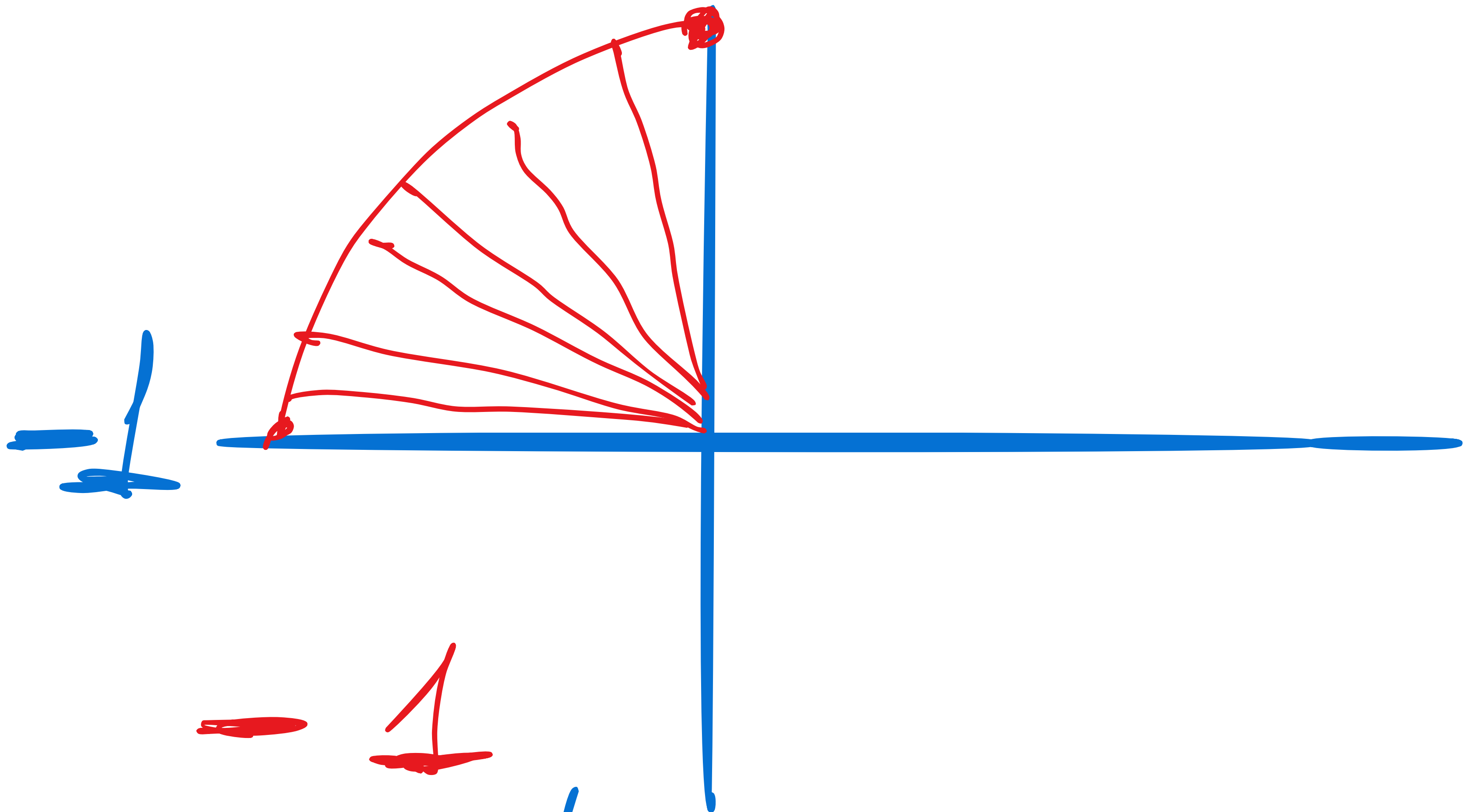
$$\cos(0^\circ) = 1$$

∠ угол между векторами тупой

$$\frac{\pi}{2} < \angle(a,b) < \pi$$

$$\cos\angle(a,b) < 0$$

$$\bar{a}\bar{b} < 0$$



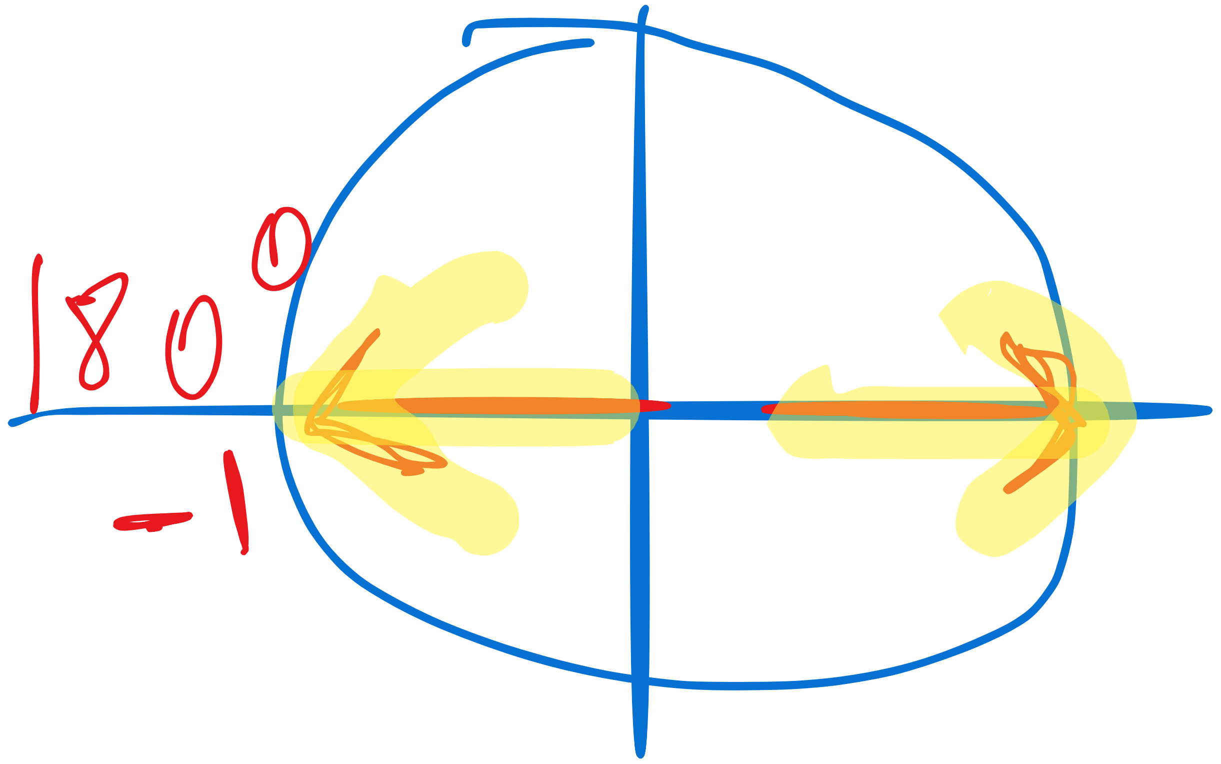
$$|a||b| \cdot \cos(180)$$

Если векторы противоположно направлены

угол будет развернутым $\angle(a,b) = \pi \ (180^\circ)$

$\cos(\pi) = -1$

$\bar{a}\cdot\bar{b} = |a||b|\cdot\overset{-1}{\cos(\pi)}$



$\bar{a}\bar{b} < 0$

Если , $\bar{a}\bar{b} > 0$

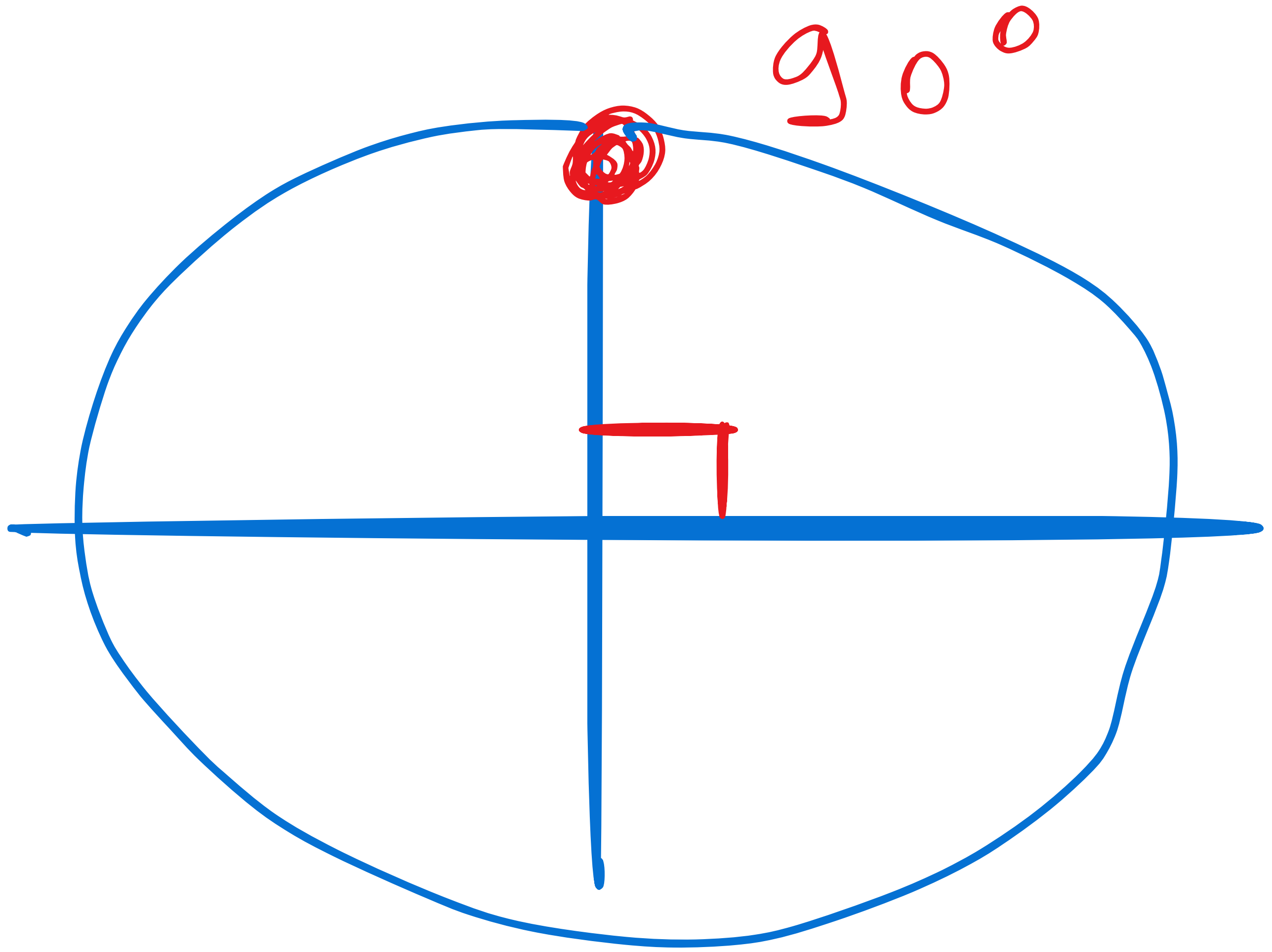
то угол между векторами острый,
например, векторы сонаправлены.

Если , $\bar{a}\bar{b} < 0$

то угол между данными векторами тупой,
например, векторы направлены противоположно.

$\perp$ угол - прямой

$$\angle(a,b) = \frac{\pi}{2} \ (90^\circ)$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\bar{a}\bar{b} = 0 \Leftrightarrow a \perp b$$

$$|a||b| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\bar{a}\bar{b} = 0 \Rightarrow \bar{a}\bar{b} = 0 \text{ то } \angle(a,b) = \frac{\pi}{2} \ (90^\circ)$$

скалярное произведение двух векторов равно нулю тогда и только тогда, когда данные векторы ортогональны.

Скалярный квадрат вектора

$$\bar{a}\,\bar{a} = |a||a| = |a|^2$$

скалярный квадрат вектора равен квадрату длины вектора

$$|a| = \sqrt{\bar{a}^2}$$

Алгебраический смысл скалярного произведения

Скалярное произведение через компоненты

The Dot Product

Definition

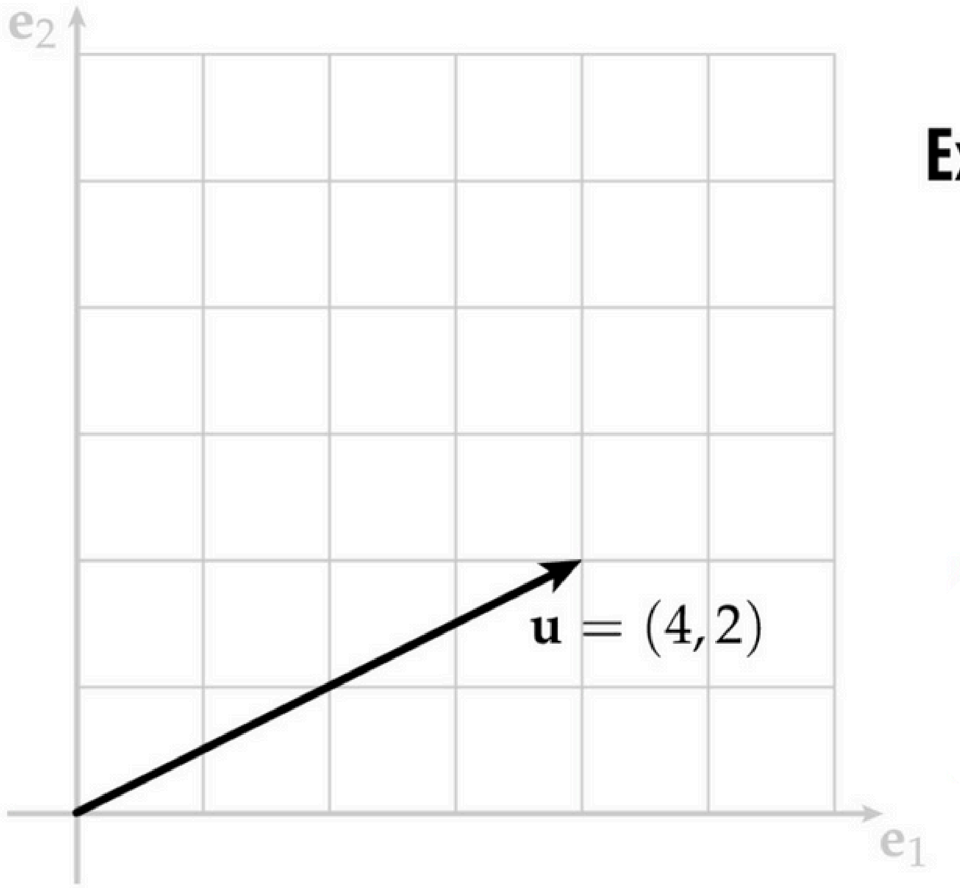
$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \quad \mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$$

$$\boxed{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$$

Euclidean Norm in Cartesian Coordinates

- A standard norm is the so-called *Euclidean norm* of n-vectors:

$$|\mathbf{u}| = |(u_1, \ldots, u_n)| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$$



Example: $\mathbf{u} = (4, 2)$

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

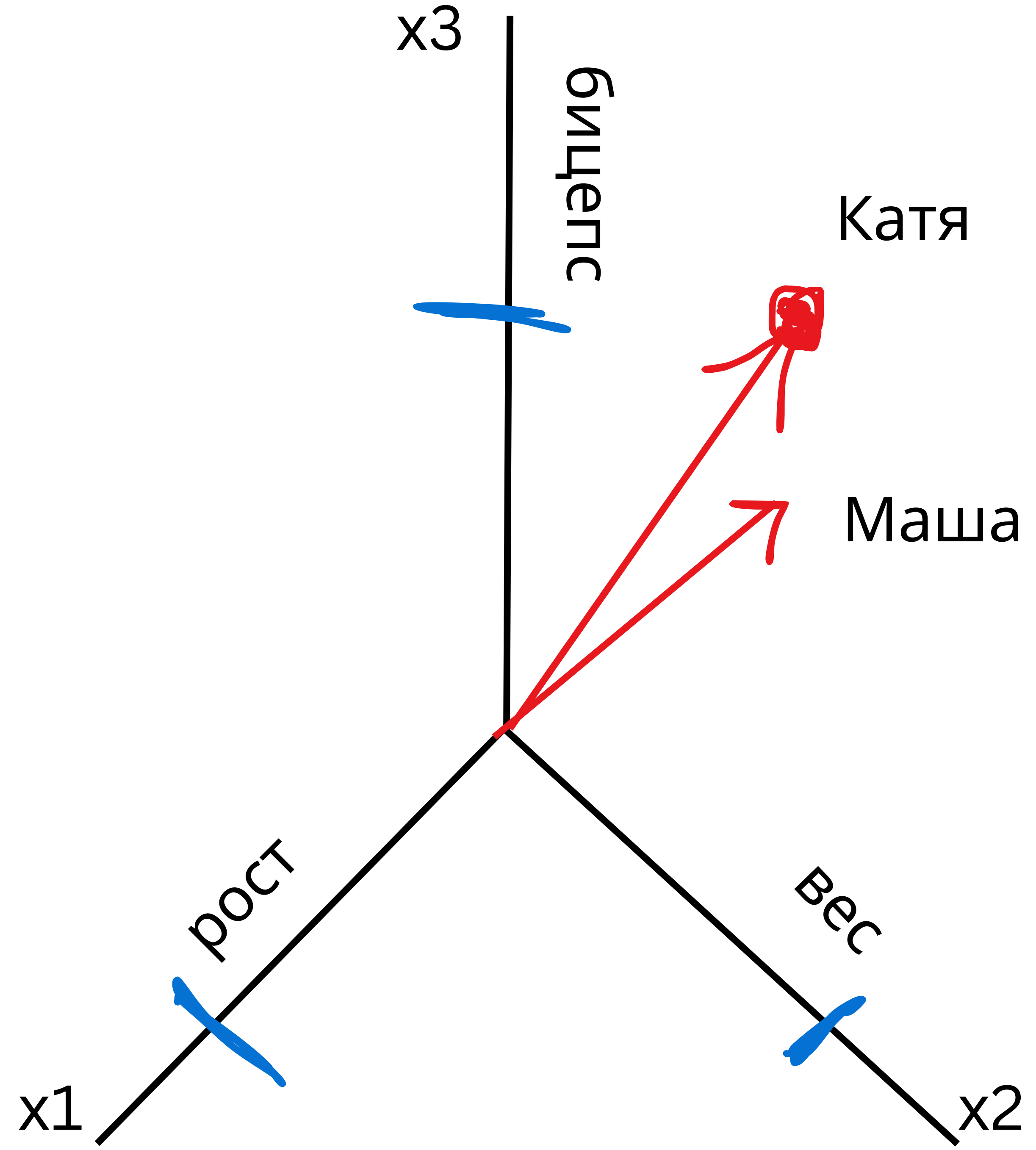
<a,b> - скалярное произведение

Свойства скалярного произведения

$ab=ba$ – переместительный или коммутативный закон

$(a+b)c=ac+bc$ дистрибутивный закон скалярного произведения

$(\lambda a)b=\lambda(ab)$ ассоциативный закон скалярного произведения относительно множителя (константу можно вынести из скалярного произведения)

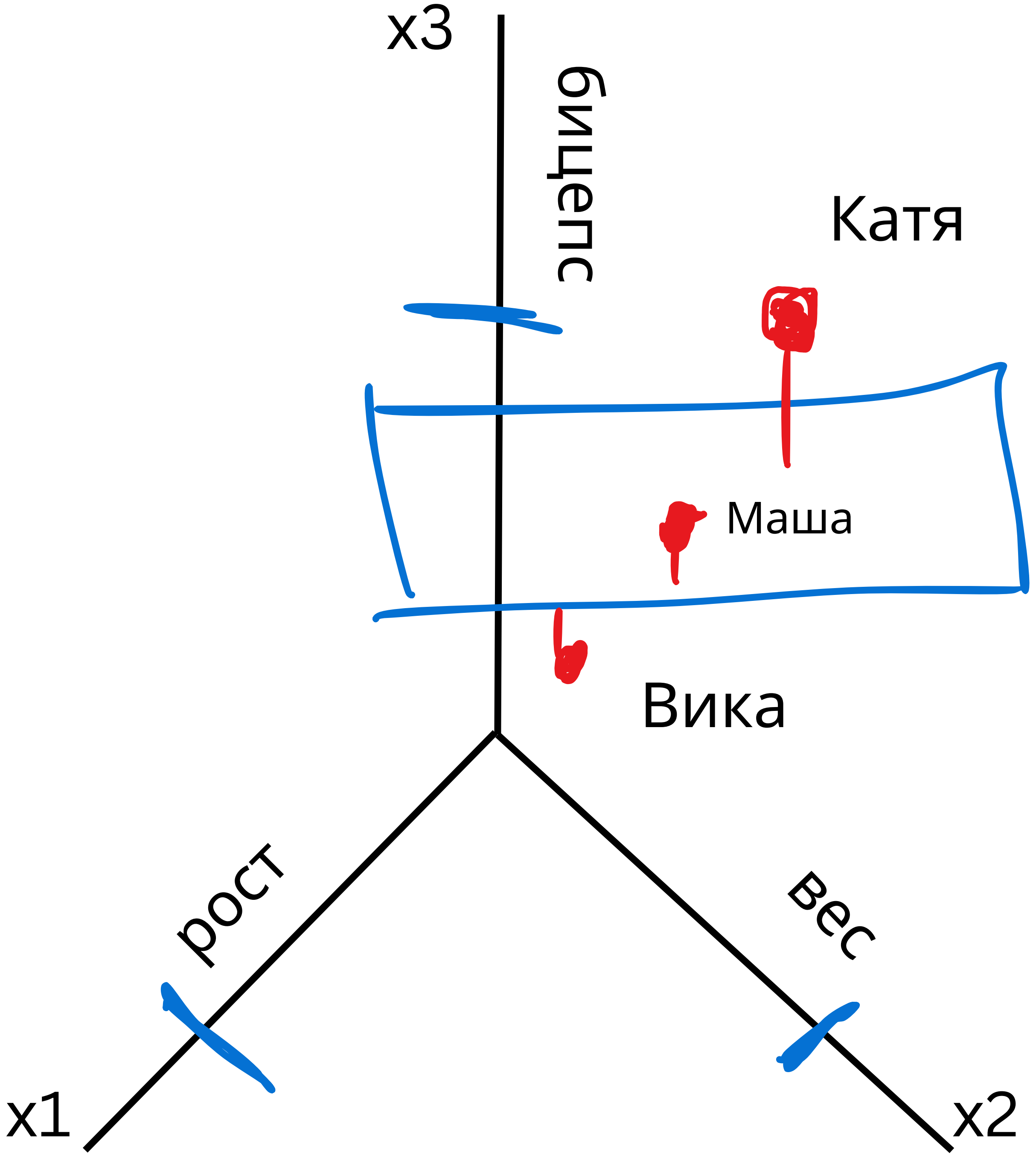


$$y = w1*x1 + w2*x2 + w3*x3 + w0$$

	x1	x2	**x3**	**y**
Катя	1.70	55	37	
Маша	1.68	54	35	
Вика	1.65	53	33	

x1 - рост
x2 - вес
x3 - объем бицепса

Катя $K = \begin{bmatrix} 170 \\ 55 \\ 37 \end{bmatrix}$ $\quad W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$ $\quad K^T W$ = прогноз (число) Y_PRed



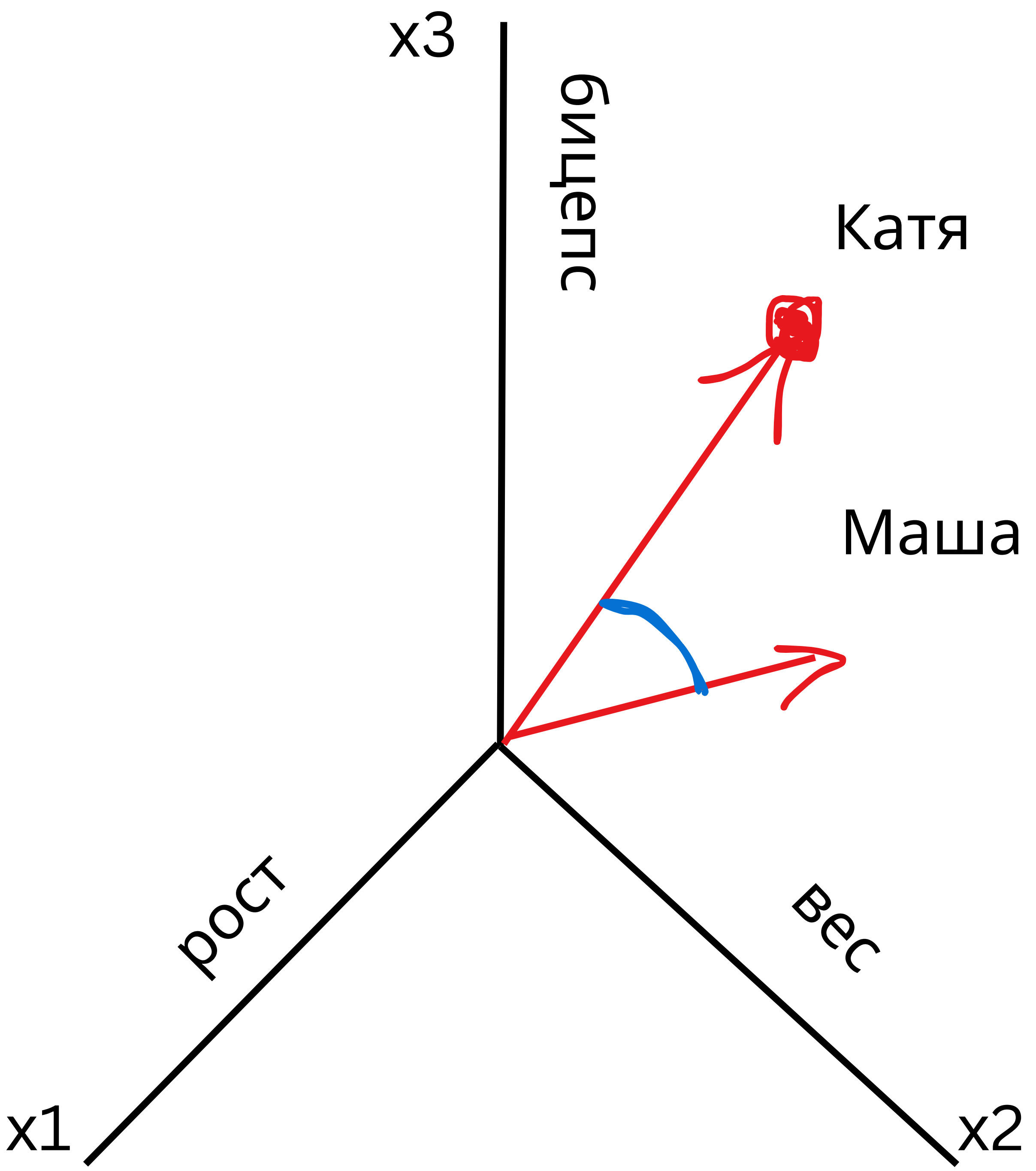
```
data = np.array([
  [1.70, 55, 37],
  [1.68, 54, 35],
  [1.65, 53, 33]
])
```

```
к = np.array([1.70, 55, 37])
w = np.array([15.76, 5.76, 3.54])
```

перемножим вручную

1.70 * 15.76 + 55 * 5.76 +37*3.54

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|a||b|}$$



даны два вектора (данные двух человек)
нужно понять, насколько они схожи

$$\cos(\theta) = \frac{k \cdot m}{\|k\| \cdot \|m\|}$$

```
к = np.array([1.70, 55, 37])
m = np.array([1.68, 54, 35])
```

Скалярное произведение:

$$k \cdot m = 1.70 \times 1.68 + 55 \times 54 + 37 \times 35 = 2.856 + 2970 + 1295 = 4267.856$$

```
numerator = np.dot(k, m)
```

Длины векторов:

$$\|k\| = \sqrt{1.70^2 + 55^2 + 37^2} = \sqrt{2.89 + 3025 + 1369} = \sqrt{4396.89} \approx 66.31$$

$$\|m\| = \sqrt{1.68^2 + 54^2 + 35^2} = \sqrt{2.8224 + 2916 + 1225} = \sqrt{4143.8224} \approx 64.37$$

```
k_norm = np.linalg.norm(k)
m_norm = np.linalg.norm(m)
```

Косинус угла:

$$\cos(\theta) = \frac{4267.856}{66.31 \times 64.37} \approx \frac{4267.856}{4268.3747} \approx 0.99988$$

```
denominator = k_norm * m_norm

cosine = numerator/denominator
```

arccos(0.99988) = $\alpha^0 = \alpha_{\text{рад}} \dfrac{180^0}{\pi}$ = 1.3

при построении рекомендательных систем для сопутствующих товаров в интернет-магазине, нам важно знать косинусное сходство как проверить векторы на ортогональность

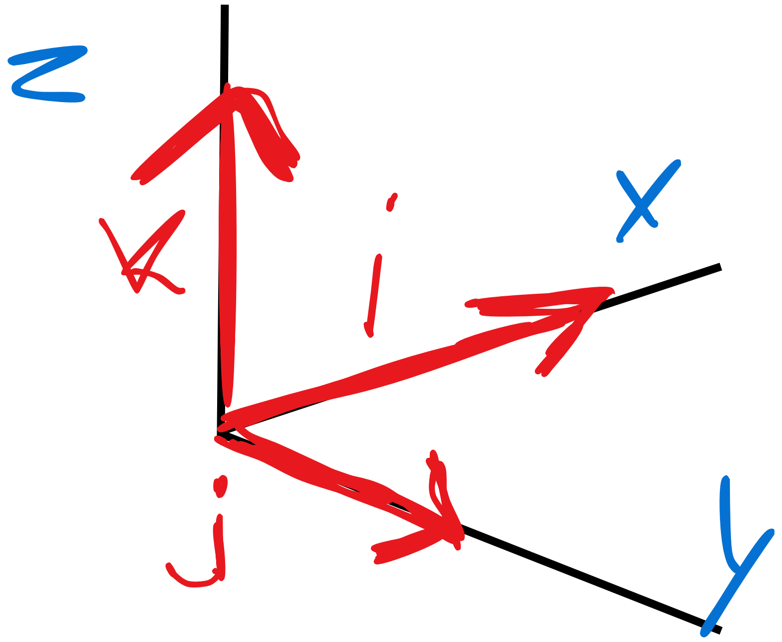
$$V \perp W \iff v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0$$

векторы и ортогональны тогда и только тогда, когда $\bar{v} \cdot \bar{w} = 0$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) = -2 + 3 - 1 = 0$$

Если у нас есть несколько векторов, и каждая пара из них ортогональна, то такую систему называют ортогональной системой векторов



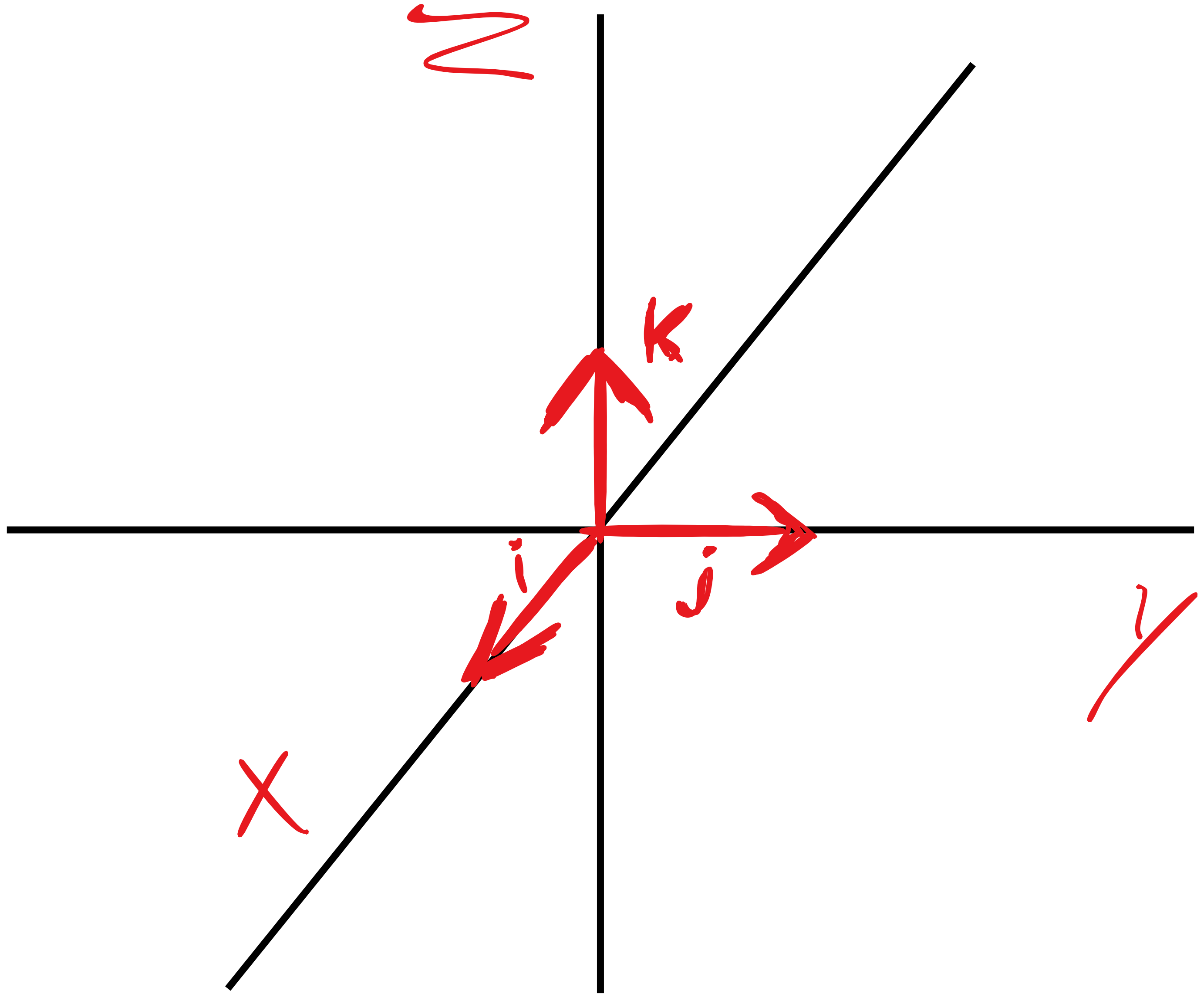
R^3

Если векторы не только ортогональны, но и имеют длину (норму) равную 1, то они называются ортонормированными

система:
является ортонормированной

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

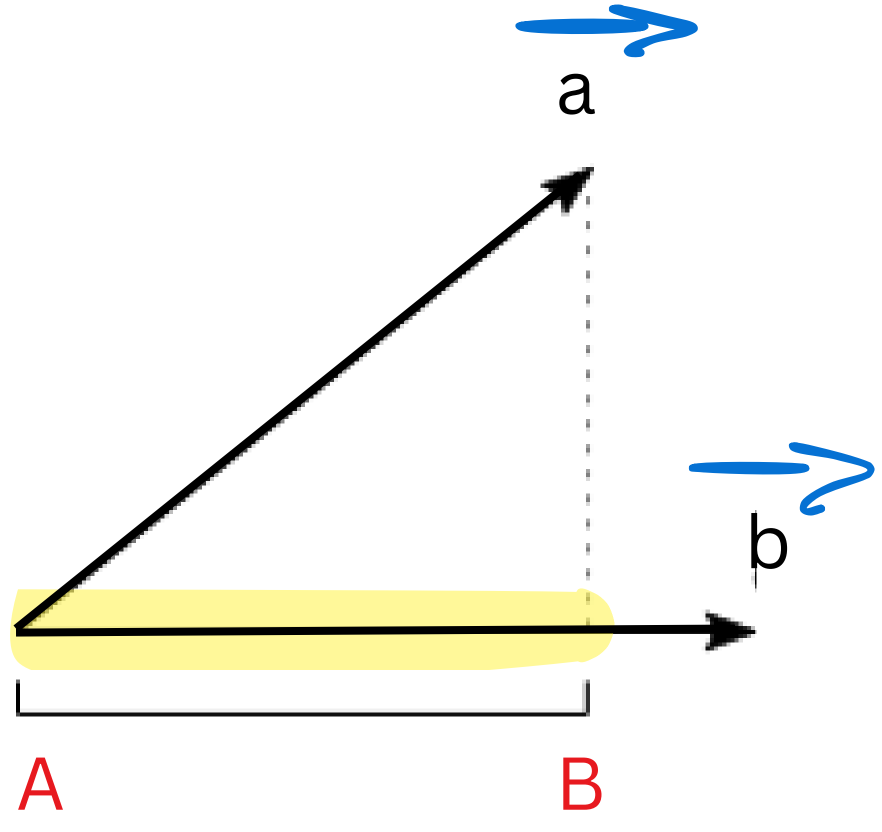
$e_1 = i \qquad e_2 = j \qquad e_3 = k$



Зачем нужны ортогональные(ортонормированные) векторы?

Используются в QR-разложении

Как найти проекцию вектора на вектор?



из конца вектора **a** опустим перпендикуляр на вектор **b**

на вектор **a** перпендикулярно сверху падают лучи света.

отрезок **AB** будет «тенью» вектора

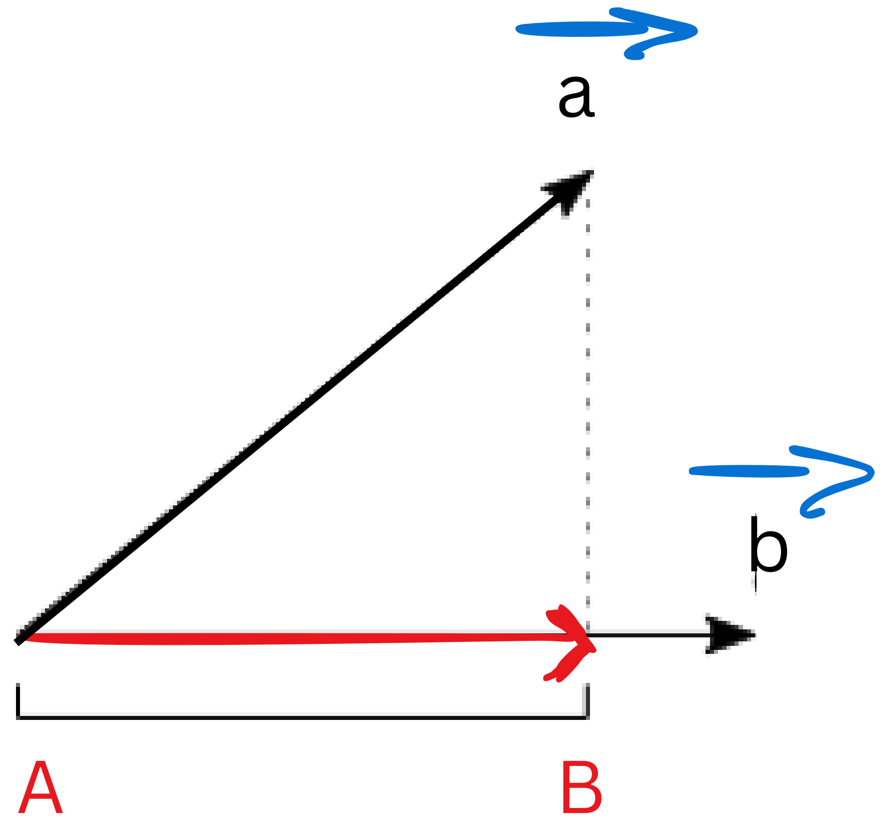
Проекцией вектора **a** на вектор **b** является **ДЛИНА отрезка AB**

Проекция одного вектора на другой

обозначается следующим образом: $project_{\bar{b}}\bar{a}$

Проекция – это вектор (показывает ДЛИНУ)

Результатом проекции одного вектора на другой является вектор (имеет направление и длину).

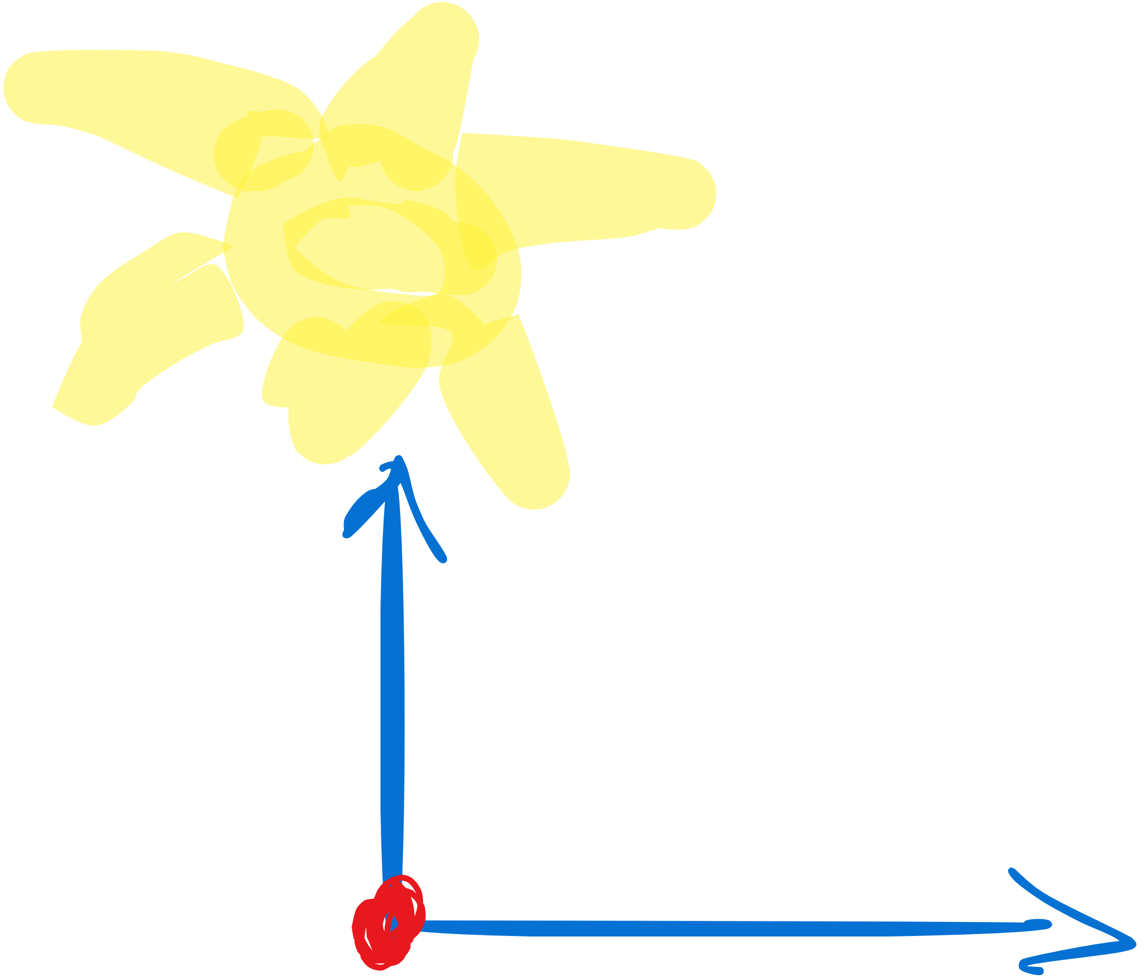


$$\vec{k} = project_{\vec{b}}\,\vec{a}$$

Если угол между векторами острый то проекция > 0

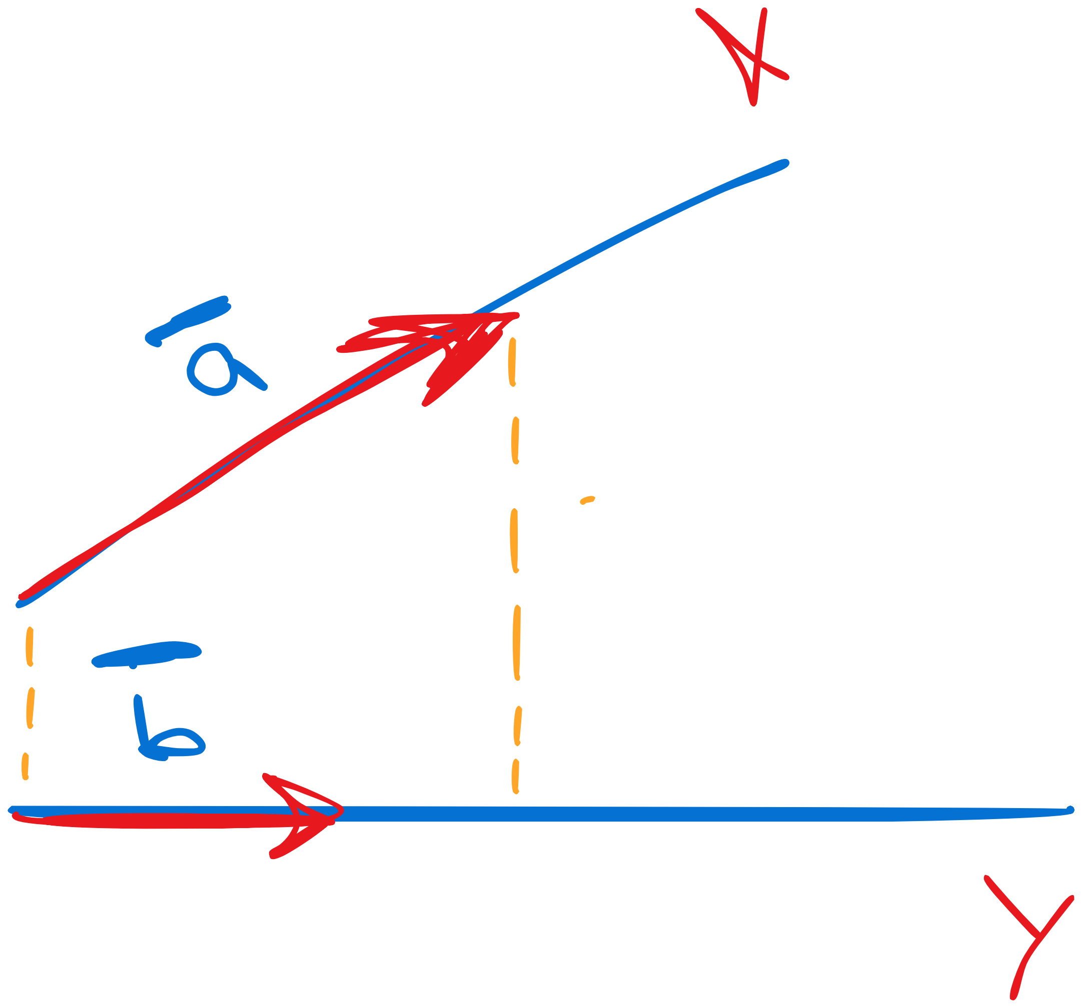
Если угол между векторами тупой то проекция < 0

Если векторы ортогональны, то (проекцией является точка, размеры которой считаются нулевыми)



что произойдёт, если вектор **b** будет «коротким»?

вектор **a** будет проецироваться на направление вектора **b**, на прямую, содержащую вектор **b**



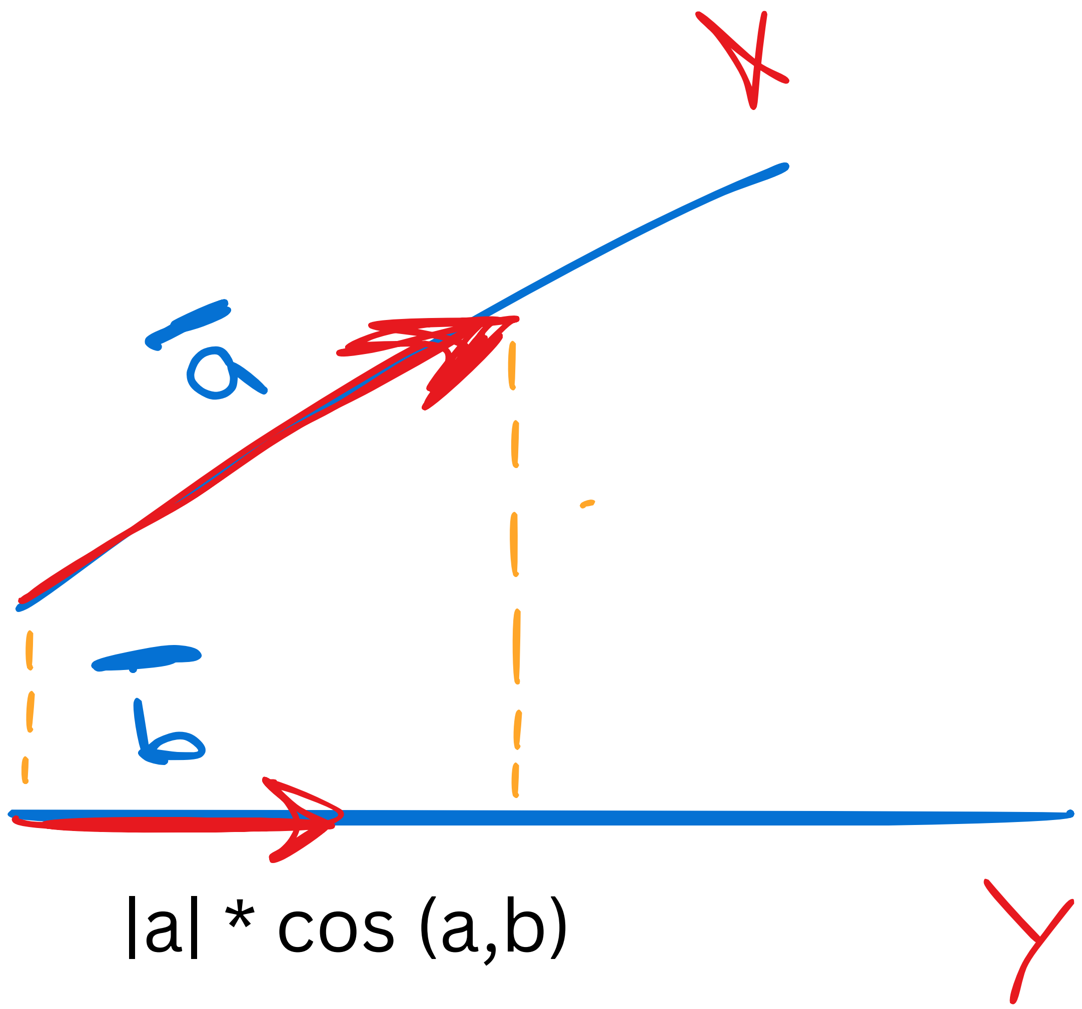
проекция вектора **a** на любой ненулевой сонаправленный вектор:

$$Projection_{\bar{b}}\bar{a} = Projection_{\lambda\bar{b}}\bar{a} \qquad \lambda > 0$$

если векторы направлены противоположно

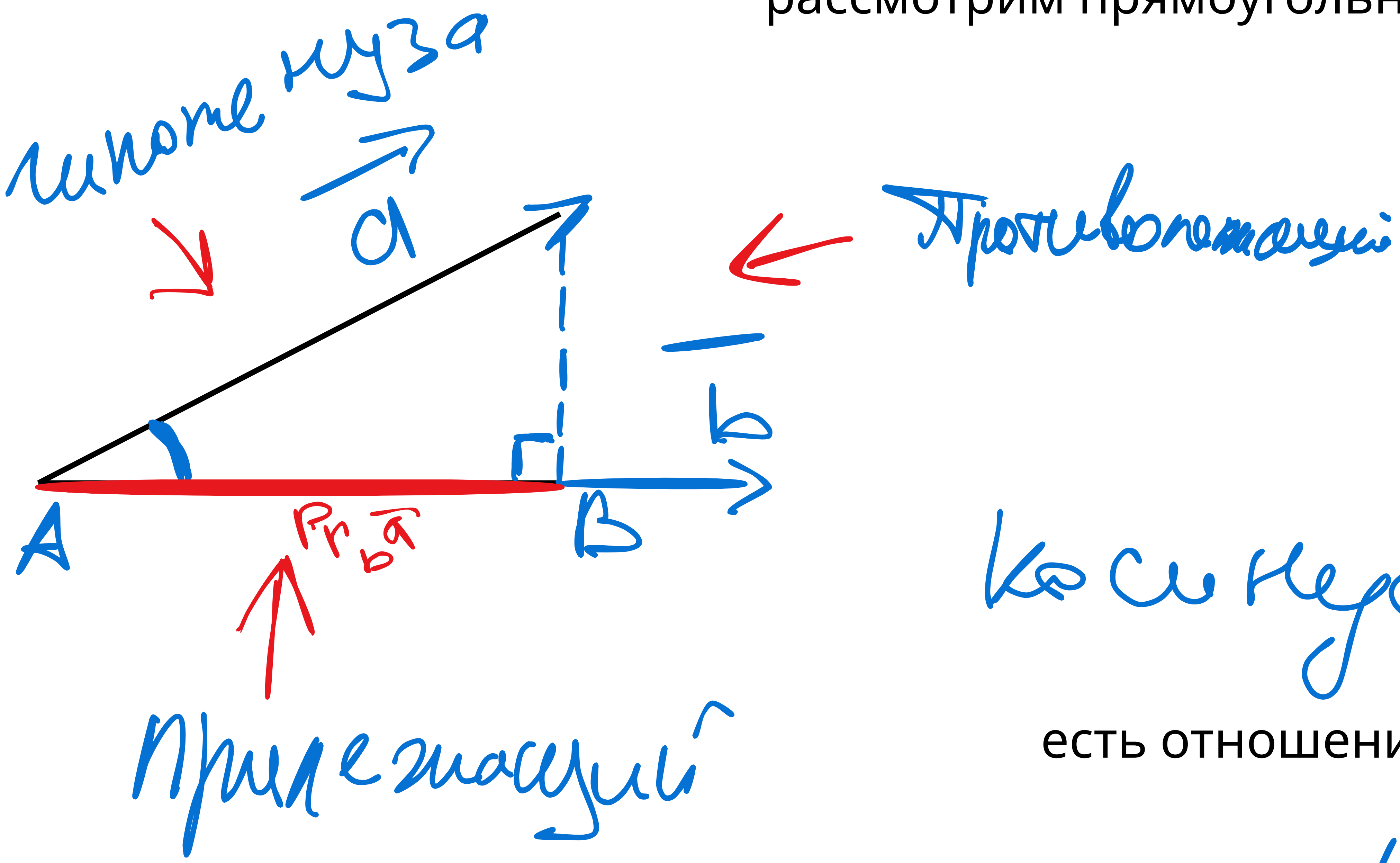
$$Projection_{\bar{b}}\bar{a} = -Projection_{\lambda\bar{b}}\bar{a} \qquad \lambda < 0$$

длина проекции равна произведению нормы вектора **a** на косинус угла



|a| * cos (a,b)

рассмотрим прямоугольный треугольник



косинус $\angle A = \angle(a,b)$

есть отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$\cos\angle(a,b) = \frac{|AB|}{|a|} = \frac{Pr_{\bar{b}}\bar{a}}{|a|}$$

Формула косинуса угла:

$$\cos\angle(a,b) = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|a||b|} \Longrightarrow \frac{Pr_{\bar{b}}\bar{a}}{|a|} = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|a||b|}$$

$$\frac{Пр_{\bar b}\bar a}{\cancel{|a|}} = \frac{\bar a\bar b}{\cancel{|a|}\,|b|} \quad \Big|\; |a|$$

Умножим на норму **a**

$$Пр_{\bar b}\bar a = \frac{\bar a\bar b}{|b|} \quad \Big|\; \frac{b}{|b|}$$

Вычисление длины проекции одного вектора на другой

Умножим на единичный вектор **b**

$$Пр_{\bar b}\bar a = \frac{\bar a\bar b}{|b||b|}\cdot\bar b \Longrightarrow \frac{\bar a\bar b}{\bar b\cdot\bar b}\cdot\bar b$$

Вычисление проекции одного вектора на другой

Если b – единичный вектор = b/|b|

$$Пр_{\bar b}\bar a = (\bar a\bar b)\cdot\bar b$$

Вычисление проекции вектора на единичный вектор

квадрат длины вектора равен его скалярному произведению на самого себя

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{proj}_{\vec{b}}\vec{a} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \right) \vec{b}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 3$$
$$\|\vec{b}\|^2 = 1^2 + 0^2 = 1$$
$$\text{proj}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{3}{1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$